Valószínűségszámítás vizsga
2013. június 12.

1. András és Béla dob két kockával. András összeadja, Béla összeszorozza az általa kapott értékeket.
   Mennyi annak a valószínűsége, hogy András kap nagyobb számot?
   Megoldás: András "műveleti táblázata":

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
2	*3*	4	5	6	7	8
3	*4*	5	6	7	8	9
4	*5*	6	7	8	9	10
5	*6*	7	8	9	10	11
6	*7*	8	9	10	11	12

   Béla "műveleti táblázata":

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

   Ezekből kiolvasható, hogy a 36 lehetséges estből 11 kedvez Andrásnak, tehát a keresett valószínűség: $\frac{11}{36}$.

2. Legyen $X \in N(0,3)$. Bizonyítsa be, hogy $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 15\right) \leq 0,6$!
   Megoldás: $\mathbf{E}X^2 = 9$. X^2-re a Markov-egyenlőtlenséget alkalmazva:
   $\mathbf{P}\left(X^2 \geq 15\right) \leq \frac{9}{15} = 0,6$.

3. Legyenek $X \in N(4,3)$ és $Y \in N(3,2)$ függetlenek. *Adja meg a $\mathbf{P}(X < Y)$ valószínűséget! (Az eredményt a standard normális eloszlásfüggvény értékével adja meg!)
   Megoldás: $X - Y \in N\left(1, \sqrt{13}\right)$. Így $\mathbf{P}(X < Y) = \mathbf{P}(X - Y < 0) = F_{X-Y}(0) = \Phi\left(-\frac{1}{\sqrt{13}}\right) = \Phi(-0,2774) = 1 - \Phi(0,28) \approx 1 - 0,6103 = 0,3897$.

4. Legyenek $X, Y \in E(2)$ függetlenek, $Z = Y^2 \cdot X - \frac{Y}{X^2}$. Számolja ki az $\mathbf{E}(Z \mid X)$ regressziót!
   Megoldás: $\mathbf{E}(Z \mid X) = X \cdot \mathbf{E}\left(Y^2 \mid X\right) - \frac{1}{X^2} \cdot \mathbf{E}(Y \mid X) = X \cdot \mathbf{E}\left(Y^2\right) - \frac{1}{X^2} \cdot \mathbf{E}(Y) = \frac{X}{2} - \frac{1}{2X^2}$.

5. Legyenek $X \in E(2)$ és $Y \in N(1,2)$ függetlenek. $Z = X^2, W = 3X - Y$. $\operatorname{cov}(Z,W) =?$
   Megoldás: $\operatorname{cov}(Z,W) = \operatorname{cov}\left(X^2, 3X - Y\right) = 3\operatorname{cov}\left(X^2, X\right) - \operatorname{cov}\left(X^2, Y\right) = 3\operatorname{cov}\left(X^2, X\right) = 3\left[\mathbf{E}X^3 - \mathbf{E}X^2\mathbf{E}X\right]$

$\mathbf{E}X = \frac{1}{2}, \mathbf{E}X^2 = \boldsymbol{\sigma}^2 X + (\mathbf{E}X)^2 = \frac{1}{2}, \mathbf{E}X^3 = \int\limits_0^\infty x^3 2e^{-2x} dx = \left[-x^3 e^{-2x}\right]_0^\infty +$
$\frac{3}{2} \int\limits_0^\infty x^2 2e^{-2x} dx = \frac{3}{4}$.
Tehát $\operatorname{cov}(Z, W) = 3\left[\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right] = \frac{3}{2}$.

6. Mondja ki a Moivre-Laplace tételt!
Megoldás: Ha $X_1, X_2, ...$ teljesen független, azonos eloszlású, a p valószínűségű A esemény indikátor változói, $Y_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} X_i$, akkor $\mathbf{P}\left(\tilde{Y}_n < t\right) \longrightarrow \Phi(t)$ minden t-re, ha $n \to \infty$. A képletben $\tilde{Y}_n = \frac{Y_n - p}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}$, a relatív gyakoriság standardizáltja és $\Phi(t)$ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye.