

Bevezető:

Néhány egyszerű példa az alapfogalmak megértéséhez:

Pl.

Mutassuk meg, hogy

$$y = e^x \int_0^x e^{t^2} dt + 3 e^x$$

megoldása az alábbi differenciálegyenletnek!

$$y' - y = e^{x+x^2}$$

Megoldás:

(Beszéljünk róla, hogy ez egy elsőrendű differenciálegyenlet, mert ... Másrészt azt, hogy a függvény megoldása a differenciálegyenletnek, mondjuk úgy is, hogy kielégíti a differenciálegyenletet.)

A megadott függvény deriválható, mert deriválható függvények összetétele. (Hívjuk fel a figyelmet az integrálfüggvényre, emlékeztessünk az integrálszámítás II. alaptételére is, az integrandusz folytonos!)

$$y' = (e^x)' \cdot \int_0^x e^{t^2} dt + e^x \cdot \left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)' + (3 e^x)' = e^x \cdot \int_0^x e^{t^2} dt + e^x \cdot e^{x^2} + 3 e^x$$

Behelyettesítve a differenciálegyenlet bal oldalába y -t és y' -öt:

$$y' - y = e^x \cdot e^{x^2} = e^{x+x^2}$$

Tehát valóban a jobb oldalt kaptuk.

Pl.

$$y'' = e^{-3x} + 2x$$

- a) Adjuk meg a differenciálegyenlet általános megoldását!
- b) Adjuk meg azt a partikuláris megoldást, mely eleget tesz az $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$ kezdeti feltételeknek!

Megoldás:

a) A differenciálegyenletből: $y' = -\frac{1}{3} e^{-3x} + x^2 + C_1$

Ebből az általános megoldás: $y = \frac{1}{9} e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + C_1 x + C_2$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $y(0) = 1$: a megoldásban x helyére 0-át, y helyére 1-et helyettesítve:

$$1 = \frac{1}{9} + C_2 \implies C_2 = \frac{8}{9}$$

$y'(0) = 2$: az y' -re kapott egyenletben elvégezve a helyettesítést ($x = 0$, $y' = 2$)

$$2 = -\frac{1}{3} + C_1 \implies C_1 = \frac{7}{3}$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = \frac{1}{9} e^{-3x} + \frac{x^3}{3} + \frac{7}{3} x + \frac{8}{9}$$

A továbbiakban nem leszek ilyen részletes, csak szerettem volna jelezni, hogy milyen részletességre gondolok.

Szétválasztható változójú differenciálegyenletek:

Foglaljuk össze a lényegét a példamegoldás előtt.

Pl.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{x}{y} e^{2x-3y^2}, \quad y \neq 0$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{e^{-3y^2}}{y} x e^{2x} \\ \implies \underbrace{\int \frac{y}{e^{-3y^2}} dy}_{\frac{1}{6} \int 6y e^{3y^2} dy} &= \underbrace{\int x e^{2x} dx}_{\text{parciális integrálás}} \\ &\dots \end{aligned}$$

Így a megoldás:

$$\frac{1}{6} e^{3y^2} = \frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Nem kell erőltetni az y -ra való kifejezést. De, ha kifejezzük, akkor ne felejtsük el a $\pm$ -t! És beszéljünk róla, hogy adott $y(x_0) = y_0$ kezdeti érték probléma megoldásánál természetesen csak az egyik előjel szerepel majd, hiszen a megoldás egyértelmű, mert $y_0 > 0$, vagy $y_0 < 0$.

Pl.

$$y' = \frac{y-2}{xy}, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0$$

a) Oldja meg a differenciálegyenletet!

b) Oldja meg az $y(1) = 2$, $y(1) = 3$, illetve az $y(-1) = -3$ kezdeti érték problémákat!

Megoldás:

a) $y \equiv 2$ megoldás. (Persze az $x > 0$, vagy $x < 0$ része!)

(Jó lenne felrajzolni azokat a síkrészeket, ahova eső kezdeti érték probléma egyértelműen megoldható)

Ha $y \neq 2$:

$$\int \underbrace{\frac{y}{y-2}}_{1+\frac{2}{y-2}} dy = \int \frac{1}{x} dx$$

Innen a megoldás:

$$y + 2 \ln |y - 2| = \ln |x| + C$$

b) $y(1) = 2$: $y \equiv 2$

$$y(1) = 3: \quad \dots \quad y + 2 \ln(y - 2) = \ln x + 3$$

$$y(-1) = -3: \quad \dots \quad y + 2 \ln(2 - y) = \ln(-x) - 3 + 2 \ln 5$$

Hívjuk fel a figyelmet az abszolút érték jelek elhagyására!

Pl.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{y^2 + 4y + 9}{(x-1)(x+5)}, \quad x \neq 1, \quad x \neq -5$$

Megoldás:

$$\int \frac{1}{(y+2)^2+5} dy = \int \frac{1}{(x-1)(x+5)} dx$$

$\vdots$

$$\frac{1}{5} \sqrt{5} \operatorname{arctg} \frac{y+2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{6} (\ln |x-1| - \ln |x+5|) + C$$

Pl.

A rádium bomlási sebessége arányos a pillanatnyi rádiummennyiséggel.

Tudjuk, hogy a rádium felezési ideje 1600 év.

A kiindulási anyag mennyiségének hány százaléka bomlik fel 100 év alatt?

Megoldás:

Jelöljük $R(t)$ -vel a rádium mennyiségét a t időpontban, k -val az arányossági tényezőt (pozitívnak választjuk).

A kapott differenciálegyenlet:

$$\frac{dR}{dt} = -k R$$

(A negatív előjel mutatja, hogy a bomlás következtében a rádium mennyisége csökken.)

A szétválasztható változójú differenciálegyenlet megoldása: $\dots R = C e^{-k t}$

Ha a $t = 0$ időpontban a kiindulási anyag mennyisége R_0 , tehát az $R(0) = R_0$ kezdeti érték problémánk van:

$$R_0 = C e^{-k \cdot 0} \implies C = R_0$$

Tehát a keresett partikuláris megoldás: $R = R_0 e^{-k t}$.

Mivel ismerjük a felezési időt, meghatározható a k arányossági tényező:

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-k \cdot 1600} \implies k = \frac{\ln 2}{1600}$$

Tehát a rádium mennyisége az idő függvényében:

$$R(t) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{1600} t}$$

Így a 100 év múlva megmaradt mennyiség:

$$R(100) = R_0 e^{-\frac{\ln 2}{16}} = R_0 e^{-0,0433} \implies \frac{R(100)}{R_0} = e^{-0,0433} = 0,958$$

Vagyis 95,8%, tehát az eredeti mennyiség 4,2%-a bomlott el.

Akinek marad ideje, válogasson az alábbi példákból!

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1. $y' = (3x - 1)^5 (y^2 - 4y)$

Megoldás:

$y \equiv 0$ és $y \equiv 4$ megoldás. Egyébként:

$$\int \frac{1}{y(y-4)} dy = \int (3x-1)^5 dx$$

⋮

$$\frac{1}{4} (-\ln |y| + \ln |y-4|) = \frac{1}{3} \frac{(3x-1)^6}{6} + C$$

Keresse meg az $y(0) = 2$, illetve az $y(0) = 4$ kezdeti feltételeket kielégítő megoldásokat!

...

2. $y' = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} y} x (2x^2 + 1)^6$

Megoldás:

$y \equiv 0$ megoldás. Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\operatorname{ch} y}{\operatorname{sh} y} dy = \int x (2x^2 + 1)^6 dx$$

$$\ln |\operatorname{sh} y| = \frac{1}{4} \frac{(2x^2 + 1)^7}{7} + C$$

$$3. \quad \boxed{y' = (\operatorname{ctg} y) \ln(x-2), \quad y(3) = \pi/3, \text{ illetve } y(3) = \pi/2}$$

Megoldás:

$$x > 2, \quad y \neq k\pi$$

$$y \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{megoldás. Egyébként:}$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos y} dy = \int \ln(x-2) dx$$

$$\frac{f'}{f} \text{ alakú} \qquad \text{parciális integrálás}$$

...

$$-\ln|\cos y| = x \ln(x-2) - x - 2 \ln(x-2) + C$$

$$y(3) = \pi/3 : \quad \dots \quad C = 3 + \ln 2, \text{ így}$$

$$-\ln(\cos y) = x \ln(x-2) - x - 2 \ln(x-2) + 3 + \ln 2,$$

$$y \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ és } x > 2$$

$$y(3) = \pi/2 : \quad y \equiv \frac{\pi}{2} \quad x > 2 \text{ része}$$

$$4. \quad \boxed{y' = \frac{2y^2+3}{y} 2x e^{-4x^2}, \quad y \neq 0}$$

Megoldás:

$$\int \frac{y}{2y^2+3} dy = \int 2x e^{-4x^2} dx$$

$$f'/f \qquad f' e^f$$

$$\frac{1}{4} \int \frac{4y}{2y^2+3} dy = -\frac{1}{4} \int -4 \cdot 2x e^{-4x^2} dx$$

$$\frac{1}{4} \ln(2y^2+3) = -\frac{1}{4} e^{-4x^2} + C$$

Vagyis

$$\ln(2y^2+3) = -e^{-4x^2} + C$$

5. $\boxed{y' = (y+3)^2 \arcsin x, \quad |x| < 1}$

Megoldás:

$y \equiv -3, \quad |x| < 1$ része megoldás. Ha $y \neq -3$:

$$\int \frac{1}{(y+3)^2} dy = \int 1 \cdot \arcsin x \, dx$$

parc. int.

...

$$\frac{(y+3)^{-1}}{-1} = x \arcsin x + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{1}{2}} + C$$

6. $\boxed{y' = \frac{y^2+3}{y^2+1} \quad 2x \operatorname{arctg} 2x}$

Megoldás:

$$\int \frac{y^2+1}{y^2+3} dy = \int 2x \operatorname{arctg} 2x \, dx$$

áltört parc. int.

$$y - \frac{2}{3} \frac{\operatorname{arctg} \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x^2 \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2} \right) + C$$

1. Lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Beszéljük meg először a megoldás menetét!

($y_{ia} = y_H + y_{ip}$, y_H : szétválasztható változójú, y_{ip} : állandó variálásával)

A homogén egyenlet megoldásánál nem alkalmazható a képlet, minden esetben végig kell csinálni az alábbi két példában mutatott módszerek valamelyikével.

Pl. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' - \frac{x}{x^2 + 4} y = 6x, \quad y(0) = 4$$

Megoldás: $y_{ia} = y_H + y_{ip}$

$$(H): \quad y' - \frac{x}{x^2 + 4} y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2 + 4} y, \quad y \equiv 0 \text{ megoldás}$$

Ha $y \neq 0$:

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y} &= \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2 + 4} dx \\ \implies \ln |y| &= \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + C_1 \implies |y| = e^{C_1} e^{\ln \sqrt{x^2 + 4}} \\ \implies y &= \pm e^{C_1} \sqrt{x^2 + 4}, \text{ illetve } y \equiv 0 \end{aligned}$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{H\text{ált}} = C \sqrt{x^2 + 4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x) \sqrt{x^2 + 4}, \quad y'_p = c'(x) \sqrt{x^2 + 4} + c(x) \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 4}} 2x$$

Behelyettesítve (I)-be: $\dots$

$$c'(x) = \frac{6x}{\sqrt{x^2 + 4}} \implies c(x) = 3 \int 2x \cdot (x^2 + 4)^{-1/2} dx = 6 \sqrt{x^2 + 4} + K$$

Mivel egyetlen y_p megoldást keresünk, $K = 0$ választható, így

$$y_p = 6(x^2 + 4).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{\text{ált}} = C \sqrt{x^2 + 4} + 6(x^2 + 4) \quad (C \in \mathbb{R})$$

Az $y(0)=4$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$4 = C \cdot 2 + 24 \implies C = -10 \implies y = -10 \sqrt{x^2 + 4} + 6(x^2 + 4)$$

Pl.

$$y' - \frac{2}{x} y = x, \quad x \neq 0$$

- a) Általános megoldás?
- b) $y(1) = 3$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?
- c) $y(-e) = 3e^2$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás?

Megoldás:

- a) Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.

$$(H): \quad y' - \frac{2}{x} y = 0 \implies \frac{dy}{dx} = \frac{2}{x} y$$

Az előadásból tudjuk, hogy $y_{\text{ált}} = C \cdot Y(x)$ alakú, ahol Y a homogén egyenlet egy megoldása, mely seholse nulla. Ezt kihasználva a megoldás kevesebb munkával is megkapható.

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x} dx \implies \ln y = 2 \ln x, \quad \text{így } y = x^2 \quad (Y = x^2)$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_{\text{Hált}} = C x^2, \quad C \in \mathbb{R}$$

Kérdés: $Y(x) = x^2$ vesz fel 0 értéket, márpedig a bizonyításban $e^{\dots}$ alakúra jött ki (a jegyzetben $Y(x)$ helyett $\varphi(x)$ jelölés van), tehát nem lehetne 0. Hol az ellentmondás?

Válasz:

Az elején beszéltünk róla, hogy az $x > 0$, vagy az $x < 0$ félsíkon dolgozunk és ekkor már valóban teljesül, hogy $Y(x) \neq 0$ a vizsgált tartományban.

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x) x^2, \quad y'_p = c'(x) x^2 + c(x) 2x$$

Behelyettesítve (I)-be: $\dots$

$$c'(x) = \frac{1}{x} \implies c(x) = \ln |x|$$

$$y_p = x^2 \ln|x| \implies y_{\text{ált}} = C x^2 + x^2 \ln|x|$$

b) $y(1) = 3$ kezdeti érték probléma megoldása: $3 = C + \ln 1$, tehát $C = 3$.

Így a keresett megoldás: $y = 3x^2 + x^2 \ln x$

c) $y(-e) = 3e^2$ kezdeti érték probléma megoldása: $3e^2 = C e^2 + e^2 \cdot 1$, tehát $C = 2$.

Így a keresett megoldás: $y = 2x^2 + x^2 \ln(-x)$

(Itt már ne szerepeljen abszolút érték a megoldásban!)

2. Új változó bevezetése

Mi mindig megadjuk, hogy milyen helyettesítést alkalmazzunk.

(Pl.) $u = \frac{y}{x}$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x y' = y (1 + \ln y - \ln x), \quad x > 0, \quad y > 0$$

Megoldás:

$$y(x) = u(x) \cdot x \implies y' = u' \cdot x + u \cdot 1$$

Behelyettesítve a $y' = \frac{y}{x} \left(1 + \ln \frac{y}{x}\right)$ differenciálegyenletbe:

$$u' x + u = u(1 + \ln u) \implies u' x = u \ln u \text{ (szeparábilis)}$$

$x > 0, y > 0$ miatt $u > 0$.

$u \equiv 1$ egyensúlyi helyzet, tehát $y = x$ megoldás.

Ha $u \neq 1$:

$$\int \underbrace{\frac{1}{u \cdot \ln u}}_{f'/f \text{ alakú}} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Innen a megoldás:

$$\ln|\ln u| = \ln|x| + C_1 \quad (C_1 \in \mathbb{R}) \implies |\ln u| = e^{C_1} |x| = K |x| \quad (K > 0)$$

$$\implies \ln u = \pm K x \implies u = e^{\pm K x}, \text{ illetve } u \equiv 1$$

Így írhatjuk a következő alakban is: $u = e^{C x}$, $C \in \mathbb{R}$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$y = x e^{C x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Pl.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!
Szükség esetén alkalmazza az $u = x + y$ helyettesítést!

a) $y' = x + y$

b) $y' = \frac{1}{x + y}$

Megoldás:

a) Ez lineáris elsőrendű differenciálegyenlet. Adjuk fel HF-nak!

b) Ez csak helyettesítéssel oldható meg: $(x + y \neq 0)$

$$u(x) := x + y(x) \implies y = u - x \implies y' = u' - 1$$

Behelyettesítve:

$$u' - 1 = \frac{1}{u} \implies u' = 1 + \frac{1}{u} \implies \frac{du}{dx} = \frac{u + 1}{u}$$

Ez szeparálható differenciálegyenlet.

$u \equiv -1$ megoldás, tehát $y = -1 - x$ megoldja a differenciálegyenletet.

Ha $u \neq -1$:

$$\int \underbrace{\frac{u}{u+1}}_{\frac{u+1-1}{u+1} = 1 - \frac{1}{u+1}} du = \int dx \implies u - \ln|u+1| = x + C$$

A visszahelyettesítést elvégezve kapjuk a végeredményt:

$$x + y - \ln|x + y + 1| = x + C ,$$

azaz $y - \ln|x + y + 1| = C$, illetve $y = -1 - x$

Pl.

$u = y^4$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$x y' + y = \frac{\ln x}{y^3} , \quad y \neq 0 , \quad x > 0$$

Adja meg az $y(1) = -1$ kezdeti feltételnek eleget tevő megoldást!

Megoldás: $u' = 4 y^3 y'$

Ezért átrendezzük a differenciálegyenletet: $x y^3 y' + y^4 = \ln x$

Behelyettesítünk:

$$\frac{1}{4} x u' + u = \ln x \implies u' + \frac{4}{x} u = \frac{4}{x} \ln x$$

Lineáris elsőrendű differenciálegyenletet kaptunk.

$$(H): \quad u' + \frac{4}{x} u = 0 \quad \dots \quad u_H = \frac{C}{x^4}; \quad C \in \mathbb{R}$$

$$(I): \quad u_{ip} = \frac{c(x)}{x^4} \quad \dots \quad c' = 4x^3 \ln x$$

Innen parciális integrálással kapjuk:

$$c(x) = x^4 \ln x - \frac{x^4}{4} \implies u_{ip} = \ln x - \frac{1}{4} \implies u_{ia} = u_H + u_{ip} = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4}$$

(Ha kifogytunk az időből, akkor csak írjuk fel a lineáris differenciálegyenlet megoldását, de azért beszéljük meg, hogyan kell integrálni a c' -re kapott függvényt!)

Visszahelyettesítéssel az eredeti differenciálegyenlet általános megoldása:

$$y^4 = \frac{C}{x^4} + \ln x - \frac{1}{4}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$y(1) = -1 : \quad 1 = C + 0 - \frac{1}{4} \implies C = \frac{5}{4}$$

Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = -\sqrt[4]{\frac{5}{4x^4} + \ln x - \frac{1}{4}}$$

Adok még egy példát, de valószínűleg erre már nem marad idő.

Pl.

$u(x) = y^3(x) + x^2$ helyettesítéssel oldja meg az alábbi kezdeti érték problémát!

$$3y^2 y' = -2x + \frac{\cos x}{\sin(y^3 + x^2)}, \quad y(0) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{Megoldás:} \quad u' = 3y^2 y' + 2x \implies 3y^2 y' = u' - 2x$$

Elvégezve a behelyettesítést:

$$u' - 2x = -2x + \frac{\cos x}{\sin u} \implies \int \sin u \, du = \int \cos x \, dx$$

A megoldás:

$$-\cos u = \sin x + C \implies -\cos(y^3 + x^2) = \sin x + C$$

$$y(0) = \sqrt[3]{\frac{\pi}{4}} :$$

$$-\cos(y^3 + x^2) = \sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \text{vagyis}$$

$$y = \sqrt[3]{\arccos\left(-\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - x^2}$$

További feladatok a Segédletben találhatók.

3. Néhány feladat alkalmazásokra

Tasnádi Tamás csinált nekünk néhány alkalmazást, azt is elküldöm. (A honlapomra is feltettem őket.) Pl. az első példát (harmonikus rezgőmozgás) majd a magasabbrendű lineáris differenciálegyenleteknél csinálhatják meg. A többiből lehet esetleg választani egyet-egyet, amikor beilleszthető a gyakorlatba.

Harmonikus rezgőmozgás

Az ideális rugó által kifejtett F erő arányos, és ellentétes irányú a rugó x megnyúlásával, $F(x) = -Dx$. Hogyan mozog (egydimenzióban) az a test, amelyre egyetlen rugó hat?

Newton II. törvénye értelmében $F(x) = m\ddot{x}$. Beírva a rugóerő alakját, a

$$-Dx(t) = m\ddot{x}(t)$$

másodrendű differenciálegyenlethez jutunk, melynek általános megoldása

$$x(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t),$$

ahol $\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$.

(Az egyenletet visszavezethetjük elsőrendűre, ha megszorozzuk $\dot{x}(t)$ -vel, és felhasználjuk, hogy $2\dot{x}(t)x(t) = \frac{d}{dt}(x^2(t))$, valamint $2\ddot{x}(t)\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}(\dot{x}^2(t))$.)

Kondenzátor kisülése

A C kapacitású, Q_0 kezdeti töltéssel feltöltött kondenzátort az R ellenálláson keresztül kisütjük. Határozzuk meg a kondenzátor $Q(t)$ töltésének időfüggését, az áramkörben folyó $I(t)$ áramot, valamint a kondenzátor kapcsain mérhető $U(t)$ feszültséget az idő függvényében!

A szükséges fizikai ismeretek: A kondenzátor $U(t)$ feszültsége, $Q(t)$ töltése és C kapacitása között minden pillanatban fennáll, hogy $C = \frac{Q}{U}$. Az ellenálláson folyó áram és a sarkai közt mérhető feszültség kapcsolata: $R = \frac{U}{I}$. Végül a kondenzátor töltése és az áram közti kapcsolat: $Q(t) = Q_0 + \int_{\tau=t_0}^t I(\tau) d\tau$, azaz $\dot{Q}(t) = I(t)$.

Az áramkörben nincsen telep, tehát az ellenálláson és a kondenzátoron eső feszültségek összege minden pillanatban zérus, $U_C(t) + U_R(t) = 0$. Az $U_C(t)$ feszültség a kondenzátor töltésével kifejezve: $U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$. Az áramkörben folyó áram $I(t) = \dot{Q}(t)$, tehát az ellenálláson eső feszültség $U_R(t) = RI(t) = R\dot{Q}(t)$. De e két feszültség összege zérus, tehát a

$$\frac{Q(t)}{C} + R\dot{Q}(t) = 0, \quad Q(0) = Q_0$$

differenciálegyenletet kapjuk, aminek a kezdeti feltételt kielégítő megoldása:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{C}{R}t}.$$

Radioaktív bomlás

Radioaktív bomlás során az időegység alatt elbomlott atomok száma arányos a még el nem bomlott atomok számával. Határozzuk meg, hogyan változik az idő függvényében a még el nem bomlott atomok száma, valamint a minta aktivitása (időegységre jutó bomlások száma)!

Legyen a még el nem bomlott atomok száma $N(t)$. Rövid dt idő alatt elbomlott atomok száma arányos $N(t)$ -vel és dt -vel, azaz $N(t) - N(t + dt) = N(t)\lambda dt$, ahonnan $\dot{N}(t) = -\lambda N(t)$ differenciálegyenlethez jutunk. Ennek megoldása: $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$; a minta aktivitásának időfüggése pedig $A(t) = -\dot{N}(t) = N_0 \lambda e^{-\lambda t}$.

Oszlopra tekert kötél

A matrózok úgy tartják a nagy hajókat a partnál, hogy a kikötőkötelet előbb néhányszor a kikötőhöz betonozott függőleges oszlopra csavarják, és a felcsavart kötél másik végét húzzák. Vajon miért teszik ezt? Mennyivel tudnak így nagyobb erőt kifejteni, mintha a kötelet közvetlenül húznák?

Az oszlopra csavart kötél ráfeszül az oszlopra, és az oszlop és a kötél közt ébredő súrlódási erő segít megtartani a hajót.

Jelölje az oszlop sugarát R . Legyen φ az oszlopra csavart kötél pontjait jellemző szög ($\varphi = 0$ a hajó felé eső kötélpont, $\varphi = \varphi_0$ pedig a matróz felé eső kötélpont), és legyen $K(\varphi)$ a kötelet a φ szöggel jellemzett pontban feszítő erő. (Tehát K iránya az oszlop érintőjébe esik.) Szemeljük ki egy φ -nél elhelyezkedő, kis $d\varphi$ kötél darabot. E kis kötél darabra a két végénél $K(\varphi)$, ill. $K(\varphi + d\varphi) \approx K(\varphi) + dK(\varphi)$ erő hat. A két erő iránya közel ellentétes, a hatásvonalaik szöge $d\varphi$. Egyszerű geometriai megfontolásból adódik, hogy ($d\varphi \ll 1$ esetében) a két erő eredője közel sugár irányú, és nagysága $dN(\varphi) \approx K(\varphi)d\varphi$. Ekkora nyomóerőnél a tapadási súrlódási erő maximuma $dS(\varphi) = \mu_0 dN(\varphi) \approx \mu_0 K(\varphi)d\varphi$. A kiszemelt $d\varphi$ szögű kötél darab nyugalomban van, tehát a rá ható érintő irányú erők eredője zérus, azaz $K(\varphi) = K(\varphi + d\varphi) + dS(\varphi)$. Innen a kötelet feszítő erőre, mint a felcsavarodási szög függvényére a következő differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{d}{d\varphi} K(\varphi) = -\mu_0 K(\varphi); \quad K(0) = K_0,$$

aminek a megoldása:

$$K(\varphi) = K_0 e^{-\mu_0 \varphi}.$$

Tehát ha a matróz φ_0 szögben csavarja rá a kötelet az oszlopra, és a kötél és az oszlop között a tapadási súrlódási együttható μ_0 , akkor a matróz $e^{-\mu_0 \varphi}$ -szer kisebb erőt kifejtésével képes megtartani a hajót.

Esés nagy magasságból a világűrben

Tegyük föl, hogy egy gonosz varázsló megállítaná a Holdat, és az kezdősebesség nélkül szabadon esne a Föld felé. Hogyan változna a Föld–Hold távolság az idő függvényében?

Legyen a Föld tömege M , a Hold tömege m , kezdeti távolságuk h_0 , és tegyük föl – az egyszerűség kedvéért –, hogy a Föld nem mozdu el a Hold felé. (Ez a közelítés akkor jogos, ha $M \gg m$.) A gravitációs állandót jelölje γ .

Amikor a Föld és a Hold távolsága $r(t)$, akkor a Föld által a Holdra kifejtett gravitációs vonzóerő $F(r) = \gamma \frac{mM}{r^2}$, így a Hold mozgásegyenlete:

$$m\ddot{r}(t) = -\gamma \frac{mM}{r^2(t)}.$$

(A negatív előjel utal arra, hogy az erő vonzó.) A kapott egyenlet másodrendű differenciálegyenlet az $r(t)$ függvényre nézve, azonban egy ügyes trükkel elsőrendűvé alakíthatjuk. Szorozzuk meg az egyenlet mindkét oldalát $\dot{r}(t)$ -vel, és vegyük észre, hogy $\ddot{r}(t)\dot{r}(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2(t))$, valamint $\frac{\dot{r}(t)}{r^2(t)} = -\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right)$. Tehát

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(\dot{r}^2(t)) = \gamma M \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r(t)}\right),$$

ahonnan

$$\dot{r}^2(t) = \frac{2\gamma M}{r(t)} + C.$$

A kapott egyenlet a Holdra felírt mechanikai energiamegmaradás törvényének átrendezett alakja. Autonóm, szeparálható differenciálegyenlet...

Láncgörbe

Milyen alakú egy két végpontjában felfüggesztett lánc?

Írjuk le a lánc alakját az $y(x)$ függvénnyel, mely a lánc x vízszintes koordinátájú pontjának magasságát adja meg. A láncban ébredő erő vízszintes, ill. függőleges komponensét jelölje $K_x(x)$, ill. $K_y(x)$. Vizsgáljuk a láncnak az x helyen levő kis dl hosszúságú, $dm = \rho dl$ tömegű darabját! (ρ a lánc hosszegységre vonatkoztatott „sűrűsége”.) Ez a kis láncdarab nyugalomban van, tehát a rá ható erők eredője (vízszintes és függőleges irányban egyaránt) zérus. Vízszintes irányban a láncra nem hat külső erő, tehát $K_x(x) = K_x(x + dx)$, így a láncot feszítő erő vízszintes komponense állandó, $K_x(x) \equiv K_x$. Függőleges irányban a láncdarabra hat a $(dm)g$ nehézségi erő, tehát $K_y(x + dx) - K_y(x) = g\rho dl$. Ezen kívül tudjuk még, hogy a lánc meredeksége az x pontban $y'(x)$, tehát $dl = \sqrt{1 + y'^2(x)}dx$, valamint a láncban ébredő erő érintő irányú, azaz $K_y(x) = y'(x)K_x$. Ezeket felhasználva a

$$K_x y''(x) = \rho g \sqrt{1 + y'^2(x)}.$$

differenciálegyenletet kapjuk a lánc alakjára, ami az $y'(x)$ függvényre nézve elsőrendű, autonóm, szeparálható egyenlet. A megoldása:

$$y'(x) = \operatorname{sh}\left(\frac{\rho g x}{K_x} + C\right), \quad y(x) = \frac{K_x}{\rho g} \operatorname{ch}\left(\frac{\rho g x}{K_x} + C\right).$$

Ezért hívják sokszor a koszinusz-hiperbolikus függvényt „láncgörbének”.

Mozgás közegellenállással – nagy sebességnél

Légnemű vagy folyékony közegben nagy sebességgel mozgó testre a sebesség négyzetével arányos közegellenállási erő hat. Meg tudjuk mondani például, hogy leszállás után hogyan mozog a kifutópályán az a repülőgép, amelyet csak a fékező ernyője fékez. A gép mozgásegyenlete:

$$m\ddot{x}(t) = -\kappa\dot{x}^2(t),$$

ami $\dot{x}(t)$ -re elsőrendű, autonóm, szeparábilis differenciálegyenlet.

Például a Föld légkörében szabadon eső test mozgásegyenlete

$$m\ddot{h}(t) = \kappa\dot{h}^2(t) - mg.$$

Mozgás közegellenállással – kis sebességnél

Talán egyszerűbben megoldható a feladat akkor, ha a közegellenállási erő a sebességgel arányos. Egy sűrű, viszkózus folyadékban lassan süllyedő kis golyó mozgásegyenlete például

$$m\ddot{y}(t) = mg - \alpha\dot{y}(t),$$

ami $\dot{y}(t)$ -re elsőrendű, lineáris, inhomogén, állandó együtthatós egyenlet.

1. Iránymező, izoklínák

1. (Pl.)

a) Írja fel az

$$y' = e^{y+2} - x$$

differenciálegyenlet izoklínáinak egyenletét! Rajzoljon fel kettőt!

b) Van-e lokális szélsőértéke a $P_0(e, -1)$ ponton áthaladó megoldásnak P_0 -ban?

Megoldás:

a) $y' = \boxed{e^{y+2} - x = K} \implies y = \ln(x + K) - 2$ az izoklínák egyenlete

Pl. $K := 0 : y = \ln x - 2$ $K := -1 : y = \ln(x - 1) - 2$
 (Vonalelemek vízszintesek) (Vonalelemek hajlásszöge: $-\frac{\pi}{4}$)

1. ábra

2. ábra

b) $y'(e) = e^{y+2} - x|_{x=e, y=-1} = e - e = 0$: lehet lokális szélsőérték

$y'' = e^{y+2} y' - 1$; $y''(e) = e^1 \cdot 0 - 1 = -1 < 0 \implies$ lok. max.

2. (Pl.)

$$y' = (y^2 - 4)x + x - 1$$

a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel?
 Vázzuk ezeket a pontokat és jelöljük be néhány vonalelemet!

b) Van-e lokális szélsőértéke vagy inflexiós pontja az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak a szóbanforgó pontban? (Feltéve, hogy van ilyen megoldás.)

Megoldás:

a) $y = -x$ meredeksége: -1

Az izoklínák egyenlete: $(y^2 - 4)x + x - 1 = K$

Most $K = -1$ érdekel bennünket:

$$(y^2 - 4)x + x - 1 = -1 \implies (y^2 - 4 + 1)x = 0$$

Ennek megoldása: $y^2 = 3$, tehát $y = \pm\sqrt{3}$, illetve $x = 0$.

3. ábra

b) $y(1) = 2$

$y'(1) = (y^2 - 4)x + x - 1|_{x=1, y=2} = 0$, tehát lokális szélsőérték lehet itt.

$$y'' = 2y \cdot y' \cdot x + (y^2 - 4) \cdot 1 + 1$$

$$y''(1) = 2y(1) \cdot y'(1) \cdot 1 + (y(1)^2 - 4) \cdot 1 + 1 = 1$$

Tehát az adott pontban lokális minimuma van a megoldásfüggvénynek.

(Inflexió pont nem lehet, mert $y''(1) \neq 0$.)

3. (Pl.)

Az akárhányszor deriválható $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása az

$$y' = y^3 - x^2$$

differenciálegyenletnek és átmegy az $(1, 1)$ ponton.

a) Van-e ennek a megoldásnak lokális szélsőértéke az $x = 1$ helyen?

b) Írja fel ennek a megoldásnak az $x_0 = 1$ pont körüli harmadfokú $T_3(x)$ Taylor polinomját!

Megoldás:

a) $y(1) = 1$

$y'(1) = 1 - 1 = 0$, tehát lokális szélsőérték lehet itt.

$$y'' = 3y^2 y' - 2x \implies y''(1) = 0 - 2 = -2 < 0$$

Tehát az adott pontban lokális maximuma van a megoldásfüggvénynek.
($y(1) = 1$ értékkel.)

b) Az $x_0 = 1$ bázispontú harmadrendű Taylor polinom:

$$T_3(x) = y(1) + \frac{y'(1)}{1!}(x-1) + \frac{y''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{y'''(1)}{3!}(x-1)^3$$

(Még nem tanultuk, majd hamarosan tanuljuk. Az évközi zárthelyikben nem lesz ilyen példa, de vizsgán lehet.)

Még $y'''(1)$ hiányzik a behelyettesítéshez.

$$y''' = 3(2y y') y' + 3y^2 y'' - 2 \implies y'''(1) = -8$$

Elvégezve a behelyettesítést, kapjuk a keresett Taylor polinomot:

$$T_3(x) = 1 - \frac{2}{2}(x-1)^2 - \frac{8}{6}(x-1)^3$$

2. n-edrendű homogén lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenletek

Oldja meg az alábbi homogén differenciálegyenleteket!

4. (Pl.)

$$y''' + 2y'' + y' = 0$$

Megoldás:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda+1)^2 = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -1 \quad (\text{belső rezonancia})$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x}, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

5. (Pl.)

$$y''' + 4y'' + 13y' = 0$$

Megoldás:

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \implies \lambda_1 = 0, \lambda_{2,3} = -2 \pm j3$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{-2x} \cos 3x + C_3 e^{-2x} \sin 3x, \quad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}$$

6. (Pl.) Írjon fel egy olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, melynek megoldásai:
- a) $7x, \quad \sin 5x$
 - b) $3x^2 e^{2x}, \quad e^{3x}$
 - c) $6 + e^{3x} \sin x$

Megoldás:

a) a karakterisztikus egyenlet:

$$(\lambda - 0)^2 (\lambda - j5) (\lambda + j5) = \lambda^2 (\lambda^2 + 25) = \lambda^4 + 25\lambda^2 = 0$$

$$\text{A differenciálegyenlet: } y^{IV} + 25y'' = 0$$

$$\text{b) } (\lambda - 2)^3 (\lambda - 3) = 0 \dots$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (\lambda - 0) (\lambda - (3 + j)) (\lambda - (3 - j)) &= \lambda ((\lambda - 3) - j) ((\lambda - 3) + j) = \lambda ((\lambda - 3)^2 + 1) = \\ &= \lambda^3 - 6\lambda^2 + 10\lambda = 0 \quad \dots \end{aligned}$$

Ha valakinek a fenti kevés lenne, csináljon hasonló példákat!

1. Inhomogén lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenletek

1. (Pl.) $y'' - 5y' + 6y = 2 \sin 2x$

Megoldás:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$$6 \cdot \left| \begin{array}{l} y_{ip} := A \sin 2x + B \cos 2x \end{array} \right.$$

$$-5 \cdot \left| \begin{array}{l} y'_{ip} = 2A \cos 2x - 2B \sin 2x \end{array} \right.$$

$$1 \cdot \left| \begin{array}{l} y''_{ip} = -4A \sin 2x - 4B \cos 2x \end{array} \right.$$

$$\dots \quad A = \frac{1}{26}, \quad B = \frac{5}{26}$$

$$y_{i\acute{a}} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{26} \sin 2x + \frac{5}{26} \cos 2x, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. (Pl.) $y'' - 6y' + 13y = 39$

Megoldás:

$$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 3 \pm j2$$

Mivel $e^{(3+j2)x} = e^{3x} (\cos 2x + j \sin 2x)$, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x$$

$$y_{ip} := A, \quad 13A = 39 \implies A = 3$$

$$y_{i\acute{a}} = C_1 e^{3x} \cos 2x + C_2 e^{3x} \sin 2x + 3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3. (Pl.)

$$y'' - 5y' + 6y = 2x e^x, \quad y(x) = ?$$

Megoldás:

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 3 \implies y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$$

$y_{ip} = (Ax + B) e^x$ alakban keressük.

Csak a végeredményt írjuk fel, a befejezés legyen házi feladat!

$$\dots \quad A = 1, \quad B = \frac{3}{2} \implies y_{ip} = \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{ia} = y_H + y_{ip} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \left(x + \frac{3}{2}\right) e^x$$

4. (Pl.)

$$y'' - y' - 2y = 3e^{2x}, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1, \quad y(x) = ?$$

Megoldás:

$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \implies \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -1 \implies y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

$$-2 \cdot \left| \quad y_{ip} := Ax e^{2x} \quad (\text{külső rezonancia}) \right.$$

$$-1 \cdot \left| \quad y'_{ip} = A e^{2x} + 2Ax e^{2x} \right.$$

$$1 \cdot \left| \quad y''_{ip} = 2A e^{2x} + 2A e^{2x} + 4Ax e^{2x} \right.$$

$$x e^{2x} \cdot (-2A - 2A + 4A) + e^{2x} \cdot (-A + 4A) = 3e^{2x} \implies 3A = 3, \quad \text{tehát } A = 1.$$

$$\implies y_{ip} = x e^{2x}$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{ia} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} + x e^{2x}$$

$$\text{Mivel } y'_{ia} = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + e^{2x} + 2x e^{2x}$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y(0) = 3 : \quad 3 = C_1 + C_2$$

$$y'(0) = 1 : \quad 1 = 2C_1 - C_2 + 1$$

$$\implies C_1 = 1, \quad C_2 = 2$$

$$\text{Vagyis a keresett partikuláris megoldás: } y = e^{2x} + 2e^{-x} + x e^{2x}$$

Mostantól kezdve ne oldjuk meg részletesen a differenciálegyenleteket! (Nincs rá idő.) Írjuk fel a példát, írjuk fel a homogén általános megoldását! Beszéljük meg a kísérletező függvényt és csak a felvett konstansokra kapott értékeket írjuk fel, legyen házi feladat a meghatározásuk!

5. (Pl.)

$$y^{(4)} - 8y''' + 16y'' = 2x - 9, \quad y(x) = ?$$

Megoldás:

$$\lambda^4 - 8\lambda^3 + 16\lambda^2 = \lambda^2(\lambda - 4)^2 = 0 \implies \lambda_{1,2} = 0, \quad \lambda_{3,4} = 4 \text{ (belső rezonancia)}$$

$$\implies y_H = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} + C_4 x e^{4x}$$

$y_{ip} = (Ax + B)x^2 = Ax^3 + Bx^2$ alakban keressük. (Külső rezonancia)

$$\dots \quad A = \frac{1}{48}, \quad B = -\frac{1}{4} \implies y_{ip} = \left(\frac{1}{48}x - \frac{1}{4}\right)x^2$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 x + C_3 e^{4x} + C_4 x e^{4x} + \left(\frac{1}{48}x - \frac{1}{4}\right)x^2$$

6. (Pl.)

$$y'' + y = 2 \sin x \cos x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1, \quad y(x) = ?$$

Megoldás:

$$\lambda^2 + 1 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm j \implies y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

Mivel $f(x) = \sin 2x$, ezért a próbafüggvény:

$$y_{ip} = A \sin 2x + B \cos 2x$$

$$\dots \quad A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0 \implies y_{ip} = -\frac{1}{3} \sin 2x$$

Így a keresett általános megoldás:

$$y_{i\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

$$\text{Mivel } y'_{i\acute{a}} = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - \frac{2}{3} \cos 2x$$

A keresett partikuláris megoldás:

$$y(0) = 1 : \quad 1 = C_1 + 0 - 0 \implies C_1 = 1$$

$$y'(0) = 1 : \quad 1 = 0 + C_2 - \frac{2}{3} \implies C_2 = \frac{5}{3}$$

$$\text{Vagyis:} \quad y = \cos x + \frac{5}{3} \sin x - \frac{1}{3} \sin 2x$$

2. Numerikus sorok (hányados kritérium, gyökkritérium)

Előadáson átismételtük a múlt félévben tanultakat (majoráns, minoráns kritériumot is). Most a két új kritériumot gyakoroljuk (a limeszes alakot használjuk, de mindkét alakot beszéljük meg a gyakorlaton is).

8. (Pl.) Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

$$\text{a) } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^{n-2}}{n!}}$$

$$\text{Megoldás:} \quad a_n := \frac{9^{n-2}}{n!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9^{(n+1)-2}}{(n+1)!} \frac{n!}{9^{n-2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9}{n+1} = 0 < 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

$$\text{b) } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{n^4}}$$

$$\text{Megoldás:} \quad a_n := \frac{5^{3n}}{n^4}$$

Lehet hányados kritérium, de jobb a gyökkritérium:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^3}{\sqrt[n]{n^4}} = 5^3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^4} = 5^3 > 1$$

$$\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

$$\text{c) } \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{n^n}}$$

$$\text{Megoldás:} \quad a_n := \frac{(n+1)!}{n^n}$$

A hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)! \, n^n}{(n+1)^{n+1} (n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) \, n^n}{(n+1)^{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1 \\ &\implies \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}\end{aligned}$$

A következő gyakorlaton még csinálunk néhány példát. De, ha maradna idő, akkor az alábbi feladatokból még lehet csinálni.

További feladatok

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{2n+1} \right)^{n^2+3n}$$

$$5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 (3n+1)^{n^2}}{(3n+3)^{n^2}}$$

$$2. \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3+n^2}{2+n^2} \right)^{n^3} \frac{n^4}{2^{2n+1}}$$

$$6. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5) \, 3^{n-1}}{5^{n+1}}$$

$$3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \, 6^{n-1}}{(2n)!}$$

$$7. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (n+3)}{(n)!}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$$

$$8. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^{n+2}}$$

1. Numerikus sorok (folyt.)

Vizsgálja konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. (Pl.)

$$\text{a) } \boxed{\begin{array}{lll} \text{a1) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^2} & \text{a2) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^n & \text{a3) } \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^3} \end{array}}$$

Megoldás: $a_n := \left(\frac{n^2-2}{n^2+5} \right)^{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-7}$, mert ...

a1) A sor divergens, mivel az általános tag nem tart nullához, tehát a konvergencia szükséges feltétele nem teljesül.

a2) $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ahol $b_n = \sqrt[n]{a_n}$. Mivel $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1$ (ezt meg kell beszélni, hogy rendőrelvvel látható be, de nem kell megcsinálni), így ez a sor is divergens.

a3) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$, ahol $c_n = a_n^n$

A gyökkritérium alkalmazásával:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = e^{-7} < 1 \implies \sum_{n=0}^{\infty} c_n \text{ konvergens}$$

b) $\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n + 3^{n+2} + (\frac{1}{2})^n}{(2n)! + 3n^2}}$

Megoldás: $c_n := \frac{2^n + 3^{n+2} + (\frac{1}{2})^n}{(2n)! + 3n^2} < \frac{3^n + 9 \cdot 3^n + 3^n}{(2n)!} = 11 \frac{3^n}{(2n)!} := d_n$

$\sum_{n=0}^{\infty} d_n$ konvergens, mert ... (hányadoskritériummal)

Ezért a majoráns kritérium miatt $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ is konvergens.

2. Lineáris rekurzió

2. (Pl.)

$$f(n) = 4f(n-1) - 3f(n-2)$$

- a) Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
- b) Adja meg az $f(0) = 2, f(1) = 6$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást!
- c) Írja fel az összes $O(1)$ típusú megoldást!

Megoldás:

- a) Tudjuk, hogy van $f(n) = q^n$ ($q \neq 0$) alakú megoldás:

$$\begin{aligned} q^n &= 4q^{n-1} - 3q^{n-2}, \quad q \neq 0 \implies q^2 = 4q - 3 \\ \implies q^2 - 4q + 3 &= (q-1)(q-3) = 0 \implies q_1 = 1, \quad q_2 = 3 \end{aligned}$$

Az általános megoldás: $f(n) = C_1 + C_2 3^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- b) $f(0) = 2 : \quad C_1 + C_2 = 2$
 $f(1) = 6 : \quad C_1 + 3C_2 = 6$
 $\implies C_1 = 0, \quad C_2 = 2$

Tehát $f(n) = 2 \cdot 3^n$

- c) $f(n) = O(1)$ jelentése:

$\exists K : |f(n)| \leq K \cdot 1, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

Tehát $f(n)$ - nek korlátosnak kell lennie, ehhez $C_2 = 0$ választás kell.

3. (Pl.)

- a) Adja meg az $f(n+1) = \frac{5}{2}f(n) - f(n-1)$ lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!
- b) Van-e $f(n) = O(1)$ tulajdonságú megoldás?
- c) Adja meg az $f(0) = 1, f(1) = 5$ kezdeti feltételt kielégítő megoldást?

Megoldás:

- a) $f(n) = q^n$ alakú megoldást keresünk. Helyettesítsünk be az egyenletbe!

$$q^{n+1} = \frac{5}{2}q^n - q^{n-1} \xrightarrow{q \neq 0} q^2 - \frac{5}{2}q + 1 = 0 \implies q_1 = 2, \quad q_2 = \frac{1}{2}$$

Így az összes megoldás: $f(n) = C_1 2^n + C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^n, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

b) $f(n) = O(1)$ jelentése: $f(n)$ korlátos.

Ez $C_1 = 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$ esetén teljesül.

$$c) \left. \begin{array}{l} n=0: C_1 + C_2 = 1 \\ n=1: 2C_1 + \frac{1}{2}C_2 = 1 \end{array} \right\} \implies C_1 = 3, C_2 = -2$$

$$\text{Így a keresett megoldás: } f(n) = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

EDDIG VAN AZ I. ZH ANYAGA!

3. Függvénysorok (Weierstrass kritérium)

Csak két egyszerű példát csinálunk a tétel megértéséhez, mert később is szükségünk lesz a tétel alkalmazására. A zh-kban nem adunk ilyen példát.

4. (Pl.)

Egyenletesen konvergens-e a $(-\infty, \infty)$ intervallumon az alábbi függvénysor?

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^4 x^2 + 1)}{n^3 + 2}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(n^5 x^3)}{n \sqrt{n} + 5}$$

Megoldás:

a)

$$|f_n(x)| = \frac{|\cos(n^4 x^2 + 1)|}{n^3 + 2} < \frac{1}{n^3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konv. } \implies \text{Weierstrass kr. } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

b)

$$|f_n(x)| = \frac{|\arctg(n^5 x^3)|}{n \sqrt{n} + 5} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n \sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n \sqrt{n}} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ konvergens}$$

$$\implies \text{Weierstrass kr. } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ egyenletesen konvergens } (-\infty, \infty)\text{-en.}$$

4. Hatványsorok (konvergenciatartomány, konvergencia sugár)

5. (Pl.)

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} (x-1)^n$$

Megoldás:

Jelenleg: $a_n = \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n}$, $x_0 = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R} \implies R = 2$$

$$x = 3: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot 2^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \quad \text{konvergens (de nem abszolút konvergens)}$$

$$x = -1: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot 2^n} \cdot (-2)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (-1)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{divergens}$$

KT (konvergenciatartomány): $(-1, 3]$

6. (Pl.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!} (x+7)^n \quad R=?$$

Megoldás:

Jelenleg: $a_n = (-1)^n \frac{2n+1}{(2n)!}$, $x_0 = -7$ (ez most nem fontos)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+3)(2n)!}{(2n+2)!(2n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+3}{2n+1} \frac{1}{(2n+2)(2n+1)} = 0$$

$$\implies R = \infty$$

7. (Pl.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}} x^n \quad R=?$$

Megoldás:

Jelenleg: $a_n = \frac{(n+2)^{n^2}}{(n+6)^{n^2+1}}, \quad x_0 = 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+6} \right)^n \frac{1}{\sqrt[n]{n+6}} = \dots = \frac{1}{e^4}$$

$$\implies R = e^4,$$

(mert $1 < \sqrt[n]{n+6} < \sqrt[n]{7} \sqrt[n]{n}$ és rendőrelv $\dots$)

8. (Pl.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n!} x^n \quad R = ?$$

Ha nem fér be, legyen házi feladat!

Megoldás:

Jelenleg: $a_n = \frac{(n+1)^n}{n!}, \quad x_0 = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^{n+1} n!}{(n+1)! (n+1)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{e^2}{e} = e \\ &\implies R = \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Ha valakinek marad ideje, akkor foglalja össze az I. zh. anyagát!

1. Iránymező, izoklinák

A Feladatgyűjteményből:

1.4.3. b), c) (Feltéve, hogy minden kezdeti érték problémának van megoldása.)

1.4.4.

Továbbá:

Pl.

$$y' = 3x^2 + 6y^2 - 18$$

- a) Írja fel az $x_0 = 3$, $y_0 = 1$ ponton áthaladó megoldás adott pontbeli érintőegyenésének egyenletét!
- b) Írja fel az differenciálegyenlet izoklináinak egyenletét!
- c) Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek?

Pl.

$$y' = x^2 - y^2, \quad y(x_0) = y_0$$

- a) Jelölje ki azokat a pontokat, melyeken a megoldásgörbe
 - lokálisan növekedően,
 - lokálisan csökkenőenhalad át.
- b) ** Mely pontokban van lokális szélsőértéke a megoldásgörbéknek? Milyen jellegű?

Pl.

Tudjuk, hogy az

$$y' = y^2 - 2y + x^2$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik pontosan egy megoldása, amely akárhányszor differenciálható.

- a) Milyen lokális tulajdonsága van a $P_0(-1, 1)$ ponton átmenő megoldásgörbének ebben a pontban?
- b) Írja fel az izoklinák egyenletét! Rajzoljon fel néhányat!
Hol lehet lokális szélsőértéke a megoldásfüggvényeknek?
- c) Vannak-e olyan megoldások, amelyeknek az $x = 0$ helyen inflexiós pontjuk van?

2. n-edrendű homogén lineáris állandó együtthatójú differenciálegyenletek

A Feladatgyűjteményből: 1.5.1. - 1.5.11.

3. Lineáris rekurzió

(Pl.)

Adja meg a lineáris rekurziót kielégítő összes számsorozatot!

Írja fel az összes $O(1)$, $O(n)$, illetve $O(3^n)$, típusú megoldást!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$

b) $f(n) = 5 f(n-1) - 4 f(n-2)$

c) $f(n) = 5 f(n-1) - 6 f(n-2)$

(Pl.)

Írja fel a rekurzió adott kezdő értékhez tartozó megoldását!

a) $f(n) = \frac{10}{3} f(n-1) - f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = \frac{11}{3}$

b) $f(n) = -f(n-1) + 12 f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = 2$

c) $f(n) = -3 f(n-1) + 10 f(n-2)$, $f(0) = 3$, $f(1) = 6$

d) $f(n) = 5 f(n-1) + 6 f(n-2)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$

1. Hatványsorok (folytatás)

1. (Pl.)

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+4)^n}{n^2 3^n}$$

Megoldás:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2 3^n} (x+2)^n, \quad x_0 = -2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2 3^n}} = \frac{2}{3} = \frac{1}{R} \implies R = \frac{3}{2}$$

$$x = -\frac{7}{2} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} : \text{konvergens}$$

$$x = -\frac{1}{2} : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} : \text{konvergens}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } \left[-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

2. (Pl.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^{3n} = \frac{1}{2} x^3 + \frac{2}{2^2} x^6 + \dots \quad R = ?$$

Megoldás:

$$a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \frac{n/3}{2^{n/3}}, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

$$\text{Ezért } \sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ nem osztható 3-mal} \\ \sqrt[n]{\frac{n/3}{2^{n/3}}} = \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3} \sqrt[n]{2}}, & \text{ha } n \text{ osztható 3-mal} \end{cases}$$

$$\implies \text{Torlódási pontok: } t_1 = 0, t_2 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$\implies \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} = \frac{1}{R} \longrightarrow R = \sqrt[3]{2}$$

Egy ügyesebb megoldás: $u = x^3$ helyettesítéssel egy egyszerűbb feladatra vezetjük vissza.

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n u^n := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} u^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{R_b} \quad \longrightarrow \quad R_b = 2$$

$$\text{Tehát} \quad |u| < 2 \quad \implies \quad |x|^3 < 2 \quad \implies \quad |x| < \sqrt[3]{2} \quad \implies \quad R = \sqrt[3]{2}$$

3. (Pl.)

Állapítsa meg az alábbi sor konvergenciatartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} (x-2)^{2n}$$

Ez legyen házi feladat!!!

Megoldás:

$$u := (x-2)^2 \quad \text{helyettesítéssel a sor alakja:} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{9^n} u^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2) 9^n}{9^{n+1} (n+1)} = \dots = \frac{1}{9} \quad \implies \quad R_1 = 9$$

A végpontokat itt is lehet vizsgálni, de az eredeti sorban is vizsgálhatjuk majd. Most az utóbbi módon járunk el.

Tehát

$$|u| < 9 \quad \implies \quad |(x-2)^2| < 9 \quad \implies \quad |x-2| < 3 \quad \implies \quad R = 3 \quad (-1 < x < 5)$$

A végpontokban:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1) \quad \text{divergens, hiszen nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.}$$

Konvergenciatartomány: $(-1, 5)$

2. Hatványsorok összegfüggvénye

4. (Pl.)

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}$$

Megoldás:

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1}, \quad f(0) = 0. \text{ Ha } x \neq 0 :$$

$$f_1(x) := x \cdot f(x) = x \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-R, R) \text{ esetén szabad tagonként deriválni:}$$

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$$

$R = 1$, és az eredeti sornak is ugyanennyi, mert tagonkénti deriválásnál nem változik.

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \int_0^x f_1'(x) dx (= f_1(x) - f_1(0)) = \int_0^x \frac{x}{1-x} dx = - \int_0^x \frac{(1-x) - 1}{1-x} dx = \\ &= - (x + \ln(1-x)) \Big|_0^x = -x - \ln(1-x) \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x - \ln(1-x)}{x} = -1 - \frac{\ln(1-x)}{x}, & \text{ha } |x| < 1, x \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

(Hf.: Tudjuk, hogy f folytonos $|x| < 1$ -ben.

Ellenőrizzük le, hogy igaz-e: $\lim_{x \rightarrow 0} = f(0) (= 0)$?)

5. (Pl.)

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n$$

Megoldás:

$R = 1$, mert $\dots$

(Vagy itt mutatjuk meg, vagy az előző gondolatmenettel később indokoljuk.)

$$\begin{aligned} g(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n+1} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1) + 1}{n+1} x^n = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = \frac{x}{1-x} + f(x) = \dots \quad (\text{L. előző példa!}) \end{aligned}$$

6. (Pl.)

Írja fel az alábbi sor összegfüggvényét!

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n$$

Megoldás:

$R = 1$, mert $\dots$

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^n, \quad f_1(x) := x^2 \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (n+3) x^{n+2} = \\ &= \frac{d}{dx} \int_0^x f_1(x) dx = \dots = \left(\frac{x^4}{1-x} \right)' \end{aligned}$$

Stb.

(Csak beszéljük meg a lényegét, mert nem jut idő a részletes kidolgozásra.)

3. Taylor polinom

7. (Pl.)

a) Definiálja az n -edrendű Taylor polinomot!

b) Írja fel a definíció segítségével az

$$f(x) = x^3 - 3 + \cos 3x$$

függvény $x_0 = 0$ pontbeli negyedrendű Taylor polinomját és a Lagrange-féle hibatagot!

c) Legfeljebb mekkora hibát követünk el, ha $f(0,1)$ értékét $T_4(0,1)$ értékével közelítjük?

Megoldás:

a) az f függvény x_0 bázispontú n -edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Ha f legalább $(n+1)$ -szer differenciálható $[x_0, x]$ -ben (ill. $(x, x_0]$ -ben), akkor $\exists \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = f(x) - T_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

$$\begin{aligned}
\text{b) } f(x) &= x^3 - 3 + \cos 3x & f(0) &= -2 \\
f'(x) &= 3x^2 - 3 \sin 3x & f'(0) &= 0 \\
f''(x) &= 6x - 9 \cos 3x & f''(0) &= -9 \\
f'''(x) &= 6 + 27 \sin 3x & f'''(0) &= 6 \\
f^{IV}(x) &= 81 \cos 3x & f^{IV}(0) &= 81 \\
f^V(x) &= -243 \sin 3x
\end{aligned}$$

$$T_4(x) = -2 + \frac{-9}{2!} x^2 + \frac{6}{3!} x^3 + \frac{81}{4!} x^4$$

$$H = \frac{f^V(\xi)}{5!} x^5 = \frac{-243 \sin 3\xi}{5!} 0,1^5, \quad \xi \in (0, 0.1)$$

$$|\sin x| \leq |x| \quad \text{miatt} \quad |\sin 3\xi| \leq 3 \cdot 0,1, \quad \text{ezért}$$

$$|H| = \frac{243 |\sin 3\xi|}{5!} 0,1^5 < \frac{243 \cdot 3 \cdot 0,1}{5!} 0,1^5$$

4. Taylor sorok

Félő, hogy előadáson még nem kerül elő a Taylor sor. Ezért kérjük, hogy a Taylor sort definiálják (elég nulla bázispontra) és magyarázzák el a 27. oldal tetején levő megjegyzést.

8. (Pl.)

Adja meg az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését és annak konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x+7}, \quad g(x) = \frac{x+2}{x+7}, \quad h(x) = \frac{3x^4}{x+7}$$

Megoldás:

$$f(x) = \frac{1}{7} \frac{1}{1 - \frac{-x}{7}} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{x}{7} + \left(\frac{x}{7}\right)^2 - \left(\frac{x}{7}\right)^3 + \left(\frac{x}{7}\right)^4 - \dots \right) =$$

$$= \frac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$$

$$\left(\text{Geometriai sor: } a = \frac{1}{7}, \quad q = -\frac{x}{7} \right)$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| -\frac{x}{7} \right| = \frac{|x|}{7} < 1 \implies |x| < 7, \quad R_f = 7$$

$$g(x) = \frac{x+7-5}{x+7} = 1 - \frac{5}{x+7} = 1 - 5 \cdot f(x) = 1 - 5 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n$$

Konvergenciatartomány: $|x| < 7$, $R_g = 7$ (ugyanaz)

$$h(x) = \frac{3x^4}{x+7} = 3x^4 \cdot f(x) = 3x^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{7^{n+1}} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3(-1)^n}{7^{n+1}} x^{n+4}$$

Konvergenciatartomány: $|x| < 7$, $R_h = 7$ (ugyanaz)

1. (Pl.)

Írja fel az f függvény x_0 bázispontú Taylor sorát és adja meg a sor konvergenciatartományát!

$$f(x) = \frac{1}{x+2} \quad a) \ x_0 = 2 \quad b) \ x_0 = -5$$

Megoldás:

$x_0 = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x-2)+4} = \frac{1}{4} \frac{1}{1 - \frac{-(x-2)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q} \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - \left(\frac{x-2}{4} \right) + \left(\frac{x-2}{4} \right)^2 - \left(\frac{x-2}{4} \right)^3 + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x-2}{4} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^{n+1}} (x-2)^n \end{aligned}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| -\frac{x-2}{4} \right| = \frac{|x-2|}{4} < 1 \implies |x-2| < 4, \quad (-2 < x < 6, \ R_1 = 4)$$

$x_0 = -5$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x+2} = \frac{1}{(x+5)-3} = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{x+5}{3}} \\ &= -\frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{x+5}{3} \right) + \left(\frac{x+5}{3} \right)^2 + \left(\frac{x+5}{3} \right)^3 + \dots \right) = \\ &= -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x+5}{3} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-1}{3^{n+1}} (x+5)^n \end{aligned}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| \frac{x+5}{3} \right| = \frac{|x+5|}{3} < 1 \implies |x+5| < 3, \quad (-8 < x < -2, \ R_2 = 3)$$

2. (Pl.)

a) Írja fel az

$$f_1(x) = \frac{1}{x+3}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését! $R_1 = ?$

b) f_1 sorfejtésére támaszkodva írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú sorfejtését!

$$f_2(x) = \ln(x+3) , \quad R_2 = ?$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x+3)^3} , \quad R_3 = ?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } f_1(x) &= \frac{1}{x+3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - \frac{-x}{3}} = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x}{3} + \left(\frac{x}{3}\right)^2 - \left(\frac{x}{3}\right)^3 + \left(\frac{x}{3}\right)^4 - \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \end{aligned}$$

$$\text{Konvergenciatartomány: } |q| = \left| -\frac{x}{3} \right| = \frac{|x|}{3} < 1 \implies |x| < 3, \quad R_1 = 3$$

$$\text{b) } f_2'(x) = f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n$$

$$\int_0^x f_2'(t) dt = f_2(x) - \underbrace{f_2(0)}_{=\ln 3} = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} t^n dt$$

$[0, x] \subset (-3, 3)$, szabad tagonként integrálni:

$$f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \int_0^x t^n dt = \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{t^{n+1}}{n+1} \Big|_0^x =$$

$$= \ln 3 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\implies f_2(x) = \ln 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^n} \frac{x^n}{n}, \quad R_2 = R_1$$

(Tagonkénti integrálásnál nem változik a konvergenciasugár.)

$$f_1''(x) = \left(\frac{1}{x+3} \right)'' = \left(\frac{-1}{(x+3)^2} \right)' = \frac{2}{(x+3)^3} \implies f_3(x) = \frac{1}{2} f_1''(x)$$

Tehát

$$f_3(x) = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} x^n \right)'' = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n(n-1)}{3^{n+1}} x^{n-2}$$

$R_3 = R_1$ (Tagonkénti deriválásnál nem változik a konvergenciasugár.)

3. (Pl.)

Tudjuk, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad R = 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = \ln \left(1 + \frac{x^2}{3} \right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!

b) Az a)-beli sorfejtést felhasználva adja meg az

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) dx$$

integrál értékét az f függvény negyedfokú Taylor polinomjának felhasználásával és becsülje meg a hibát!

Megoldás:

$$\text{a) } \ln(1+u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} u^n, \quad R = 1$$

$$u = \frac{x^2}{3} \text{ helyettesítéssel:}$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(\frac{x^2}{3} \right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 3^n} x^{2n}$$

$$\text{Konvergenciasugár: } \left| \frac{x^2}{3} \right| < 1 \implies |x| < \sqrt{3} \implies R_f = \sqrt{3}$$

b) $[0, 1] \subset (-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^1 \ln \left(1 + \frac{x^2}{3} \right) dx = \int_0^1 \left(\underbrace{\frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 3^2} + \frac{x^6}{3 \cdot 3^3} - \dots}_{T_4(x)} \right) dx =$$

$$= \frac{x^3}{3 \cdot 3} - \frac{x^5}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{x^7}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \dots \Big|_0^1 = \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} - + \dots \approx$$

$$\approx \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 0,1, \quad |H| < \frac{1}{3 \cdot 3^3 \cdot 7} \text{ (Leibniz sor)}$$

Írjuk fel a táblára e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ Taylor sorát és konvergenciatar-
tományát!

4. (Pl.)

Írja fel az alábbi függvények x_0 pontbeli Taylor sorát és annak konvergenciatar-
tományát!

a) $f_1(x) = \sin 3x^2$, $x_0 = 0$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4$, $x_0 = 0$

b) $f_2(x) = e^{4x}$, $x_0 = 0$, ill. $x_0 = 3$

d) $f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x$, $x_0 = 0$

Megoldás:

a) $f_1(x) = u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \dots \Big|_{u=3x^2} = 3x^2 - \frac{3^3}{3!}x^6 + \frac{3^5}{5!}x^{10} - \dots$, $x \in \mathbb{R}$

b) $e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \dots$, $u \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0$: $u = 4x$ helyettesítéssel:

$$f_2(x) = e^{4x} = 1 + 4x + \frac{4^2}{2!}x^2 + \frac{4^3}{3!}x^3 + \frac{4^4}{4!}x^4 + \dots$$
, $x \in \mathbb{R}$

$x_0 = 3$:

$$f_2(x) = e^{4(x-3)+12} = e^{12} e^{4(x-3)} =$$

$$= e^{12} \left(1 + 4(x-3) + \frac{4^2}{2!}(x-3)^2 + \frac{4^3}{3!}(x-3)^3 + \frac{4^4}{4!}(x-3)^4 + \dots \right)$$
, $x \in \mathbb{R}$

c) $f_3(x) = \operatorname{sh} 2x^4 = u + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} + \frac{u^7}{7!} + \dots \Big|_{u=2x^4} =$

$$= 2x^4 + \frac{2^3}{3!}x^{12} + \frac{2^5}{5!}x^{20} + \dots$$
, $x \in \mathbb{R}$

$$\text{d) } f_4(x) = e^{-2x} \operatorname{ch} 5x = e^{-2x} \frac{e^{5x} + e^{-5x}}{2} = \frac{1}{2} (e^{3x} + e^{-7x}) = \dots$$

5. (Pl.)

$$f(x) = 5x^3 e^{-3x^2}, \quad x_0 = 0$$

Írja fel a függvény Taylor sorát! Konvergenciatartomány?

$f^{(100)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

Megoldás: $\dots$

A következő példa legyen házi feladat! De a következő héten nem ártana az eredményt felírni a táblára, hogy ellenőrizhessék a hallgatók.

6. (Pl.)

Határozza meg a következő számsorok pontos összegét!

$$\text{a) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{k!} \quad (= e^4)$$

$$\text{c) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \quad (= \sin 1)$$

$$\text{b) } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k \cdot k!} \quad (= e^{-1/2})$$

$$\text{d) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \quad (= \operatorname{ch} 1 - 1)$$

Megoldás: $\dots$

További példa, ha valakinek maradna ideje, de nem kell erőltetni!
(Esetleg csak megbeszélni a megoldást.)

7. (Pl.)

Tudjuk, hogy

$$\operatorname{arctg} u = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{u^{2n+1}}{2n+1}, \quad |u| \leq 1$$

a) Írja fel az

$$f(x) = x^3 \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát! $R = ?$

b) $f^{(20)}(0) = ?$, $f^{(21)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Adjon becslést az $\int_0^1 f(x) \, dx$ integrál értékére az integranduszt kilencedfokú Taylor polinomjával közelítve!

Megoldás:

$$\text{a) } \operatorname{arctg} \frac{x^2}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left(\frac{x^2}{2} \right)^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2}$$

$$\text{Konvergenciataromány: } \left| \frac{x^2}{2} \right| \leq 1 \implies |x| \leq \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+5} = \\ &= \underbrace{\frac{x^5}{2} - \frac{x^9}{3 \cdot 2^3}}_{T_9(x)} + \frac{x^{13}}{5 \cdot 2^5} - \frac{x^{17}}{7 \cdot 2^7} + \dots \quad R = \sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{b) } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$f^{(20)}(0) = 20! \cdot a_{20} = 0, \quad \text{mert } a_{20} = 0 \quad (x^{20} \text{-os tag nincs a sorban})$$

$$f^{(21)}(0) = 21! \cdot a_{21} = 21! \cdot \frac{(-1)^4}{9 \cdot 2^9}$$

($a_{21} : x^{21}$ együtthatója, ezért $4n + 5 = 21 \implies n = 4$)

c) Mivel $[0, 1] \subset (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$, ezért szabad tagonként integrálni:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \, dx &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} x^{4n+2} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} \int_0^1 x^{4n+2} \, dx = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1) 2^{2n+1}} \frac{x^{4n+3}}{4n+3} \Big|_0^1 = \frac{x^6}{2 \cdot 6} - \frac{x^{10}}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{x^{14}}{5 \cdot 2^5 \cdot 14} - \dots \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2 \cdot 6} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 \cdot 10} + \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 14} - \dots \approx \frac{1}{12} - \frac{1}{240}, \quad |H| < \frac{1}{5 \cdot 2^5 \cdot 14} \end{aligned}$$

(Leibniz sort kaptunk.)

Nem muszáj a szummás alakokat felírni, elegendő csak kiírni az elejétől annyi tagot, amennyi szükséges a megoldáshoz.

1. (Pl.)

Szemléltessük, hogy $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

Megoldás:

$$e^{j\varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(j\varphi)^n}{n!} = 1 + j\varphi + \frac{j^2 \varphi^2}{2!} + \frac{j^3 \varphi^3}{3!} + \frac{j^4 \varphi^4}{4!} + \frac{j^5 \varphi^5}{5!} + \dots =$$

$$= \dots = \left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - + \dots\right) + j \left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - + \dots\right) = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Ez a példa legyen házi feladat, csak beszéljük meg, hogy mit kell csinálni!

1. Példák binomiális sorfejtésre

2. (Pl.)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32 - 2x^2}}, \quad x_0 = 0$$

bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!

 $a_8 = ?$ (Elemi műveletekkel adja meg!)

$$f^{(26)}(0) = ? , \quad f^{(25)}(0) = ?$$

Megoldás:

Tudjuk, hogy $(1+u)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} u^k$, $R = 1$. Ezt használjuk fel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[5]{32}} \frac{1}{\left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{1/5}} = \frac{1}{2} \left(1 + \left(-\frac{x^2}{16}\right)\right)^{-1/5} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \left(-\frac{x^2}{16}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k}$$

$$\text{Konvergenciasugár: } \left| -\frac{x^2}{16} \right| < 1 \implies |x| < 4, \quad R = 4$$

$$a_8 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\binom{-\frac{1}{5}}{4} \binom{-\frac{6}{5}}{4} \binom{-\frac{11}{5}}{4} \binom{-\frac{16}{5}}{4}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \frac{1}{16^4}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{és} \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad f^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$f^{(26)}(0) = 26! \cdot a_{26} = 26! \cdot \frac{1}{2} \binom{-\frac{1}{5}}{13} \frac{(-1)^{13}}{16^{13}}$$

($a_{26} : x^{26}$ együtthatója, ezért $2k = 26 \implies k = 13$)

$$f^{(25)}(0) = 25! \cdot a_{25} = 0, \quad \text{mert } a_{25} = 0$$

(x^{25} -es tag nincs a sorban, tehát 0 együtthatója van.)

3. (Pl.)

Írja fel az

$$g(x) = \frac{2x^3}{\sqrt[5]{32-2x^2}}, \quad x_0 = 0$$

bázispontú Taylor sorát és a sor konvergenciasugarát!

$$g^{(102)}(0) = ? , \quad g^{(103)}(0) = ?$$

Megoldás:

Beszéljük meg a megoldás lépéseit, de adjuk fel a kidolgozást házi feladatnak!

Mivel $g(x) = 2x^3 \cdot f(x)$, felhasználhatjuk az előző példa eredményét:

$$g(x) = 2x^3 \cdot \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{5}}{k} \frac{(-1)^k}{16^k} x^{2k+3}, \quad R = 4 \quad (\text{u.a.})$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{és} \quad a_n = \frac{g^{(n)}(0)}{n!} \quad \text{miatt} \quad g^{(n)}(0) = n! \cdot a_n$$

$$g^{(102)}(0) = 102! \cdot a_{102} = 0, \quad \text{mert } a_{102} = 0 \quad (x^{102}\text{-es tag nincs a sorban})$$

$$g^{(103)}(0) = 103! \cdot a_{103} = 103! \cdot \binom{-\frac{1}{5}}{50} \frac{(-1)^{50}}{16^{50}}$$

$$(a_{103} : x^{103} \text{ együtthatója, ezért } 2k+3 = 103 \implies k = 50)$$

4. (Pl.)

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx \approx ?$$

Az integranduszt nyolcadfokú Taylor polinomjával közelítse és becsülje meg a hibát!

Megoldás:

$$(1+x^4)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} x^{4k} = 1 - \underbrace{\frac{1}{2} x^4 + \frac{3}{8} x^8}_{T_8(x)} - \frac{5}{16} x^{12} + \dots \quad R = 1$$

$$\int_0^{1/2} (1+x^4)^{-1/2} dx = x - \frac{1}{2 \cdot 5} x^5 + \frac{3}{8 \cdot 9} x^9 - \frac{5}{16 \cdot 13} x^{13} + \dots \bigg|_0^{1/2} \approx$$

$$\approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 2^5} + \frac{3}{8 \cdot 9 \cdot 2^9}, \quad |H| < \frac{5}{16 \cdot 13 \cdot 2^{13}} \quad (\text{Leibniz sor})$$

Többszörös függvények

Ábrázolással csak előadáson foglalkozunk. Az alábbi felületekről beszélünk:

$$ax + by + cz = d$$

$$z = x^2 + y^2; \quad z = -x^2 - y^2; \quad z = 6 + x^2 + y^2; \quad z = 6 - x^2 - y^2$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad z^2 = x^2 + y^2$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2; \quad z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}; \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$z = xy; \quad z = y^2 - x^2$$

2. Határértékszámítás

5. Pl.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 \cos y^2} = ?$$

Megoldás:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 \cos y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 y} \cdot \frac{y}{\cos y^2} = 1 \cdot \frac{0}{1} = 0$$

6. Pl.

Hol folytonos az alábbi függvény?

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^2 y^2}{4x^4 + 7y^4}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Megoldás:

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$, akkor a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele. Vizsgálandó a $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ határérték! Az $y = mx$ egyenesek mentén:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, mx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3m^2 x^4}{4x^4 + 7m^4 x^4} = \frac{3m^2}{4 + 7m^4} \quad \text{függ } m\text{-től}$$

$\Rightarrow \nexists$ a határérték. Így a függvény az origóban nem folytonos.

7. (Pl.)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3xy^3}{2x^2 + 2y^2} = ?$$

Megoldás:

$x_n = \varrho_n \cos \varphi_n$, $y_n = \varrho_n \sin \varphi_n$, φ_n tetsz., $\varrho_n \rightarrow 0$ egy tetszőleges $(0, 0)$ -hoz tartó pontsorozat. E mentén vizsgáljuk $f(x_n, y_n)$ konvergenciáját:

$$\lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \frac{3\varrho_n^4 \cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n}{2\varrho_n^2} = \lim_{\substack{\varrho_n \rightarrow 0 \\ \varphi_n \text{ tetsz.}}} \underbrace{\varrho_n^2 \cdot \frac{3}{2} \cos \varphi_n \sin^3 \varphi_n}_{\text{korlátos}} = 0$$

Tehát a keresett határérték 0.

8. (Pl.)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} = ?$$

Megoldás:

Koordinátánkénti (másszóval iterált) limeszekkel dolgozunk:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2}{2x^2} = \frac{3}{2} \\ \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5y^2}{2x^2 + y^2} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{5y^2}{y^2} = 5 \neq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

3. Parciális deriváltak

9. (Pl.)

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2x - 5y + \ln 2$$

- $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!
- $\Delta f = f''_{xx} + f''_{yy} = ?$

Megoldás:

a) $f'_x(x, y) = 3x^2 - 3y^2 + 2,$

$f'_y(x, y) = -6xy - 5$

b) $f''_{xx} = 6x$

$f''_{xy} = f''_{yx} = -6y$

$f''_{yy} = -6x$

c) $\Delta f = 6x - 6x \equiv 0$

Az ilyen tulajdonságú függvényt harmonikus függvénynek nevezzük.

10. (Pl.)

$$f(x, y) = \sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}$$

Írja fel az elsőrendű parciális deriváltfüggvényeket!
(Az $(1, 0)$ pontban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás:

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$f'_x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}} \cdot 20(x-1)^3$$

$$f'_x(1, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h, 0) - f(1, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5h^4} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5}h^2}{h} = 0$$

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$:

$$f'_y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{5(x-1)^4 + 4y^2}} \cdot 8y$$

$$f'_y(1, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(1, 0+k) - f(1, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4k^2} - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{2|k|}{k} = \nexists$$

Ha $(x, y) \neq (1, 0)$, akkor az f függvény totálisan deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak. Ha $(x, y) = (1, 0)$, akkor az f függvény nem deriválható, mert $f'_y(1, 0)$ nem létezik, tehát nem teljesül a totális deriválhatóság egyik szükséges feltétele.

Ha valakinek maradna ideje (???), akkor csináljon hasonló példákat, vagy megcsinálhatja a házi feladatokat is!

Ez a II. zárthelyi előtti utolsó gyakorlat (kivéve a keddieket), tehát lehet kihagyni a hasonló példákból, de be kell fejezni az anyagot, mert ez benne van a II. zh anyagában. A keddiek se csússzanak ki lehetőleg az anyagból, mert a további gyakorlatok is zsúfoltak.

1. (Pl.)

$$f(x, y) = (2x - y)^4 + 4x^3 - 8y^2$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
 $\text{grad} f(1, 2) = ?$
- c) Számítsa ki a másodrendű parciális deriváltfüggvényeket!
Ez most nem kell, ha az előző gyakorlaton már számoltunk másodrendű parciális deriváltakat.

Megoldás:

$$\text{a) } f'_x(x, y) = 4(2x - y)^3 \cdot 2 + 12x^2, \quad f'_y(x, y) = 4(2x - y)^3 \cdot (-1) - 16y$$

- b) Mivel a parciálisok mindenütt folytonosak, a függvény mindenütt totálisan deriválható (létezik mindenütt a gradiens).

$$\text{grad} f(1, 2) = f'_x(1, 2) \underline{i} + f'_y(1, 2) \underline{j} = 12 \underline{i} - 32 \underline{j}$$

$$\text{c) } f''_{xx} = 8 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot 2 + 24x^2$$

$$f''_{xy} = f''_{yx} = 8 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot (-1)$$

$$f''_{yy} = -4 \cdot 3(2x - y)^2 \cdot (-1) - 16$$

2. (Pl.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{(x-2)y^2}{x^2+y^2} + 6x + 3y, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- b) Hol differenciálható f ?

Megoldás:

a) Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_x(x, y) = \frac{y^2 (x^2 + y^2) - (x - 2) y^2 2x}{(x^2 + y^2)^2} + 6$

Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor a definícióval kell dolgozni:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{6h - 0}{h} = 6$$

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_y(x, y) = \frac{(x - 2) 2y (x^2 + y^2) - (x - 2) y^2 2y}{(x^2 + y^2)^2} + 3$

Ha $(x, y) = (0, 0)$, akkor most is a definícióval kell dolgozni:

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{-2k^2}{k^2} + 3k - 0}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{k} + 3 \right) \nexists$$

b) Az origóban nem deriválható totálisan a függvény, mert $f'_y(0, 0) \nexists$.

(Egyébként a függvény nem is folytonos itt, tehát ezért sem deriválható.)

Másutt deriválható, mert a parciálisok léteznek és folytonosak.

3. (Pl.)

$$f(x, y, z) = x^3 + y^4 + x^2 y e^{2z}$$

a) $\text{grad} f(-1, 1, 0) = ?$ Miért létezik?

b) $f'''_{xxz} = ?$ $f'''_{xzx} = ?$

Megoldás:

a) $f'_x = 3x^2 + 2xy e^{2z}$, $f'_y = 4y^3 + x^2 e^{2z}$, $f'_z = x^2 y e^{2z} 2$

A parciális deriváltak mindenütt léteznek és folytonosak, ezért $\text{grad} f$ mindenütt létezik.

$$\text{grad} f(-1, 1, 0) = f'_x(-1, 1, 0) \underline{i} + f'_y(-1, 1, 0) \underline{j} + f'_z(-1, 1, 0) \underline{k} = \underline{i} + 5 \underline{j} + 2 \underline{k}$$

b) $\begin{matrix} f''_{xx} & = & 6x + 2y e^{2z} \\ f'''_{xxz} & = & 4y e^{2z} \end{matrix} \quad \begin{matrix} f''_{xz} & = & 4x y e^{2z} \\ f'''_{xzx} & = & 4y e^{2z} \end{matrix}$

A parciálisok léteznek és folytonosak, így a "vegyes" parciálisok egyenlőek.

Érintősík, differenciál, iránymenti derivált

4. Pl.

$$f(x, y) = 3y + e^{xy^2} - 2y \arctg \frac{x}{y}, \quad P_0(0, 1)$$

a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$, ha $y \neq 0$

b) Írja fel a függvény P_0 pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

c) $df(P_0, (h, k)) = ?$

d) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$, ha $\underline{e} \parallel 2\underline{i} - 7\underline{j}$

e) $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!)

$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ?$ (és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!)

Megoldás:

a) $f'_x = y^2 e^{xy^2} - 2y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{1}{y},$

$$f'_y = 3 + 2xy e^{xy^2} - 2 \arctg \frac{x}{y} - 2y \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \frac{-x}{y^2},$$

b) $f'_x(0, 1) = -1$, $f'_y(0, 1) = 3$, $f(0, 1) = 4$

Az érintősík egyenlete:

($y \neq 0$ -ra $\exists$ a gradiens, így létezik az érintősík is.)

$$f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0) - (z - f(x_0, y_0)) = 0$$

Tehát $-1(x - 0) + 3(y - 1) - (z - 4) = 0$

c) $df((0, 1), (h, k)) = f'_x(0, 1)h + f'_y(0, 1)k = -h + 3k$

d) Mivel P_0 egy környezetében a függvény totálisan deriválható, ezért

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad } f(P_0) \cdot \underline{e}$$

$$|2\underline{i} - 7\underline{j}| = \sqrt{2^2 + 7^2} = \sqrt{53} \implies \underline{e} = \frac{2}{\sqrt{53}}\underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}}\underline{j}$$

$$\text{és } \operatorname{grad} f(0, 1) = -\underline{i} + 3\underline{j}$$

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = (-\underline{i} + 3\underline{j}) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{53}} \underline{i} - \frac{7}{\sqrt{53}} \underline{j} \right) = -\frac{2}{\sqrt{53}} - \frac{21}{\sqrt{53}} = -\frac{23}{\sqrt{53}}$$

e) Mivel: $\operatorname{grad} f(P_0) = (-1, 3)$ tehát

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (-1, 3) \text{ vektor irányába mutat}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -\sqrt{10}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (1, -3) \text{ vektor irányába mutat}$$

Összetett függvény deriválása

A keddiek tudjanak róla, hogy ez még nem volt előadáson és általánosságban nem is lesz.

Csak annyi lehet a célunk, hogy mechanikusan (az eddigi ismereteinkre támaszkodva) végezzük el a deriválásokat. Akit érdekel, a segéletből ellenőrizheti a dolgokat, de a BSc képzésbe nem tartozik bele ez a téma igazán.

6. (Pl.)

$$f \in C_{\mathbb{R}}^2; \quad g(x, y) = f(x^2 - y^3)$$

Határozza meg g másodrendű parciális deriváltjait!

Megoldás:

$$g(x, y) = f(t)|_{t=x^2-y^3} \quad \text{összetett függvényről van szó.}$$

$$g'_x = f'(t)|_{t=x^2-y^3} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 - y^3) \quad \text{alapján:}$$

$$g'_x = f'(x^2 - y^3) \cdot 2x$$

$$g'_y = f'(x^2 - y^3) \cdot (-3y^2)$$

$$g''_{xx} = \left(\frac{\partial}{\partial x} f'(x^2 - y^3) \right) \cdot 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} 2x \right) \quad \text{alapján:}$$

$$g''_{xx} = (f''(x^2 - y^3) \cdot 2x) \cdot 2x + f'(x^2 - y^3) \cdot 2$$

$$g''_{xy} = f''(x^2 - y^3) \cdot 2x \cdot (-3y^2) = g''_{yx}$$

$$g''_{yy} = f''(x^2 - y^3) \cdot (-3y^2) \cdot (-3y^2) + f'(x^2 - y^3) \cdot (-6y)$$

7. (Pl.)

Igazoljuk, hogy ha F az $(x^2 - y^2)$ -nek tetszőleges, folytonosan differenciálható függvénye, akkor az

$$f(x, y) = y F(x^2 - y^2)$$

kétváltozós függvény eleget tesz az

$$y^2 f'_x(x, y) + x y f'_y(x, y) = x f(x, y)$$

differenciálegyenletnek!

Megoldás:

$$f'_x = y F'(x^2 - y^2) 2x \quad f'_y = F(x^2 - y^2) + y F'(x^2 - y^2) (-2y)$$

A differenciálegyenlet bal oldalába helyettesítve:

$$y^2 y F'(x^2 - y^2) 2x + x y (F(x^2 - y^2) + y F'(x^2 - y^2) (-2y)) \stackrel{?}{=} x y F(x^2 - y^2)$$

Rendezve:

$$xyF(x^2 - y^2) \equiv xyF(x^2 - y^2)$$

Ez pedig igaz.

8. (Pl.)

$g_1(x)$ és $g_2(x)$ kétszer folytonosan differenciálható egyváltozós függvény $(g_1(x), g_2(x) \in C^2_{\mathbb{R}})$

$$h(x, y) = x \cdot g_1(y - x) + y \cdot g_2(x - y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Hozza egyszerűbb alakra a $h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy}$ kifejezést!

Megoldás:

$$h'_x = \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) \cdot g_1(y-x) + x \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} g_1(y-x) \right) + y \left(\frac{\partial}{\partial x} g_2(x-y) \right)$$

alapján:

$$h'_x = g_1(y-x) - x g'_1(y-x) + y g'_2(x-y)$$

$$h'_y = x g'_1(y-x) + g_2(x-y) - y g'_2(x-y)$$

$$2h''_{xy} = 2(g'_1(y-x) - x g''_1(y-x) + g'_2(x-y) - y g''_2(x-y))$$

$$h''_{xx} = -g'_1(y-x) - g'_1(y-x) + x g''_1(y-x) + y g''_2(x-y)$$

$$h''_{yy} = x g''_1(y-x) - g'_2(x-y) - g'_2(x-y) + y g''_2(x-y)$$

$\implies$

$$h''_{xx} + 2h''_{xy} + h''_{yy} \equiv 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Esetleg a g_1, g_2 függvények argumentumát ne írjuk ki mindenütt (sok idő), csak jegyezzük meg, hogy g_1 -et és deriváltjait az $(y-x)$ helyen, g_2 -öt és deriváltjait az $(x-y)$ helyen vesszük. (Így áttekinthetőbb is a deriválás menete.) A kifejezésbe való behelyettesítést adjuk fel házi feladatnak, hogy ne vigye el az időt!

A zh-ban csak ilyen jellegű összetett függvény deriválására adunk példát.

Ha maradna idő :-), csinálhatjuk pl. a következő példát!

(Persze más példák is csinálhatók, pl. a jegyzet végén levő példákból is lehet válogatni.)

Pl.

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 3y^4}$$

a) $f'_x(0, 0) = ?$; $f'_y(0, 0) = ?$
(A definícióval dolgozzon!)

b) Hol deriválható a függvény?
 $\text{grad } f|_{(1,2)} = ?$

c) Írja fel az $(1, 2)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősíks egyenletét!

d) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,2)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5 \underline{i}$

e) Adja meg $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,2)}$ értékét!

1. Szélsőértékszámítás

1. (Pl.)

$$f(x, y) = (x - 3y + 3)^2 + (x - y - 1)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$$f'_x = 2(x - 3y + 3) + 2(x - y - 1) = 0$$

$$f'_y = 2(x - 3y + 3)(-3) + 2(x - y - 1)(-1) = 0$$

Egy lineáris egyenletrendszerhez jutottunk most:

$$\left. \begin{array}{l} 4x - 8y + 4 = 0 \\ -8x + 20y - 16 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y = -1 \\ -2x + 5y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 3 \text{ és } y = 2$$

Tehát $P(2, 3)$ -ban teljesül a szükséges feltétel.

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} 4 & -8 \\ -8 & 20 \end{vmatrix} = 80 - 64 > 0$$

$$\Rightarrow \text{van lokális szélsőérték. } f''_{xx}(2, 3) = 4 > 0 \Rightarrow \text{lokális minimum van}$$

2. (Pl.)

$$f(x, y) = (x - y + 1)^2 - (x^2 - 2)^2$$

Keresse meg az f függvény lokális szélsőértékeit!

Megoldás:

$$f'_x = 2(x - y + 1) - 2(x^2 - 2) \cdot 2x = 2 + 10x - 4y^3 - 2y = 0 \quad (1)$$

$$f'_y = 2(x - y + 1)(-1) = 0 \quad (2)$$

$$(2)\text{-ből: } y = x + 1 \quad \text{Ezt behelyettesítve (1)-be: } 4x(x^2 - 2) = 0$$

Így 3 pontot kapunk, melyekben teljesül a szükséges feltétel, így lehet lokális szélsőérték:

$$P_1(0, 1), \quad P_2(\sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}), \quad P_3(-\sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$$

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 - 12x^2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 16 - 24x^2$$

$$D(0, 1) = 16 > 0, \quad f''_{xx} = 18 > 0 \implies \text{lokális minimum van } (0, 1)\text{-ben} \\ f(0, 1) = -4 \text{ értékkel.}$$

$$D|_{P_2} < 0, \quad D|_{P_3} < 0 \implies P_2\text{-ben és } P_3\text{-ban nincs lokális szélsőérték.}$$

3. (Pl.)

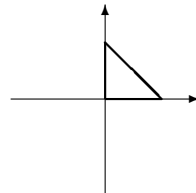
$$f(x, y) = x^3 y^5$$

a) Keresse meg az f függvény abszolút szélsőértékét az $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ pontokkal kijelölt háromszög alakú zárt halmazon!

b) Van-e lokális szélsőértéke f -nek, ha $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

Megoldás:

$$\text{a) } \left. \begin{aligned} f'_x &= 3x^2 y^5 = 0 \\ f'_y &= 5x^3 y^4 = 0 \end{aligned} \right\} x = 0 \text{ vagy } y = 0.$$



Tehát az $(x, 0)$ és a $(0, y)$ pontokban lehet lokális szélsőértéke. (Itt teljesül a szükséges feltétel.)

$f(x, y) > 0$ a tartomány belsejében,

$$f(x, y) = 0 \text{ a tengelyeken } (f(x, 0) = 0, f(0, y) = 0) \\ \implies \min f = 0.$$

Weierstrass II. tétele alapján f -nek van maximuma is, mert folytonos és a tartomány korlátos és zárt (kompakt halmaz). A maximumot csak a tartomány határán veheti fel. Már csak az $y = 1 - x$ jöhet szóba.

$$g(x) := f(x, 1 - x) = x^3 (1 - x)^5, \quad x \in [0, 1]$$

$g(0) = g(1) = 0$, így nem lehet maximum.

Valahol az intervallum belsejében kell megtalálnunk a maximumot.

$$g'(x) = 3x^2 (1 - x)^5 + x^3 5(1 - x)^4 (-1) = x^2 (1 - x)^4 (3 - 8x) = 0$$

$$\implies x = \frac{3}{8}, \quad y = \frac{5}{8}$$

$$\text{Így a keresett maximális függvényérték: } f\left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right) = \frac{3^5 5^5}{8^8}$$

- b) Lokális szélsőérték csak a tengelyeken lehetne. A tételünket most nem tudnánk alkalmazni, mert $D(x, 0) = 0$ és $D(0, y) = 0$ lenne esetünkben. Vizsgáljuk a függvényértékek előjelét!

$$\left. \begin{array}{ccccccc} & & & y & & & \\ & & & \uparrow & & & \\ & - & - & - & + & + & + \\ & - & - & - & 0 & + & + & + \\ & - & - & - & 0 & + & + & + \\ & - & - & - & 0 & + & + & + \\ + & + & + & 0 & 0 & 0 & 0 & - \\ + & + & + & 0 & - & - & - & - \\ + & + & + & 0 & - & - & - & - \\ + & + & + & 0 & - & - & - & - \end{array} \right\} \text{ A függvényérték előjele.}$$

A tengelyeken a függvényérték nulla. De a tengelyek bármely pontjának minden környezetében felvesz a függvény pozitív és negatív értéket is, így a függvénynek sehol sincs lokális szélsőértéke.

2. Fourier sor

4. (Pl.)

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ) !

$$f(x) = \begin{cases} 5, & \text{ha } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{ha } x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját! $\phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = ?$, $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

Megoldás:

Rajzoljuk fel a függvényt!

Bevezető:

Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0, 2\pi]}$, akkor f Fourier sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

a_k, b_k neve: Fourier együtthatók. Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

A konvergenciára vonatkozó általunk használt elégséges tétel:

Dirichlet tétel (egy elégséges tétel a Fourier sor konvergenciájára)

(T) Ha az f függvény 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, a periodus felbontható véges sok (α, β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban $\exists$ a véges határérték, akkor f Fourier sora minden x -re konvergens, és

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

A feladat megoldása:

Most $a = -\pi$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, dx ; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$b_k = 0$, mert a függvény páros. (Indokoljuk meg, hogy miért!)

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x)}_{\text{páros}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \, dx \right) = \dots = 5$$

$k \geq 1$ esete:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \underbrace{f(x) \cos kx}_{\text{páros}} \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx \, dx = \\ &= \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\pi/2} 5 \cos kx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} 0 \, dx \right) = \frac{2}{\pi} 5 \left. \frac{\sin kx}{k} \right|_0^{\pi/2} = \\ &= \frac{10}{\pi} \frac{1}{k} \left(\sin k \frac{\pi}{2} - 0 \right) \end{aligned}$$

Tehát:

$$a_k = \frac{10}{\pi} \frac{1}{k} \cdot \begin{cases} 0, & \text{ha } k = 2l \\ 1, & \text{ha } k = 4l + 1 \\ -1, & \text{ha } k = 4l + 3 \end{cases}$$

Így a Fourier sor:

$$\phi(x) = \frac{5}{2} + \frac{10}{\pi} \left(\frac{1}{1} \cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \frac{1}{7} \cos 7x + - \dots \right)$$

$$\phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \quad \text{miatt} \quad \phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{0+5}{2}$$

5. (Pl.)

$$f(x) = x, \quad \text{ha } 0 < x \leq 2\pi \quad \text{és} \quad f(x+2k\pi) = f(x) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a) Határozza meg f Fourier sorát!

Jelölje a Fourier sor összegfüggvényét $\phi(x)$! $f(x) = \phi(x)$ milyen x -ekre igaz?
Egyenletesen konvergens-e a Fourier sor?

b) A Fourier sor segítségével határozza meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$ numerikus sor összegét!

Megoldás:

a) Rajzoljuk fel a függvényt!

Most $a = 0$ választás célszerű.

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx \, dx; \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \, dx = \dots = 2\pi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\cos kx}_{v'} \, dx = \dots = 0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{x}_u \underbrace{\sin kx}_{v'} \, dx = \dots = -\frac{2}{k}$$

$$\phi(x) = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$$

Dirichlet tétele alapján: $f(x) = \phi(x)$, ha $x \neq 2k\pi$ és $\phi(2k\pi) = \pi$.

A konvergencia nem egyenletes, mert bár az f_n függvények folytonosak, de az összegfüggvény (ϕ) nem folytonos.

b) $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ alapján:

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \frac{\pi}{2}}{k}$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \left(1 + 0 - \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{7} + \dots \right)$$

$$\frac{\pi}{2} = \pi - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

Ⓜ A Fourier sort ügyesebben is felírhattuk volna az alábbi ötlettel:

$g_1(x) := f(x) - \pi$. Ez már majdnem páratlan függvény. Ha a szakadási pontokban megváltoztatjuk a függvényértéket 0-ra, akkor az így kapott, mondjuk g függvény már páratlan, így a sorfejtése sokkal rövidebb. Mivel g és g_1 függvény Fourier sora megegyezik, így ebből már f fourier sora π hozzáadásával megkapható.

További példák, ha maradna idő.

6. Ⓟ

$$f(x, y) = y^3 - 12y + 2(x + y)^2 - 8(x + y)$$

- a) Határozza meg a függvény lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!
b) $df((5, -1), (h, k)) = ?$

Megoldás:

...

7. Ⓟ

Határozza meg az alábbi függvény Fourier sorát (összegfüggvénye legyen ϕ)!

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x \in [-\pi, -\pi/2] \cup [\pi/2, \pi] \\ 0, & \text{ha } x \in (-\pi/2, \pi/2) \end{cases} \quad f(x) = f(x + 2\pi), \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\phi(x) = ?$$

Megoldás:

...

1. (Pl.)

$$f(x, y) = \frac{y^3}{e^{2x+1}} = y^3 e^{-2x-1}; \quad P_0(-\frac{1}{2}, 1)$$

$$\text{a) } \max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ? \quad (\text{és adja meg a maximumhoz tartozó irányt!})$$

$$\text{b) } \min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ? \quad (\text{és adja meg a minimumhoz tartozó irányt!})$$

Megoldás:

$$f'_x = y^3 e^{-2x-1}(-2), \quad f'_x(-\frac{1}{2}, 1) = -2, \quad f'_y = 3y^2 e^{-2x-1}, \quad f'_y(-\frac{1}{2}, 1) = 3$$

 f'_x, f'_y mindenütt folytonos $\Rightarrow f$ totálisan deriválható P_0 egy környezetében (sőt mindenütt) $\Rightarrow P_0$ -ban $\exists$ minden irányban az iránymenti derivált és:

$$\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad } f(P_0) \cdot \underline{e} = |\text{grad } f(P_0)| \cdot |\underline{e}| \cdot \cos \varphi, \quad \text{és} \quad |\underline{e}| = 1$$

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = |\text{grad } f(P_0)|;$$

ha $\cos \varphi = 1 \Rightarrow \varphi = 0 \Rightarrow \underline{e}$ iránya $\text{grad } f(P_0)$ irányával egyenlő

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -|\text{grad } f(P_0)|;$$

ha $\cos \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = \pi \Rightarrow \underline{e}$ iránya $\text{grad } f(P_0)$ irányával ellentétesMost: $\text{grad } f(P_0) = (-2, 3)$ tehát

$$\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(-\frac{1}{2}, 1)} = \sqrt{(-2)^2 + 3^2} = \sqrt{13}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (-2, 3) \text{ vektor irányába mutat}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(-\frac{1}{2}, 1)} = -\sqrt{13}, \quad \text{ha } \underline{e} \text{ a } (2, -3) \text{ vektor irányába mutat}$$

2. (Pl.)

$$f(x, y) = \frac{5x - 3y}{2x + 4y} \quad (x_0, y_0) = (0, 1)$$

$$\text{a) } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$$

$$\text{b) } \text{grad } f(x_0, y_0) = ? \quad df((x_0, y_0), (h, k)) = ?$$

c) Milyen irányban lesz az (x_0, y_0) pontban az iránymenti derivált maximális? Adja meg ezt a maximális értéket is!

Megoldás:

a) Iterált limeszekkel célszerű megoldani.

...

3. (Pl.)

$$f(x, y) = (2x - y)^2 + 4x^2 - 8y$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)
- c) Írja fel a függvény $P_0(1, 2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

Megoldás:

...

4. (Pl.)

$$f(x, y) = \sqrt[3]{4x^3 + 3y^2}$$

- a) $f'_x(x, y) = ?$; $f'_y(x, y) = ?$
- b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

Megoldás:

...

5. (Pl.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?
- b) $f'_x(0, 0) = ?$ (A definícióval dolgozzon!)
- c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

Megoldás:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{\sqrt{y^2 + 2x^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(y^2 + 2x^2)}{y^2 + 2x^2} \sqrt{y^2 + 2x^2} = \\ &= 1 \cdot 0 = 0 = f(0,0) \end{aligned}$$

Tehát f folytonos $(0,0)$ -ban.

$$\begin{aligned} \text{b) } f'_x(0,0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 2h^2}{\sqrt{2h^2}} - 0}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin 2h^2}{2h^2} \sqrt{2} \frac{|h|}{h} = \nexists \end{aligned}$$

c) Mivel $f'_x(0,0) \nexists$, f nem deriválható az origóban.

6. Pl.

$$f(x, y, z) = x^2y + yz - 5z^2, \quad P_0(0, 10, 1)$$

a) $\text{grad} f = ?$ Miért létezik a gradiens?

$$\text{b) } \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = ? , \quad \text{ha } \underline{e} \parallel -3\underline{j} + 4\underline{k}$$

Megoldás:

$$\text{a) } f'_x = 2xy, \quad f'_y = x^2 + z, \quad f'_z = y - 10z$$

A parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak $\implies \text{grad} f$ mindenütt $\exists$.

$$\begin{aligned} \text{b) } \text{grad} f \exists K_{P_0}\text{-ban} &\implies \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} = \\ &= (0\underline{i} + \underline{j} + 0\underline{k}) \cdot (0\underline{i} - \frac{3}{5}\underline{j} + \frac{4}{5}\underline{k}) = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

7. (Pl.)

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ -3 & , \text{ ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = ?$ Folytonos-e f az origóban?
- b) $f'_x(x, y) = ?$, $f'_y(x, y) = ?$ (Az origóban a definícióval dolgozzon!)
- c) $\left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)} = ?$, ha $\underline{e} \parallel -5\underline{i} + \underline{j}$
- d) Adja meg $\max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)}$ és $\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,-1)}$ értékét!
- e) Írja fel az $(1, -1)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás:

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3y^2}{2x^2 + y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-3y^2}{y^2} = -3 \neq \frac{1}{2}$$

Tehát a keresett határérték nem létezik.

$\implies$ A függvény nem folytonos az origóban.

b) Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_x(x, y) = \frac{2x(2x^2 + y^2) - (x^2 - 3y^2)4x}{(2x^2 + y^2)^2}$

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{h^2}{2h^2} + 3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7}{2h} = \nexists$$

Ha $(x, y) \neq (0, 0)$: $f'_y(x, y) = \frac{-6y(2x^2 + y^2) - (x^2 - 3y^2)2y}{(2x^2 + y^2)^2}$

$$f'_y(0, 0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(0, k) - f(0, 0)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\frac{-3k^2}{k^2} + 3}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{0}{k} = 0$$

c) A $(0, 0)$ kivételével a parciálisok léteznek és folytonosak $\implies \text{grad} f \ni$ itt.

Mivel $\text{grad} f \ni K_{P_0}$ -ban $\implies \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = \text{grad} f(P_0) \cdot \underline{e} =$

$$= \left(\frac{14}{9}\underline{i} + \frac{14}{9}\underline{j}\right) \cdot \left(-\frac{5}{\sqrt{26}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{26}}\underline{j}\right) = -\frac{14}{9} \frac{5}{\sqrt{26}} + \frac{14}{9} \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{-56}{9 \cdot \sqrt{26}}$$

$$\text{d) } \max \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = |\text{grad}f(P_0)| = \sqrt{\left(\frac{14}{9}\right)^2 + \left(\frac{14}{9}\right)^2} = \frac{14}{9} \sqrt{2},$$

$$\text{ha } \underline{e} = \frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$$

$$\min \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{P_0} = -|\text{grad}f(P_0)| = -\frac{14}{9} \sqrt{2},$$

$$\text{ha } \underline{e} = -\frac{\text{grad}f(P_0)}{|\text{grad}f(P_0)|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$$

$$\text{e) } f(1, -1) = \frac{-2}{3}$$

Az érintősík egyenlete így:

$$\frac{14}{9}(x-1) + \frac{14}{9}(y+1) - \left(z + \frac{2}{3}\right) = 0$$

8. (Pl.)

$$f(x, y) = \frac{e^{3y}}{x^4 + 1}$$

$$\text{a) } f'_x(x, y) = ? , \quad f'_y(x, y) = ?$$

$$\text{b) } \left. \frac{df}{d\underline{e}} \right|_{(1,0)} = ? , \text{ ha } \underline{e} \parallel 2\underline{i} - 3\underline{j}$$

c) Írja fel az $(1, 0)$ ponthoz tartozó felületi pontban az érintősík egyenletét!

Megoldás:

...

9. (Pl.)

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- a) Folytonos-e f az origóban?
 b) Írja fel az f'_x és f'_y függvényeket, ahol azok léteznek!
 (Az origóban a definícióval dolgozzon!)

Megoldás:

...

10. (Pl.)

Számítsa ki az

$$A = g''_{xx}(2, 1) + g''_{xy}(2, 1) - 2g''_{yx}(2, 1)$$

kifejezés értékét, ahol $g(x, y) = f(x^2 - y)$ és f -nek a $t_0 = 3$ körüli másodrendű Taylor polinomja

$$T_2(t) = 1 - (t - 3) + 5(t - 3)^2$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} f'(3) &= -1 & f''(3) &= 10 \\ g'_x &= f'(x^2 - y) \cdot 2x & g''_{xx} &= f''(x^2 - y) \cdot 2x \cdot 2x + f'(x^2 - y) \cdot 2 \\ g''_{xy} &= f''(x^2 - y) \cdot 2x \cdot (-1) = g''_{yx} \\ g''_{xx}(2, 1) &= f''(3) \cdot 4^2 + f'(3) \cdot 2 = 158 \\ g''_{xy}(2, 1) &= f''(3) \cdot (-4) = -40 \\ A &= 158 - (-40) = 198 \end{aligned}$$

11. (Pl.)

$g \in C^2_{\mathbb{R}}$ változója helyébe írjunk $\frac{x}{2y}$ -t ($y \neq 0$) és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x, y)$ -nal!

Adja meg $y \neq 0$ esetére az alábbi parciális deriváltakat!

$$\begin{aligned} f'_x(x, y) &= ?, & f'_y(x, y) &= ? \\ f''_{xy}(x, y) &= ?, & f''_{yx}(x, y) &= ? \end{aligned}$$

Megoldás:

...

12. (Pl.)

$g \in C_{\mathbb{R}}^2$ változója helyébe írjunk $\frac{2x}{y^2+1}$ -et és jelöljük az így kapott kétváltozós függvényt $f(x, y)$ -nal!

$$f'_x(x, y) = ?, \quad f'_y(x, y) = ?, \quad f''_{xy}(x, y) = ?$$

Megoldás:

...

Néhány példa a Taylor sorfejtéshez:

13. (Pl.)

Határozza meg az alábbi függvénysorok összegfüggvényét és konvergenciasugarát!

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)x^{2k} = f_1(x), \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} (2k+1)x^{2k+1} = f_2(x)$$

Megoldás:

...

14. (Pl.)

Írja fel az alábbi függvény megadott x_0 pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg a sor konvergencia tartományát!

$$a) f(x) = \frac{x}{4+8x^2}, \quad x_0 = 0 \quad b) g(x) = \frac{1}{4+x}, \quad x_0 = -2$$

Megoldás:

$$a) f(x) = \frac{x}{4+8x^2} = \frac{x}{4} \frac{1}{1-(-2x^2)} = \frac{x}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-2x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-2)^n}{4}}_{=(-2)^{n-2}} x^{2n+1}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = |-2x^2| = 2|x|^2 < 1 \implies |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad R_f = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } g(x) &= \frac{1}{2 + (x+2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \left(-\frac{x+2}{2}\right)} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{x+2}{2}\right)^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (x+2)^n \end{aligned}$$

Konvergenciatartomány:

$$|q| = \left| -\frac{x+2}{2} \right| = \frac{|x+2|}{2} < 1 \implies |x+2| < 2, \quad R_g = 2$$

15. (Pl.)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \operatorname{ch}(4x^2),$$

$$g(x) = \sqrt[5]{1+3x}$$

$$h(x) = \frac{1}{1+3x}$$

Mindhárom esetben írja le az a_4 együttható értékét elemi műveletekkel!

Megoldás:

...

16. (Pl.)

a) Adja meg az alábbi függvények megadott pontra támaszkodó Taylor sorát és annak konvergencia tartományát!

$$a1) \quad f(x) = x^3 e^{-2x}, \quad x_0 = 0$$

$$a2) \quad g(x) = e^{-2x}, \quad x_0 = 4$$

b) Számítsa ki az

$$\int_0^{0,1} f(x) \, dx$$

integrál értékét közelítően az integrálandó függvényt hatodfokú Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

Megoldás:

...

17. (Pl.)

$$f(x) = \sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{4}} + \operatorname{sh} 2x - 2$$

- a) A megfelelő Taylor sorfejtések segítségével írja fel az f függvény $x_0 = 0$ körüli ötödfokú Taylor polinomját!
(Az együtthatókat elemi műveletekkel adja meg, de nem kell kiszámítani!)
- b) Határozza meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának konvergencia sugarát!

Megoldás:

...

18. (Pl.)

- a) Határozza meg az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 + 4x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és annak konvergencia sugarát!

- b) $f^{(6)}(0) = ?$, $f^{(7)}(0) = ?$

(A sorfejtésből adjon választ és elemi műveletekkel adja meg az értékeket!)

Megoldás:

...

A tartományokat mindig rajzoljuk fel és jelöljük be, hogy mi szerint integrálunk belül!

1. Kétszeres integrál téglalap- és normáltartományokon

1. (Pl.)

$$\iint_T x \sin xy \, dT = ?,$$

ha T az $1 \leq x \leq 3$, $0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}$ téglalaptartomány.

1. ábra

Megoldás:

A függvény folytonos, ezért mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz. De, ha először x szerint integrálunk, akkor parciális integrál lenne, ezért próbáljuk meg a másik sorrendet!

$$\begin{aligned} \int_1^3 \int_0^{\pi/2} x \sin xy \, dy \, dx &= \int_1^3 -\cos xy \Big|_{y=0}^{\pi/2} \, dx = \\ \int_1^3 \left(-\cos \frac{\pi}{2} x + 1 \right) \, dx &= -\frac{\sin \frac{\pi}{2} x}{\frac{\pi}{2}} + x \Big|_1^3 = \dots = 2 + \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

2. (Pl.)

$$\iint_T x \, dT = ?,$$

ha T az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ által határolt korlátos tartomány.

2. ábra

Megoldás:

A két görbe metszéspontjai: a $(-1, 1)$, $(2, 4)$ pontok és az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_{-1}^2 \int_{y=x^2}^{x+2} x \, dy \, dx = \int_{-1}^2 -x y \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \int_{-1}^2 (x(x+2) - x^3) \, dx = \dots = \frac{9}{4}$$

A végét már nem kell részletezni!

3. (Pl.)

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2} \, dT = ?,$$

ha az első síknegyedbe eső korlátos T tartomány:

$$y \geq \frac{1}{x}, \quad y \leq x \quad \text{és} \quad 1 \leq x \leq 2$$

3. ábra

Megoldás:

Az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_1^2 \int_{y=1/x}^x \frac{x^2}{y^2} \, dy \, dx = \int_1^2 -\frac{x^2}{y} \Big|_{1/x}^x dx = \int_1^2 (-x + x^3) \, dx = \dots = \frac{9}{4}$$

A végét már nem kell részletezni!

4. (Pl.)

Cserélje fel az integrálás sorrendjét!

$$\text{a) } I_1 = \int_{x=-1}^0 \int_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{1-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{x=0}^{\sqrt{2}} \int_{y=0}^{x^2} f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=\sqrt{2}}^2 \int_{y=0}^2 f(x, y) \, dy \, dx + \int_{x=2}^4 \int_{y=0}^{4-x} f(x, y) \, dy \, dx$$

Megoldás:

A tartományokat feltétlenül rajzoljuk fel!

$$\text{a) } I_1 = \int_{y=0}^1 \int_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f(x, y) \, dx \, dy$$

$$\text{b) } I_2 = \int_{y=0}^2 \int_{x=\sqrt{y}}^{4-y} f(x, y) \, dx \, dy$$

5. Pl.

$$\int_0^1 \int_{y^2}^1 y \sin x^2 \, dx \, dy = ?$$

Megoldás:

Nem tudunk primitív függvényt felírni x szerint, ezért először y szerint próbálunk integrálni:

A kiindulás: $y^2 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$ Ábra:....

Felcserélve a sorrendet: $0 \leq y \leq \sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1$

$$\begin{aligned} I &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{\sqrt{x}} y \sin x^2 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \left. \frac{y^2}{2} \right|_0^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 x \sin x^2 \, dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_{x=0}^1 2x \sin x^2 \, dx = \frac{1}{4} [-\cos x^2]_0^1 = \frac{1}{4} (-\cos 1 + 1) \end{aligned}$$

2. Kettős integrálok transzformációja

Az előadásokon még nem szerepelt. Ezért kérjük, hogy részletesen beszéljenek a helyettesítés technikájáról majd a polártranszformációról. A Jacobi determinánst is célszerű levezetni. A példáknál mindig rajzolják fel a tartományt és a határokat részletesen beszéljék meg! A példákat nem mindig kell részletesen végigcsinálni. Elég néha csak megbeszélni az integrálási technikát és felírni a végeredményt.

6. (Pl.)

$$\iint_T y^2 \, dT = ?,$$

ha $T : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x$

Megoldás:

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^2 r^2 \sin^2 \varphi \underbrace{r}_{|J|} \, dr \, d\varphi = \int_{r=0}^2 r^2 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\sin^2 \varphi}_{\frac{1 - \cos 2\varphi}{2}} \, d\varphi = \\ &= \frac{r^4}{4} \Big|_0^2 \cdot \left(\frac{1}{2} \varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4} \right) \Big|_0^{\pi/4} = 4 \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

7. (Pl.)

$$\iint_T x^2 y \, dT = ?,$$

ha $T : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \geq 0, x \geq 0$

Megoldás:

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^2 r^2 \cos^2 \varphi \, r \sin \varphi \, r \, dr \, d\varphi = \int_{r=1}^2 r^4 \, dr \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2 \varphi \sin \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{r^5}{5} \Big|_1^2 \cdot \left(-\frac{\cos^3 \varphi}{3} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{3} \right) \left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5} \right) = \frac{31}{15} \end{aligned}$$

8. (Pl.)

Határozza meg annak a síkrésznek a területét, amelyet a következő egyenlőtlenségek meghatároznak!

$$x^2 + y^2 \geq 4x, \quad x^2 + y^2 \leq 8x, \quad y \leq \sqrt{3}x, \quad y \geq x$$

Megoldás:

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\begin{aligned} \text{terület} &= \iint_T 1 \, dT = \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \int_{r=4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{4 \cos \varphi}^{8 \cos \varphi} d\varphi = 24 \int_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \dots \end{aligned}$$

Nem kell befejezni!

9. (Pl.)

$$\iint_T f \, dT = ?,$$

$$\text{ha } T : \quad x^2 - 4x + y^2 \leq 0, \quad 0 \leq y \quad \text{és}$$

$$\text{a) } f(x, y) = y (x^2 + y^2)^3$$

$$\text{b) } f(x, y) = (x^2 - 4x + y^2)^5$$

Megoldás:

$$\text{a) } x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J| = r, \quad 0 \leq r \leq 4 \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi/2$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{4 \cos \varphi} r \sin \varphi (r^2)^3 r \, dr \, d\varphi = (\text{innen HF.}) = \frac{4^9}{90}$$

$$\text{b) } x = 2 + r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad |J| = r, \quad 0 \leq r \leq 2, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$x^2 - 4x + y^2 = (x - 2)^2 + y^2 - 4 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi - 4 = r^2 - 4$$

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{r=0}^2 (r^2 - 4)^5 r \, dr \, d\varphi = \dots = -\frac{4^6 \pi}{12}$$

12. gyakorlat

Gyakorlatanyag hármasintegrálból

1. feladat

$$I = \int_V xy^2 z^3 dV = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = xy, (\text{felület}) \quad z = 0, \quad x = 1, \quad y = 0, \quad y = x \quad (\text{síkok})$$

Megoldás.

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\text{háromszög}} \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 dz dy dx = \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x \int_{z=0}^{xy} xy^2 z^3 dz dy dx = \\ &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x xy^2 \left[\frac{z^4}{4} \right]_{z=0}^{z=xy} dy dx = \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^x x^5 y^6 dy dx = \\ &= \frac{1}{4} \int_{x=0}^1 x^5 \left[\frac{y^7}{7} \right]_{y=0}^{y=x} dx = \frac{1}{4 \cdot 7} \int_{x=0}^1 x^{12} dx = \frac{1}{364} \end{aligned}$$

2. feladat

$$I = \int_V \sqrt{x^2 + y^2} dV = ?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{kúp}) \quad \text{és a} \quad z = 1 \quad (\text{sík})$$

Megoldás.

A térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

Hengerkoordináták:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z, \quad r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi)$$

A Jacobi determináns abszolútértéke: $|J| = r$

$$\begin{aligned} I &= \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} \sqrt{x^2+y^2} dz dT = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^1 r \cdot |J| dz dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=r}^1 r^2 dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 [z]_r^1 dr d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 r^2 (1-r) dr d\varphi = \dots = \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

3. feladat

Számolja ki az $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$ valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V 1 \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} \int_{z=0}^{z=2-x-y} 1 \, dz \, dT = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{z=2-r \cos \varphi - r \sin \varphi} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=0}^{z=2-r \cos \varphi - r \sin \varphi} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 [z]_{z=0}^{z=2-r \cos \varphi - r \sin \varphi} r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^1 (2 - r \cos \varphi - r \sin \varphi) r \, dr \, d\varphi = \dots = 2\pi \end{aligned}$$

4. feladat

Számolja ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

A kúp és a paraboloid által határolt térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2 + y^2 = R^2, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

A vetület a metszetgörbe vetülete, ezért az $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x^2 - y^2$, azaz a $\sqrt{R^2} = 6 - R^2$ egyenletből számoljuk a vetületi kör sugarát: $R = 6 - R^2$, azaz $R = 2$ ($R = -3$ nem lehet a sugár).

$$\begin{aligned} V &= \iiint_V 1 \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 4} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6-x^2-y^2} 1 \, dz \, dT = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r}^{z=6-r^2} 1 \cdot |J| \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 \int_{z=r}^{z=6-r^2} r \, dz \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 [z]_{z=r}^{z=6-r^2} r \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{r=0}^2 (6 - r^2 - r) r \, dr \, d\varphi = \dots = 32\pi/3 \end{aligned}$$

5. feladat

$$I = \int_V xyz \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ tényolcadba eső része.

Megoldás.

Gömbi koordinátákkal dolgozunk.

Jelöljük az (x, y, z) pontba mutató helyvektor hosszát r -rel, a z tengely pozitív szárával bezárt szögét ϑ -val! Így $z = r \cos \vartheta$.

Legyen továbbá a helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének az x tengely pozitív szárával bezárt szöge φ . A helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének a hossza $r \sin \vartheta$, így $x = r \sin \vartheta \cos \varphi$, $y = r \sin \vartheta \sin \varphi$.

A geometriai megfontolásból kapjuk, hogy $r \geq 0, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq \vartheta \leq \pi$.

A gömbi koordinátákhoz tartozó Jacobi determináns abszolútértéke $|J| = r^2 \sin \vartheta$.
(A vizsgán vagy megadjuk ezt a $|J|$ -t, vagy pedig ki kell számolni)

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V xyz \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dT = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} (r \sin \vartheta \cos \varphi \, r \sin \vartheta \sin \varphi \, r \cos \vartheta) \cdot |J| \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} (r \sin \vartheta \cos \varphi \, r \sin \vartheta \sin \varphi \, r \cos \vartheta) r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} r^5 \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \cos \varphi \sin \varphi \, d\vartheta \, dr \, d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos \varphi \sin \varphi \, d\varphi \int_0^1 r^5 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin^3 \vartheta \cos \vartheta \, d\vartheta = \\ &= \left[\frac{\sin^2 \varphi}{2} \right]_0^{\pi/2} \left[\frac{r^6}{6} \right]_0^1 \left[\frac{\sin^4 \vartheta}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{48} \end{aligned}$$

6. feladat

Számolja ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát!

Megoldás.

A térrész az egységgömbben van. Gömbkoordinátákkal dolgozunk.

A $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületnél : $\vartheta = \pi/4$

a $z = \sqrt{3} \sqrt{x^2 + y^2}$ kúpfelületnél pedig: $\vartheta = \pi/6$.

$$V = \iiint_V 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\pi/6}^{\pi/4} r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[r^3/3 \right]_0^1 \left[-\cos \vartheta \right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2\pi}{3} \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$$

További feladatok

1. feladat

Számolja ki a $(x-2)^2 + y^2 = 4$ egyenletű henger és a $z = 0$ sík valamint a $z = x^2 + y^2$ egyenletű paraboloid által határolt térrész térfogatát!

2. feladat

$$I = \int_V 2z \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $z \leq 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z \geq 2$ egyenlőtlenségekkel jellemzett.

3. feladat

$$I = \int_V xy^2 z^3 \, dV = ?$$

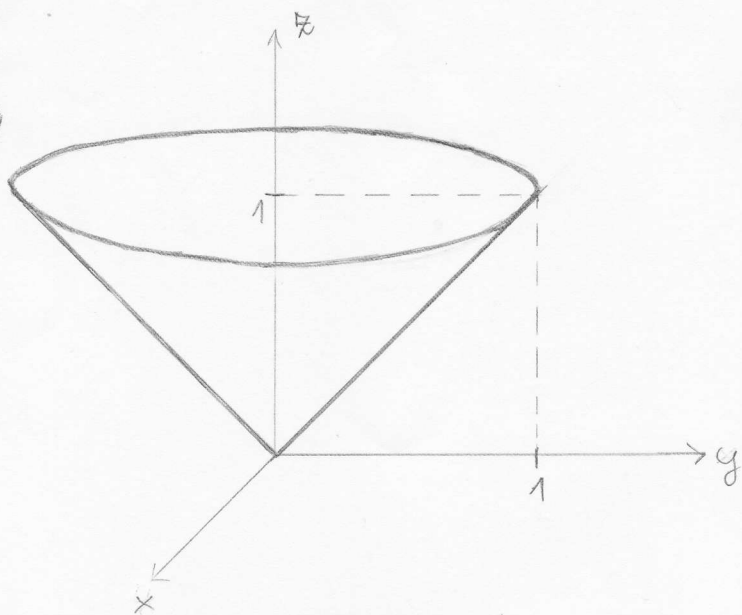
Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ és a $z \geq \sqrt{3x^2 + 3y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Gömbi trafo.)

5. feladat

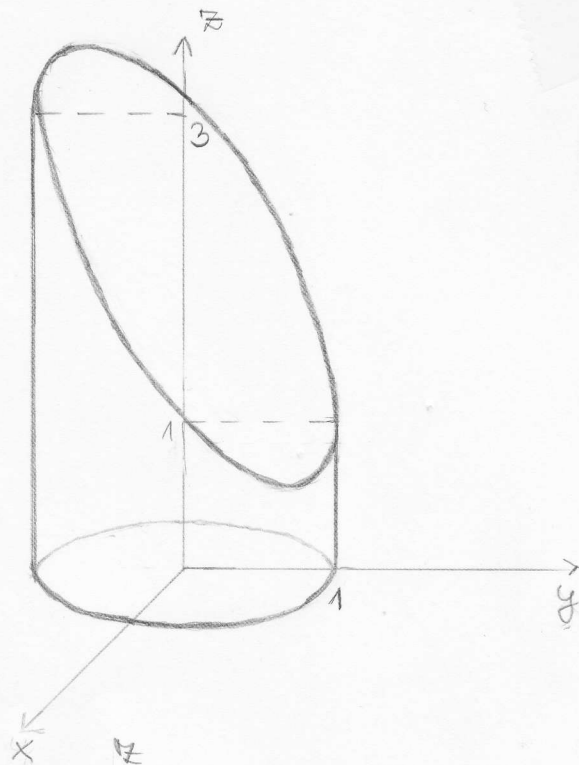
$$I = \int_V x^2 z \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és a $z \geq \frac{x^2 + y^2}{3}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Henger trafo.)

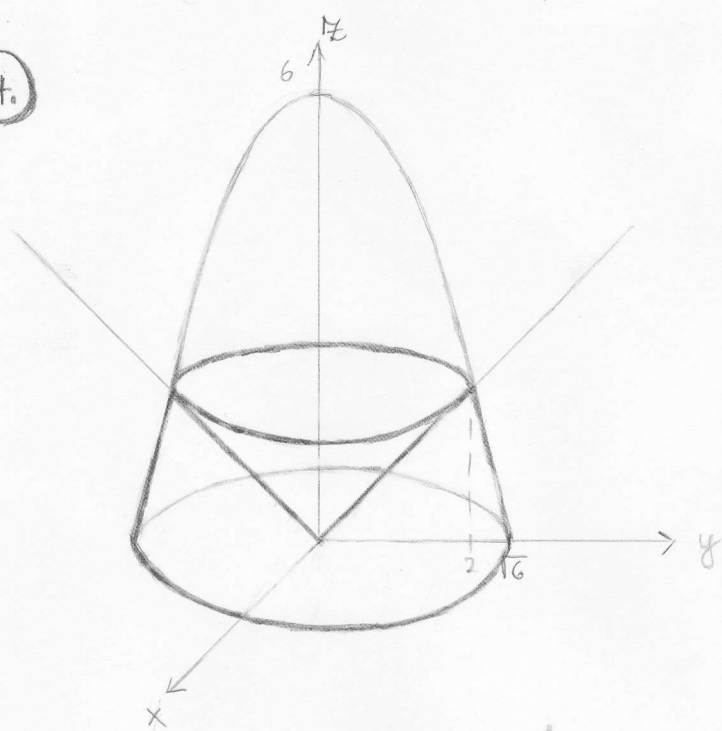
2.



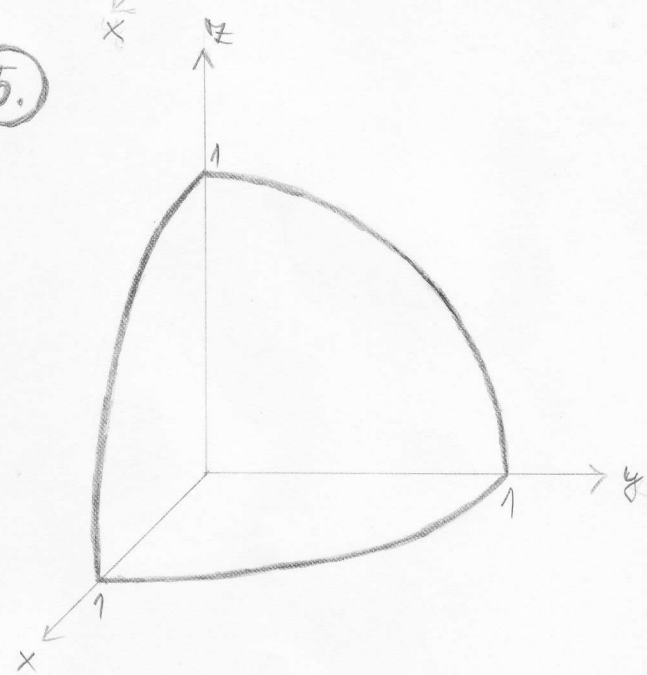
3.



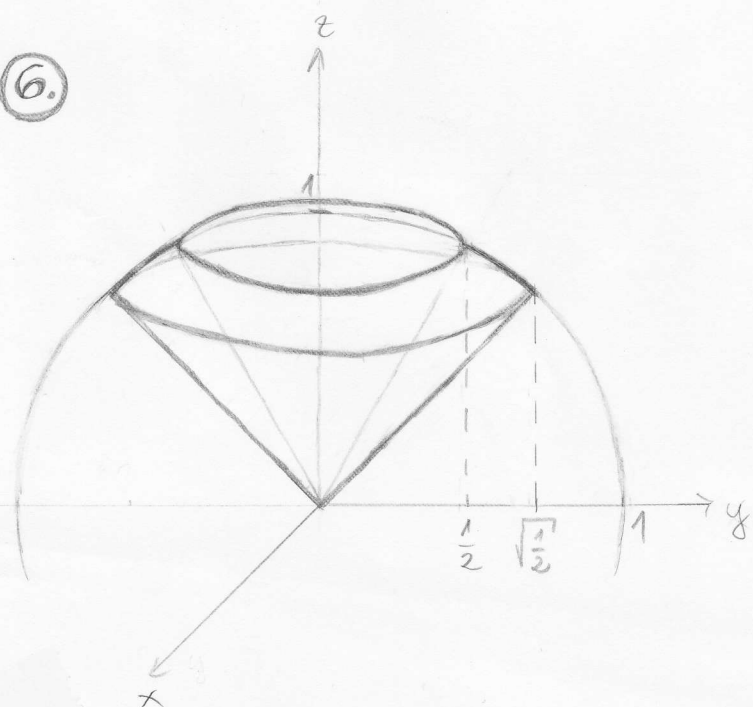
4.



5.

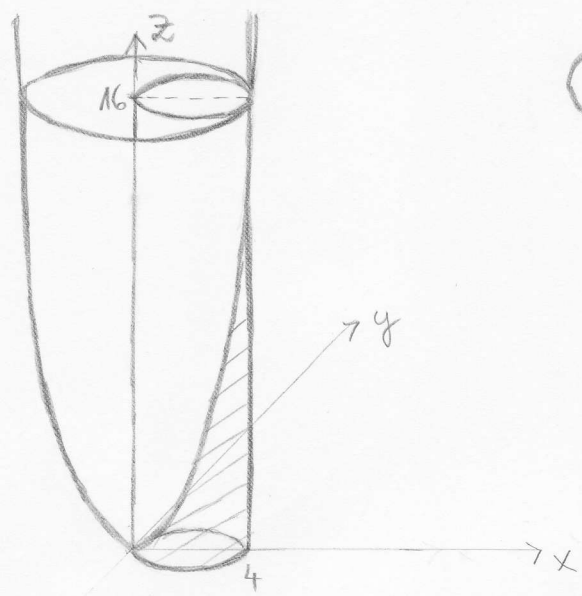


6.

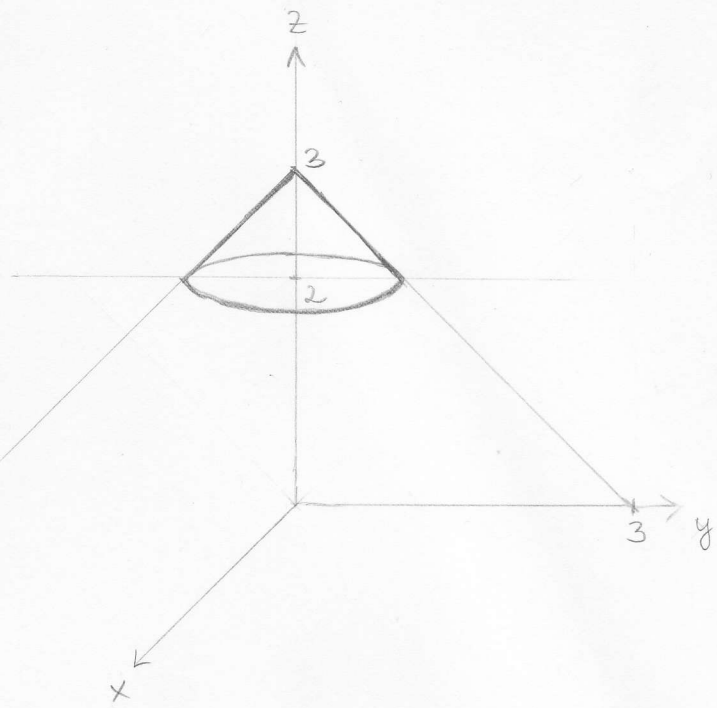


További feladatok:

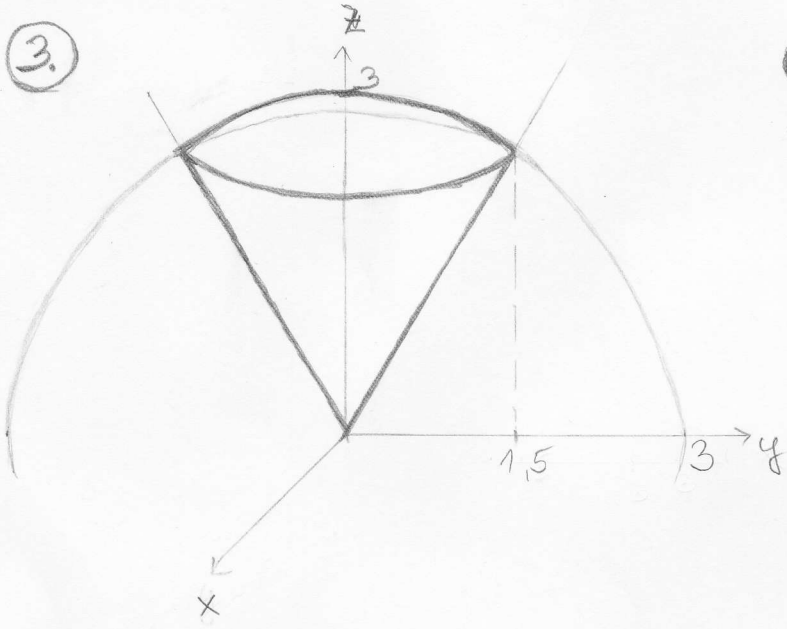
1.



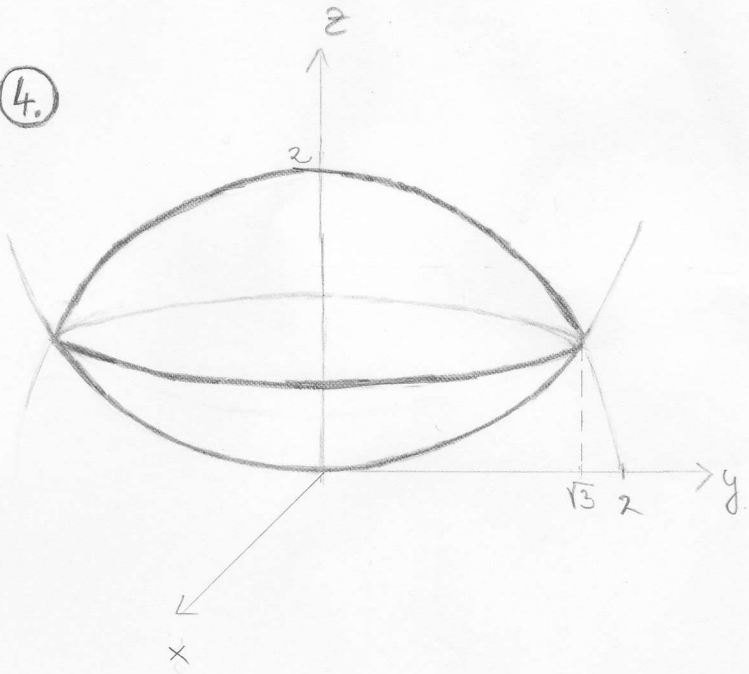
2.



3.



4.



Cauchy-Riemann egyenletek, differenciálhatóság, regularitás, harmonikus társ**1. feladat**

$$v(x, y) = cx^2 + 2xy - 4y^2 + 3$$

a) Adja meg a c paraméter értékét úgy, hogy $v(x, y)$ egy, az egész komplex számsíkon reguláris $f(z)$ komplex-változós függvény képzetes része legyen! ($c \in \mathbb{R}$)

b) $f'(1 - 2j) = ?$

Megoldás

a) $\Delta v = v''_{xx} + v''_{yy} = 0$ -nak kell teljesülni.

$$\begin{aligned} v'_x &= 2cx + 2y, & v''_{xx} &= 2c \\ v'_y &= 2x - 8y, & v''_{yy} &= -8 \end{aligned}$$

Tehát $\Delta v = 2c - 8 = 0$, ahonnan $c = 4$.

b)

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= u'_x(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0) = v'_y(x_0, y_0) + jv'_x(x_0, y_0) \\ f'(1 - 2j) &= v'_y(1, -2) + jv'_x(1, -2) = (2x - 8y + j(8x + 2y)) \Big|_{(1, -2)} = 18 + 4j \end{aligned}$$

2. feladat

Hol differenciálható, és hol reguláris az $f(z) = z^2 \operatorname{Re}(z)$ függvény?

Megoldás

$$f(z) = (x^2 - y^2 + 2jxy)x = \underbrace{x^3 - xy^2}_{u(x,y)} + j \underbrace{2x^2y}_{v(x,y)},$$

ahonnan

$$\begin{aligned} u'_x &= 3x^2 - y^2, & v'_x &= 4xy, \\ u'_y &= -2xy, & v'_y &= 2x^2. \end{aligned}$$

A parciális deriváltak mindenütt folytonosak, tehát az $u(x, y)$, $v(x, y)$ függvények mindenütt totálisan differenciálhatók. A Cauchy-Riemann egyenletek és megoldásuk:

$$\begin{aligned} 3x^2 - y^2 &= 2x^2 & \text{és} & & 4xy &= 2xy \\ x^2 - y^2 &= 0 & & & 2xy &= 0 \\ |x| &= |y| & & & x &= 0 \text{ vagy } y = 0. \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a függvény csak az origóban differenciálható, és sehol sem reguláris.

3. feladat

$$u(x, y) = 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y$$

Igazolja, hogy az $u(x, y)$ kétváltozós függvény az egész $\mathbb{R}^2$ síkon harmonikus függvény, és keresse meg a $v(x, y)$ harmonikus társfüggvényét, amellyel együtt az $f(z) = u(x, y) + jv(x, y)$ függvény az egész komplex síkon reguláris komplex függvény. ($z = x + jy$)

Megoldás

Az u parciális deriváltjai:

$$\begin{aligned} u'_x &= 6x^2 - 6y^2 + 5, & u''_{xx} &= 12x, \\ u'_y &= -12xy - 2, & u''_{yy} &= -12x, \end{aligned}$$

tehát $\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = 0$ az egész síkon.

A keresett $v(x, y)$ -nek ismerjük a parciális deriváltjait:

$$v'_x = -u'_y = 12xy + 2, \quad v'_y = u'_x = 6x^2 - 6y^2 + 5.$$

Az első egyenletet x szerint integrálva, majd az eredményt y szerint deriválva:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int (12xy + 2) dx = 6x^2y + 2x + C(y), \\ v'_y &= 6x^2 + C'(y) \end{aligned}$$

Ezt összevetve v'_y eredeti alakjával,

$$C'(y) = -6y^2 + 5, \quad \text{ahonnan} \quad C(y) = \int (-6y^2 + 5) dy = -2y^3 + 5y + c.$$

Tehát

$$\begin{aligned} v(x, y) &= 6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c, & (c \in \mathbb{R}) \\ f(z) &= 2x^3 - 6xy^2 + 5x - 2y + j(6x^2y + 2x - 2y^3 + 5y + c) & (z = x + jy) \end{aligned}$$

Eljárhatunk fordított sorrendben is, először v'_y -t integráljuk y szerint:

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int (6x^2 - 6y^2 + 5) dy = 6x^2y - 2y^3 + 5y + C(x), \\ v'_x &= 12xy + C'(x) \end{aligned}$$

Ekkor $C'(x) = 2$, tehát $C(x) = 2x + c$ ($c \in \mathbb{R}$).

Függvényértékek kiszámítása, egyenletek megoldása

4. feladat

$$z = e^{2-3j}, \quad \operatorname{Re} z = ?, \quad \operatorname{Im} z = ?, \quad |z| = ?, \quad \operatorname{arc} z = ?, \quad \bar{z} = ?$$

Megoldás

$$z = e^2 e^{-3j} = e^2 (\cos 3 - j \sin 3) = e^2 \cos 3 + j(-e^2 \sin 3),$$

tehát

$$\operatorname{Re} z = e^2 \cos 3, \quad \operatorname{Im} z = -e^2 \sin 3, \quad |z| = e^2, \quad \operatorname{arc} z = -3, \quad \bar{z} = e^{2+3j}.$$

5. feladat

$$\begin{array}{lll} a) \quad \ln(-\sqrt{3} + j) = ? & b) \quad \ln(-3j) = ? & c) \quad \operatorname{Ln}(-3j) = ? \\ d) \quad \ln(-e) = ? & e) \quad (\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j = ? & \end{array}$$

Megoldás

Emlékeztetőül:

$$\begin{array}{ll} \ln z = \ln |z| + j \operatorname{arc} z, & -\pi \leq \operatorname{arc} z < \pi, \\ \operatorname{Ln} z = \ln |z| + j(\operatorname{arc} z + 2k\pi), & k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a) \quad \ln(-\sqrt{3} + j) = \ln 2 + j \frac{5\pi}{6}. \\ b) \quad \ln(-3j) = \ln 3 - j \frac{\pi}{2}. \\ c) \quad \operatorname{Ln}(-3j) = \ln 3 + j \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right), \text{ ahol } k \in \mathbb{Z}. \\ d) \quad \ln(-e) = 1 - j\pi. \\ e) \quad (\sqrt{2} - j\sqrt{2})^j = e^{j \ln(\sqrt{2} - j\sqrt{2})} = e^{j(\ln 2 - j\frac{\pi}{4})} = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot e^{j \ln 2} = e^{\frac{\pi}{4}} (\cos \ln 2 + j \sin \ln 2). \end{array}$$

6. feladat

$$a) \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = ? \quad b) \quad \cos(1 + 2j) = ? \quad c) \quad \operatorname{sh}(1 + 6j) = ?$$

Megoldás

Emlékeztetőül:

$$\begin{array}{ll} \sin(jx) = j \operatorname{sh} x, & \operatorname{sh}(jx) = j \sin x \\ \cos(jx) = \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch}(jx) = \cos x. \end{array}$$

a)

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right) = \underbrace{\sin \frac{\pi}{2}}_{=1} \underbrace{\cos(j\pi)}_{\operatorname{ch} \pi} + \underbrace{\cos \frac{\pi}{2}}_{=0} \underbrace{\sin(j\pi)}_{j \operatorname{sh} \pi} = \operatorname{ch} \pi.$$

Tehát

$$\operatorname{Re}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = \operatorname{ch} \pi, \quad \operatorname{Im}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + j\pi\right)\right) = 0.$$

b)

$$\cos(1+2j) = \cos 1 \underbrace{\cos 2j}_{\text{ch } 2} - \sin 1 \underbrace{\sin 2j}_{j \text{ sh } 2} = \cos 1 \text{ ch } 2 - j \sin 1 \text{ sh } 2.$$

c)

$$\text{sh}(1+6j) = \text{sh } 1 \underbrace{\text{ch } 6j}_{\cos 6} + \text{ch } 1 \underbrace{\text{sh } 6j}_{j \sin 6} = \text{sh } 1 \cos 6 + j \text{ ch } 1 \sin 6.$$

7. feladat

Oldjuk meg az $e^{j\bar{z}} + 5 = 0$ egyenletet!

Megoldás

$$\begin{aligned} e^{j\bar{z}} &= -5 \\ j\bar{z} &= \text{Ln}(-5) = \ln 5 + j(-\pi + 2k\pi), \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ \bar{z} &= -\pi + 2k\pi - j \ln 5 \\ z &= -\pi + 2k\pi + j \ln 5 \end{aligned}$$

8. feladat

Keresse meg az

$$f(z) = \frac{1}{\sin(2z) + 3j}$$

izolált szinguláris pontjait!

Megoldás

Mivel a nevező mindenütt reguláris, így a szinguláris pontok a nevező zérushelei:

$$\begin{aligned} \sin(2z) + 3j &= 0, & \text{felhasználjuk, hogy } \sin x &= \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \\ \frac{e^{2jz} - e^{-2jz}}{2j} + 3j &= 0, & / \cdot 2j \\ e^{2jz} - e^{-2jz} - 6 &= 0, & a := e^{2jz} \\ a - \frac{1}{a} - 6 &= 0, & / \cdot a \\ a^2 - 6a - 1 &= 0, & a_{1,2} = 3 \pm \sqrt{10} \\ 2jz &= \text{Ln}(3 \pm \sqrt{10}). \end{aligned}$$

A két gyököt külön kezeljük:

$$\begin{aligned} 2jz_1 &= \text{Ln}(3 + \sqrt{10}) & 2jz_2 &= \text{Ln}(3 - \sqrt{10}) \\ 2jz_1 &= \ln(3 + \sqrt{10}) + j2k\pi & 2jz_2 &= \ln|3 - \sqrt{10}| + j(-\pi + 2k\pi) \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ z_1 &= k\pi - \frac{j}{2} \ln(3 + \sqrt{10}) & z_2 &= \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi\right) - \frac{j}{2} \ln(\sqrt{10} - 3) \end{aligned}$$

9. feladat

Keresse meg az $f(z) = \operatorname{sh} z$ függvény nullhelyeit!

1. Megoldás

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{1}{2} \left(e^z - \frac{1}{e^z} \right) = 0,$$

tehát $e^{2z} = 1$, ahonnan

$$\begin{aligned} 2z &= \operatorname{Ln} 1 = \ln 1 + j(0 + 2k\pi) = j2k\pi, \\ z &= jk\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

2. Megoldás

$$\operatorname{sh} z = \operatorname{sh}(x + jy) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch}(jy) + \operatorname{ch} x \operatorname{sh}(jy) = \operatorname{sh} x \cos y + j \operatorname{ch} x \sin y = 0,$$

ami azt jelenti, hogy külön a valós és a képzetes rész is nulla:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{sh} x \cos y = 0, \\ v(x, y) &= \operatorname{ch} x \sin y = 0. \end{aligned}$$

A második egyenletben $\operatorname{ch} x \neq 0$, így $\sin y = 0$, tehát $y = k\pi$ (ahol $k \in \mathbb{Z}$). Ez pedig azt jelenti, hogy $\cos y \neq 0$, tehát az első egyenletből $\operatorname{sh} x = 0$, azaz $x = 0$ következik. Tehát a megoldás:

$$z = jk\pi, \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

10. feladat (Ha marad rá idő...)

Hol differenciálható, és hol reguláris a következő függvény:

$$f(z) = \operatorname{ch}(\overline{2z})$$

Megoldás

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}(\overline{2z}) &= \operatorname{ch}(2x - j2y) = \operatorname{ch}(2x) \operatorname{ch}(j2y) - \operatorname{sh}(2x) \operatorname{sh}(j2y) = \\ &= \operatorname{ch}(2x) \cos(2y) - j \operatorname{sh}(2x) \sin(2y). \end{aligned}$$

Tehát a függvény valós és képzetes része:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{ch}(2x) \cos(2y), \\ v(x, y) &= -\operatorname{sh}(2x) \sin(2y). \end{aligned}$$

Látható, hogy u és v a teljes $\mathbb{R}^2$ síkon totálisan differenciálható, mivel a parciális deriváltjaik léteznek és folytonosak mindenütt. A parciális deriváltak:

$$\begin{aligned} u'_x &= 2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y), & v'_x &= -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y), \\ u'_y &= -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y), & v'_y &= -2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y). \end{aligned}$$

A Cauchy–Riemann egyenletek:

$$\begin{aligned}u'_x &= v'_y, & 2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y) &= -2 \operatorname{sh}(2x) \cos(2y), \\u'_y &= -v'_x, & -2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y) &= 2 \operatorname{ch}(2x) \sin(2y).\end{aligned}$$

A második egyenletből:

$$\operatorname{ch}(2x) \sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sin(2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = k \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ezt felhasználva az első egyenletből $\operatorname{sh}(2x) = 0$, azaz $x = 0$ adódik.

Tehát az $f(z)$ függvény a $jk\frac{\pi}{2}$ pontokban ($k \in \mathbb{Z}$) differenciálható, és sehol sem reguláris.

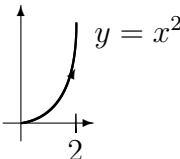
1. Komplex vonalintegrál

Zh-n az egyértelműség kedvéért mindig az integrál valós és képzetes részét szoktuk kérdezni. Ezért az eredményt mindig algebrai alakban adjuk meg és legalább szóban beszéljük meg $\operatorname{Re} I$ és $\operatorname{Im} I$ értékét!

1. (Pl.)

$$\int_L \bar{z}^2 dz = ?$$

$L :$



Megoldás:

A függvény nem reguláris, ezért a következő tétel felhasználásával oldjuk meg a feladatot:

$L : z(t) = x(t) + j y(t)$ vagy $z(t) = r(t) e^{j\varphi(t)}$, $z \in C_{[\alpha, \beta]}^1$,
 f folytonos L -en

$$\int_L f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) \dot{z}(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt$$

$x := t \implies y = t^2$. Tehát

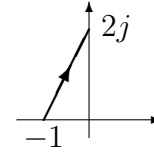
$$\begin{aligned} z(t) &= t + j t^2, & 0 \leq t \leq 2 \\ \dot{z}(t) &= 1 + j 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_L \bar{z}^2 dz &= \int_L (x - j y)^2 dz = \int_L (x^2 - y^2 - j 2xy) dz = \\ &= \int_0^2 (t^2 - t^4 - j 2t^3) (1 + j 2t) dt = \dots = \int_0^2 (t^2 + 3t^4 - j 2t^5) dt = \\ &= \left. \frac{t^3}{3} + \frac{3t^5}{5} - j \frac{2t^6}{6} \right|_0^2 = \dots = \frac{328}{15} - j \frac{64}{3} \end{aligned}$$

2. (Pl.)

$$I = \int_L (\operatorname{Im} 2\bar{z} - \operatorname{sh} 5z) dz = ?$$

$L :$



Megoldás:

$$y = 2x + 2 \implies z(t) = t + j(2t + 2), \quad t \in [-1, 0], \quad \dot{z}(t) = 1 + j2$$

$$I = \int_L \operatorname{Im} 2\bar{z} dz + \int_L \operatorname{sh} 5z dz = I_1 + I_2$$

I_1 integrandusza sehol sem reguláris, így csak az előző tétellel dolgozhatunk, I_2 integrandusza az egész síkon reguláris, így értéke csak a kezdő és végponttól függ (a Newton-Leibniz tétellel dolgozunk itt).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_L -2y dz = -2 \int_{-1}^0 (2t + 2) (1 + j2) dt = -2 (1 + j2) (t^2 + 2t) \Big|_{-1}^0 = \\ &= \dots = -2 - 4j \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_L \operatorname{sh} 5z dz = \frac{1}{5} \operatorname{ch} 5z \Big|_{-1}^{2j} = \frac{1}{5} (\operatorname{ch} 10j - \operatorname{ch}(-5)) = \frac{1}{5} (\cos 10 - \operatorname{ch} 5)$$

$$\operatorname{Re} I = -2 + \frac{1}{5} (\cos 10 - \operatorname{ch} 5), \quad \operatorname{Im} I = -4$$

3. (Pl.)

$$\oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{jz} + z \cos z \right) dz = ?$$

Megoldás:

$$I = \oint_{|z|=2} \frac{1}{jz} dz + \oint_{|z|=2} z \cos z dz = I_1 + I_2$$

I_1 integrandusza nem reguláris, ezért itt paraméterezéssel dolgozunk:

$$z(t) = 2e^{jt} (= 2 \cos t + j2 \sin t); \quad 0 \leq t \leq 2\pi; \quad \dot{z}(t) = 2j e^{jt}$$

$$I_1 = \int_0^{2\pi} \frac{1}{-j2e^{-jt}} 2j e^{jt} dt = - \int_0^{2\pi} e^{j2t} dt = - \frac{e^{j2t}}{j2} \Big|_0^{2\pi} = -\frac{1}{j2} (e^{j4\pi} - 1) = 0$$

$I_2 = 0$: a Cauchy-Goursat tétel miatt

(Az integrandusz mindenütt reguláris, a görbe zárt).

Így $I = 0$.

2. Cauchy-féle integrálformulák

Felhasználva az

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} dz \quad \text{és}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

Cauchy-féle integrálformulákat, határozza meg a következő integrálok értékét!
(Írjuk fel a formulákat és a feltételeket is beszéljük meg!)

4. (Pl.)

$$\oint_L \underbrace{\frac{\ln z}{z - j}}_{g(z)} dz = ? \quad L : \quad \begin{array}{l} \text{a) } |z - 5 + j| = 1 \\ \text{b) } |z - 2j| = 1,5 \end{array}$$

Megoldás:

a) g reguláris a $|z - 5 + j| = 1$ ($a = 5 - j$ középpontú, $r = 1$ sugarú) kört magába foglaló T_1 egyszeresen összefüggő tartományon (1.a ábra), ezért a Cauchy-Goursat tétel miatt az integrál 0.

b) A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, mert a $z_0 = j$ szingularitás a $2j$ középpontú, $1,5$ sugarú kör belsejébe esik.

$f(z) = \ln z$ reguláris a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon (1.b ábra), $z_0 = j$.

$$I_2 = 2\pi j \ln z|_{z=j} = 2\pi j \ln j = 2\pi j \left(\ln 1 + j \frac{\pi}{2} \right) = -\pi^2$$

$$\Rightarrow I = -\pi^2$$

5. (Pl.)

$$I(R) = \oint_{|z-j\pi|=R} \underbrace{\frac{\operatorname{ch}^6 z}{z - j \frac{\pi}{3}}}_{g(z)} dz = ? \quad R > 0$$

Adja meg $I(R)$ értékét R függvényében!

Megoldás:

g -nek csak a $j \frac{\pi}{3}$ pontban van szingularitása.

$$I(R) = \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < R < \frac{2\pi}{3} \\ \text{nem értelmezett}, & \text{ha } R = \frac{2\pi}{3} \\ j \frac{\pi}{32}, & \text{ha } R > \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

Ugyanis, ha $R < \frac{2\pi}{3}$, a g függvény reguláris a T_1 egyszeresen összefüggő tartományon (2.a ábra), ezért a Cauchy-féle alaptétel miatt az integrál 0.

Ha $R = \frac{2\pi}{3}$, az integrál nem értelmezett, mert g szingularitása a görbére esik.

Ha $R > \frac{2\pi}{3}$, akkor a szingularitás a görbe belsejében van és a T_2 egyszeresen összefüggő tartományon (2.b ábra) alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \text{ch}^6 z$ reguláris T_2 -ön, $z_0 = j \frac{\pi}{3}$, így

$$I(R) = 2\pi j \left. \text{ch}^6 z \right|_{z=j \frac{\pi}{3}} = 2\pi j \underbrace{\left(\text{ch} j \frac{\pi}{3} \right)^6}_{=\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}} = 2\pi j \frac{1}{2^6} = j \frac{\pi}{32}$$

6. (Pl.)

$$\oint_{|z-2|=2} \underbrace{\frac{\sin jz}{z^2-1}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás:

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei): $z = 1$ és $z = -1$.

Ezek közül csak a $z = 1$ esik a görbe belsejébe.

$$I = \oint_{|z-2|=2} \frac{\frac{\sin jz}{z^2-1}}{z-1} dz$$

Az egyszeresen összefüggő T tartományon (3. ábra) alkalmazható a Cauchy-féle integrálformula:

$f(z) = \frac{\sin jz}{z+1}$ reguláris T -n, $z_0 = 1$, így

$$I = 2\pi j \left. \frac{\sin jz}{z+1} \right|_{z=1} = 2\pi j \frac{\sin j}{2} = \pi j \text{sh } 1 = -\pi \text{sh } 1$$

7. (Pl.)

$$\oint_L \underbrace{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z^2 + 4}}_{g(z)} dz = ? , \quad L : |z| = 4$$

Megoldás:

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei) : $z = 2j$ és $z = -2j$.

Mindkettő a görbe belsejébe esik. A Cauchy-féle alaptétel következményei között szereplő egyik tétel értelmében:

$$I = \oint_L g(z) dz = \oint_{L_1} g(z) dz + \oint_{L_2} g(z) dz = I_1 + I_2 \quad (4. \text{ ábra})$$

Mindkét integrál meghatározására a Cauchy-féle integrálformulát alkalmazzuk:

$$I_1 = \oint_{L_1} \frac{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z + 2j}}{z - 2j} dz = 2\pi j \left. \frac{z^4 e^{\pi z}}{z + 2j} \right|_{z=2j} = \dots = 8\pi$$

Most $f(z) = \frac{z^4 e^{\pi z}}{z + 2j}$, mely reguláris T_1 -en, $z_0 = 2j$.

Hasonlóan

$$I_2 = \oint_{L_2} \frac{\frac{z^4 e^{\pi z}}{z - 2j}}{z + 2j} dz = 2\pi j \left. \frac{z^4 e^{\pi z}}{z - 2j} \right|_{z=-2j} = \dots = -8\pi$$

Most $f(z) = \frac{z^4 e^{\pi z}}{z - 2j}$, mely reguláris T_2 -ön, $z_0 = -2j$.

$\implies I = 0$.

Vegyük észre, hogy nem csak reguláris függvény zárt görbe mentén vett integrálja lehet 0.

8. (Pl.)

$$\oint_{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| = 2} \underbrace{\frac{\operatorname{sh} 3z}{\left(z - j \frac{\pi}{3}\right)^3}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás:

Most az általánosított integrálformulát kell alkalmaznunk. (5. ábra)

$f(z) = \operatorname{sh} 3z$, mindenütt reguláris, így a berajzolt T -n is. $z_0 = j \frac{\pi}{3}$, $n + 1 = 3$, ezért $n = 2$.

$$I = \frac{2\pi j}{2!} (\operatorname{sh} 3z)'' \Big|_{z=j \frac{\pi}{3}} = \pi j \underbrace{3^2 \operatorname{sh} \left(3 j \frac{\pi}{3} \right)}_{=j \sin \pi = 0} = 0$$

A továbbiakban már csak az előző ötletek ismétlődnek.

9. (Pl.)

$$\oint_{|z|=3} \underbrace{\frac{\sin z}{z(z-j)^2}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás:

g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei): $z = 0$ és $z = j$.

Mindkettő a görbe belsejébe esik.

$$I = \oint_L g(z) dz = \oint_{L_1} g(z) dz + \oint_{L_2} g(z) dz \quad (6. \text{ ábra})$$

$$\begin{aligned} I &= \oint_{L_1} \frac{\sin z}{z(z-j)^2} dz + \oint_{L_2} \frac{\sin z}{z(z-j)^2} dz = \\ &= 2\pi j \left. \frac{\sin z}{(z-j)^2} \right|_{z=0} + \frac{2\pi j}{1!} \left(\frac{\sin z}{z} \right)' \Big|_{z=j} = 0 + 2\pi j \left. \frac{z \cos z - \sin z}{z^2} \right|_{z=j} = \\ &= \dots = 2\pi (\operatorname{ch} 1 - \operatorname{sh} 1) \end{aligned}$$

(Az f szerepét játszó függvények regulárisak a berajzolt T_1 , illetve T_2 tartományokon.)

10. (Pl.)

$$\oint_{|z-j|=3} \underbrace{\frac{e^{j2z}}{(z-5)z^2(z-3j)}}_{g(z)} dz = ?$$

Megoldás:

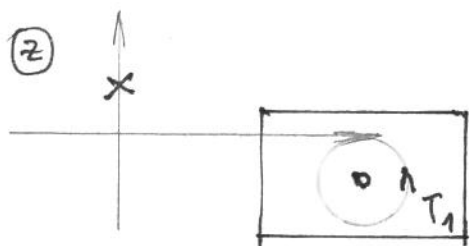
g izolált szingularitásai (a nevező nullahelyei): $z = 0$, $z = 3j$ és $z = 5$.
Ebből $z = 5$ nem esik a görbébe ($a = j$ középpotú $r = 3$ sugarú kör).

$$I = \oint_{L_1} \frac{e^{j2z}}{(z-5)(z-3j)} dz + \oint_{L_2} \frac{e^{j2z}}{(z-5)z^2} dz = \dots$$

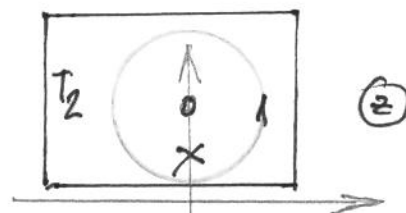
An(2)

14. gyakorlat ábrák

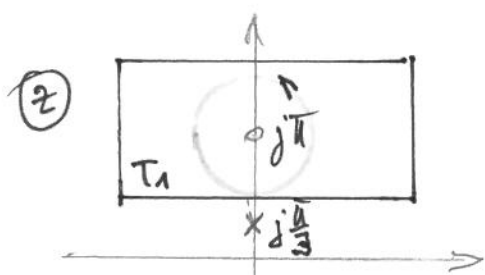
2009.



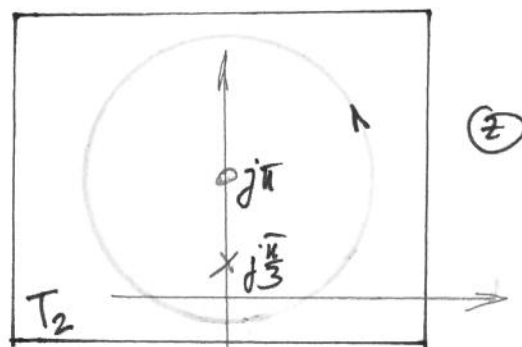
1. a ábra



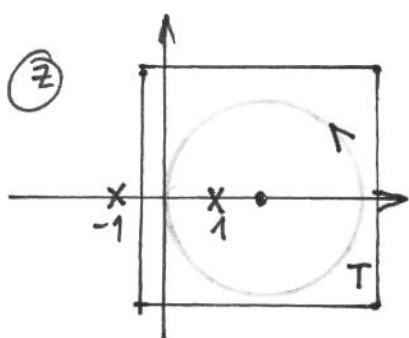
1. b ábra



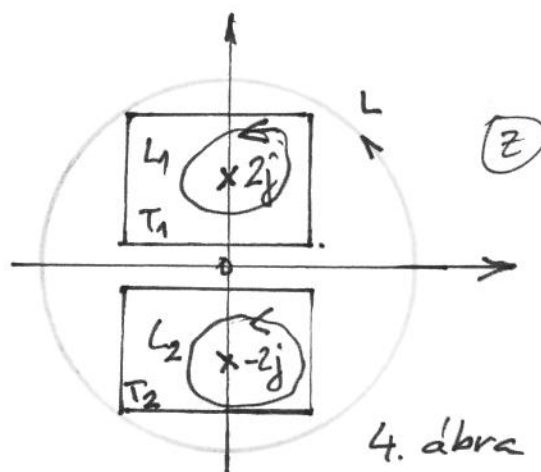
2. a ábra



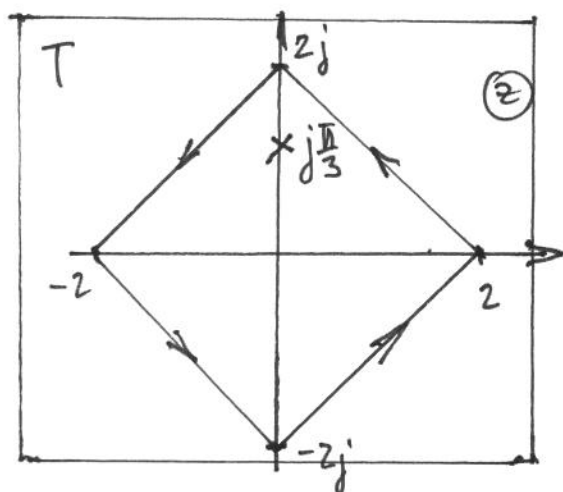
2. b ábra



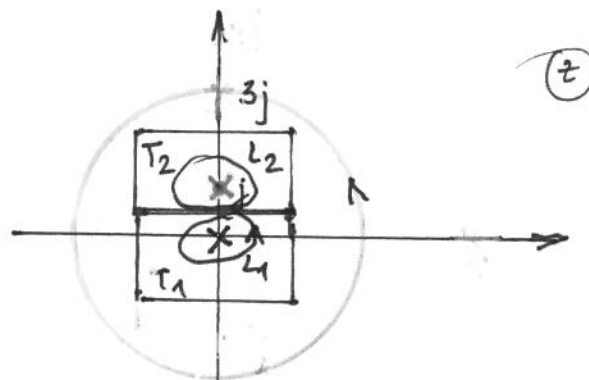
3. ábra



4. ábra



5. ábra



6. ábra