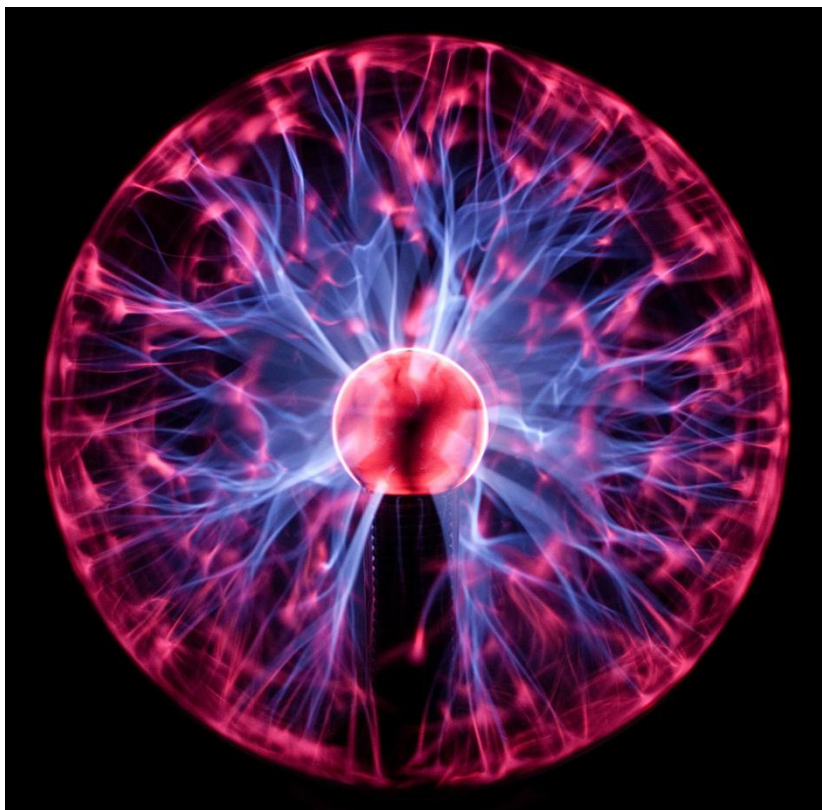


Elektromágneses terek 2011/12/1 félév

Készítette: Mucsi Dénes (HTUCA0)



1	Bevezetés	11
2	Vázlat.....	11
3	Matematikai eszköztár	11
3.1	Vektoranalízis	11
3.2	Jelenségek szintere	11
3.3	Mezők	11
3.3.1	Skalármezők	11
3.3.2	Vektormezők	11
3.4	Vektormezők integráljai	12
3.4.1	Vonalintegrál.....	12
3.4.2	Felületi - integrál	12
3.5	Differenciál operátorok.....	12
3.5.1	Skalármező gradiense.....	12
3.5.2	Vektormező divergenciája.....	13
3.5.3	Vektormező rotációja	13
3.6	Felbontási tétel (Helmholtz)	14
3.7	Integráltételek	14
3.7.1	Gradiens integrálja	14
3.7.2	Stokes - tétel	14
3.7.3	Matematikai Gauss - tétel.....	15
3.8	Másodrendű differenciál - operátorok	15
3.8.1	Laplace - operátor.....	15
3.8.2	Vektoriális Laplace - operátor.....	15
4	Fizikai előismeretek összefoglalása.....	15
4.1	Forrásmennyiségek	15
4.1.1	Töltés	15
4.1.2	Áram.....	16

4.2	Folytonossági egyenlet	17
4.3	Az elektromágneses (EM) teret leíró vektormezők	17
4.3.1	Intenzitásvektorok	17
4.3.2	Gerjesztettségi vektorok	18
4.4	Differenciális Ohm - törvény	19
5	Maxwell - egyenletek	20
5.1	Integrális alak	20
5.1.1	I. Gerjesztési törvény (Ampère)	20
5.1.2	II. Indukciótörvény (Faraday)	20
5.1.3	III. Elektromos tér Gauss - törvénye	20
5.1.4	IV. Mágneses Gauss - törvény	20
5.2	Differenciális alak	20
5.2.1	I. Gerjesztési törvény (Ampère)	20
5.2.2	II. Indukciótörvény (Faraday)	20
5.2.3	III. Elektromos tér Gauss - törvénye	20
5.2.4	IV. Mágneses Gauss - törvény	20
6	Határ-, illetve folytonossági feltételek	21
6.1	Jelölésrendszer	21
6.2	Elektromos eltolás normális komponense	21
6.3	Mágneses indukció normális komponense	22
6.4	Elektromos térerősség tangenciális komponense	22
6.5	Mágneses térerősség tangenciális komponense	22
6.6	Áramsűrűség normális komponense	22
7	Energiamérleg	23
7.1	Energiaviszonyok	23
7.2	Az energiamérleg differenciális alakja	23
7.3	Az energiamérleg integrális alakja	23

7.4	Poynting - vektor:	24
8	Erőhatások	24
8.1	Lorentz - erő	24
8.2	Virtuális munka elve.....	24
8.2.1	Erő számítása.....	24
8.2.2	Nyomaték számítása.....	24
9	Az egyenletek teljes rendszere.....	24
10	Az elektrodinamika felosztása	25
10.1	Elektrosztatika	25
10.2	Magnetosztatika.....	25
10.3	Stacionárius áramlási tér.....	25
10.4	Stacionárius áramok mágneses tere	26
10.5	Kvázistacionárius áramlási tér	26
10.6	Örvényáramok tere	26
10.7	Hullámterjedés:.....	27
11	Elektrosztatika.....	28
11.1	A potenciál (elektromos skalárpotenciál)	28
11.1.1	A potenciál, mint segédmenyiség.....	28
11.1.2	Φ Kapcsolata feszültséggel	28
11.1.3	Ponttöltés potenciáltere	29
11.2	Laplace-Poisson egyenlet	30
11.2.1	A határfeltételek Φ -vel kifejezve:	30
11.3	A L-P egyenlet általános megoldása	31
11.4	Az elektrosztatikus tér energiája (Φ -vel kifejezve)	31
11.5	Az elektrosztatika peremértékfeladata.....	32
11.5.1	Megoldás zárt tartományon, peremfeltételek	32
11.5.2	Bizonyítás.....	33

11.6	Elektródarendszerek	33
11.6.1	Vezető anyagok elektromos térben	33
11.6.2	Az elektródarendszer energiája	35
11.6.3	Két elektróda	35
11.6.4	Több elektróda, részkapacitások	36
11.6.5	Több elektróda energiája	37
11.7	Egyszerű töltésrendszerek tere	38
11.7.1	Végtelen hosszú, egyenes vonaltöltés	38
11.7.2	Töltésdipólus	39
11.8	Helyettesítő töltések módszere	41
11.8.1	Az elv	41
11.8.2	Ponttöltés – fémsík	42
11.8.3	Vonaltöltés – fémhenger	42
11.8.4	Ponttöltés – fémgömb.....	43
12	Stacionárius áramlási tér	43
12.1	Alapegyenletek	43
12.1.1	Maxwell.....	43
12.1.2	Laplace	43
12.1.3	Folytonossági feltételek.....	44
12.2	Elektródarendszerek	45
12.2.1	Két elektróda – ellenállás (konduktancia) definíciója.....	45
12.2.2	Teljesítmény (veszteség)	45
12.2.3	Több elektróda (részkonduktanciák)	46
12.3	Elektrosztatikai analógia.....	46
13	Stacionárius mágneses tér	47
13.1	Alapösszefüggések	47
13.1.1	Maxwell.....	47

13.1.2	Vektrapotenciál	47
13.1.3	Vektoriális Poisson - egyenlet.....	48
13.1.4	A vektoriális Poisson - egyenlet általános megoldása	49
13.2	Áramjárta hurok (rendszer)	49
13.2.1	Biot-Savart törvény	49
13.2.2	Indukció - együttthatók	51
14	Numerikus módszerek (ízelítő).....	53
14.1	A megoldás menete	53
14.2	Osztályozás	53
14.2.1	Véges - differencia módszerek.....	53
14.2.2	Végeselem módszer.....	53
14.2.3	Integrálegyenletek módszere.....	53
14.3	Véges differenciák módszere (rácsmódszer).....	53
14.3.1	Diszkretizálás	53
14.3.2	PDE → algebrai egyenletek.....	54
14.3.3	Peremfeltétel érvényesítése	55
14.4	Végeselem módszer.....	55
14.4.1	Súlyozott maradék elv	55
14.4.2	Diszkretizálás	55
14.4.3	Lineáris háromszögelemek.....	56
15	Távvezetékek (TV)	57
15.1	Bevezető	57
15.1.1	Jellemzők.....	57
15.1.2	Néhány konstrukció.....	57
15.2	TV leírás időtartományban	58
15.2.1	Elosztott paraméterű modell.....	58
15.2.2	TV paraméterek.....	58

15.2.3	Távíró egyenletek	59
15.3	Leírás a frekvenciatartományban.....	60
15.3.1	Komplex amplitúdók (fazorok).....	60
15.3.2	A Helmholtz - egyenlet	60
15.3.3	Általános megoldás	61
15.3.4	A megoldás értelmezése	61
15.3.5	Ideális TV viszonyai.....	63
15.3.6	A lezárás szerepe – peremfeltételek	63
15.4	Impedanciával lezárt TV	64
15.4.1	Új vonatkoztatási rendszer	64
15.4.2	Reflexiók tényező	64
15.4.3	Speciális lezárások	65
15.4.4	Tetszőleges lezárás	67
15.4.5	Állóhullám arány.....	68
15.5	TV, mint rezgőkör	69
15.5.1	Végén szakadással lezárt TV.....	69
15.5.2	Mindkét végén szakadással zárt TV	69
15.5.3	Mindkét végén rövidre zárt TV	69
15.5.4	Vegyes lezárás.....	70
15.5.5	Általános, veszteségmentes lezárások.....	70
15.6	TV, mint kétkapu.....	71
15.6.1	Lánckarakterisztika	71
15.6.2	Helyettesítő kapcsolások	72
15.6.3	Bemeneti Z	73
16	Elektromágneses hullámok	74
16.1	Homogén hulláme egyenlet.....	74
16.1.1	Feltevések.....	74

16.1.2	Egyenlet E -re.....	74
16.1.3	Egyenlet H -ra	74
16.2	Síkhullám - megoldás	74
16.2.1	Feltevések.....	74
16.2.2	Helmholtz - egyenlet	75
16.2.3	Általános megoldás	75
16.2.4	H kifejezése	75
16.3	Síkhullám-TV analógia.....	76
16.4	Síkhullám (ideális) szigetelőben.....	77
16.4.1	Közel nulla vezetőképesség.....	77
16.4.2	Szemléltetés.....	77
16.4.3	Tetszőleges irányú terjedés	78
16.5	Polarizált síkhullám	78
16.6	Energia terjedése a síkhullamban (teljesítményáramlás).....	80
16.7	Síkhullám viselkedése közeghatáron.....	81
16.7.1	Általános eset	81
16.7.2	Merőleges beesés.....	81
16.8	Síkhullám jó vezetőben	83
16.8.1	Hullámparaméterek	83
16.8.2	Áramkiszorítás (skin-effektus).....	83
16.8.3	Hőteljesítmény, ellenállás	84
16.8.4	Alkalmazás	85
17	Hullámok keltése	86
17.1	Inhomogén hulláme egyenlet potenciálokra.....	86
17.1.1	Modellfeltevések	86
17.1.2	Maxwell.....	87
17.2	Az egyenletek általános megoldása	88

17.2.1	Retardált potenciálok.....	88
17.2.2	Kvázistacionárius közelítés	88
17.2.3	Az általánosított Biot-Savart törvény	89
17.3	Hertz - dipólus	90
17.3.1	Modell	90
17.3.2	H felírása	91
17.3.3	E kifejezése	91
17.3.4	Szemléltetés.....	92
17.3.5	A távoltage.....	92
17.3.6	Poynting - vektor	93
17.4	Antennajellemzők	93
17.4.1	Íránykarakterisztika	93
17.4.2	Kisugárzott teljesítmény.....	94
17.4.3	Sugárzási ellenállás	94
17.4.4	Írányhatás (D), antennanyereség (G).....	95
18	Csőtápvonalak.....	95
18.1	Modell.....	95
18.1.1	Geometria	95
18.1.2	Redukció.....	95
18.1.3	Homogén hullámegyenlet	96
18.2	Terjedési módok (módus).....	96
18.2.1	Térkomponensek kifejezése	96
18.2.2	TEM hullám	97
18.2.3	TM hullám.....	97
18.2.4	TE hullám.....	98
18.2.5	Módus.....	98
18.3	Négyszög keresztmetszetű csőtápvonal.....	98

18.3.1	Modell	98
18.3.2	TM hullám.....	98
18.3.3	TE módusok	99
18.3.4	Diszperziós egyenlet, határfrekvencia.....	100
18.3.5	Ábrázolás.....	101

1 Bevezetés

Előadás alapján készített jegyzet. Nem helyettesíti az előadáson való részvételt, és nem elégséges a zh-ra, vizsgára való felkészüléshez, csupán az előadás anyagát digitalizáltam be. Ennek ellenére hasznos segítség lehet, az irodalom átolvasása és példamegoldás mellett.

2 Vázlat

matematikai, fizikai összefoglalás

elektrosztatika

numerikus módszerek

stacionárius áramlások tere

stacionárius mágnesek tere

kvázistacionárius terek

távvezetékek (TV)

síkhullámok

hullámforrások (Hertz - dipólus)

hullámvezetők (csőtápvonalak)

3 Matematikai eszköztár

3.1 Vektoranalízis

E, B, D, H vektorok számítása

félkövér kijelöléssel jelölöm a vektorokat

3.2 Jelenségek színtere

3 dimenziós, irányított (jobbsodrású) euklideszi tér

koordináta rendszerek: derékszögű (x,y,z), henger (r, φ,z), gömbi (r,φ,θ)

φ: kis fi

θ: kis théta ('teta')

3.3 Mezők

3.3.1 Skalármezők

$$u(\mathbf{r}) = u(x, y, z) = u(r, \varphi, z)$$

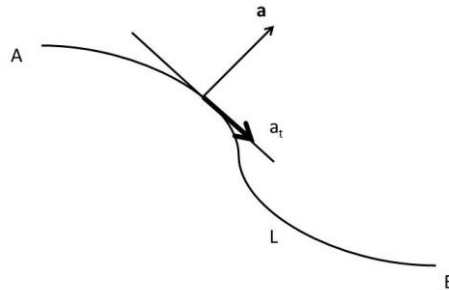
3.3.2 Vektormezők

$$\begin{aligned} \mathbf{a}(\mathbf{r}) &= a_x(x, y, z)\mathbf{e}_x + a_y(x, y, z)\mathbf{e}_y + a_z(x, y, z)\mathbf{e}_z \\ &= a_r(r, \varphi, z)\mathbf{e}_r(r, \varphi, z) + a_\varphi(r, \varphi, z)\mathbf{e}_\varphi(r, \varphi, z) + a_z(r, \varphi, z)\mathbf{e}_z(r, \varphi, z) \end{aligned}$$

3.4 Vektormezők integráljai

3.4.1 Vonalintegrál

$$c = \int_L a_t dl = \int \mathbf{a} d\mathbf{l}$$

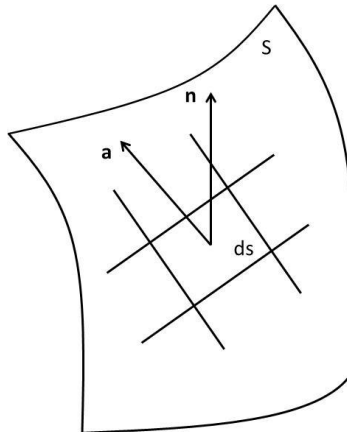


3.4.1 vonalintegrál

Ha L zárt, akkor c az úgynevezett cirkuláció. (a_t a vetület)

3.4.2 Felületi - integrál

$$F = \int_S a_n ds = \int_S \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} ds = \int_S \mathbf{a} d\mathbf{s}$$



3.4.2 felületi integrál

3.5 Differenciál operátorok

3.5.1 Skalármező gradiense

skalárból képzünk vektort

$$\mathbf{e} \text{ grad } u(\mathbf{r}) = \frac{\partial u}{\partial \mathbf{e}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(\mathbf{r} + h \mathbf{e}) - u(\mathbf{r})}{h}$$

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial u}{\partial z} \mathbf{e}_z = \nabla u$$

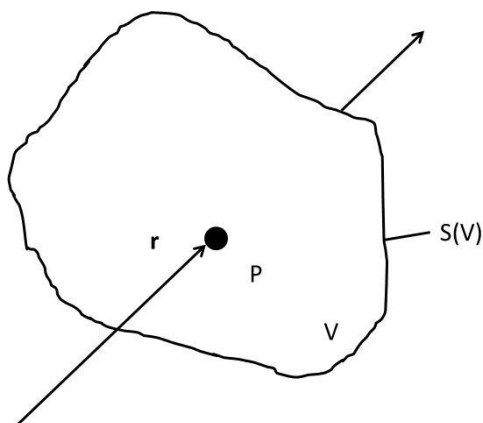
$$\nabla u = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

3.5.2 Vektormező divergenciája

Vektormezőből képzünk skalármezőt, a divergencia megadja a forrassűrűséget.

$$\operatorname{div} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ P \in V}} \frac{1}{|V|} \int_{S(V)} \mathbf{a} \, ds$$

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{a}$$

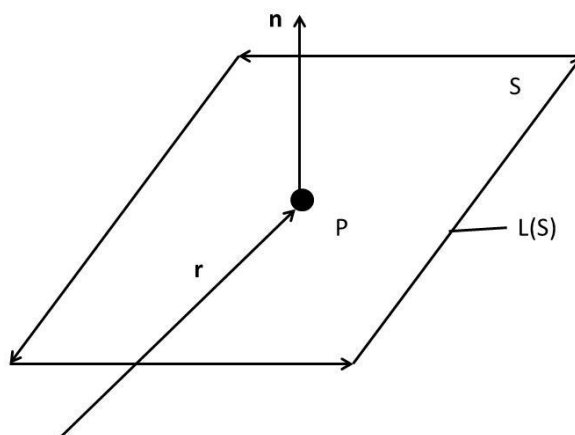


3.5.1 divergencia

3.5.3 Vektormező rotációja

Megadja az örvénysűrűséget.

$$\mathbf{n} \operatorname{rot} \mathbf{a}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{L \rightarrow 0 \\ P \in S}} \oint_{L(S)} \mathbf{a} \, dl$$



3.5.2 rotáció

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} \right) \mathbf{e}_x - \left(\frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z} \right) \mathbf{e}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) \mathbf{e}_z = \nabla \times \mathbf{a}$$

3.6 Felbontási tétel (Helmholtz)

$$\mathbf{a} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0 \text{ és } \operatorname{div} \mathbf{w} = 0$$

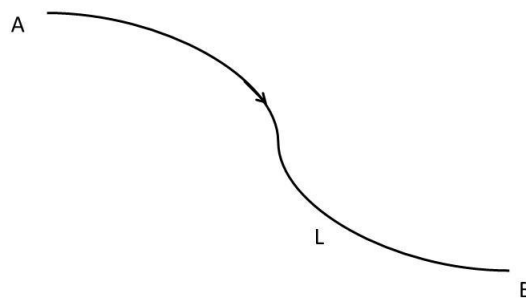
ahol: $\mathbf{a}$ tetszőleges, $\mathbf{u}$ örvénymentes, $\mathbf{w}$ forrásmentes

Pontosítva: Egy kétszer folytonosan differenciálható $v(r)\mathbb{R}^3$ vektormező forrásmentes, illetve örvénymentes, ha divergenciája illetve rotációja azonosan nulla. Ha még azt is kikötjük, hogy a $\mathbf{v}$ vektormező elég gyorsan tart a nullához a végtelenben, akkor teljesül a felbontási tétel: Minden $v(r)$ vektormezőt egyértelműen meghatároznak a forrásai és az örvényei, és felbontható forrás- és örvénymentes vektormezők összegére. (forrás: wikipédia)

3.7 Integráltételek

3.7.1 Gradiens integrálja

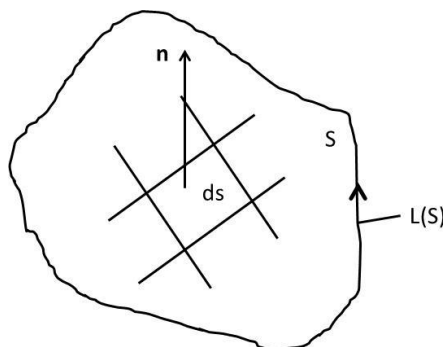
$$\int_L \operatorname{grad} u \, d\mathbf{l} = U(B) - U(A)$$



3.7.1 gradiens integrálja

3.7.2 Stokes - tétel

$$\oint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \, d\mathbf{s} = \oint_{L(S)} \mathbf{a} \, d\mathbf{l}$$

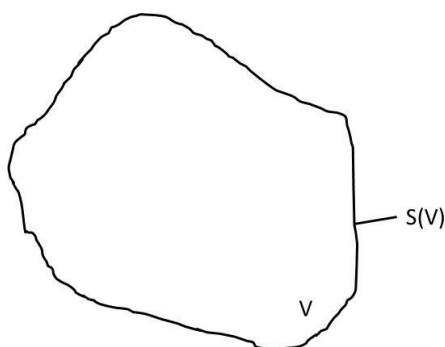


3.7.2 Stokes tétel

Az örvényeket összegezve csak a felületszéli örvények maradnak meg.

3.7.3 Matematikai Gauss - tétel

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_{S(V)} \mathbf{a} ds$$



3.7.3 matematikai Gauss - tétel

3.8 Másodrendű differenciál - operátorok

3.8.1 Laplace - operátor

$$\operatorname{div} (\operatorname{grad} u) \triangleq \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Stokes tételből: $\operatorname{rot} (\operatorname{grad} u) = \mathbf{0}$

Gauss tételből: $\operatorname{div} (\operatorname{rot} \mathbf{a}) = 0$

3.8.2 Vektoriális Laplace - operátor

$$\Delta \mathbf{a} \triangleq \operatorname{grad} (\operatorname{div} \mathbf{a}) - \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{a})$$

$$\Delta \mathbf{a} = \Delta a_x \mathbf{e}_x + \Delta a_y \mathbf{e}_y + \Delta a_z \mathbf{e}_z$$

4 Fizikai előismeretek összefoglalása

4.1 Forrásmennyiségek

4.1.1 Töltés

A töltések lehetnek pozitívak és negatívak. Az elemi töltés az elektron, jele e^- , töltése:

$$q_{e^-} = -1,6 \cdot 10^{-19} [C, As]$$

A térfogati töltéseloszlás jele: ρ (kis 'ró'),

$$Q_V = \int_V \rho dV, \rho: \left[\frac{As}{m^3} \right]$$

A felületi töltéseloszlás jele: σ (kis 'szigma'), $\left[\frac{As}{m^2} \right]$

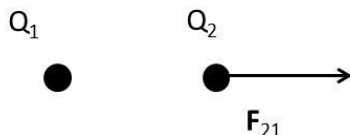
A vonalszerű töltés jele: $q \left[\frac{As}{m} \right]$

A ponttöltés jele: $Q [As]$

Gyakorlatban a töltés mérését erőmérésre vezethetjük vissza. A kapcsolatot a Coulomb - törvény írja le.

$$\mathbf{F}_{2,1} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

$$\epsilon_0 = 8,85 * 10^{-12} \left[\frac{As}{Vm} \right]$$



4.1.1 Coulomb - törvény

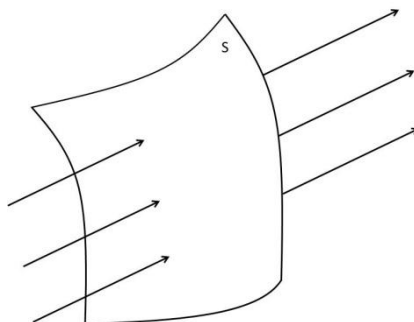
Amennyiben Q_1 -et rögzítjük, tehát $\mathbf{r}_1 = 0$ és $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}$:

$$\mathbf{F} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

4.1.2 Áram

Egy S felületen átáramló áram:

$$I_S = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} [A]$$

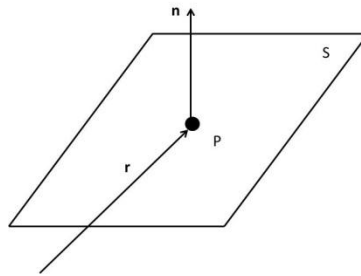


4.1.2 az áram

Térbeli árameloszlás esetén áramsűrűség - vektorral dolgozunk:

$$I_S = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} \text{ (implicit alak)}, \quad \mathbf{J} \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}) = \lim_{\substack{S \rightarrow 0 \\ P \in S}} \frac{I_S}{|S|} \text{ (explicit alak)}$$



4.1.3 az áramsűrűség - vektor

Felületi árameloszlás: $\mathbf{K} \left[\frac{A}{m} \right]$

Vonaláram: $I[A]$

Két párhuzamos vonalszerű vezető közt, melyekben azonos irányban 1A erősségű áram folyik, méterenként $f = 2 * 10^{-7} \left[\frac{N}{m} \right]$ erő lép fel.

4.2 Folytonossági egyenlet

Ez a töltésmegmaradás elve.

$$\oint_{S(V)} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{dQ_V}{dt}$$

$$\left. \begin{aligned} \oint_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{s} &= \int_V \text{div}(\mathbf{J}) dV \text{ (Gauss)} \\ -\frac{dQ_V}{dt} &= -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = \int_V -\frac{\partial \rho}{\partial t} dV \end{aligned} \right\} \text{div} \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

4.3 Az elektromágneses (EM) teret leíró vektormezők

4.3.1 Intenzitásvektorok

Elektromos térerősség:

$$\mathbf{E} \triangleq \frac{\mathbf{F}}{Q}, \left[\frac{V}{m} \right] \text{ (nyugvó töltés esetén)}$$

Ponttöltés esetében:

$$\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

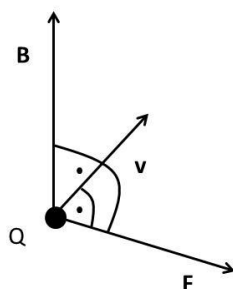
Pozitív töltésekből kifelé, negatív töltésekbe befelé mutatnak az erővonalak.

Mágneses indukció:

$$\mathbf{B} \left[\frac{Vs}{m^2}, T \right]$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \text{ (Lorentz - törvény), ha } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

ahol $\mathbf{v}$ a töltés sebessége.



4.3.1 Lorentz - törvény

4.3.2 Gerjesztettségi vektorok

Elektromos eltolás:

$$\mathbf{D} \triangleq \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \left[\frac{As}{m^2} \right]$$

$\mathbf{P}$ a polarizációvektor, azaz a dipólusmomentum-sűrűség. Bontsuk fel a töltéssűrűséget szabad (free) és kötött (bound) részre:

$$\rho = \rho_f + \rho_b$$

$$\rho_b = -\text{div } \mathbf{P}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f + \rho_b)$$

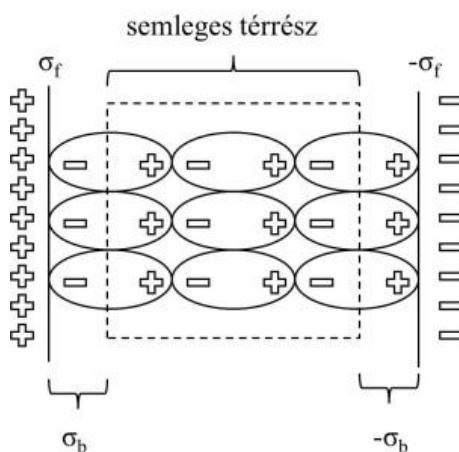
$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} (\rho_f - \text{div } \mathbf{P})$$

$$\text{div } (\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

Visszahelyettesítve $\mathbf{D}$ definícióját:

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_f$$

Kondenzátor esetén a kötött és szabad töltéeloszlást a két fegyverzet közt az alábbi ábra szemlélteti:



4.3.2 kondenzátor töltéeloszlása

Kötött töltések fegyverzetek körül lesznek, a dielektrikum belsejében a töltések kiegyenlítik egymást.

$$*\text{rot } \mathbf{D} = \varepsilon_0 \text{rot } \mathbf{E} + \text{rot } \mathbf{P}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \Rightarrow \text{rot } \mathbf{D} = \text{rot } \mathbf{P}$$

A rotációba beleszámít a polarizáció, csak D divergenciája független.*

(csillag jelöli a jegyzet azon részének elejét és végét, ami nem a tananyag része)

Lineáris karakterisztikájú dielektrikumok esetében $\mathbf{P}$ és $\mathbf{E}$ arányosak:

$$\mathbf{P} = \chi \mathbf{E} \varepsilon_0$$

χ (kis 'khi') a szuszceptibilitás jele.

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \varepsilon_0 \chi \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \mathbf{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \mathbf{E} = \varepsilon \mathbf{E}$$

ε_r a relatív permittivitás, dielektromos állandó.

Mágneses térerősség:

$$\mathbf{H} \triangleq \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

$\mathbf{M}$ a mágnesezettség vektor, azaz a mágneses dipólus momentum - sűrűség.

Az áramsűrűséget is felbonthatjuk szabad és kötött részre:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_b$$

$$\mathbf{J}_b = \text{rot } \mathbf{M}$$

Lineáris mágneses tulajdonságú anyagok esetében $\mathbf{M}$ és $\mathbf{H}$ arányosak:

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$$

χ_m a mágneses szuszceptibilitás, μ_r a relatív permeabilitás.

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \mathbf{H} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H} = \mu \mathbf{H}$$

4.4 Differenciális Ohm - törvény

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$\sigma \left[\frac{S}{m} = \frac{\text{Siemens}}{m} \right]$ (kis 'szigma') a fajlagos vezetőképesség, $\mathbf{E}_b$ a beiktatott térerősség.

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_b$$

5 Maxwell - egyenletek

5.1 Integrális alak

5.1.1 I. Gerjesztési törvény (Ampére)

$$\oint_{L(S)} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_S \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) d\mathbf{s} \xrightarrow{\text{Stokes}} \text{differenciális alak}$$

$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ az eltolási áram.

5.1.2 II. Indukciótörvény (Faraday)

$$\oint_{L(S)} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} d\mathbf{s} \xrightarrow{\text{Stokes}} \text{diff. alak}$$

5.1.3 III. Elektromos tér Gauss - törvénye

$$\oint_{S(V)} \mathbf{D} d\mathbf{s} = \int_V \rho dV \xrightarrow{\text{Gauss}} \text{diff. alak}$$

5.1.4 IV. Mágneses Gauss - törvény

$$\oint_{S(V)} \mathbf{B} d\mathbf{s} = 0 \xrightarrow{\text{Gauss}} \text{diff. alak}$$

5.2 Differenciális alak

5.2.1 I. Gerjesztési törvény (Ampére)

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

5.2.2 II. Indukciótörvény (Faraday)

$$\text{rot } \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

5.2.3 III. Elektromos tér Gauss - törvénye

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho$$

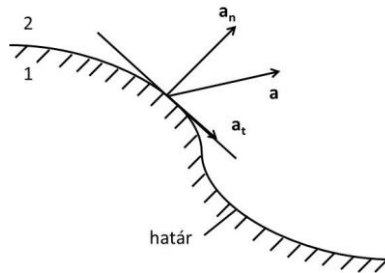
5.2.4 IV. Mágneses Gauss - törvény

$$\text{div } \mathbf{B} = 0$$

A differenciális alakok anyaghatáron nem alkalmazhatóak.

6 Határ-, illetve folytonossági feltételek

6.1 Jelölésrendszer



6.1.1 vektorfelbontás

$\mathbf{n}$ mindenhol adott, az 1-es közegből a 2-esbe mutat.

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t$$

$$\mathbf{a}_n = \mathbf{n}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) \Rightarrow a_n = |\mathbf{a}_n|$$

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{n} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{n}) \Rightarrow a_t = |\mathbf{a}_t|$$

6.2 Elektromos eltolás normális komponense

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma$$

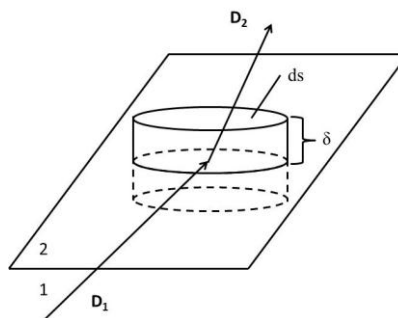
$$(\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}) = \sigma$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 * \mathbf{D}_1) = \sigma$$

Egyszerűsített jelölés: $[\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] = \sigma$

bizonyítás:

Vegyünk fel a közeghatáron egy mindkét irányban δ magasságú hengert („niveás doboz”), mely alapjainak területe ds !



6.2.1 az eltolási vektor törése

$$\delta \rightarrow 0$$

$$III.M. \Rightarrow -D_{1n} ds + D_{2n} ds = \sigma ds$$

$$D_{2n} - D_{1n} = \sigma$$

Az eltolási vektor normálisa a felületi töltéssűrűség nagyságával „ugrik” (növekszik).

6.3 Mágneses indukció normális komponense

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

$$B_{2n} = B_{1n}$$

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = 0$$

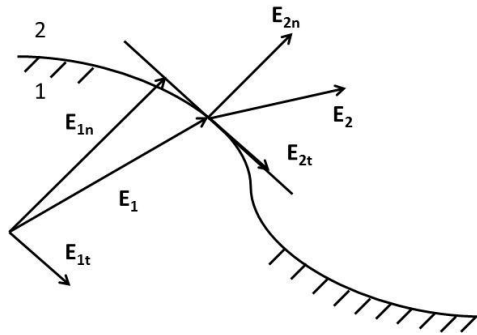
A mágneses indukció normálisa folytonosan megy át.

6.4 Elektromos térerősség tangenciális komponense

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{E}] = 0$$



6.4.1 az elektromos térerősség tangenciális komponense

Az elektromos térerősség tangenciális komponense folytonosan megy át.

6.5 Mágneses térerősség tangenciális komponense

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{K}$$

$$H_{2t} - H_{1t} = K$$

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{H}] = \mathbf{K}$$

A mágneses térerősség tangenciális komponense a felületi áramsűrűség értékével ugrik.

6.6 Áramsűrűség normális komponense

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{J}_2 - \mathbf{J}_1) = -\frac{\partial \sigma}{\partial t}$$

7 Energiamérleg

7.1 Energiaviszonyok

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \xrightarrow{-\mathbf{E}} -\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{E} \mathbf{J} - \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \xrightarrow{\mathbf{H}} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned} \right\} \oplus$$

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = -\mathbf{E} \mathbf{J} - \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{E} \mathbf{J} - \frac{\partial w}{\partial t}$$

$w \left[\frac{J}{m^3} \right]$ az EM tér energiasűrűsége.

Speciális esetben, ha az anyag lineáris:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} \text{ és } \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon \mathbf{E} + \mathbf{H} \frac{\partial}{\partial t} \mu \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon \mathbf{E} \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H} \mathbf{H} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} (w_e + w_m)$$

$$w = w_e + w_m$$

Rendezzük át a differenciális Ohm - törvényt!

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) = \sigma \mathbf{E} + \sigma \mathbf{E}_b \Rightarrow \mathbf{E} \mathbf{J} = \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{J} - \mathbf{E}_b \right) \mathbf{J} = \frac{J^2}{\sigma} - \mathbf{E}_b \mathbf{J}$$

7.2 Az energiamérleg differenciális alakja

$$-\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{J^2}{\sigma} - \mathbf{E}_b \mathbf{J} + \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

Szemléltetésre inkább az energiasűrűséggel felírt alakot használjuk.

7.3 Az energiamérleg integrális alakja

$$\begin{aligned} - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} &= \int_V \frac{J^2}{\sigma} dV - \int_V \mathbf{E}_b \mathbf{J} dV + \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV \\ - \int_V \frac{\partial w}{\partial t} &= - \frac{d}{dt} \int_V w dt = - \frac{dW}{dt} \text{ (bal oldalon)} \\ \int_V \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dV &\xrightarrow{\text{Gauss}} \oint_{A(V)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A} \text{ (jobb oldalon)} \end{aligned}$$

$A(V)$ a V térfogatot kijelölő felület.

$$-\frac{dW}{dt} = \underbrace{\int_V \frac{J^2}{\sigma} dV}_2 - \underbrace{\int_V \mathbf{E}_b \mathbf{J} dV}_3 + \underbrace{\oint_{A(V)} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) d\mathbf{A}}_4$$

1. tag: Az EM térben tárolt energia változási gyorsasága.
2. tag: Hővesztesség, hőteljesítmény, Joule veszteség, vezetőben áram hatására hővé váló teljesítmény.
3. tag: Külső (nem EM eredetű) erők munkája, betáplált teljesítmény.
4. tag: Elsugárzott teljesítmény, EM úton a felületen keresztül eltűnik, elszivárog sugárzás útján.

7.4 Poynting - vektor:

$$\mathbf{S} \triangleq \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

8 Erőhatások

8.1 Lorentz - erő

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Ezt a formulát térszámításban ritkán használjuk.

8.2 Virtuális munka elve

8.2.1 Erő számítása

Descartes koordináta - rendszerben dx távolsággal virtuálisan elmozdítjuk a vizsgálni kívánt tárgyat. Azt keressük, hogy mennyivel változik az energia.

$$F_x = -\frac{\partial W}{\partial x}$$

8.2.2 Nyomaték számítása

Virtuálisan $d\alpha$ szöggel elforgatjuk a vizsgálni kívánt tárgyat, majd keressük, hogy mennyivel változott az energia.

$$M_z = -\frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

9 Az egyenletek teljes rendszere

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Maxwell}$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \\ \mathbf{B} &= \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}) \\ \mathbf{J} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) \end{aligned} \right\} \text{anyag egyenletek}$$

$$\left. \begin{aligned} [\mathbf{n} \times \mathbf{H}] &= \mathbf{K} \\ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}] &= \mathbf{0} \\ [\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}] &= \sigma \\ [\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] &= 0 \end{aligned} \right\} \text{határfeltételek}$$

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \left\} \text{energia, erőhatás}$$

$$\mathbf{F} = Q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

10 Az elektrodinamika felosztása

10.1 Elektrosztatika

A sztatika szó jelentése állandóság, jelen esetben időbeli állandóságról beszélünk, tehát $\frac{\partial}{\partial t} \approx 0$

Ha az idő szerinti deriváltak elhanyagolhatóak, a Maxwell - egyenletek közti kapcsolat szétesik, az egyenletek felbonthatók külön elektromos és mágneses térre.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \text{ (a tér örvénymentes)} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \text{ (a tér forrása a töltés)} \\ \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

A témakörbe tartozó fogalmak: elektróda, potenciál, kapacitás...

A témakör alkalmazása: nagyfeszültségű technika...

10.2 Magnetosztatika

Sztatikus mágneses tér, melyben áramok sem folynak. Jellemzően a permanens mágnes tere.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{0} \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \mathbf{B} &= \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M}) \end{aligned}$$

$\mathbf{M}$ a permanens mágnes mágnesezettsége.

Fogalmak: mágneses skalárpotenciál...

Alkalmazás: villamos gépek...

10.3 Stacionárius áramlási tér

$\partial/\partial t \approx 0$ és állandó áramok folynak.

Maxwell I.-ből:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} / \operatorname{div}() \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \operatorname{div} \mathbf{J} = 0 \\ \operatorname{div} \operatorname{rot} (\text{akármilyen}) &\equiv 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{J} &= \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b) \end{aligned}$$

Fogalmak: ellenállás, áramkörök...

Alkalmazás: földelés, biztosítósál, impedancia - tomográfia (orvosi mérőeszközök)...

10.4 Stacionárius áramok mágneses tere

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu_0(\mathbf{H} + \mathbf{M})$$

$\mathbf{M}$ a nemlineáris anyagok karakterisztikája is lehet vagy permanens mágnesé.

Fogalmak: induktivitás, vektorpotenciál, mágneses körök...

Alkalmazás: villamos gépek, villamosenergia átalakítók...

10.5 Kvázistacionárius áramlási tér

Csak az egyik idő szerinti deriválttal számolunk, a másikat elhanyagoljuk.

$\partial \mathbf{B} / \partial t$ elhanyagolható hatású.

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(\mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$$

Fogalmak: komplex potenciál, komplex vezetőképesség...

Alkalmazás: nagyfeszültségű szigeteléstechika...

10.6 Örvényáramok tere

$\partial \mathbf{D} / \partial t$ elhanyagolható hatású. Ez a tér is kvázistacionárius. Hullámok nem tudnak haladni itt sem.

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_b$$

Fogalmak: örvényáram, szkineffektus (áramkiszorítás), behatolási mélység...

Alkalmazás: villamos gépek, roncsolásmentes anyagvizsgálat, indukciós hevítés...

10.7 Hullámterjedés:

Forrásoktól függetlenül vizsgáljuk a teret, tehát $\mathbf{J} = 0$ és $\rho = 0$

Időbeli szinuszos változás és lineáris közegek esetén:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Fogalmak: síkhullám, polarizáció, reflexió...

Alkalmazás: <számtalan>

11 Elektrosztatika

Emlékeztetőül:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}$$

11.1 A potenciál (elektromos skalárpotenciál)

11.1.1 A potenciál, mint segédmenyiség

Jele: Φ (nagy 'fi'), létezik alternatív írásmódja, amiben nincs a karakter tetején „sapka”, alján „talp”.

A skalárpotenciál „csak egy” segédváltozó, úgymint a csomóponti potenciálok. Mivel

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

leírható egy skalár gradienseként:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi$$

Bizonyítás:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \operatorname{rot} (-\operatorname{grad} \Phi) = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} \Phi \equiv \mathbf{0}$$

Φ egy additív állandó erejéig határozatlan.

$$\operatorname{grad} (\Phi + K) = \operatorname{grad} \Phi + \operatorname{grad} K = \operatorname{grad} \Phi$$

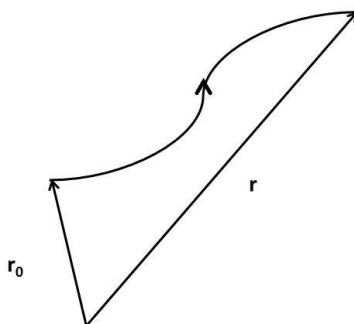
K konstans. K helyfüggetlen, ezért $\operatorname{grad} K = \mathbf{0}$

11.1.2 Φ Kapcsolata feszültséggel

$$\int_L \operatorname{grad} \Phi \, dl = \Phi_B - \Phi_A$$

$$\int_L (-\operatorname{grad} \Phi) \, dl = \int_L \mathbf{E} \, dl \equiv U_L \equiv U_{AB} \equiv \Phi_A - \Phi_B$$

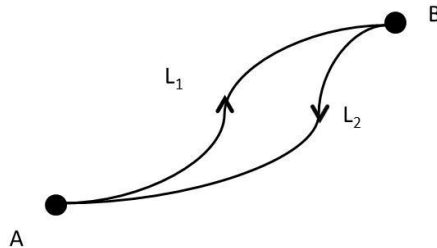
A feszültség nem más, mint potenciálkülönbség. Egy pont potenciálját egy referencia potenciálhoz ($\mathbf{r}_0$) képest nézzük.



11.1.1 potenciál

$$\Phi(r) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^r \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

Mindegy, hogy milyen görbe mentén integrálunk:



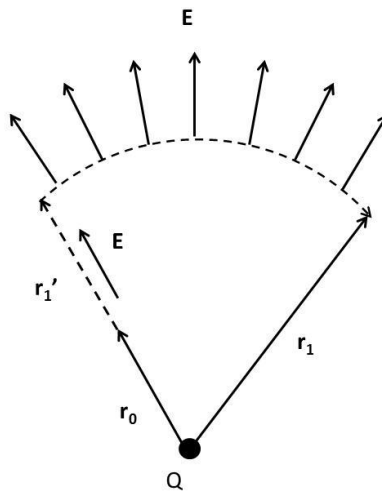
11.1.2 az integrálási út

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0 \Rightarrow \int_{A-L_1-B} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{B-L_2-A} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

$$\int_{B-L_2-A} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{A-L_2-B} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

11.1.3 Ponttöltés potenciáltere

Q az origóban, ϵ_0 a közeg, $\mathbf{r}_0$ -ban ismert a potenciál. Felveszünk egy olyan görbét, mely első szakaszán párhuzamos $\mathbf{E}$ -vel, második szakaszán merőleges $\mathbf{E}$ -re.



11.1.3 ponttöltés potenciáltere

$$\mathbf{E} = E_r(r) \mathbf{e}_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \mathbf{e}_r$$

$$\Phi(r_1) = \Phi(r_0) - \int_{r_0}^{r_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}$$

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_0) &= - \int_{r_0}^{r_1} E_r dr - \int_{r_1}^{r_1} \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \int_{r_0}^{r_1} E_r dr - 0 = - \int_{r_0}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr \\ &= \left[\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \right]_{r_0}^{r_1} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0} \right)\end{aligned}$$

Célszerű a referencia pontot a végtelenbe venni 0 értékkel. $\Phi(\mathbf{r}_0) = 0$, ha $\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty$

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}$$

Általánosan:

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

11.2 Laplace-Poisson egyenlet

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

$$\operatorname{div} (\epsilon \mathbf{E}) = \rho$$

$$\operatorname{div} (\epsilon (-\operatorname{grad} \Phi)) = \rho$$

$$-\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} \Phi) = \rho \text{ (általános alak)}$$

Speciális esetben, ha homogén a közeg: ϵ konstans

$$-\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

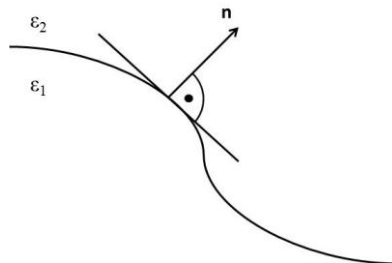
$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Még speciálisabb esetben: $\rho = 0$

$$\Delta \Phi = 0 \text{ (Laplace – egyenlet)}$$

11.2.1 A határfeltételek Φ -vel kifejezve:

Legyen Γ (nagy gamma) a határfelület két eltérő permittivitású közeg határán.



11.2.1 eltérő permittivitású határfelület

$$\mathbf{r} \in \Gamma$$

$$E_{1t} = E_{2t} \rightarrow \Phi_1(\mathbf{r}) = \Phi_2(\mathbf{r}) + K$$

$K=0$, konstans, helyfüggetlen.

Praktikusan: $[\Phi]_r = 0$, folytonosan megy át.

$$D_{2n} = D_{1n} + \sigma$$

$$\mathbf{n} \cdot \varepsilon_2(-\text{grad}_2 \Phi_2) = \mathbf{n} \cdot \varepsilon_1(-\text{grad}_1 \Phi_1) + \sigma$$

grad_2 jelentése, hogy a kettes közegben végezzük a gradiens képzést.

$$\mathbf{n} \cdot \text{grad} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ (normál irányú derivált.)}$$

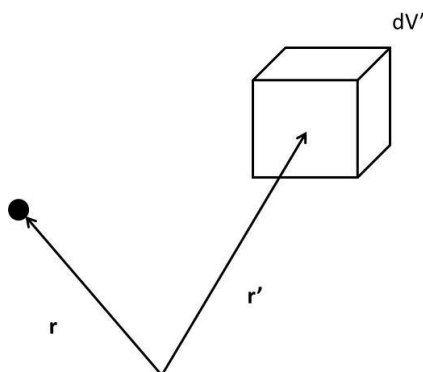
$$\varepsilon_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \varepsilon_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} + \sigma$$

$$\left[\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right] = \sigma$$

11.3 A L-P egyenlet általános megoldása

Az egyenlet megoldásához szükséges feltételek: legyen végtelen kiterjedésű és homogén, lineáris a közeg, valamint ismerjük a töltéeloszlást!

$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ lineáris, ezért érvényes a szuperpozíció elve



11.3.1 az általános megoldás

$$\Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$Q = \rho dV$$

11.4 Az elektrosztatikus tér energiája (Φ -vel kifejezve)

Induljunk ki az energiasűrűségből:

$$w_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\text{grad } \Phi|^2 dV$$

Szükséges feltétel, hogy a közeg legyen végtelen kiterjedésű, homogén, lineáris, valamint ne legyen töltés a végtelenben.

Alkalmazzuk az alábbi vektoranalitikai összefüggést:

$$\text{div}(a \text{ grad } b) = \text{grad } a \text{ grad } b + a \text{ div grad } b$$

legyen a és b egyenlő Φ !

$$\operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi) = \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} \Phi + \Phi \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi = |\operatorname{grad} \Phi|^2 - \Phi \frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$|\operatorname{grad} \Phi|^2 = \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi) + \Phi \frac{\rho}{\varepsilon} \quad / * \frac{1}{2} \varepsilon$$

V térfogatú, S(V) határfelületű tér esetén:

$$\frac{1}{2} \varepsilon \int_V |\operatorname{grad} \Phi|^2 dV = \frac{1}{2} \varepsilon \int_V \Phi \rho dV + \frac{1}{2} \varepsilon \int_V \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi) dV$$

Legyen $\gamma = \int_V \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi) dV$

$$\gamma = \int_V \operatorname{div}(\Phi \operatorname{grad} \Phi) dV = \oint_{S(V)} \Phi \operatorname{grad} \Phi \, ds$$

Még tovább specifikálva, legyen V egy R sugarú gömb! Ha R elég nagy, a töltések pontnak tekinthetők.

Az S peremen: $\Phi \sim \frac{1}{R}$

$$|\operatorname{grad} \Phi| \sim \frac{1}{R^2}$$

$$|S| \sim R^2 \quad (|S| \text{ a felület})$$

Az $\oint_{S(V)} \Phi \operatorname{grad} \Phi \, ds$ integrál nullához tart, ha R a végtelenhez tart, következésképpen a teljes térre $\Gamma=0$, tehát:

$$w_e = \frac{1}{2} \int \varepsilon E^2 dV = \frac{1}{2} \int \varepsilon |\operatorname{grad} \Phi|^2 dV = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV + 0$$

$$w_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV$$

Diszkrét alakban:

$$w_e = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k$$

11.5 Az elektrosztatika peremértékfeladata

11.5.1 Megoldás zárt tartományon, peremfeltételek

Bontsuk fel a V térfogat peremét S_D és S_N felületekre!

V térfogatra: $\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

S_D felületre: $\Phi = f_0$ (f_0 ismert függvény, Dirichlet feltétel)

S_N felületre: $\frac{\partial \Phi}{\partial n} \equiv \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad} \Phi = g_0$ (g_0 ismert függvény, Neumann feltétel) Φ

megoldása egyértelmű!

Ha $S_D = \emptyset$, akkor Φ egy additív állandó erejéig határozatlan.

11.5.2 Bizonyítás

A redukció ad absurdum módszerét alkalmazzuk, tehát feltesszük az állítás ellenkezőjét, amit hamisnak bizonyítva indirekt módon jutunk megoldáshoz.

Tegyük fel, hogy létezik Φ_1 és Φ_2 egymástól különböző megoldás, melyekre igaz, hogy:

$$V: \quad \Delta\Phi_1 = \Delta\Phi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$S_D: \quad \Phi_1 = \Phi_2 = f_0$$

$$S_N: \quad \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = g_0$$

Vezessük be a $\Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2$ potenciált is!

$$V: \quad \Delta\Phi_0 = \Delta(\Phi_1 - \Phi_2) = \Delta\Phi_1 - \Delta\Phi_2 = 0$$

$$S_D: \quad \Phi_0 = \Phi_1 - \Phi_2 = 0$$

$$S_N: \quad \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n}(\Phi_1 - \Phi_2) = \frac{\partial\Phi_1}{\partial n} - \frac{\partial\Phi_2}{\partial n} = 0$$

A különbségi potenciáltérre homogén peremfeltételt kapunk és megmutatjuk, hogy $\Phi_0 = 0$

$$\operatorname{div}(\Phi_0 \operatorname{grad}\Phi_0) = \operatorname{grad}\Phi_0 \operatorname{grad}\Phi_0 + \Phi_0 \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi_0}_{\Delta\Phi_0=0}$$

$$|\operatorname{grad}\Phi_0|^2 = \operatorname{div}(\Phi_0 \operatorname{grad}\Phi_0)$$

$$\int_V |\operatorname{grad}\Phi_0|^2 dV = \int_V \operatorname{div}(\Phi_0 \operatorname{grad}\Phi_0) dV = \oint_{S(V)} \Phi_0 \operatorname{grad}\Phi_0 \cdot \mathbf{n} \, ds = \oint_{S(V)} \Phi_0 \underbrace{\operatorname{grad}\Phi_0 \cdot \mathbf{n}}_{\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}} \, ds$$

$$= \oint_{S(V)} \Phi_0 \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \, ds = \oint_{S_D} \underbrace{\Phi_0}_0 \frac{\partial\Phi_0}{\partial n} \, ds + \oint_{S_N} \Phi_0 \underbrace{\frac{\partial\Phi_0}{\partial n}}_0 \, ds = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \int_V |\operatorname{grad}\Phi_0|^2 dV &= 0 \\ (\dots)^2 &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{csak akkor igaz, ha } \operatorname{grad}\Phi_0 = \mathbf{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{grad}\Phi_0 &= 0 \text{ ha } \Phi_0 \text{ konstans} \\ \Phi_0|_{S_D} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{csak akkor igaz, ha } \Phi_0 = 0$$

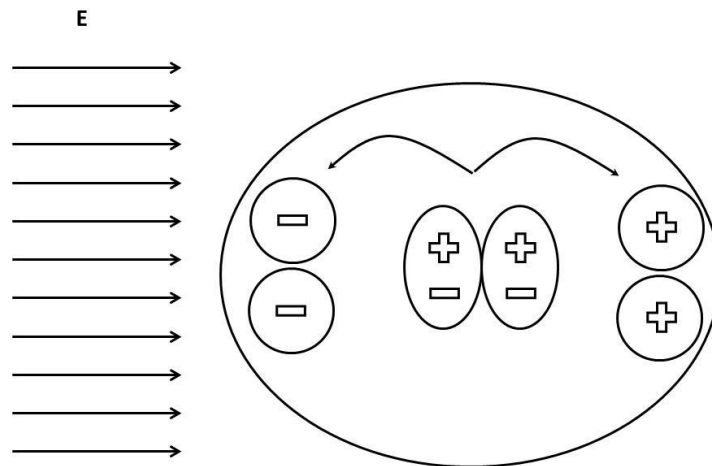
Ha $\Phi_0 = 0$, akkor $\Phi_1 = \Phi_2$, tehát még sincs két megoldás.

11.6 Elektródarendszerek

Az elektróda fogalmán vezető anyagot értünk.

11.6.1 Vezető anyagok elektromos térben

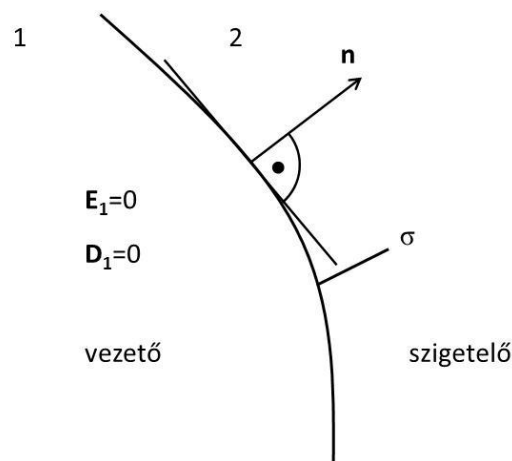
Vezetőket, szigetelőket szabad illetve helyhez kötött töltések alapján választhatjuk szét.



11.6.1 vezető elektromos térben

A tér hatására a semleges töltések szétválnak, belső teret hoznak létre, ami a külsőt kompenzálja. Viszonyítás kérdése, hogy mikor vezető vagy szigetelő az anyag. Ez függhet alkalmazási területtől, frekvenciától, a töltések szétválásának gyorsaságától (relaxációs idő).

Tegyük fel, hogy a töltésmozgás megtörtént!



11.6.2 vezető - szigetelő határfelület

Határfeltételek:

$$\left. \begin{array}{l} [E_t] = 0 \\ E_{1t} = 0 \end{array} \right\} E_{2t} = 0 \Rightarrow D_{2t} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} [D_n] = \sigma \\ D_{1n} = 0 \end{array} \right\} D_{2n} = \sigma \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} [E_t] = 0 \\ E_{1t} = 0 \end{array}} \right\} D_2 = \sigma$$

$$D_2 = \sigma$$

Következmények:

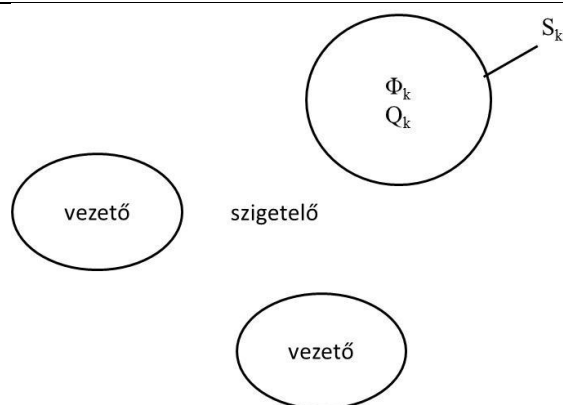
Az elektróda ekvipotenciális.

Az elektróda felületére merőlegesen az erővonalak (**E,D**)

11.6.2 Az elektródarendszer energiája

$$w_e = \frac{1}{2} \int_V \Phi \rho dV = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k \underbrace{\oint_{S_k} \sigma ds}_{Q_k}$$

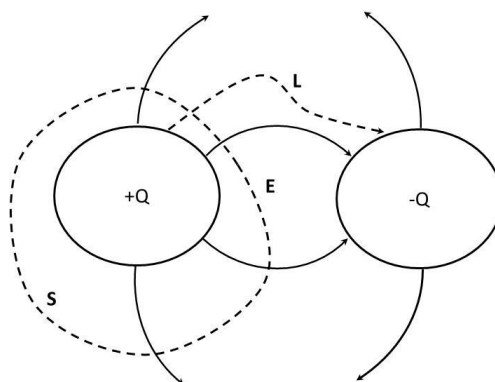
$$w_e = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k$$



11.6.3 az elektródarendszer

11.6.3 Két elektróda

Elektródapárról általában kondenzátor esetén beszélünk.



11.6.4 két elektróda esetén az elektromos tér

Tapasztalat szerint:

$$U \equiv \Phi^+ - \Phi^- \sim Q$$

$$C \triangleq \frac{Q}{U} [F]$$

$$C = \frac{\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s}}{\int_L \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}}$$

L tetszés szerinti vonal, mely összeköti a két elektródát. S tetszés szerinti zárt felület, mely körbeveszi az egyik elektródát.

Kondenzátor energiája:

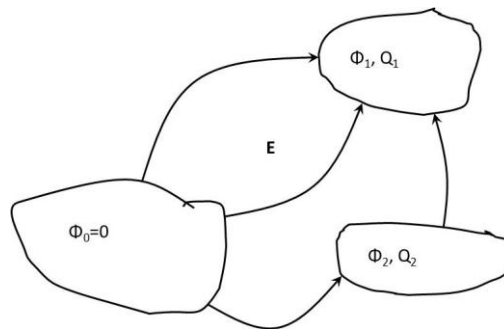
$$w_e = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k Q_k = \frac{1}{2} (\Phi^+ Q + \Phi^- (-Q)) = \frac{1}{2} Q (\Phi^+ - \Phi^-) = \frac{1}{2} Q U = \frac{1}{2} C U^2$$

$$w_e = \frac{1}{2} C U^2$$

11.6.4 Több elektróda, részkapacitások

$$\sum_i Q_i = 0$$

$$Q_0 = -(Q_1 + Q_2)$$



11.6.5 részkapacitások

$$\Phi_1 = p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2$$

$$\Phi_2 = p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2$$

p_{ij} a potenciál együtthatók, igaz rájuk, hogy:

$$p_{12} = p_{21}$$

$$p_{ij} = p_{ji}$$

$$\bar{\Phi} = \bar{p} \bar{Q}$$

$$\bar{Q} = \bar{p}^{-1} \bar{\Phi}$$

$$Q_1 = \gamma_{11} \Phi_1 + \gamma_{12} \Phi_2$$

$$Q_2 = \gamma_{21} \Phi_1 + \gamma_{22} \Phi_2$$

γ -t általában kis c betűvel szokás jelölni, de a később bevezetendő mennyiségek jelei miatt célszerűbb eltérni a szokástól.

γ_{ij} a kapacitás együtthatók, melyekre igaz, hogy:

$$\gamma_{ij} = \gamma_{ji}$$

Q_1 formulájához adjunk is hozzá és vonjunk is le belőle:

$$Q_1 = \gamma_{11} \Phi_1 + (\gamma_{12} \Phi_1 - \gamma_{12} \Phi_1) + \gamma_{12} \Phi_2 = (\gamma_{11} + \gamma_{12}) \Phi_1 - \gamma_{12} (\Phi_1 - \Phi_2)$$

Hasonló számítás után:

$$Q_2 = (\gamma_{21} + \gamma_{22}) \Phi_2 - \gamma_{21} (\Phi_2 - \Phi_1)$$

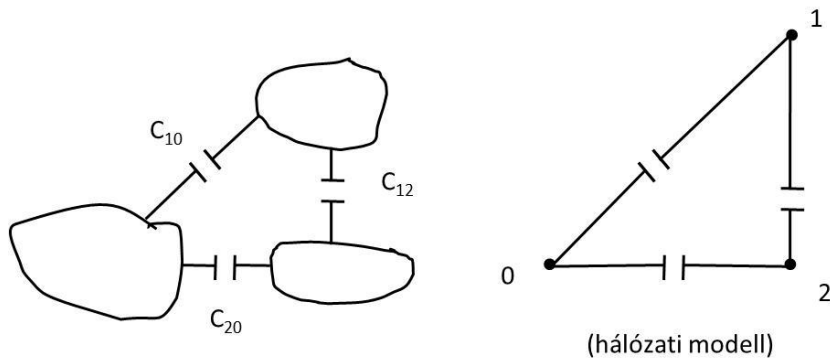
$$Q_1 = C_{10}(\Phi_1 - 0) + C_{12}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

$$Q_2 = C_{20}(\Phi_2 - 0) + C_{21}(\Phi_2 - \Phi_1)$$

A -0 tag fejezi ki a referencia pont potenciálját, ami 0.

$$\left. \begin{array}{l} C_{ik} = C_{ki} \text{ főkapacitások} \\ C_{i0} \text{ földkapacitások} \end{array} \right\} \text{részkapacitások } (i, k \neq 0)$$

Szemléletesen:



11.6.6 részkapacitások hálózati modellje

11.6.5 Több elektróda energiája

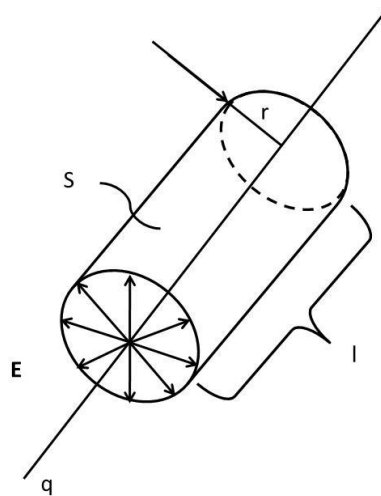
$$w_e = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \Phi_k Q_k$$

n=2 esetre:

$$\begin{aligned} w_e &= \frac{1}{2} \Phi_1 Q_1 + \frac{1}{2} \Phi_2 Q_2 = \frac{1}{2} p_{11} Q_1^2 + \frac{1}{2} p_{22} Q_2^2 + p_{12} Q_1 Q_2 \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{11} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} \gamma_{22} \Phi_2^2 + \gamma_{12} \Phi_1 \Phi_2 \\ &= \frac{1}{2} C_{10} \Phi_1^2 + \frac{1}{2} C_{20} \Phi_2^2 + \frac{1}{2} C_{12} (\Phi_1 - \Phi_2)^2 \end{aligned}$$

11.7 Egyszerű töltésrendszerek tere

11.7.1 Végtelen hosszú, egyenes vonaltöltés



11.7.1 vonaltöltés tere

Hengerszimmetria: r, φ, z

$$\mathbf{E}(r, \varphi, z) = E_r(r) \mathbf{e}_r$$

$$\Phi(r, \varphi, z) = \Phi(r)$$

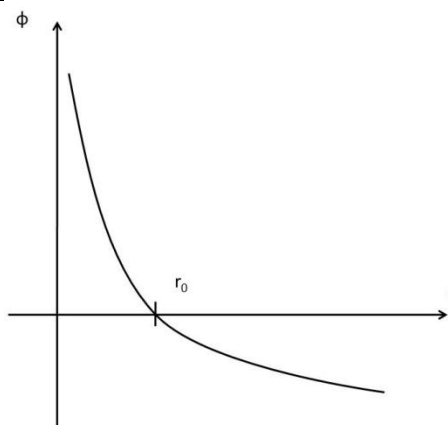
Írjuk fel a Gauss tételt! Az integrál eleve 0-át ad az alaplapon.

$$\overbrace{2r\pi l}^{\text{palást területe}} \overbrace{\varepsilon_0 E_r(r)}^D = \overbrace{q l}^{\text{bezárt töltés}}$$

$$E_r(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\Phi(r) = - \int_{r_0}^r E_r dr = - \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_0}^r \frac{1}{r} dr = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r}$$

$$\Phi(r) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r_0}{r} \quad (r_0 \neq 0, r_0 \neq \infty)$$



11.7.2 logaritmusos potenciál

11.7.2 Töltésdipólus

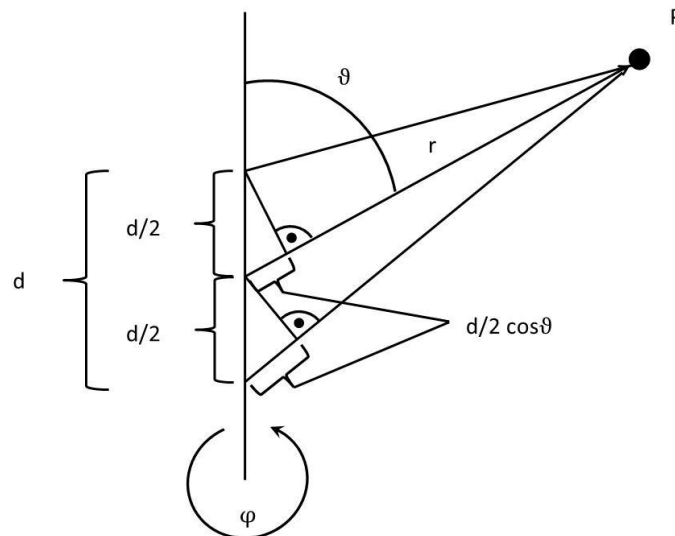
Dipólus: egymáshoz nagyon közel lévő, azonos nagyságú, ellentétes előjelű töltés.

Matematikai megközelítés: $\left. \begin{matrix} +Q \\ -Q \end{matrix} \right\} d \rightarrow 0, de Qd = konst. > 0$

Mérnöki megközelítés: dipólusról beszélünk, ha a teret elég távol vizsgáljuk.

Szimmetria gömbi koordináta-rendszerben (r, ϑ, φ) :

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi) = \Phi(r, \vartheta)$$



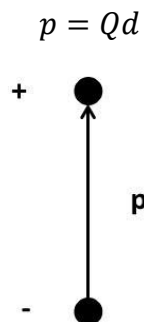
11.7.3 töltésdipólus gömbi koordináta rendszerben

$d \ll r$ esetén:

$$\Phi \cong \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r - \frac{d}{2} \cos \vartheta} - \frac{1}{r + \frac{d}{2} \cos \vartheta} \right) = \dots$$

$$\Phi \cong \frac{Qd}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^2}$$

Dipólusmomentum:



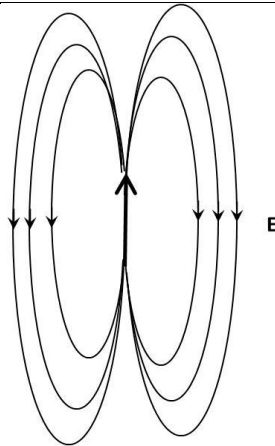
11.7.4 dipólusmomentum jelölése

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi = -\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}}_0 \mathbf{e}_\varphi \right)$$

$$E_r(r, \vartheta) = \frac{p}{2\pi\epsilon_0} \frac{\cos \vartheta}{r^3}$$

$$E_\vartheta(r, \vartheta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sin \vartheta}{r^3}$$

$$E_\varphi = 0$$



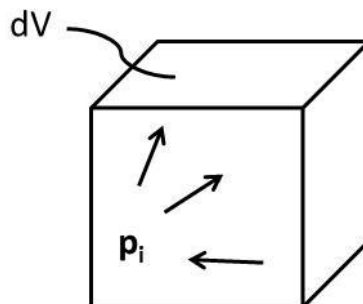
11.7.5 dipólusmomentum tere

A dipólus momentum jelentősége:

- dielektrikumok
- kettősrétegek
- polarizáció vektor:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

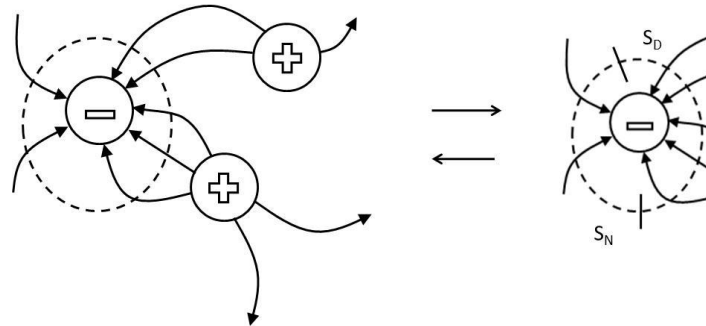
$$\mathbf{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum \mathbf{p}_i}{\Delta V}$$



11.7.6 polarizáció vektor

11.8 Helyettesítő töltések módszere

11.8.1 Az elv



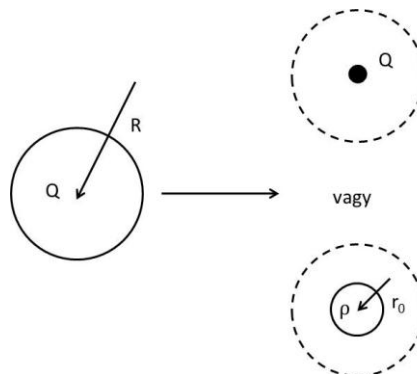
11.8.1 helyettesítő töltések módszere

A cél az eredeti peremfeltételek teljesítése külső töltésekkel. A háttérben az unicitás áll (megoldás egyértelműsége). A külső töltések elrendezése nem egyértelmű!

Fémgömb esetén:

$$E_r(r) \begin{cases} 0 & \text{ha } r < R \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} & \text{ha } r \geq R \end{cases}$$

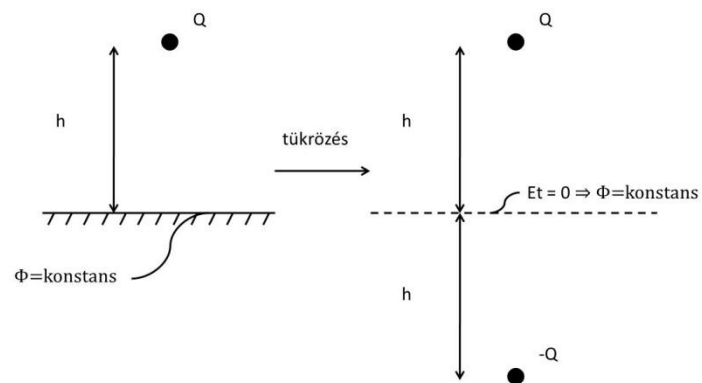
A fémgömböt ponttöltéssel, vagy kis töltött gömbbel helyettesítjük:



11.8.2 fémgömb helyettesítése

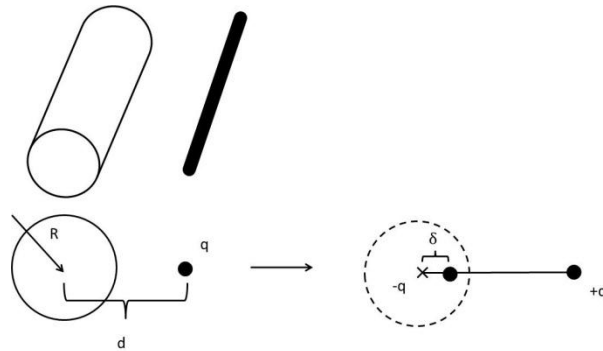
$$\rho = \frac{Q}{\frac{4r_0^3}{3}} \quad r > R - \text{re ekvivalens}$$

11.8.2 Ponttöltés – fém sík



11.8.3 tükrözés

11.8.3 Vonaltöltés – fémhenger

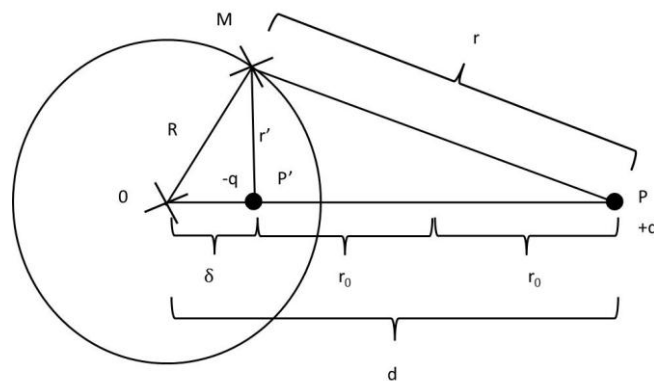


11.8.4 vonaltöltés - fémhenger

Ha $d \gg R$:

$$\delta = R \frac{R}{d} \approx 0$$

Bizonyítás:



11.8.5 vonaltöltés - fémhenger

δ -t úgy választjuk meg, hogy a hengerfelület ekvipotenciális legyen!

$$r_0 = \frac{\overline{PP'}}{2} = \frac{d - \delta}{2}$$

$$\Phi(M) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{r_0}{r} - \ln \frac{r_0}{r'} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r'}{r}$$

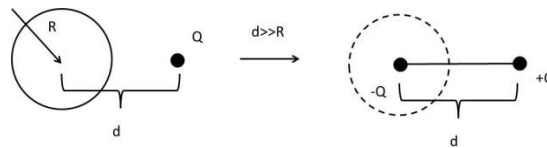
$$\frac{r'}{r} = \text{állandó legyen!}$$

Feltétel:

$$OPM_{\Delta} \sim OP'M_{\Delta} \rightarrow \frac{\delta}{R} = \frac{R}{\delta} \rightarrow \delta = \frac{R^2}{d}$$

Hasonló analógia mentén helyettesíthető 2 párhuzamos henger vagy henger – sík elrendezés.

11.8.4 Ponttöltés – fémgömb



11.8.6 ponttöltés - fémgömb

Ajánlott számítógépes animációk:

www.falstad.com/mathphysics.html

12 Stacionárius áramlási tér

12.1 Alapegyenletek

12.1.1 Maxwell

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

$$\text{div } \mathbf{J} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{E}_b)$$

12.1.2 Laplace

$$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0} \iff \mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$$

$$\text{ha } \mathbf{E}_b = 0 \Rightarrow \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

$$\text{div } (-\sigma \text{grad } \Phi) = 0$$

$$\text{div}(\sigma \text{grad } \Phi) = 0$$

Speciális esetben: homogén közeg ($\sigma = \text{konstans}$)

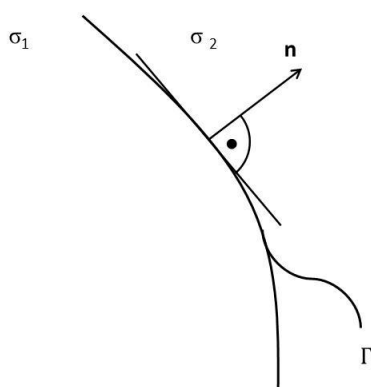
$$\sigma \text{div grad } \Phi = 0$$

$$\text{div grad } \Phi = \frac{0}{\sigma} = 0$$

$$\text{div grad } \Phi = 0$$

$$\Delta \Phi = 0$$

12.1.3 Folytonossági feltételek



12.1.1 folytonossági feltételek

$$E_{2t} = E_{1t}$$

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \underbrace{\text{konstans}}_0$$

$$[\Phi]_\Gamma = 0$$

A potenciál ugrása a gamma felületen 0.

$$J_{2n} = J_{1n} - \frac{\partial \rho_\Gamma}{\partial t}$$

ρ_Γ a felületi töltéssűrűség jele, mert σ foglalt.

Ha J normálisai közt különbség van, akkor töltés halmozódik fel a felületen vagy töltés távozik a felületről.

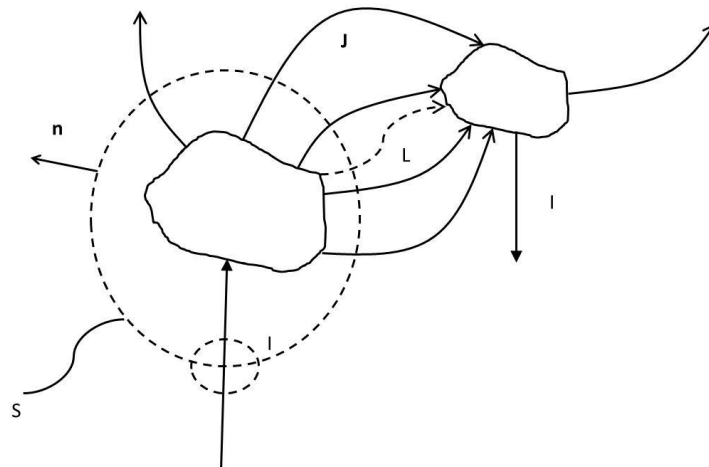
Speciális esetben: $\rho_\Gamma = 0$

$$J_{2n} = J_{1n}$$

$$\sigma_2 \frac{\partial \Phi_2}{\partial n} = \sigma_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial n} \Rightarrow \left[\frac{\partial \Phi}{\partial n} \right]_\Gamma = 0$$

12.2 Elektródarendszerek

12.2.1 Két elektróda – ellenállás (konduktancia) definíciója



12.2.1 két elektróda tere

L tetszőleges görbe. S tetszőleges felület, melyen 0-hoz közelítő területű lukat hagyunk a bemenő áram számára.

$$U \equiv \int_L \mathbf{E} d\mathbf{l} \sim I$$

$$R = \frac{U}{I} [\Omega] \quad \text{ill.} \quad G = \frac{I}{U} [S]$$

$$I = \oint_S \mathbf{J} d\mathbf{s} = \oint_S \sigma \mathbf{E} d\mathbf{s}$$

$$R = \frac{\int_L E d\mathbf{l}}{\oint_S \sigma \mathbf{E} d\mathbf{s}}$$

12.2.2 Teljesítmény (veszteség)

$$p = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{J} \cdot \frac{\mathbf{J}}{\sigma} = \frac{J^2}{\sigma} \quad (\mathbf{E}_b = \mathbf{0})$$

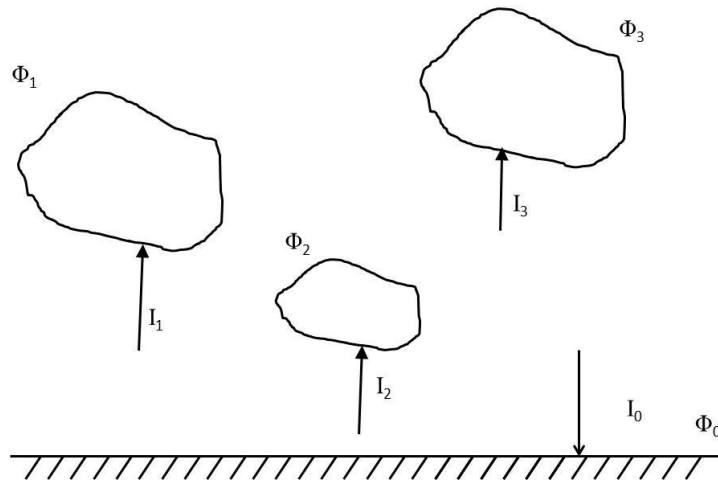
A teljesítménysűrűség:

$$p = \frac{J^2}{\sigma} \quad \left[\frac{W}{m^3} \right]$$

$$P \equiv \int p dV = I^2 R$$

$$R = \frac{\int \frac{J^2}{\sigma} dV}{I^2} \Rightarrow R = \frac{P}{I^2}$$

12.2.3 Több elektróda (részkonduktanciák)



12.2.2 több elektróda

$$I_0 = -(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$\Phi_0 = 0$$

$$I_1 = G_{10}\Phi_1 + G_{12}(\Phi_1 - \Phi_2) + G_{13}(\Phi_1 - \Phi_3) \quad (G_{12} = G_{21})$$

$$I_2 = G_{20}\Phi_2 + G_{12}(\Phi_2 - \Phi_1) + G_{23}(\Phi_2 - \Phi_3) \quad (G_{31} = G_{13})$$

$$I_3 = G_{30}\Phi_3 + G_{13}(\Phi_3 - \Phi_1) + G_{23}(\Phi_3 - \Phi_2) \quad (G_{23} = G_{32})$$

Általános leírás:

$$I_k = G_{k0}\Phi_k + \sum_{i=1}^n G_{ki}(\Phi_k - \Phi_i) \quad (k = 1 \dots n, G_{ki} = G_{ik})$$

12.3 Elektrosztatikai analógia

<i>stacionárius áramlás</i>	$\mathbf{E}_b = \mathbf{0}$	<i>elektrosztatika</i>	$\rho = 0$
$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$	$\text{rot } \mathbf{E} = \mathbf{0}$	$\mathbf{E} = -\text{grad } \Phi$
$\text{div } \mathbf{J} = 0$	$\Delta \Phi = 0$	$\text{div } \mathbf{D} = 0$	$\Delta \Phi = 0$
$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$		$\mathbf{D} = \sigma \mathbf{E}$	
$\underbrace{\hspace{10em}}_{\substack{J \leftrightarrow D \\ \sigma \leftrightarrow \varepsilon}}$			

Következmények:

$$C = G|_{\varepsilon \leftarrow \sigma}$$

Ismert kapacitás konduktanciája megkapható azonos elrendezés esetén.

Koax kábelre:

$$C' = G'|_{\varepsilon \leftarrow \sigma}$$

C' a hosszegységre eső kapacitás.

13 Stacionárius mágneses tér

13.1 Alapösszefüggések

13.1.1 Maxwell

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

13.1.2 Vektropotenciál

Bevezetése:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \text{ teljesül, ha } \mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0$$

Mértékválasztás:

$\mathbf{A}$ nem egyértelmű, pl:

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f$$

,ahol f tetszőleges skalármező.

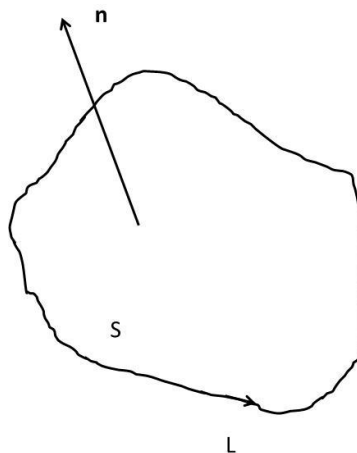
$$\operatorname{rot} \mathbf{A}' = \operatorname{rot}(\mathbf{A} + \operatorname{grad} f) = \operatorname{rot} \mathbf{A} + \underbrace{\operatorname{rot} \operatorname{grad} f}_{\equiv 0} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$\operatorname{div} \mathbf{A}$ értékét meg kell adni, ez a mértékválasztás.

Pl: Coulomb mérték: $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$

A fluxus kifejezése:

$$\Psi_S \triangleq \int_S \mathbf{B} \, d\mathbf{s}$$



13.1.1 zárt görbe által határolt irányított felület fluxusa

$$\Psi_S = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \, d\mathbf{s} = \oint_{L(S)} \mathbf{A} \, d\mathbf{l}$$

Az energia kifejezése:

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \mathbf{B} dV = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \text{rot } \mathbf{A} \, dV$$

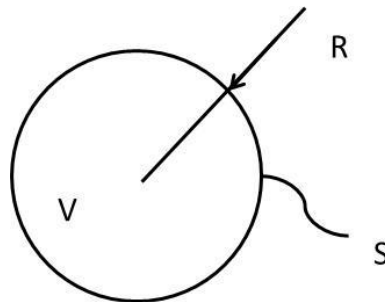
Vektoranalitikai összefüggés:

$$\text{div}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \text{rot } \mathbf{a} - \mathbf{a} \text{rot } \mathbf{b}$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \underbrace{\text{rot } \mathbf{H}}_{\mathbf{J}} dV - \frac{1}{2} \underbrace{\int \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV}_{\Gamma}$$

$$\Gamma = \int \text{div}(\mathbf{H} \times \mathbf{A}) dV = \oint \mathbf{H} \times \mathbf{A} \, d\mathbf{s}$$

Feltéve, hogy $\mathbf{J} = 0$ a végtelenben, $R \rightarrow \infty$



13.1.2 mágneses energia

$$\left. \begin{array}{l} |S| \sim R^2 \\ |\mathbf{A}| \sim \frac{1}{R} \\ |\mathbf{H}| \sim \frac{1}{R^2} \end{array} \right\} \Gamma \rightarrow 0$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{J} dV$$

(Elektrosztatikában: $W_e = \frac{1}{2} \int \varphi \rho \, dV$)

13.1.3 Vektoriális Poisson - egyenlet

$$\text{rot } \mathbf{H} = \text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \right) = \underbrace{\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} \right)}_{\text{általános alak}} = \mathbf{J}$$

Speciális esetben, homogén közegre ($\mu = \text{konst.}$)

$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

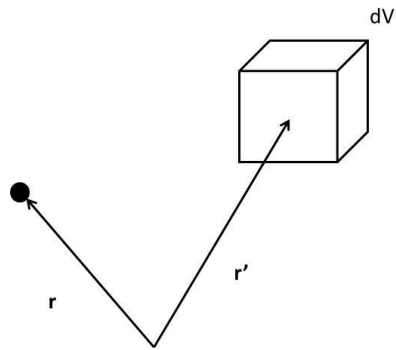
$$\text{grad } \underbrace{\text{div } \mathbf{A}}_{=0 \text{ (Coulomb)}} - \Delta \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

13.1.4 A vektoriális Poisson - egyenlet általános megoldása

Elektrosztatikában:

$$\Delta \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \Rightarrow \Phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$



13.1.3 a vektoriális Poisson egyenlet általános megoldása

Tegyük fel, hogy μ állandó, $\mathbf{J}$ ismert!

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \underset{(x,y,z)}{\Rightarrow} \begin{cases} \Delta A_x = -\mu J_x \Rightarrow A_x(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \Delta A_y = -\mu J_y \Rightarrow A_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \\ \Delta A_z = -\mu J_z \Rightarrow A_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \end{cases} \mathbf{A} = A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{J_x(\mathbf{r}')\mathbf{e}_x + J_y(\mathbf{r}')\mathbf{e}_y + J_z(\mathbf{r}')\mathbf{e}_z}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'$$

13.2 Áramjárta hurok (rendszer)

13.2.1 Biot-Savart törvény

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{rot}_r \left(\frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right) = \frac{\mu}{4\pi} \int \text{rot}_r \left(\underbrace{\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}_u \underbrace{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}_a \right) dV'$$

Vektoranalitikai összefüggés:

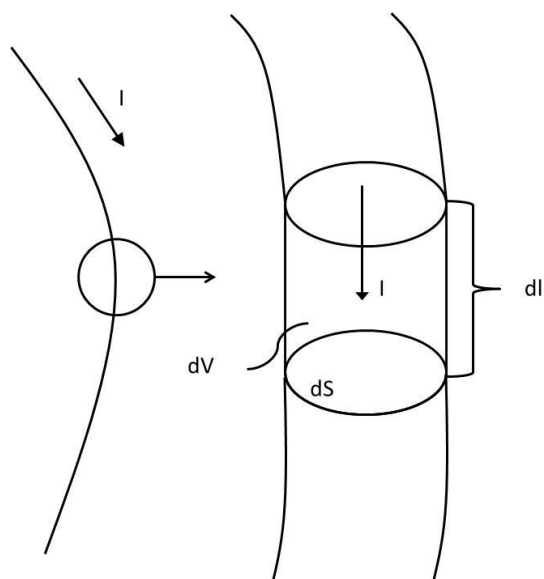
$$\text{rot}(u \mathbf{a}) = u \text{rot } \mathbf{a} + \text{grad } u \times \mathbf{a}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \underbrace{\text{rot}_r(\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}_0 dV' + \frac{\mu}{4\pi} \int \left(\text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \times \mathbf{J}(\mathbf{r}') dV'$$

$$\text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'$$

Speciális eset, vékony vezető:



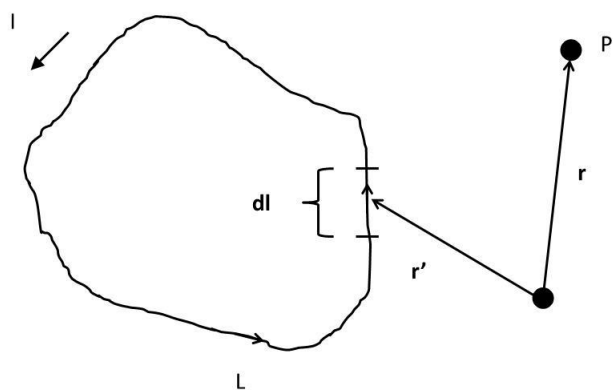
13.2.1 áramjárta vékony vezető

$$J = \frac{I}{dS}$$

$$dV = ds dl$$

$$J dV = I dl$$

$$J dV = \frac{I}{dS} ds dl = I dl$$



13.2.2 Biot-Savart törvény

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B}$$

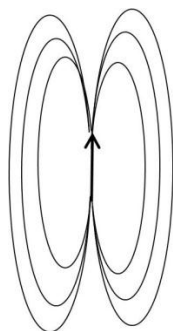
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Interpretáció:

$$d\mathbf{H} = \frac{I d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Fontos megjegyezni, hogy nem következethetünk az $I d\mathbf{l}$ áramelemekre, helyette:

$$\text{rot } d\mathbf{H} = d\mathbf{J} \text{ áramdipólus}$$



13.2.3 áramdipólus

13.2.2 Indukció - együttthatók

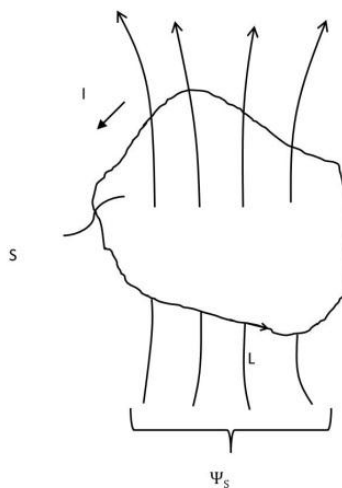
Öninduktivitás

$$L \triangleq \frac{\Psi}{I} [H]$$

$$\left[H = \frac{Vs}{A} \right]$$

$$\left[B = \frac{Vs}{m^2} \right]$$

$$\Psi_s = \int_s \mathbf{B} d\mathbf{s}$$



13.2.4 öninduktivitás

Energia kifejezése:

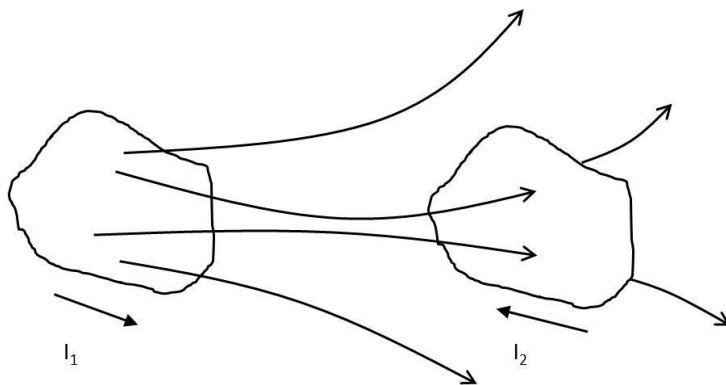
$$W_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{A} \mathbf{J} dV = \frac{1}{2} I \oint_L \mathbf{A} d\mathbf{l} = \frac{1}{2} I \Psi_s = \frac{1}{2} L I^2$$

$$W_m = \frac{1}{2} L I^2$$

Kölcsönös induktivitás

$$L_{21} = \frac{\Psi_2}{I_1} \Big|_{I_2=0}$$

$$L_{12} = \frac{\Psi_1}{I_2} \Big|_{I_1=0}$$



13.2.5 kölcsönös induktivitás

$$\Psi_1 = L_{11}I_1 + L_{12}I_2$$

$$\Psi_2 = L_{21}I_1 + L_{22}I_2$$

$$\left. \begin{array}{l} L_{11} \equiv L_1 \\ L_{22} \equiv L_2 \end{array} \right\} \text{öninduktivitás}$$

$$L_{21} = L_{12} = M \text{ kölcsönös induktivitás}$$

Energia kifejezése:

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2}I_1\Psi_1 + \frac{1}{2}I_2\Psi_2 = \frac{1}{2}I_1(L_{11}I_1 + L_{12}I_2) + \frac{1}{2}I_2(L_{12}I_1 + L_{22}I_2) \\ &= \frac{1}{2}L_{11}I_1^2 + L_{12}I_1I_2 + \frac{1}{2}L_{22}I_2^2 \end{aligned}$$

Általános eset: tekercsrendszer

A jobbkez szabályt alkalmazzuk

$$\Psi_k = \sum_{j=1}^n L_{kj}I_j$$

$$L_{kk} \equiv L_k \quad \text{öninduktivitás}$$

$$L_{kj} = L_{jk} \quad j \neq k \quad \text{kölcsönös induktivitás}$$

Az energia:

$$W_m = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n I_k \Psi_k = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n L_{kj} I_k I_j$$

14 Numerikus módszerek (ízeltő)

Adott egy parciális differenciálegyenlet (PDE) és peremértékfeladat. Például az elektrosztatika peremértékfeladata.

14.1 A megoldás menete

- modellalkotás
- geometria, anyagi jellemzők, források, peremfeltételek megadása
- diszkretizálás: tartomány felosztása (háló, pontrács...)
- algebrai egyenletrendszer felírása és megoldása (automatikus)
- megoldás ábrázolása, integrálok számítása
- eredmények értékelése

14.2 Osztályozás

14.2.1 Véges - differencia módszerek

rácsmódszer (ezt számon kéri)

időbeli véges differenciák módszere (FDTD)

14.2.2 Véges elem módszer

FEM

Alkalmazott szoftverek: Comsol, HFSS

14.2.3 Integrálegyenletek módszere

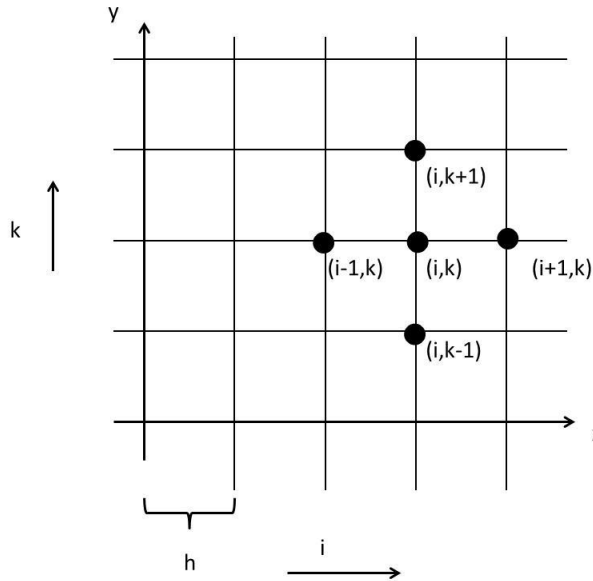
FIT

Alkalmazott szoftver: CST

14.3 Véges differenciák módszere (rácsmódszer)

14.3.1 Diszkretizálás

- szabályos háló felvétele
- tetszés szerinti pont kiválasztása (i,k)
- jobb, bal, alsó, felső szomszédok kiválasztása
- rácsállandó megadása: h



14.3.1 rácsmódszer

14.3.2 PDE → algebrai egyenletek

Gyakorlatilag sorfejtést végzünk. Φ kifejezése közelítéssel, Taylor sorral.

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{i+1,k} &= \Phi_{i,k} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \\ \Phi_{i-1,k} &= \Phi_{i,k} - \frac{\partial \Phi}{\partial x} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} h^2 + O(h^3) \\ \Phi_{i,k+1} &= \Phi_{i,k} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} h^2 + O(h^3) \\ \Phi_{i,k-1} &= \underbrace{\Phi_{i,k}}_{4\Phi_{i,k}} - \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial y} h}_0 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} h^2}_{-\frac{\rho}{\varepsilon} h^2} + \underbrace{O(h^3)}_0 \end{aligned} \right\} \oplus$$

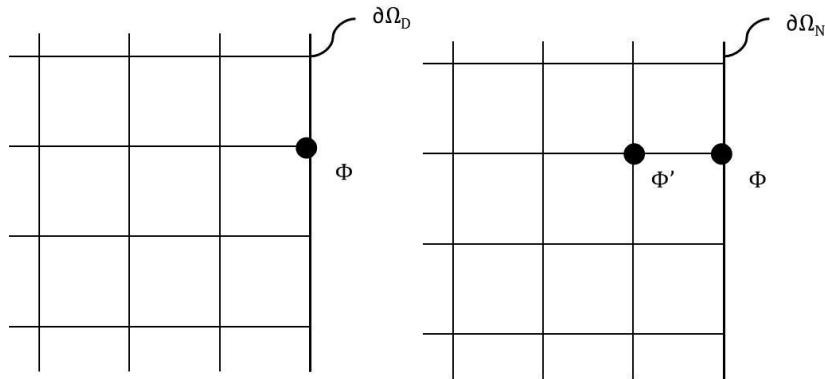
$$\Phi_{i,k} \cong 4(\Phi_{i+1,k} + \Phi_{i-1,k} + \Phi_{i,k+1} + \Phi_{i,k-1}) + \frac{\rho}{\varepsilon} h^2$$

Ez, az ötpontos formula. Az egyenlet minden pontra felírható. Egy kis magyarázat:

$$\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) h^2 = \Delta \Phi h^2 = -\frac{\rho}{\varepsilon} h^2$$

$O(h^3)$ (nagy ordó) az összes többi tag egybevonva, melyről elmondható, hogy köbös arányú és elhanyagolható.

14.3.3 Peremfeltétel érvényesítése



14.3.2 peremfeltételek

$$\partial\Omega_D: \Phi = f$$

$$\partial\Omega_N: \frac{\Phi - \Phi'}{h} = g$$

14.4 Véges elem módszer

14.4.1 Súlyozott maradék elv

Ω -ra a Laplace egyenlet helyett mást írunk fel:

$$-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) = \rho \rightarrow \int_{\Omega} [-\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \Phi) - \rho] \widehat{w}_i^{\text{függvény}} d\Omega = 0$$

$$\forall w_i \in \underset{\text{függvénytér}}{\widetilde{W}} \quad \text{-- re teljesül}$$

Az egyenlet átírható:

$$\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} w_i d\Omega = \int_{\Omega} \rho w_i d\Omega \quad \text{"gyenge alak"}$$

14.4.2 Diszkretizálás

Legyen W véges dimenziós, bázisa $w_i \quad i = 1 \dots N$, (ilyen a Fourier sorfejtés is).

Φ közelítése:

$$\Phi \cong \sum_{j=1}^N \Phi_j w_j$$

Helyettesítsük be a gyenge alakba!

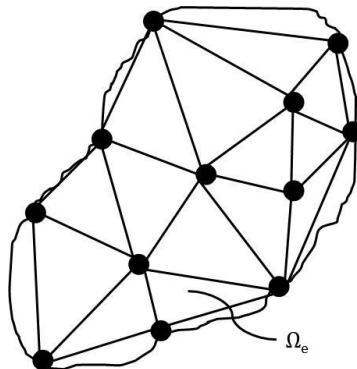
$$\sum_{j=1}^N \Phi_j \underbrace{\int_{\Omega} \varepsilon \operatorname{grad} \Phi \operatorname{grad} w_i d\Omega}_{A_{ij}} = \underbrace{\int_{\Omega} \rho w_i d\Omega}_{b_i} \quad i = 1 \dots N$$

$$\bar{A}\bar{\Phi} = \bar{b} \quad \text{lineáris algebrai egyenletrendszer}$$

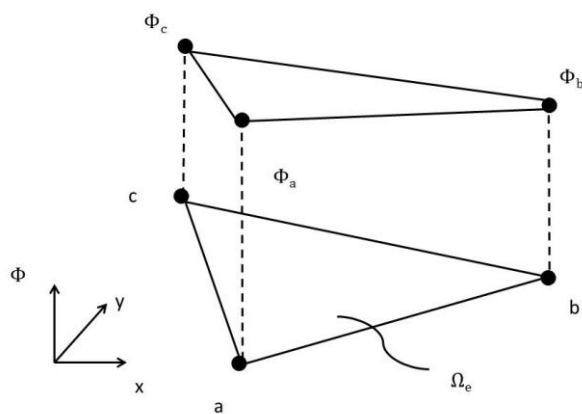
14.4.3 Lineáris háromszögelemek

w_i egy lehetséges megválasztása 2D-ben.

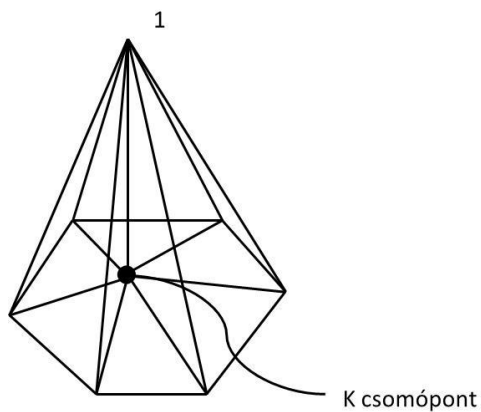
A tetszőleges felületet felosztjuk háromszögekre, egy elem az Ω_e .



14.4.1 a tartomány felosztása



14.4.2 Φ skalár lineáris közelítése egy háromszög felett



14.4.3 bázisfüggvény, "sátorfüggvény"

15 Távvezetékek (TV)

15.1 Bevezető

15.1.1 Jellemzők

Alkalmazás

Energia, információ továbbítása.

Jelenség

Vezetett hullám (párja a szabadtéri terjedés)

Feltétel

Egyetlen, a hosszkoordinátától függő feszültség illetve áramadattal leírható

TEM (Transzverzális Elektromos és Mágneses) típusú terjedés.

Transzverzális: **E** és **H** a terjedésre merőleges síkban fekszik.

Modell

Elosztott paraméterű hálózat (párja a koncentrált).

Hossz/hullámhossz szerepe

$l \ll \lambda \rightarrow$ koncentrált paraméterű modell

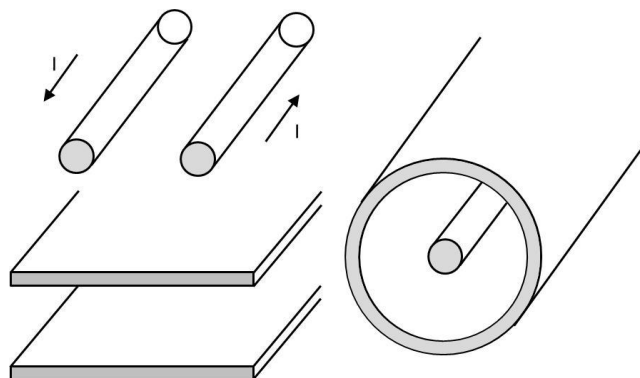
$l \sim \lambda$ vagy $l > \lambda \rightarrow$ elosztott paraméterű modell

$$f = 50 \text{ Hz} \rightarrow \lambda_0 = 6000 \text{ km}$$

$$f = 1 \text{ GHz} \rightarrow \lambda_0 = 30 \text{ cm}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

15.1.2 Néhány konstrukció

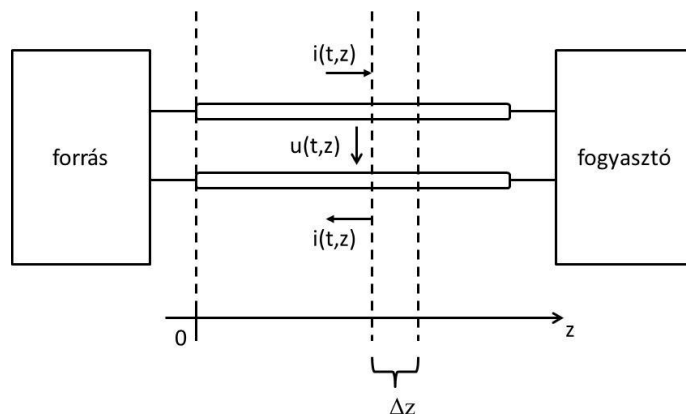


15.1.1 kettősvezeték (Lecher), koaxiális kábel, szalagpár

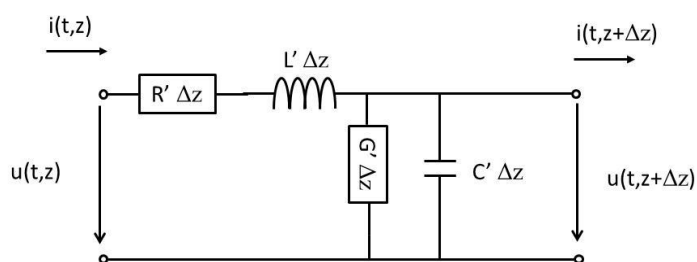
15.2 TV leírás időtartományban

15.2.1 Elosztott paraméterű modell

Valójában szakaszonként koncentrált paraméterű közelítés.



15.2.1 a modell



15.2.2 a Δz szakasz helyettesítő képe

L' , C' , G' , R' hosszegységre eső paraméterek.

15.2.2 TV paraméterek

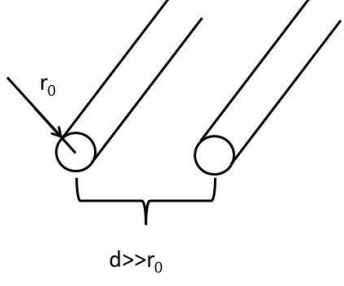
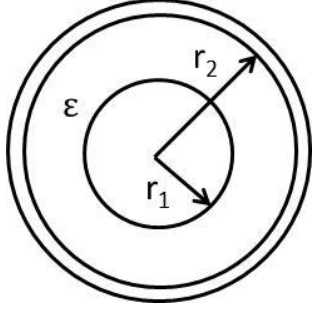
R' a hosszegységre vonatkoztatott ellenállás $\left[\frac{\Omega}{m}\right]$

G' a hosszegységre vonatkoztatott vezetés $\left[\frac{S}{m}\right]$

L' a hosszegységre vonatkoztatott induktivitás $\left[\frac{H}{m}\right]$

C' a hosszegységre vonatkoztatott kapacitás $\left[\frac{F}{m}\right]$

Az ideális TV veszteségmentes: $R' = 0, G' = 0$

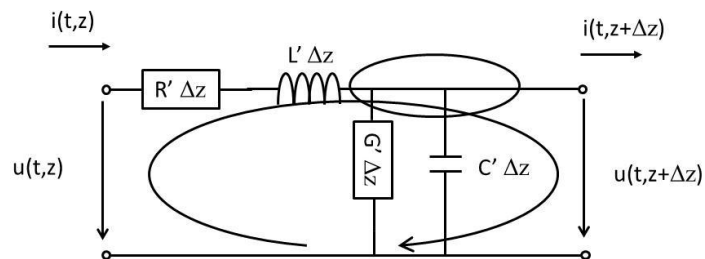
 15.2.3 párhuzamos vezetékpár	$C' \cong \frac{\pi \varepsilon_0}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$G' \cong 0$	$L' \cong \frac{\mu_0}{\pi} \ln \frac{d}{r_0}$
 15.2.4 koaxiális vezetékpár	$C' \cong \frac{2\pi\varepsilon}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$G' \cong \frac{2\pi\sigma}{\ln \frac{r_2}{r_1}}$	$L' \cong L'_{\text{külső}} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$

Érdekesség:

$$L'C' = \varepsilon\mu$$

15.2.3 Távíró egyenletek

Az alábbi hurokra és csomópontokra alkalmazott egyenletek:



15.2.5 távíró egyenletek

$$u(t, z + \Delta z) = u(t, z) - R' \Delta z i(t, z) - L' \Delta z \frac{\partial}{\partial t} i(t, z)$$

$$i(t, z + \Delta z) = i(t, z) - G' \Delta z u(t, z + \Delta z) - C' \Delta z \frac{\partial}{\partial t} u(t, z + \Delta z)$$

$$\frac{u(t, z + \Delta z) - u(t, z)}{\Delta z} = -R' i(t, z) - L' \frac{\partial}{\partial t} i(t, z)$$

$$\frac{i(t, z + \Delta z) - i(t, z)}{\Delta z} = -RG' u(t, z + \Delta z) - C' \frac{\partial}{\partial t} u(t, z + \Delta z)$$

$$\Delta z \rightarrow 0, \quad u \equiv u(t, z), \quad i \equiv i(t, z)$$

$$1: -\frac{\partial u}{\partial z} = R' i + L' \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$2: -\frac{\partial i}{\partial z} = G' u + C' \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$3: -\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' \frac{\partial i}{\partial z} + L' \frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t}$$

$$4: -\frac{\partial^2 i}{\partial z \partial t} = G' \frac{\partial u}{\partial t} + C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

A harmadik egyenletbe helyettesítsük be a 2.-at és 4.-et, ekkor megkapjuk a feszültségre vonatkozó távíró egyenletet:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R' G' u + (R' C' + L' G') \frac{\partial u}{\partial t} + L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

idTV-re:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L' C' \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Ez az un. hullámeqyenlet (hiperbolikus parciális differenciálegyenlet.)

15.3 Leírás a frekvenciatartományban

15.3.1 Komplex amplitúdók (fazorok)

$$u(t, z) = \underbrace{\hat{U}}_{\text{csúcs}}(z) \cos\left(\omega t + \underbrace{\rho_u}_{\text{kezdőfázis}}(z)\right) = \operatorname{Re}\left\{ \underbrace{\underline{U}}_{\text{komplex}}(z) e^{j\omega t} \right\}$$

$$i(t, z) = \hat{I}(z) \cos(\omega t + \rho_i(z)) = \operatorname{Re}\{ \underline{I}(z) e^{j\omega t} \}$$

$$\underline{U}(z) = \hat{U}(z) e^{j\rho_u(z)}$$

$$\underline{I}(z) = \hat{I}(z) e^{j\rho_i(z)}$$

15.3.2 A Helmholtz - egyenlet

$$-\frac{d\underline{U}(z)}{dz} = (R' + j\omega L') \underline{I}(z)$$

$$-\frac{d\underline{I}(z)}{dz} = (G' + j\omega C') \underline{U}(z)$$

$$\underline{I}(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d\underline{U}(z)}{dz}$$

$$\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} = (G' + j\omega C') \underline{U}(z)$$

$$\frac{d^2 \underline{U}(z)}{dz^2} - (R' + j\omega L')(G' + j\omega C') \underline{U}(z) = 0$$

$$\gamma = \sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')} \quad \left[\frac{1}{m} \right] \text{ terjedési együttható}$$

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - \gamma^2 U(z) = 0 \quad \text{Helmholtz – egyenlet}$$

$$\gamma = \alpha + j\beta$$

$$\alpha: \text{csillapítási tényező} \quad \left[\frac{1}{m} \right]$$

$$\beta: \text{fázis tényező} \quad \left[\frac{(\text{rad})}{m} \right]$$

15.3.3 Általános megoldás

Megoldás próbafüggvénnyel. $U(z)$ -t keresünk, $U(z) = U_0 e^{kz}$ alakban.

$$U_0 k^2 e^{kz} - \gamma^2 U_0 e^{kz} = 0$$

$$k^2 - \gamma^2 = 0$$

$$k = \pm \gamma$$

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = -\frac{1}{R' + j\omega L'} \frac{dU(z)}{dz} = \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U^+ e^{-\gamma z} - \frac{\gamma}{R' + j\omega L'} U^- e^{\gamma z}$$

$$Z_0 = \frac{R' + j\omega L'}{\gamma} = \frac{R' + j\omega L'}{\sqrt{(R' + j\omega L')(G' + j\omega C')}} = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{R' + j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \quad \text{hullámimpedancia}$$

γ és Z_0 hullámparaméterek.

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$I(z) = I^+ e^{-\gamma z} + I^- e^{\gamma z} \rightarrow \left. \begin{array}{l} I^+ = \frac{U^+}{Z_0} \\ I^- = -\frac{U^-}{Z_0} \end{array} \right\} Z_0 = \frac{U^+}{I^+} = -\frac{U^-}{I^-}$$

15.3.4 A megoldás értelmezése

Speciális eset: $U^- = 0$, $\alpha = 0$, $U^+ \in \mathbb{R}$

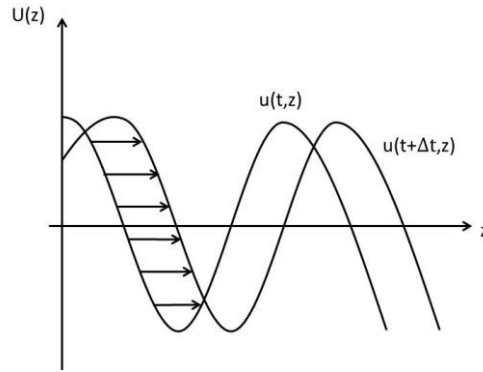
(mostantól nem jelöljük a komplexet)

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} = U^+ \underbrace{e^{-\alpha z}}_1 e^{-j\beta z}$$

$$u(t, z) = \operatorname{Re}\{U(z)e^{j\omega t}\} = \operatorname{Re}\{U^+ e^{-j\beta z} e^{j\omega t}\} = U^+ \operatorname{Re}\{e^{j(\omega t - \beta z)}\} = U^+ \cos(\omega t - \beta z)$$

$$= U^+ \cos \left[\omega \left(t - \underbrace{\frac{\beta}{\omega} z}_{\text{késleltetés}} \right) \right]$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} \quad \text{fázissebesség}$$



15.3.1 csillapítatlan, haladó hullám

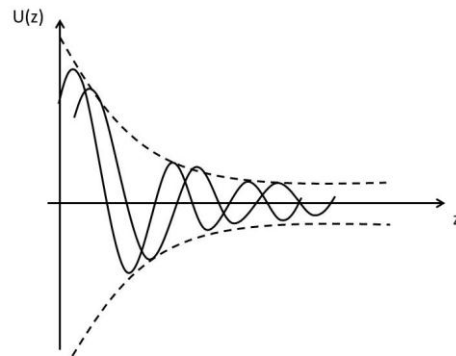
Általánosabban: $U^+ = |U^+|e^{j\varphi}$

$$u(t, z) = |U^+| \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

φ kiküszöbölhető t_0 alkalmas megválasztásával.

Még általánosabban: $U^- = 0, \alpha \neq 0$

$$u(t, z) = |U^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z)$$



15.3.2 csillapodva haladó hullám

Legáltalánosabban: $U^- \neq 0$

$$u(t, z) = \underbrace{|U^+| e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \varphi^+)}_{+z \text{ irányba haladó csillapított hullám}} + \underbrace{|U^-| e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \varphi^-)}_{-z \text{ irányba haladó csillapított hullám}}$$

Térbeli és időbeli periodicitás:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad \text{hullámhossz}$$

15.3.5 Ideális TV viszonyai

$$R' = 0, G' = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega L' j\omega C'} = j\omega\sqrt{L'C'} \rightarrow \alpha = 0 \text{ (nincs csillapítás)}$$

$$\beta = \omega\sqrt{L'C'}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{j\omega C'}} = \sqrt{\frac{L'}{C'}}$$

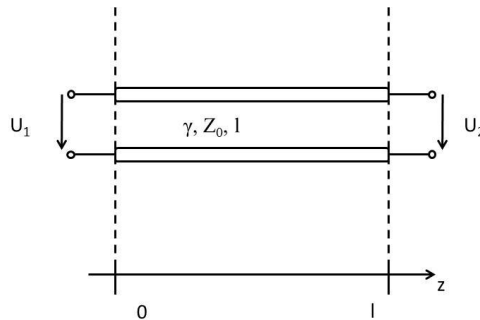
$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{L'C'}}$$

v frekvenciafüggetlen!

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}} = c$$

15.3.6 A lezárás szerepe – peremfeltételek

Speciális eset:

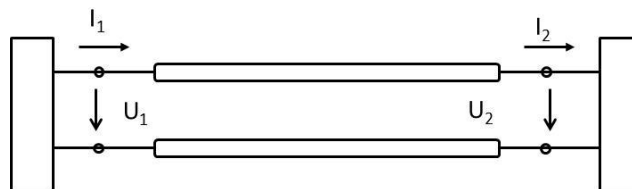


15.3.3 lezárás szerepe

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

$$\left. \begin{aligned} U_1 = U(z=0) &= U^+ + U^- \\ U_2 = U(z=l) &= U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l} \end{aligned} \right\} U^+, U^- \text{ kifejejezhető}$$

Általános eset:



15.3.4 általános lezárás

$$U_1 = f_1(I_1) \quad U_2 = f_2(I_2)$$

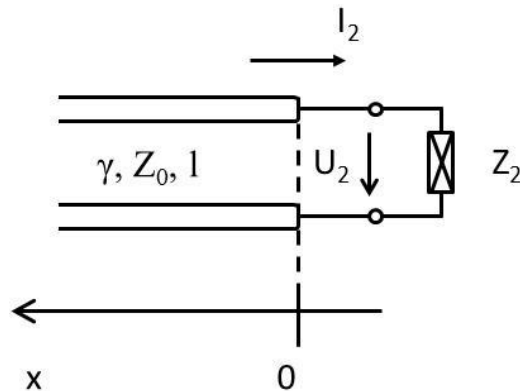
$$I_1 = g_1(U_1) \quad I_2 = g_2(U_2)$$

$$U(z=0) = f_1(I(z=0))$$

$$U(z=l) = f_2(I(z=l))$$

15.4 Impedanciával lezárt TV

15.4.1 Új vonatkoztatási rendszer



15.4.1 ellentétes irányú hosszkoordináta

$$x = l - z \rightarrow z = l - x$$

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z} = U^+ e^{-\gamma(l-x)} + U^- e^{\gamma(l-x)} = \underbrace{U^+ e^{-\gamma l}}_{U_2^+} e^{\gamma x} + \underbrace{U^- e^{\gamma l}}_{U_2^-} e^{-\gamma x}$$

$$\begin{aligned} U(x) &= U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x} \\ I(x) &= \underbrace{\frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x}}_{\text{beeső hullám}} - \underbrace{\frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}}_{\text{reflektált komponens}} \end{aligned}$$

$$U(x) = U_2^+ e^{\gamma x} + U_2^- e^{-\gamma x}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-\gamma x}$$

15.4.2 Reflexiós tényező

$$r \triangleq \frac{U_{\text{reflektált}}}{U_{\text{beeső}}} \quad (\text{egy adott helyen})$$

$$r_2 = \frac{U_2^-}{U_2^+}$$

$$r_2 = \frac{U^- e^{\gamma l}}{U^+ e^{-\gamma l}} = \frac{U^-}{U^+} e^{2\gamma l}$$

r, mint a hely függvénye

$$r(z) = \frac{U^- e^{\gamma z}}{U^+ e^{-\gamma z}}$$

$$r(x) = \frac{U_2^- e^{-\gamma x}}{U_2^+ e^{\gamma x}}$$

$$U_2^- = r_2 U_2^+$$

$$U(x) = U_2^+ (e^{\gamma x} + r_2 e^{-\gamma x})$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{\gamma x} - r_2 e^{-\gamma x})$$

r kifejezése az impedanciákkal

$$Z_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{U(x=0)}{I(x=0)} = \frac{U_2^+ (1 + r_2)}{\frac{U_2^+}{Z_0} (1 - r_2)} = Z_0 \frac{1 + r_2}{1 - r_2}$$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0}$$

Ha Z_2 paszív:

$$\operatorname{Re}\{Z_2\} > 0 \Rightarrow |r_2| \leq 1$$

Teljes visszaverődés, ha $|r_2| = 1$

15.4.3 Speciális lezárások

Illesztett lezárás

$$Z_2 = Z_0$$

$$r_2 = 0 \Rightarrow \text{nincs reflexió}$$

$$\left. \begin{aligned} U(x) &= U_2^+ e^{\gamma x} \\ I(x) &= \frac{U_2^+}{Z_0} e^{\gamma x} \end{aligned} \right\} \text{tisztán haladó hullám}$$

Szakadás

$$Z_2 = \infty$$

$$r_2 = \lim_{Z_2 \rightarrow \infty} \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = 1$$

Tegyük fel, hogy $\alpha = 0, U_2^+ \in \mathbb{R}$

$$U(x) = U_2^+ (e^{j\beta x} + 1e^{-j\beta x}) = 2U_2^+ \cos(\beta x)$$

$$u(t, x) = \operatorname{Re}\{2U_2^+ \cos(\beta x) e^{j\omega t}\} = 2U_2^+ \cos(\beta x) \cos(\omega t) \quad (\text{állóhullám})$$

Csomópontok:

$$\cos \beta x = 0$$

$$\beta x = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi}{2} (2k + 1)$$

$$x = \underbrace{\frac{\pi}{2\beta}}_{\frac{\lambda}{4}} (2k + 1) = \frac{\lambda}{4} (2k + 1)$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} (e^{j\beta x} - 1e^{-j\beta x}) = 2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x)$$

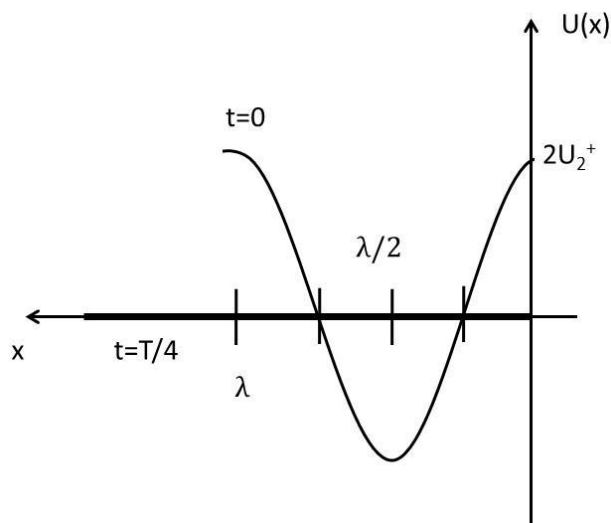
$$i(t, x) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{2j \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x)}_{e^{j\frac{\pi}{2}}} e^{j\omega t} \right\} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \sin(\beta x) \underbrace{\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}_{-\sin(\omega t)}$$

Csomópontok:

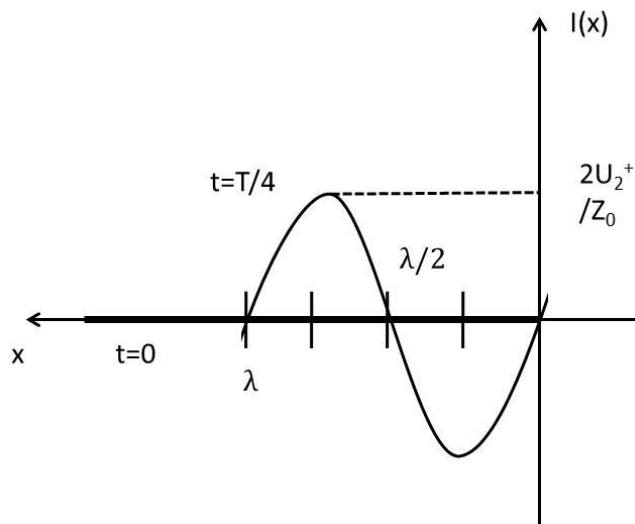
$$\sin(\beta x) = 0$$

$$\beta x = k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{\beta} k = \frac{\lambda}{2} k$$

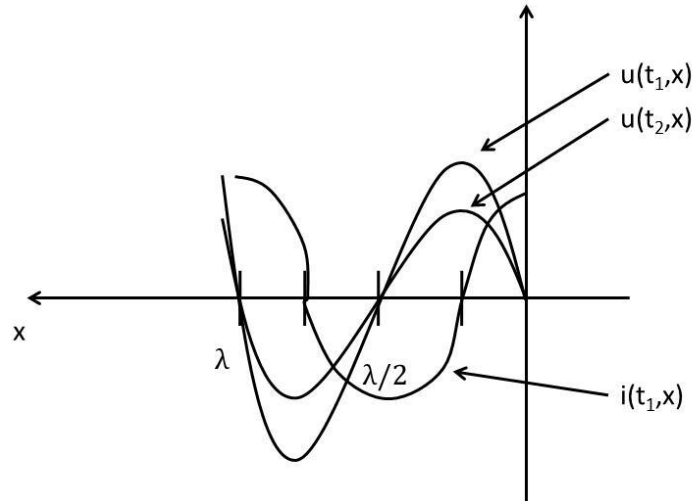


15.4.2 Feszültség hullám



15.4.3 Áram hullám

Rövidzár



15.4.4 feszültség rövidzár esetén

Rövidzár esetén $Z_2 = 0$

$$r_2 = \frac{Z_2 - Z_0}{Z_2 + Z_0} = -1$$

$$U(x) = U_2^+ e^{j\beta x} + \underbrace{U_2^-}_{rU_2^+ = -U_2^-} e^{-j\beta x} = U_2^+ \underbrace{(e^{j\beta x} - e^{-j\beta x})}_{2j \sin(\beta x)}$$

$$I(x) = \frac{U_2^+}{Z_0} e^{j\beta x} - \frac{U_2^-}{Z_0} e^{-j\beta x} = 2 \frac{U_2^+}{Z_0} \cos(\beta x)$$

15.4.4 Tetszőleges lezárás

$$Z_2 = R + jX$$

$$r_2 = \frac{R + jX - Z_0}{R + jX + Z_0} = |r_2| e^{j\varphi}$$

$$0 \leq |r_2| \leq 1$$

$$U(x) = U_2^+ e^{j\beta x} + U_2^- e^{-j\beta x} = U_2^+ (e^{j\beta x} + |r| e^{j\varphi} e^{-j\beta x})$$

$$= U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}} \left(e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} + |r| e^{-j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} \right)$$

$$= U_2^+ e^{j\frac{\varphi}{2}} \left(\underbrace{e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} - |r| e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})}}_{(1-|r|)e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})}} + \underbrace{|r| e^{j(\beta x - \frac{\varphi}{2})} + |r| e^{-j(\beta x - \frac{\varphi}{2})}}_{2|r| \cos(\beta x - \frac{\varphi}{2})} \right)$$

$$= \underbrace{U_2^+ (1 - |r|) e^{j\beta x}}_{\text{poz. irányba haladó hullám}} + \underbrace{U_2^- e^{j\frac{\varphi}{2}} 2|r| \cos\left(\beta x - \frac{\varphi}{2}\right)}_{\text{állóhullám}}$$

Egyszerre van jelen álló- és haladóhullám!

15.4.5 Állóhullám arány

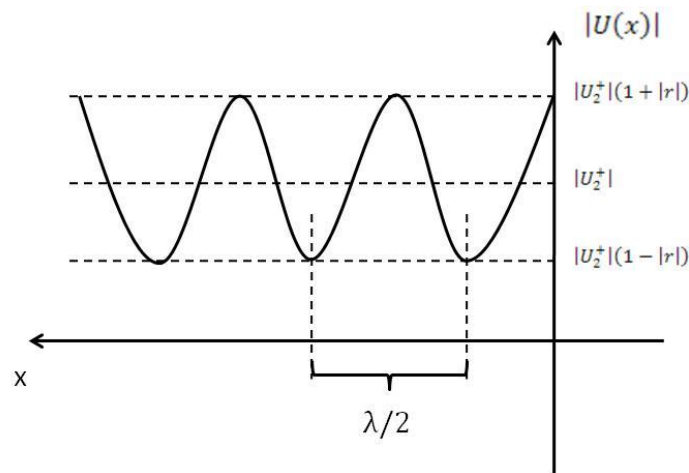
$$\sigma \triangleq \frac{|U(x)|_{\max}}{|U(x)|_{\min}}$$

$$|U(x)| = \left| U_2^+ e^{j\beta x} + U_2^+ |r| e^{j\varphi} e^{-j\beta x} \right| \equiv \left| U_2^+ e^{j\beta x} \right| \underbrace{\left| 1 + |r| e^{-j(2\beta x - \varphi)} \right|}_{q(x)}$$

$$|q(x)|_{\max} = 1 + |r|$$

$$|q(x)|_{\min} = 1 - |r|$$

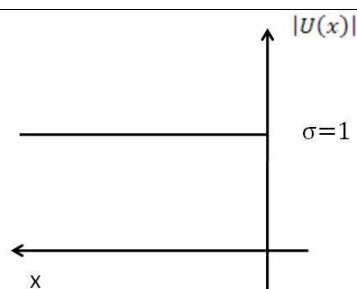
$$\sigma = \frac{|q(x)|_{\max}}{|q(x)|_{\min}} = \frac{1 + |r|}{1 - |r|}$$



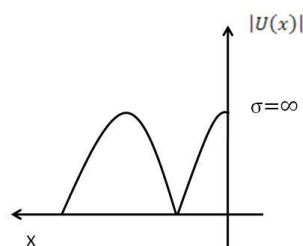
15.4.5 Állóhullám arány

$$|q(x)| = |1 + |r| \cos(2\beta x - \varphi) - j|r| \sin(2\beta x - \varphi)| = \sqrt{1 + 2|r| \cos(2\beta x - \varphi) + |r|^2}$$

$$1 \leq \sigma \leq \infty$$



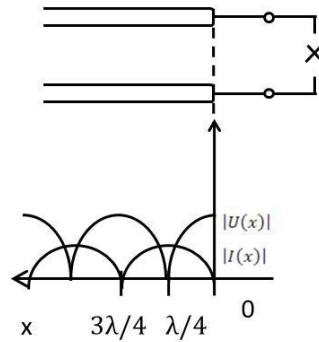
15.4.6 Illesztés



15.4.7 Szakadás

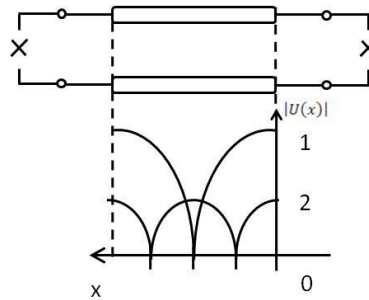
15.5 TV, mint rezgőkör

15.5.1 Végén szakadással lezárt TV



15.5.1 Szakadással lezárt TV

15.5.2 Mindkét végén szakadással zárt TV



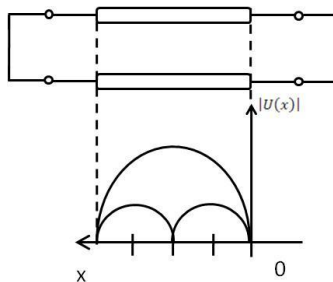
15.5.2 Mindkét végén szakadással zárt TV

$$f_1 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2l}$$

$$f_2 = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{2 \cdot \frac{l}{2}} = \frac{v}{l}$$

$$f_h = h \frac{v}{2l}$$

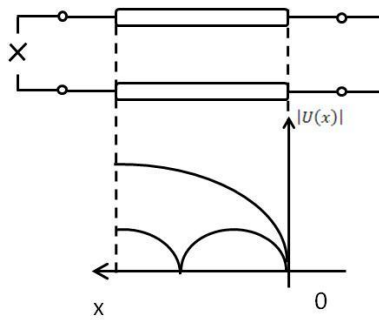
15.5.3 Mindkét végén rövidre zárt TV



15.5.3 Mindkét végén rövidre zárt TV

$$f_h = h \frac{v}{2l}$$

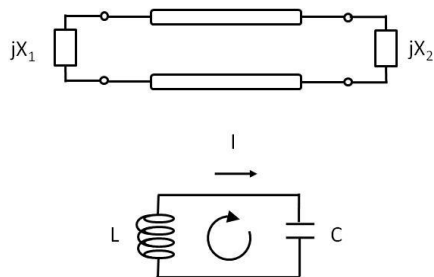
15.5.4 Vegyes lezárás



15.5.4 Vegyes lezárás

$$f_h = (2h + 1) \frac{v}{4l}$$

15.5.5 Általános, veszteségmentes lezárások

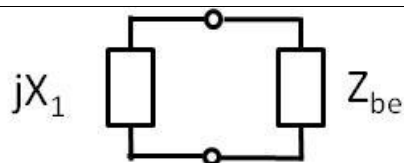


15.5.5 Általános, veszteségmentes lezárások

$$j\omega LI + \frac{1}{j\omega C} I = 0$$

$$\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I = 0$$

$$\omega_{rez} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

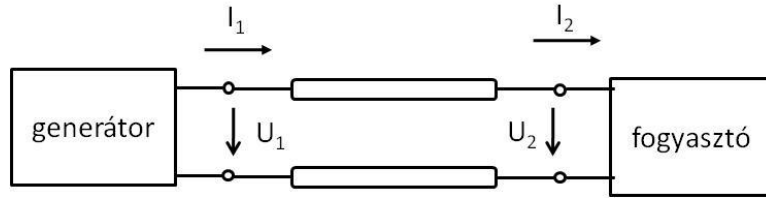


15.5.6 rezonancia

$$\underbrace{(jX_1 - Z_{be})}_{=0 \rightarrow \text{rezonancia}} I_1 = 0$$

$Z_{be} = jX_{be}$ transzcendens egyenletre vezethet.

15.6 TV, mint kétkapu



15.6.1 TV, mint kétkapu

Fontos (U_1, I_1) és (U_2, I_2) kapcsolata.

15.6.1 Lánckarakterisztika

$$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \bar{\bar{A}} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$U(z) = U^+ e^{-\gamma z} + U^- e^{\gamma z}$$

$$I(z) = \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$z = 0$ esetén:

$$\begin{aligned} U_1 &= U^+ + U^- \\ I_1 &= \frac{U^+}{Z_0} - \frac{U^-}{Z_0} = I^+ + I^- \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{Z_0} & -\frac{1}{Z_0} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{M}}_1} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$z = l$ esetén:

$$\begin{aligned} U_2 &= U^+ e^{-\gamma l} + U^- e^{\gamma l} \\ I_2 &= \frac{U^+}{Z_0} e^{-\gamma l} - \frac{U^-}{Z_0} e^{\gamma l} \\ \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} &= \underbrace{\begin{pmatrix} e^{-\gamma l} & e^{\gamma l} \\ \frac{e^{-\gamma l}}{Z_0} & -\frac{e^{\gamma l}}{Z_0} \end{pmatrix}}_{\bar{\bar{M}}_2} \begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} &= \bar{\bar{M}}_1 \underbrace{\left(\bar{\bar{M}}_2^{-1} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \right)}_{\begin{pmatrix} U^+ \\ U^- \end{pmatrix}} = \underbrace{\bar{\bar{M}}_1 \bar{\bar{M}}_2^{-1}}_{\bar{\bar{A}}} \begin{pmatrix} U_2 \\ I_2 \end{pmatrix} \\ \bar{\bar{A}} &= \begin{bmatrix} \cosh(\gamma l) & Z_0 \sinh(\gamma l) \\ \frac{1}{Z_0} \sinh(\gamma l) & \cosh(\gamma l) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det \bar{\bar{A}} = 0 \rightarrow \text{rec.}$$

$$A_{11} = A_{22} \rightarrow \text{szimm.}$$

idTV:

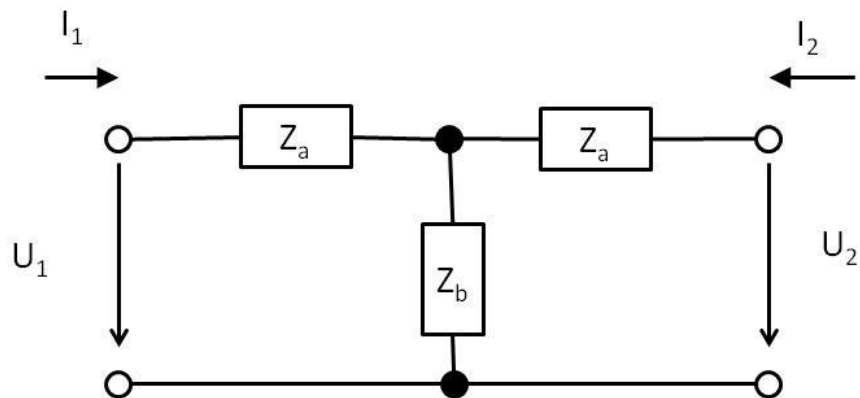
$$\gamma = j\beta$$

$$\cosh(j\beta l) = \cos(\beta l)$$

$$\sinh(j\beta l) = j \sin(\beta l)$$

15.6.2 Helyettesítő kapcsolások

T-tag



15.6.2 T helyettesítő tag

$$Z_a = Z_0 \frac{\cosh(\gamma l) - 1}{\sinh(\gamma l)}$$

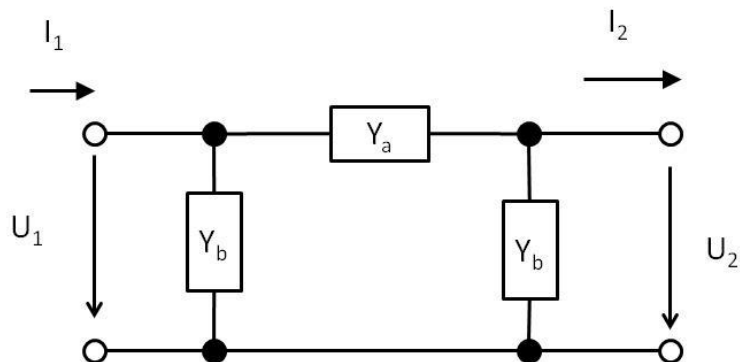
$$Z_b = \frac{Z_0}{\sinh(\gamma l)}$$

$$\bar{\bar{A}} \rightarrow \bar{\bar{Z}}: \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \bar{\bar{Z}} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

$$Z_{11} = Z_a + Z_b = Z_{22}$$

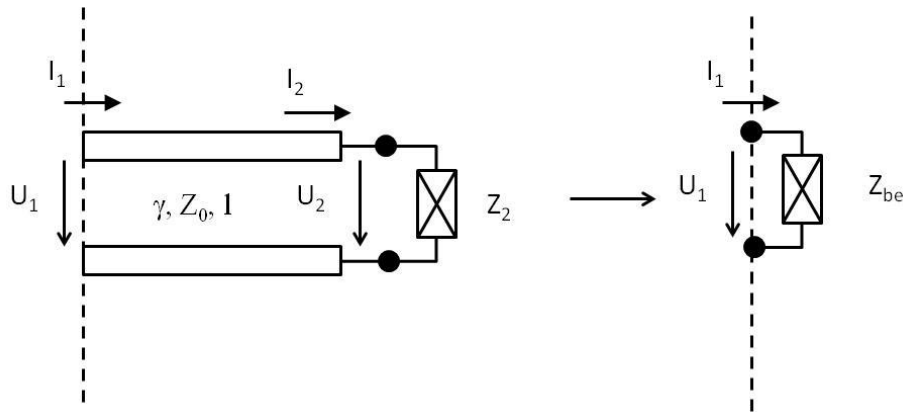
$$Z_{12} = Z_b = Z_{21}$$

π -tag



15.6.3 π tag

15.6.3 Bemeneti Z



15.6.4 Bemeneti impedancia

$$U_1 = U_2 \cosh(\gamma l) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma l)$$

$$I_1 = \frac{1}{Z_0} U_2 \sinh(\gamma l) + I_2 \cosh(\gamma l)$$

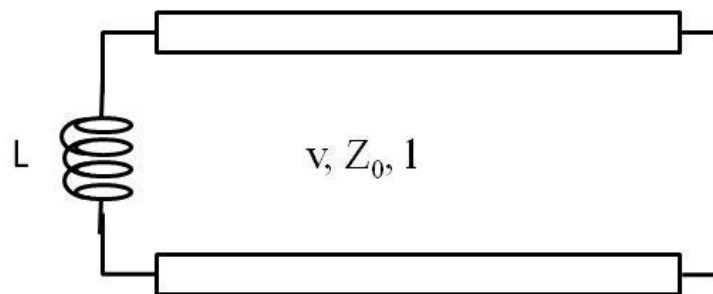
$$Z_{be} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{\overset{I_2 Z_2}{\widetilde{U_2}} \cosh(\gamma l) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma l)}{\frac{1}{Z_0} U_2 \sinh(\gamma l) + I_2 \cosh(\gamma l)} = Z_0 \frac{Z_2 + Z_0 \tanh(\gamma l)}{Z_0 + Z_2 \tanh(\gamma l)}$$

$$Z_{be} = Z_0 \frac{Z_2 + jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0 + jZ_2 \tan(\beta l)} \text{ ideális TV esetén}$$

$$\gamma = j\beta$$

$$\tanh(j\beta l) = j \tan(\beta l)$$

Rezonanciafrekvencia meghatározása feladat



15.6.5 $f_{\text{rez}} = ?$

$$Z_{be} = Z_0 \frac{jZ_0 \tan(\beta l)}{Z_0} = jZ_0 \tan(\beta l)$$

$$j\omega L + jZ_0 \tan(\beta l) = 0$$

$$\omega, \frac{\omega}{v} \rightarrow \text{transzcendens egyenletek}$$

16 Elektromágneses hullámok

A szabadtéri hullámterjedéssel (síkhullámok), hullámok keltésével (Hertz-dipólus), vezetett hullámokkal (csőtápvonal) foglalkozunk.

16.1 Homogén hullámmegyenlet

16.1.1 Feltevések

$$\left. \begin{array}{l} \rho = 0, \mathbf{J} = \mathbf{0} \\ \text{homogén, lineáris közeg} \\ \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \\ \sigma, \varepsilon, \mu \text{ állandó} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \\ \text{rot } \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \\ \text{div } \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mu \text{div } \mathbf{H} = 0 \rightarrow \text{div } \mathbf{H} = 0 \\ \text{div } \mathbf{D} = 0 \rightarrow \varepsilon \text{div } \mathbf{E} = 0 \rightarrow \text{div } \mathbf{E} = 0 \end{array}$$

16.1.2 Egyenlet E-re

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = -\mu \text{rot } \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \mathbf{H}) = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) = -\mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{E} = \text{grad } \underbrace{\text{div } \mathbf{E}}_0 - \Delta \mathbf{E} = -\Delta \mathbf{E}$$

$$\boxed{\Delta \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0}$$

16.1.3 Egyenlet H-ra

$$\text{rot rot } \mathbf{H} = \sigma \text{rot } \mathbf{E} + \varepsilon \text{rot } \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \dots$$

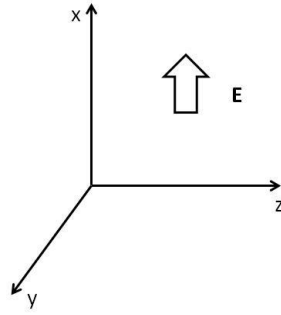
$$\boxed{\Delta \mathbf{H} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0}$$

16.2 Síkhullám - megoldás

16.2.1 Feltevések

$$\mathbf{E}(t, x, y, z) = E_x(t, z) \mathbf{e}_x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = 0, \frac{\partial}{\partial y} = 0$$



16.2.1 E-nek csak x komponense van

Szinuszos időbeli változás

$$E_x(t, z) = \hat{E}(z) \cos(\omega t + \varphi(z)) = \operatorname{Re} \left\{ \underbrace{\hat{E}(z) e^{j\varphi(z)}}_{E_x(z)} e^{j\omega t} \right\}$$

16.2.2 Helmholtz - egyenlet

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} - \mu\sigma \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \bar{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

A fenti egyenletben a vastag, felülhúzott betűk vektorokat jelölnek.

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_x}{dz^2} - j\omega\mu\sigma \mathbf{E}_x - (j\omega)^2 \mu\varepsilon \mathbf{E}_x = 0$$

A fenti egyenletben a vastag betűk komplexeket jelölnek.

$$\frac{d^2 \mathbf{E}_x}{dz^2} - \gamma^2 \mathbf{E}_x = 0$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

16.2.3 Általános megoldás

$$\mathbf{E}_x(z) = \mathbf{E}^+ e^{-\gamma z} + \mathbf{E}^- e^{\gamma z}$$

$\gamma = \alpha + j\beta$ terjedési együttható

$\alpha = \operatorname{Re}\{\gamma\}$ csillapítási tényező

$\beta = \operatorname{Im}\{\gamma\}$ fázistényező

16.2.4 H kifejezése

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathbf{E}_x & 0 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{e}_y \frac{\partial \mathbf{E}_x}{\partial z}$$

$$\mathbf{H}(t, x, y, z) = H_y(t, z) \mathbf{e}_y$$

Komplex amplitúdó:

$$H_y(t, z) = \text{Re}\{H_y(z)e^{j\omega t}\}$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -\mu \frac{dH_y}{dt}$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -\mu j\omega H_y$$

$$H_y = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{dE_x}{dz} = -\frac{1}{j\omega\mu} (-\gamma E^+ e^{-\gamma z} + \gamma E^- e^{\gamma z})$$

$$Z_0 = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \dots = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \quad \text{közeg hullámimpedanciája}$$

$$H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

16.3 Síkhullám-TV analógia

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} - \gamma^2 E_x = 0$$

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z} + E^- e^{\gamma z}$$

$$H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z} - \frac{E^-}{Z_0} e^{\gamma z}$$

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$$

TV	U	I	R'	L'	G'	C'
síkhullám	E_x	H_y	$\gamma, (0)$	μ	σ	ε

16.4 Síkhullám (ideális) szigetelőben

16.4.1 Közel nulla vezetőképesség

$$\sigma \cong 0$$

$$\gamma = j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta$$

$$\alpha = 0, \quad \beta = \omega\sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r\varepsilon_r}}c$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}\eta$$

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega \cong 377\Omega$$

16.4.2 Szemléltetés

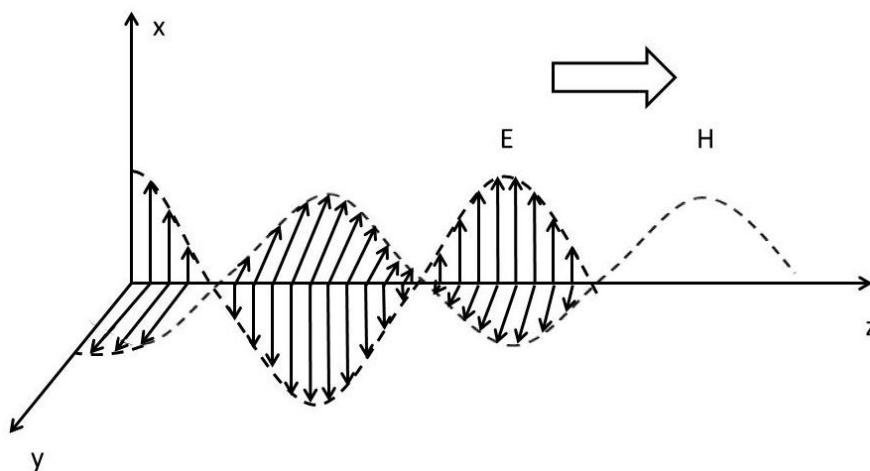
Ha $E^- = 0$ és $E^+ \in \mathbb{R} = E_0$

$$E_x(t, z) = E_0 \cos \left[\omega \left(t - \frac{\beta}{\omega} z \right) \right]$$

$$H_y(t, z) = \frac{E_0}{Z_0} \cos \left[\omega \left(t - \frac{\beta}{\omega} z \right) \right]$$

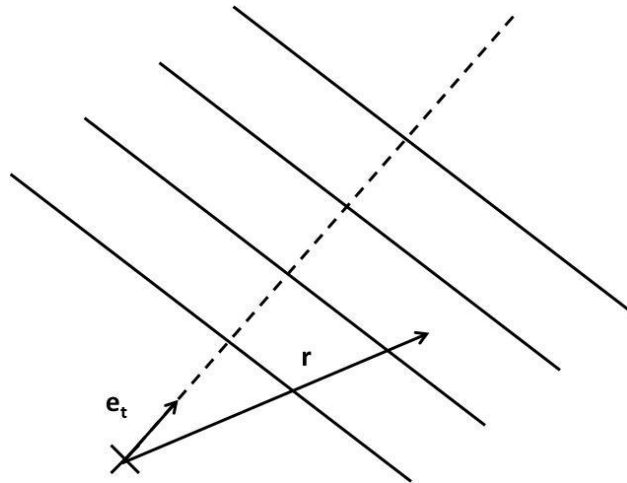
Haladó hullám, E és H idő szerint fázisban, térben 90°-al elforgatva.

TEM típusú terjedés. $t=0$ időpontban:



16.4.1 Síkhullám terjedése

16.4.3 Tetszőleges irányú terjedés



16.4.2 tetszőleges irányú terjedés

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{r}) = E_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \mathbf{r} + \varphi)$$

$\mathbf{k}$ a hullámszám vektor

$$|\mathbf{k}| = \beta = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \mathbf{k} = \beta \mathbf{e}_t$$

16.5 Polarizált síkhullám

2 síkhullám, mely azonos irányban terjed.

$$E_x(t, z = 0) = E_{x0} \cos(\omega t)$$

$$E_y(t, z = 0) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi)$$

Milyen pályán mozog az eredő?

$$\mathbf{E} = E_x \mathbf{e}_x + E_y \mathbf{e}_y$$

$$E_y(t, z = 0) = E_{y0} \cos(\omega t + \varphi) = E_{y0} [\cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi)]$$

$$\cos(\omega t) = \frac{E_x}{E_{x0}}$$

$$\sin(\omega t) = \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2}}$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \cos(\omega t) \cos(\varphi) - \sin(\omega t) \sin(\varphi) = \frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\varphi) - \sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2}} \sin(\varphi)$$

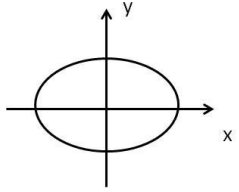
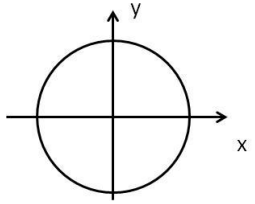
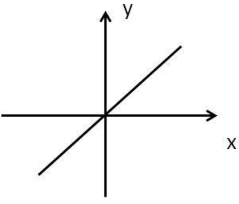
$$\frac{E_y}{E_{y0}} - \frac{E_x}{E_{x0}} \cos(\varphi) = -\sqrt{1 - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2}} \sin(\varphi)$$

$$\frac{E_y^2}{E_{y0}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos(\varphi) + \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} \cos^2(\varphi) = \sin^2(\varphi) - \frac{E_x^2}{E_{x0}^2} \sin^2(\varphi)$$

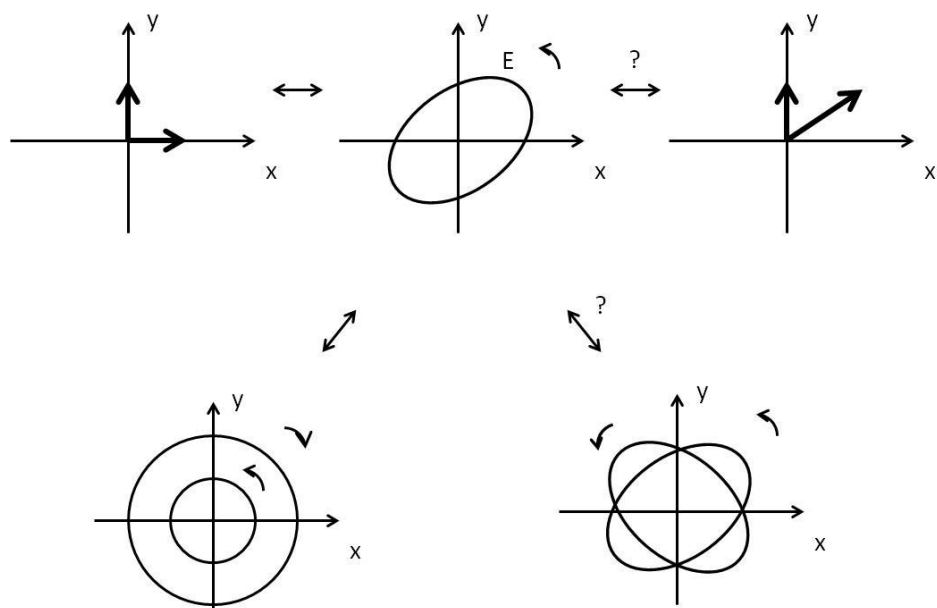
$$\frac{E_x^2(t)}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2(t)}{E_{y0}^2} - \frac{2E_x E_y}{E_{x0} E_{y0}} \cos(\varphi) = \sin^2(\varphi)$$

Ez egy általános ellipszis paraméteres egyenlete.

Speciális esetek:

$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = 1$	 16.5.1 elliptikus
$\varphi = \frac{\pi}{2}$	$E_{x0} = E_{y0} = E_0 \rightarrow E_x^2 + E_y^2 = E_0^2$	 16.5.2 kör
$\varphi = \pi$	$\frac{E_x}{E_{x0}} + \frac{E_y}{E_{y0}} = 0$	 16.5.3 lineáris

?: végtelen sok felbontás létezik.



16.5.4 Polarizáció

16.6 Energia terjedése a síkhullámban (teljesítményáramlás)

Tegyük fel, hogy: $\alpha = 0$; $\mathbf{E}^- = 0$; *linárisan polarizált*

$$\mathbf{E}_x(z) = \mathbf{E}^+ e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{E}^+ = E^+ e^{j\varphi}$$

$$\mathbf{H}_y(z) = \mathbf{H}^+ e^{-j\beta z}$$

$$\mathbf{H}^+ = H^+ e^{j\varphi} = \frac{E^+}{Z_0} e^{j\varphi}$$

$$E_x(t, z) = E_0 \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

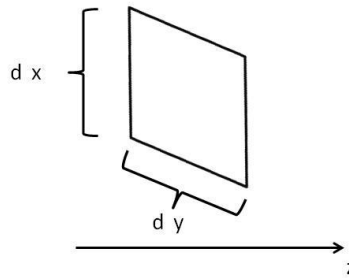
$$H_y(t, z) = \frac{E_0}{Z_0} \cos(\omega t - \beta z + \varphi)$$

$$\mathbf{S}(t, x, y, z) = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

$$\mathbf{S}(t, x, y, z) = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = (E_x(t, z) \mathbf{e}_x) \times (H_y(t, z) \mathbf{e}_y) = S_z(t, z) \mathbf{e}_z$$

$$S_z(t, z) = E^+ H^+ \cos^2(\omega t - \beta z + \varphi) = \frac{1}{2} E^+ H^+ + \frac{1}{2} E^+ H^+ \cos(2\omega t - 2\beta z + 2\varphi)$$

Mekkora az átáramló hatásos teljesítmény (időátlag)?



16.6.1 a felületen átáramló hatásos teljesítmény

$$P = dx dy \frac{1}{T} \int_0^T S_z(t, z) dt = dx dy \frac{1}{2} E^+ H^+$$

$$P = \frac{1}{2} E^+ H^+$$

$$\frac{1}{2} \mathbf{E}_x \mathbf{H}_y^* = \frac{1}{2} E^+ e^{j\varphi} e^{-j\beta z} H^+ e^{-j\varphi} e^{j\beta z} = \frac{1}{2} E^+ H^+ = P$$

Általánosítás: komplex Poynting - vektor

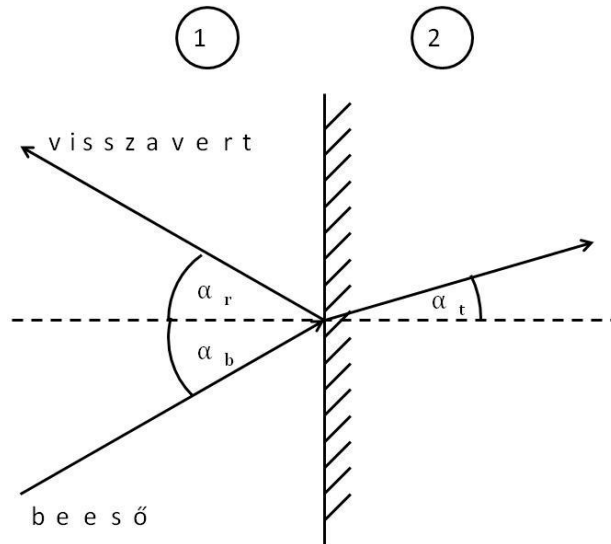
$$\mathbf{S} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \times \mathbf{H}^*$$

$$P = \int \operatorname{Re}\{\mathbf{S}\}; \quad Q = \int \operatorname{Im}\{\mathbf{S}\}$$

16.7 Síkhullám viselkedése közeghatáron

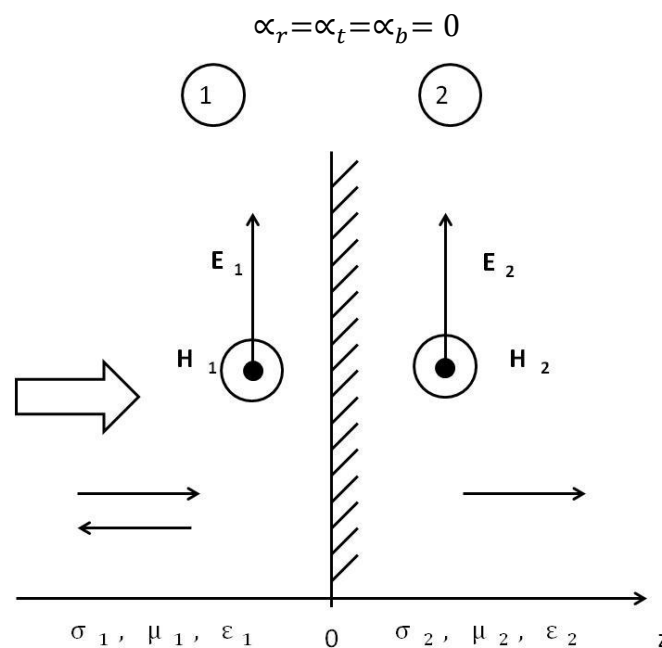
16.7.1 Általános eset

A reflexió/transzmisszió felírható a Snellius-Descartes ill. Fresnel - képletekkel.



16.7.1 Ferde beesés

16.7.2 Merőleges beesés



16.7.2 Merőleges beesés

Feltevések:

- két végtelen féltér
- lineáris polarizáció
- megvilágítás balról

$$E_1(z) = E_1^+ e^{-\gamma_1 z} + E_1^- e^{\gamma_1 z}$$

$$H_1(z) = H_1^+ e^{-\gamma_1 z} + H_1^- e^{\gamma_1 z} = \frac{E_1^+}{Z_{01}} e^{-\gamma_1 z} + \frac{E_1^-}{Z_{01}} e^{\gamma_1 z}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{j\omega\mu_1(\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1)}$$

$$Z_{01} = \sqrt{\frac{j\omega\mu_1}{\sigma_1 + j\omega\varepsilon_1}}$$

$$E_2(z) = E_2^+ e^{-\gamma_2 z}$$

$$H_2(z) = H_2^+ e^{-\gamma_2 z} = \frac{E_2^+}{Z_{02}} e^{-\gamma_2 z}$$

Folytonossági feltétel: $E_{1t} = E_{2t}$; $H_{1t} = H_{2t}$; $Z = 0$

$$E_1(z=0) = E_2(z=0)$$

$$H_1(z=0) = H_2(z=0)$$

$$\left. \begin{aligned} E_1^+ + E_1^- &= E_2^+ \\ \frac{E_1^+}{Z_{01}} - \frac{E_1^-}{Z_{01}} &= \frac{E_2^+}{Z_{02}} \end{aligned} \right\} \text{Ha } E_1^+ \text{ ismert, akkor } E_1^- \text{ és } E_2^+ \text{ meghatározható}$$

$$r_{12} = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{Z_{02} + Z_{01}}$$

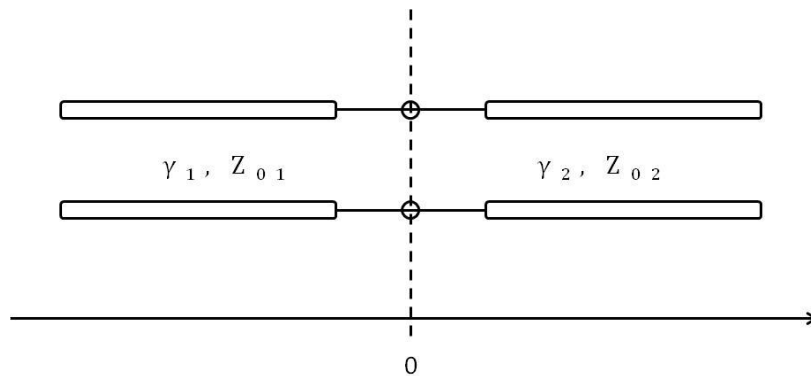
$$E_1^- = r_{12} E_1^+$$

$$E_2^+ = \underbrace{(1 + r_{12})}_{\text{transzmissziós eh.}} E_1^+$$

$$H_1^- = -\frac{E_1^-}{Z_{01}} = -r_{12} \frac{E_1^+}{Z_{01}} = -r_{12} H_1^+$$

$$H_2^+ = \frac{E_2^+}{Z_{02}} = \frac{1 + r_{12}}{Z_{02}} E_1^+ = \frac{1 + r_{12}}{Z_{01}} E_1^+ = (1 + r_{12}) H_1^+$$

A TV analógia itt is fennáll!



16.7.3 távvezeték analógia

PC bemutató: WinTLS, EMANIM

16.8 Síkhullám jó vezetőben

16.8.1 Hullámparaméterek

$$\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)} \cong \sqrt{j\omega\mu\sigma} = \sqrt{j}\sqrt{\omega\mu\sigma} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = (1+j)\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} + j\frac{1}{\delta}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \quad \text{behatolási mélység}$$

Néhány anyag behatolási mélysége:

frekvencia	50 Hz	1 KHz	1 MHz	1 GHz
Cu $\sigma = 5,7 * 10^7 \frac{S}{m}, \mu_r \cong 1$	9,43 mm	2,11 mm	66,7 μm	2,11 μm
Fe $\sigma = 1,45 * 10^7 \frac{S}{m}, \mu_r \cong 4000$	0,3 mm	0,066 mm	2,09 μm	0,066 μm

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma}} = \frac{1+j}{\sigma} \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1+j}{\sigma\delta} = \frac{\gamma}{\sigma}$$

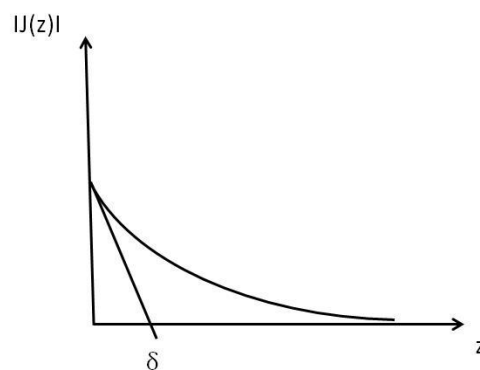
16.8.2 Áramkiszorítás (skin-effektus)

Hullám érkezik a $\sigma = 0$ közegből $\sigma \gg \omega\varepsilon$ közegbe. Például levegő-fém határfelület.

$$E(z) = E^+ e^{-\gamma z} \quad z \geq 0$$

$$J(z) = \sigma E^+ e^{-\gamma z} = \sigma E^+ e^{-\frac{z}{\delta}} \underbrace{e^{-j\frac{z}{\delta}}}_{|e^{-j\frac{z}{\delta}}|=1}$$

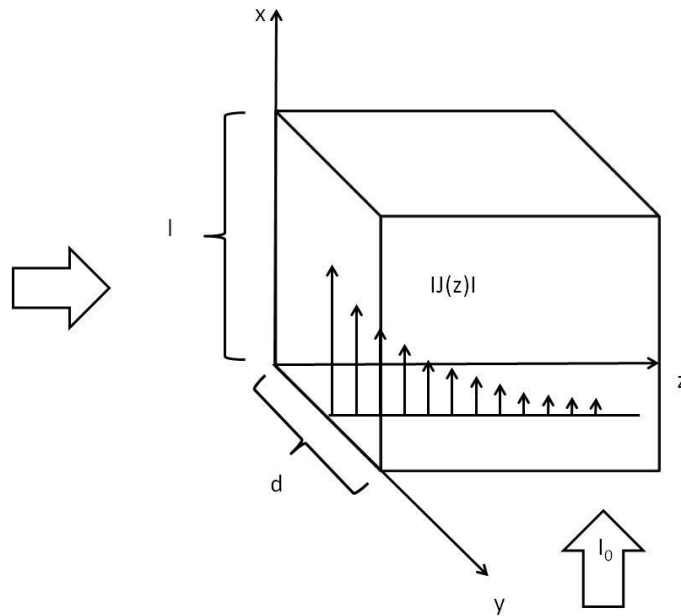
$$|J(z)| = \sigma |E^+| e^{-\frac{z}{\delta}} = |J(0)| e^{-\frac{z}{\delta}}$$



16.8.1A behatolási mélység és az áramsűrűség kapcsolata

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = 2\pi\delta \cong 6,28\delta \\ |J(z)| &\cong 0 \quad z > 5\delta \end{aligned} \right\} \text{nincs hullámjelenség}$$

16.8.3 Hőteljesítmény, ellenállás



16.8.2 Hasámban az áramsűrűség

$$E_x(z) = E^+ e^{-\gamma z}$$

$$H_y(z) = \frac{E^+}{Z_0} e^{-\gamma z}$$

$$\gamma = \frac{1+j}{\delta}$$

$$Z_0 = \frac{1+j}{\sigma\delta}$$

Az ld felületen belépő komplex teljesítmény: $P + jQ$

$$P + jQ = \mathbf{S}_z(z=0) = \frac{1}{2} E_x(0) H_y^*(0) ld = \frac{1}{2} E^+ \frac{E^{+*}}{Z_0^*} ld = \frac{ld\sigma\delta}{2(1-j)} |E^+|^2$$

$$\frac{1}{1-j} = \frac{1}{\sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2} (1+j)$$

$$P + jQ = \frac{ld\sigma\delta}{4} |E^+|^2 (1+j)$$

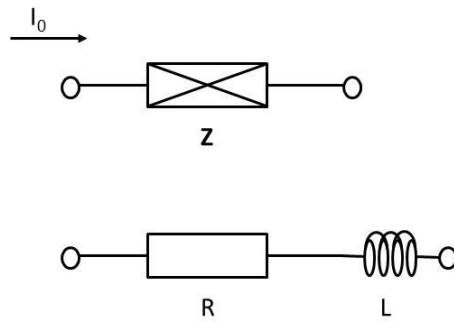
$$I_0 = d \int_0^\infty J_x(z) dz = \sigma\delta E^+ \int_0^\infty e^{-\gamma z} dz = \dots = \frac{\delta\sigma}{\gamma} E^+ = \frac{d\sigma\delta}{(1+j)} E^+$$

$$E^+ = \frac{(1+j)}{d\sigma\delta} I_0$$

$$P + jQ = \frac{ld\sigma\delta}{4} \frac{(1+j)^2}{d^2\sigma^2\delta^2} |I_0|^2 (1+j) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{l}{d\delta} |I_0|^2 (1+j)$$

$$P + jQ = \frac{1}{2} \frac{1}{\sigma} \frac{l}{d\delta} |I_0|^2 (1+j)$$

Hálózati ekvivalens:



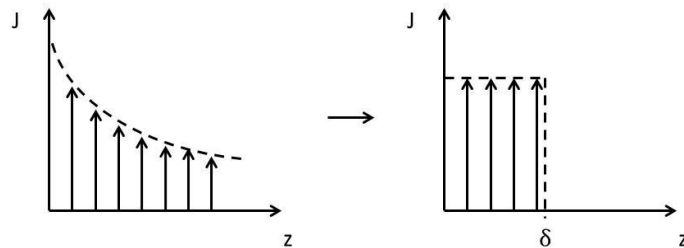
16.8.3 Hálózati ekvivalens

$$P + jQ = \frac{1}{2} \mathbf{Z} |I_0|^2$$

$$\mathbf{Z} = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{d\delta} (1 + j)$$

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{d\delta}$$

Hődisszipáció szempontjából, olyan mint ha az áram egy δ rétegben folyik egyenletes eloszlással.



16.8.4 behatolási mélység

16.8.4 Alkalmazás

Vezetők váltakozó áramú ellenállása

Kör keresztmetszet esetén:

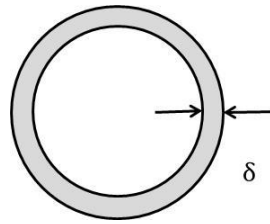
$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \sigma}}$$

$\delta \gg r_0$: egyenáramú ellenállás,

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{r_0^2 \pi}$$

$\delta \ll r_0$:

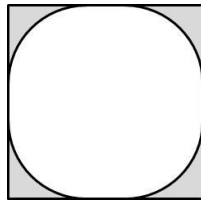
$$R \cong \frac{1}{\sigma} \frac{l}{2 r_0 \pi \delta}$$



16.8.5 kör keresztmetszet

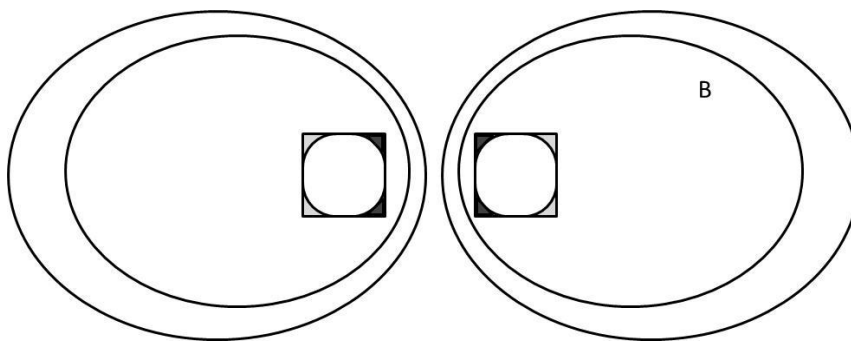
$\delta \sim r_0$: Bessel-függvények.

Hasáb keresztmetszet esetén:



16.8.6 hasáb keresztmetszet

Vezetékpárok:



16.8.7 vezetékpár

Veszteség csökkentése

Tömör vezető helyett sodrott vezető használata.

Vastest lemezelése.

Hasznos alkalmazás

Árnyékolás.

Roncsolásmentes anyagvizsgálat.

17 Hullámok keltése

17.1 Inhomogén hullámmegyenlet potenciálokra

17.1.1 Modellfeltevések

Homogén, lineáris közeg.

Források: töltéssűrűség, beiktatott áramsűrűség.

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_b + \sigma \mathbf{E}$$

17.1.2 Maxwell

$$1: \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_b + \sigma \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$2: \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

$$3: \mu \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

$$4: \varepsilon \operatorname{div} \mathbf{E} = \rho$$

$$3 \rightarrow \mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

$$2 \rightarrow \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = -\operatorname{rot} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

$$\operatorname{rot} \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \Phi$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Φ skalárpotenciál nem azonos a statikus potenciállal.

$$1 \rightarrow \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_b - \sigma \operatorname{grad} \Phi - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_b - \mu \sigma \operatorname{grad} \Phi - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}$$

Legyen:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu \sigma \Phi - \mu \varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Ez a Lorenz mérték.

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\mu \sigma \operatorname{grad} \Phi - \mu \varepsilon \operatorname{grad} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\Delta \mathbf{A} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_b$$

$$4 \rightarrow \varepsilon \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \rho$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi + \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

$$\Delta \Phi - \mu \sigma \frac{\partial \Phi}{\partial t} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

17.2 Az egyenletek általános megoldása

Tegyük fel, hogy $\sigma=0$.

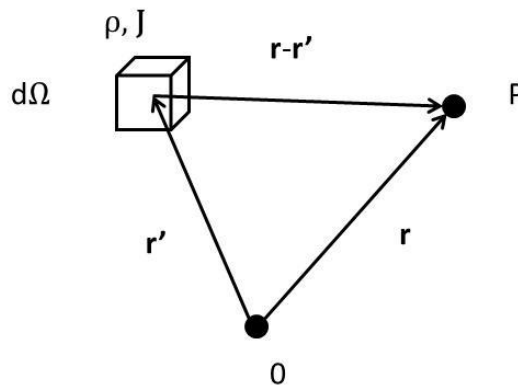
$$\Delta\Phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

$$\Delta\mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}_b$$

Mostantól a $\mathbf{J} = \mathbf{J}_b$ jelölést használjuk.

17.2.1 Retardált potenciálok

A teret felosztjuk $d\Omega$ térfogatelemekre.



17.2.1 a tér felosztása

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\Omega$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}}$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ távolság dimenziójú, $\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}$ idő (késleltetés) dimenziójú.

17.2.2 Kvázistacionárius közelítés

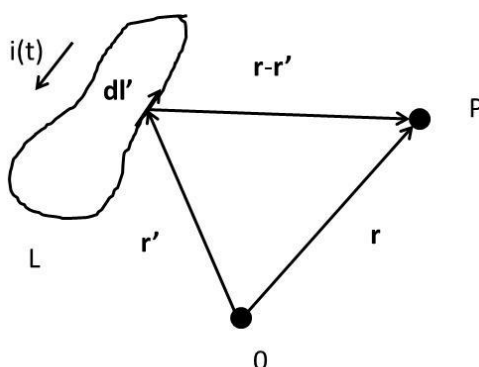
$$\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{v}\right) \approx \rho(\mathbf{r}', t)$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ relatíve kicsi vagy $\left|\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|$ viszonylag kicsi.

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \ll \lambda_{min} = \frac{v}{f_{max}}$$

f_{max} $\rho(t)$ spektrumában a legnagyobb frekvenciájú komponens.

17.2.3 Az általánosított Biot-Savart törvény

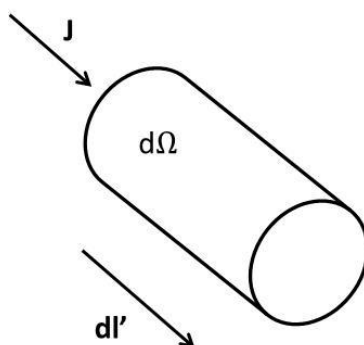


17.2.2 az általánosított Biot-Savart törvény

Stacionárius esetben:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi} \oint_L \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

Legyen $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$



17.2.3 áramsűrűség a vezetőszakaszban

$$J d\Omega = I d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \oint_L \frac{i\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} d\mathbf{l}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \oint_L \underbrace{\text{rot}_r \left[\frac{i\left(t - \frac{R}{v}\right)}{R} d\mathbf{l} \right]}_G$$

$$\mathbf{G} = i\left(t - \frac{R}{v}\right) \underbrace{\text{rot}_r d\mathbf{l}}_0 + \left[\underbrace{\left(\text{grad}_r i\left(t - \frac{R}{v}\right) \right)}_K \times d\mathbf{l} \right]$$

$$\mathbf{K} = \frac{1}{R} \underbrace{\text{grad}_r i\left(t - \frac{R}{v}\right)}_M + i\left(t - \frac{R}{v}\right) \underbrace{\text{grad}_r \frac{1}{R}}_N$$

$$\mathbf{N} = \text{grad}_r \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial R} i \left(t - \frac{R}{v} \right)$$

$$\tau = t - \frac{R}{v} \quad t = \tau + \frac{R}{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial \tau}{\partial t}}_1 \underbrace{\frac{\partial t}{\partial R}}_{-\frac{1}{v}}$$

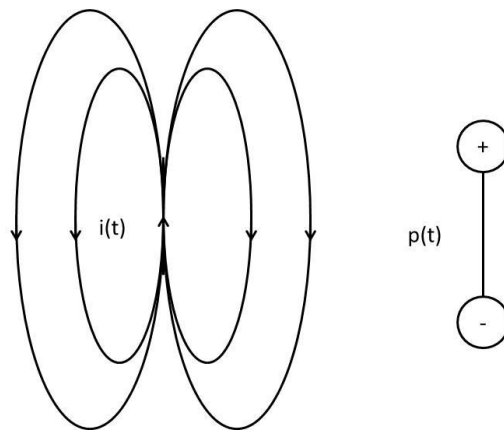
$$\mathbf{M} = \underbrace{\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}}_{\mathbf{e}_r} \left(-\frac{1}{v} \right) \frac{\partial}{\partial t} i \left(t - \frac{R}{v} \right)$$

$$\mathbf{K} = \left(-\frac{1}{v} \right) \frac{\partial i \left(t - \frac{R}{v} \right)}{\partial t} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} - i \left(t - \frac{R}{v} \right) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

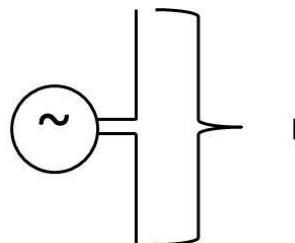
$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_L \left(i \left(t - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{v} \right) \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) + \frac{1}{4\pi v} \oint_L \left(\frac{\partial i \left(t - \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{v} \right)}{\partial t} \frac{d\mathbf{l} \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right)$$

17.3 Hertz - dipólus

17.3.1 Modell



17.3.1 elemi vezetési áram és töltésdipólus

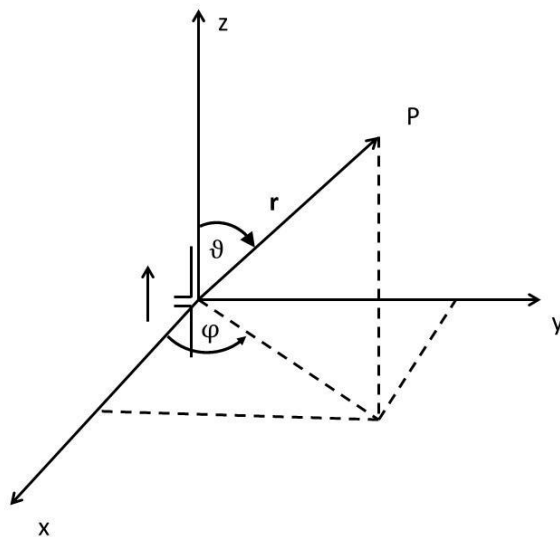


17.3.2 rövid dipól antenna

Hertz - dipólusról beszélünk, ha $l \ll \lambda$

Tegyük fel, hogy a közeg levegő, c a fénysebesség.

$$i(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}$$



17.3.3 a Hertz-dipólus paramétere

17.3.2 $\mathbf{H}$ felírása

Általános Biot-Savart integrál nélkül:

$$\mathbf{r}' = \mathbf{0}, \quad d\mathbf{l} = \mathbf{l}, \quad i(t) = \text{Re}\{\mathbf{I}e^{j\omega t}\}, \quad \frac{\partial i}{\partial t} = \text{Re}\{j\omega \mathbf{I}e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \text{Re}\left\{\mathbf{I}e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\right\} \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi c} \text{Re}\left\{j\omega \mathbf{I}e^{j\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)}\right\} \frac{\mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^2}$$

$$\mathbf{l} \times \mathbf{r} = lr \sin \vartheta \mathbf{e}_r \rightarrow \mathbf{H} = H_\varphi \mathbf{e}_\varphi$$

$$H_\varphi(\mathbf{r}, t) = {}_{r,\varphi,\vartheta} \text{Re}\left\{\left[\frac{\mathbf{I}l}{4\pi r^2} e^{j\omega\frac{r}{c}} \sin \vartheta + \frac{j\omega \mathbf{I}l}{4\pi r} e^{-j\omega\frac{r}{c}} \sin \vartheta\right] e^{j\omega t}\right\} = \text{Re}\{\mathbf{H}_\varphi e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{H}_r = 0$$

$$\mathbf{H}_\vartheta = 0$$

$$\mathbf{H}_\varphi(r, \vartheta) = \frac{\mathbf{I}l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{cr}\right) \sin \vartheta e^{-j\omega\frac{r}{c}}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}} = \mathbf{H}_r \mathbf{e}_r + \mathbf{H}_\varphi \mathbf{e}_\varphi + \mathbf{H}_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta$$

$\bar{\bar{\mathbf{H}}}$ vektor és komplex amplitúdó is egyben.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{H}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\bar{\bar{\mathbf{H}}}(r, \vartheta) = \left[\frac{\mathbf{I}l}{4\pi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{j\omega}{cr}\right) \sin \vartheta e^{-j\omega\frac{r}{c}}\right] \mathbf{e}_\varphi$$

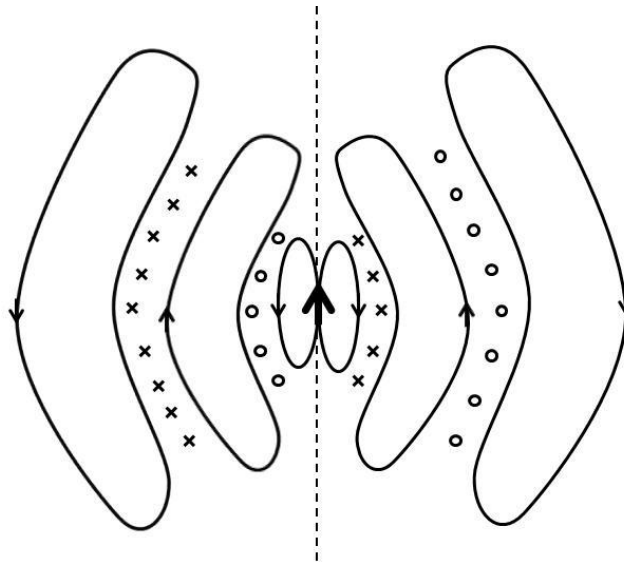
17.3.3 $\mathbf{E}$ kifejezése

Szabad térben $\sigma = 0$

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \bar{\bar{\mathbf{H}}} &= j\omega\varepsilon \bar{\bar{\mathbf{E}}} \\ \bar{\bar{\mathbf{E}}} &= \frac{1}{j\omega\varepsilon} \operatorname{rot} \bar{\bar{\mathbf{H}}} =_{r,\varphi,\vartheta} \frac{1}{j\omega\varepsilon} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & \mathbf{e}_\vartheta & \mathbf{e}_\varphi \\ r^2 \sin \vartheta & r \sin \vartheta & r \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \vartheta} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ 0 & 0 & r \sin \vartheta \mathbf{H}_\varphi \end{vmatrix} = \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_r(r, \vartheta) &= \frac{Il}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{2}{j\omega r^3} + \frac{2}{j\omega r^2} \right) \cos \vartheta e^{-j\omega \frac{r}{c}} \\ \mathbf{E}_\vartheta(r, \vartheta) &= \frac{Il}{4\pi\varepsilon} \left(\frac{1}{j\omega r^3} + \frac{1}{j\omega r^2} + \frac{j\omega}{c^2 r} \right) \sin \vartheta e^{-j\omega \frac{r}{c}} \\ \mathbf{E}_\varphi(r, \vartheta) &= 0 \end{aligned}$$

17.3.4 Szemléltetés



17.3.4 Hertz - dipólus tere

A görbék az $\mathbf{E}$ vonalak, a körök a síkból kifelé, az x-ek a síkba befelé mutató $\mathbf{H}$ vektorok.

17.3.5 A távoltér

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3}, \frac{1}{r^2} &\sim 0 \\ \mathbf{H}_r &= 0 & \mathbf{H}_\vartheta &= 0 & H_\varphi &\cong \frac{Il}{4\pi} \frac{j\omega}{cr} \sin \vartheta e^{-j\omega \frac{r}{c}} \\ \mathbf{E}_r &= 0 & \mathbf{E}_\vartheta &\cong \frac{Il}{4\pi\varepsilon} \frac{j\omega}{c^2 r} \sin \vartheta e^{-j\omega \frac{r}{c}} & \mathbf{E}_\varphi &= 0 \\ \beta &= \frac{\omega}{c}, \quad \mu = \mu_0, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \end{aligned}$$

$$\mathbf{E}_\vartheta(r, \vartheta, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}_\vartheta(r, \vartheta)e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{\frac{j\beta I l}{4\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \frac{\sin \vartheta}{r} e^{j(\omega t - \beta r)}\right\}$$

$$\mathbf{H}_\varphi(r, \vartheta, t) = \text{Re}\{\mathbf{H}_\varphi(r, \vartheta)e^{j\omega t}\} = \text{Re}\left\{\frac{j\beta I l \sin \vartheta}{4\pi r} e^{j(\omega t - \beta r)}\right\}$$

Megállapítások:

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{E} \perp \mathbf{H} \\ \text{terjedési irány: } \mathbf{e}_r \\ \frac{E}{H} = \frac{E_\vartheta}{H_\varphi} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \eta = 120\pi \\ \text{kis környezetben } \frac{\sin \vartheta}{r} \approx \text{konst.} \end{array} \right\} \text{TEM síkhullám}$$

17.3.6 Poynting - vektor

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{E}} \times \bar{\mathbf{H}}^* = \frac{1}{2} \mathbf{E}_\vartheta \mathbf{H}_\varphi^* \underbrace{\mathbf{e}_\vartheta \times \mathbf{e}_\varphi}_{\mathbf{e}_r} = \frac{\tilde{I}^2 \beta^2 l^2 \eta \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 r^2} \underbrace{e^{-j\omega \frac{r}{c}} e^{j\omega \frac{r}{c}}}_1 \mathbf{e}_r$$

$$\bar{\mathbf{S}} = \frac{I^2 \beta^2 l^2 \eta \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 r^2} \mathbf{e}_r$$

17.4 Antennajellemzők

17.4.1 Iránykarakterisztika

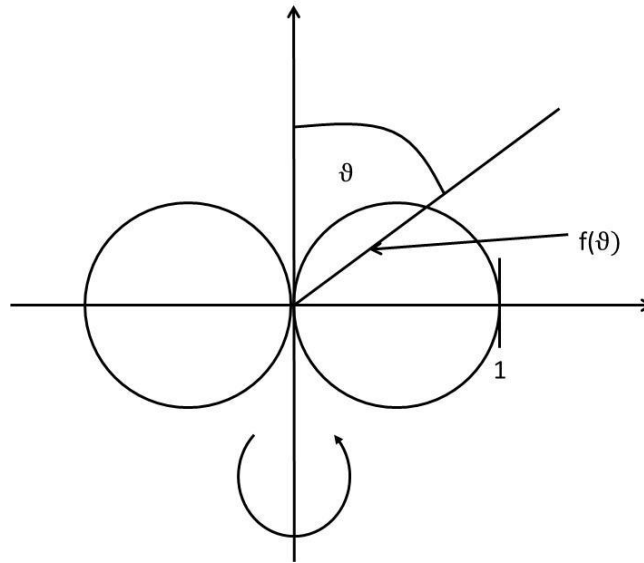
$$f(\vartheta, \varphi) = \frac{E(r = R, \vartheta, \varphi)}{\max_{\vartheta, \varphi} E(r = R, \vartheta, \varphi)}$$

Egyenes antennára $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0 \rightarrow$ vertikális iránykarakterisztika.

$$f(\vartheta) = \frac{E(\vartheta)}{\max_{\vartheta} E(\vartheta)}$$

Hertz - dipólus esetén:

$$f(\vartheta) = \frac{E(\vartheta)}{E\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sin \vartheta$$



17.4.1 Iránykarakterisztika

17.4.2 Kisugárzott teljesítmény

$$P_S \triangleq \operatorname{Re} \left\{ \oint_{r=R} \bar{\bar{S}} dA \right\}$$

$$\bar{\bar{S}} = \mathbf{S}_r \mathbf{e}_r, \quad \mathbf{S}_r \in \mathbb{R}$$

$$P_S = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} S_r R^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta = \int_0^\pi 2\pi \frac{I^2 \beta^2 l^2 \eta \sin^2 \vartheta}{32\pi^2 R^2} R^2 \sin \vartheta d\vartheta = \frac{I^2 \beta^2 l^2 \eta}{12\pi} \int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta = \frac{4}{3}$$

$$P_S = \frac{I^2 \beta^2 l^2 \eta}{12\pi}$$

17.4.3 Sugárzási ellenállás

$$P_S \triangleq \frac{1}{2} I^2 R_S$$

$$R_S \triangleq \frac{2P_S}{I^2}$$

$$R_S = \frac{\beta^2 l^2 \eta}{6\pi} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 l^2}{6\pi} 120\pi = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \text{ Hertz} - \text{dipólusra}$$

$$R_S = 80\pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2$$

17.4.4 Irányhatás (D), antennanyereség (G)

$$D \triangleq \frac{S_{max}}{S_{\hat{a}tlag}}$$

$$D = \frac{S_{max}(r = R)}{\frac{P_s}{4R^2\pi}}$$

Hertz dipólus esetén $D = 1,5$

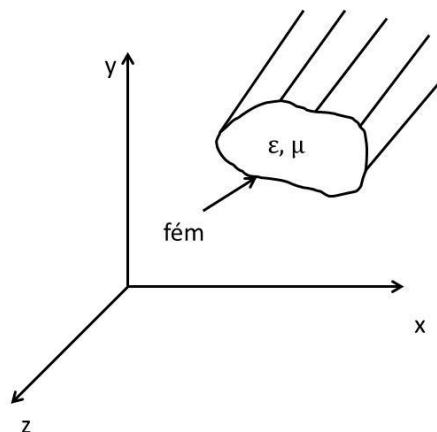
$$G \triangleq \frac{S_{max}}{\frac{P_{bet\hat{a}pl\hat{a}lt}}{4R^2\pi}}$$

18 Csőtápvonalak

18.1 Modell

18.1.1 Geometria

- homogén kitöltés: ε, μ állandó, $\sigma = 0$
ellenpélda: optikai vezető
- fémmel határolt tartomány
ellenpélda: (mikro)szalagvonal
- a belső tartomány egyszeresen összefüggő
ellenpélda: coax kábel



18.1.1 Geometriai modell

18.1.2 Redukció

Időben szinuszos változás:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}\{\mathbf{E}(\mathbf{r})e^{j\omega t}\}$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \dots$$

+z irányú terjedés:

$$\bar{\bar{E}}(x, y, z) = \bar{\bar{E}}(x, y, z = 0)e^{-\gamma z} = \bar{\bar{E}}^0(x, y)e^{-\gamma z}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\gamma$$

18.1.3 Homogén hullámegyenlet

$$\Delta \mathbf{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \mathbf{E} - \underbrace{\mu\epsilon(j\omega)^2}_{k^2} \bar{\bar{E}} = \mathbf{0}$$

$$k^2 = \omega^2 \mu\epsilon, \text{ hullámszám}$$

$$\Delta \bar{\bar{E}} + k^2 \bar{\bar{E}} = \mathbf{0}$$

$$\Delta \bar{\bar{H}} + k^2 \bar{\bar{H}} = \mathbf{0}$$

18.2 Terjedési módok (módus)

18.2.1 Térkomponensek kifejezése

a, $\text{rot } \bar{\bar{E}} = -j\omega\mu\bar{\bar{H}}$ felbontása

$$\text{rot } \bar{\bar{E}} = \text{rot}(\bar{\bar{E}}^0 e^{-\gamma z}) =_{x,y,z} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & -\gamma \\ \mathbf{E}_x^0 & \mathbf{E}_y^0 & \mathbf{E}_z^0 \end{vmatrix} e^{-\gamma z} = -j\omega\mu\bar{\bar{H}}^0 e^{-\gamma z}$$

$$1) \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial y} + \gamma \mathbf{E}_y^0 = -j\omega\mu \mathbf{H}_x^0$$

$$2) -\gamma \mathbf{E}_x^0 - \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial x} = -j\omega\mu \mathbf{H}_y^0$$

$$3) \frac{\partial \mathbf{E}_y^0}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{E}_x^0}{\partial y} = -j\omega\mu \mathbf{H}_z^0$$

b, $\text{rot } \bar{\bar{H}} = j\omega\epsilon\bar{\bar{E}}$

$$4) \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial y} + \gamma \mathbf{H}_y^0 = j\omega\epsilon \mathbf{E}_x^0$$

$$5) -\gamma \mathbf{H}_x^0 - \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x} = j\omega\epsilon \mathbf{E}_y^0$$

$$6) \frac{\partial \mathbf{H}_y^0}{\partial x} - \frac{\partial \mathbf{H}_x^0}{\partial y} = j\omega\epsilon \mathbf{E}_z^0$$

c, az egyenletek egymásból kifejezve

$$5 \rightarrow \mathbf{E}_y^0 = -\frac{\gamma}{j\omega\epsilon} \mathbf{H}_x^0 - \frac{1}{j\omega\epsilon} \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y^0 \rightarrow 1: \quad & \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial y} - \frac{\gamma^2}{j\omega\varepsilon} \mathbf{H}_x^0 - \frac{\gamma}{j\omega\varepsilon} \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x} = -j\omega\varepsilon \mathbf{H}_x^0 \\ & \mathbf{H}_x^0 \left(\underbrace{\frac{-j\omega\mu j\omega\varepsilon + \gamma^2}{k^2}}_{h^2 = k^2 + \gamma^2} \right) = j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial y} - \gamma \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x} \\ \mathbf{H}_x^0 = -\frac{1}{h^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial y} \right) \quad & \mathbf{E}_x^0 = -\frac{1}{h^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial x} + j\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial y} \right) \\ \mathbf{H}_y^0 = -\frac{1}{h^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial y} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial x} \right) \quad & \mathbf{E}_y^0 = -\frac{1}{h^2} \left(\gamma \frac{\partial \mathbf{E}_z^0}{\partial y} - j\omega\mu \frac{\partial \mathbf{H}_z^0}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

18.2.2 TEM hullám

$$E_z = 0, \quad H_z = 0$$

Nem triviális a megoldás, ha $h^2 \rightarrow 0$

$$\left. \begin{aligned} \gamma^2 &= -k^2 = -\omega^2\mu\varepsilon \\ \gamma &= j\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = j\beta \end{aligned} \right\} \text{síkhullám megoldás}$$

további feltétel: a keresztmetszet végtelen kiterjedésű

Véges keresztmetszetű csőtápvonalban nem terjed.

18.2.3 TM hullám

$$H_z = 0$$

$$\Delta \bar{\bar{\mathbf{E}}} + k^2 \bar{\bar{\mathbf{E}}} = \mathbf{0} \rightarrow \Delta \mathbf{E}_z + k^2 \mathbf{E}_z = 0$$

$$\mathbf{E}_z(x, y, z) = \mathbf{E}_z^0(x, y) e^{-\gamma z}$$

$$\Delta \mathbf{E}_z = \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z^0}{\partial x^2} e^{-\gamma z} + \frac{\partial^2 \mathbf{E}_z^0}{\partial y^2} e^{-\gamma z} + \gamma^2 \mathbf{E}_z^0 e^{-\gamma z}$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \gamma^2 \right) \mathbf{E}_z^0 e^{-\gamma z} + k^2 \mathbf{E}_z^0 e^{-\gamma z} = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2 \right) \mathbf{E}_z^0 = 0$$

$$h^2 = \gamma^2 + k^2$$

Sajátérték probléma:

$$\Delta_{2D} \mathbf{E}_z^0 = -h^2 \mathbf{E}_z^0$$

Sajátérték:

$$-h^2$$

Sajátfüggvény:

$$\mathbf{E}_z^0$$

18.2.4 TE hullám

$$E_z = 0$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2 \right) \mathbf{H}_z^0 = 0$$

18.2.5 Módus

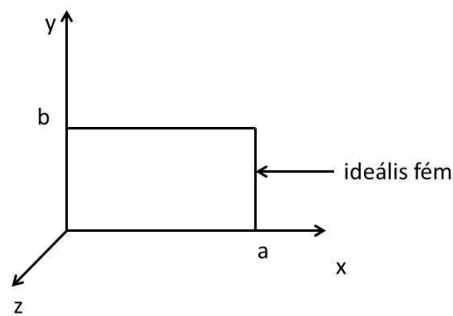
Matematikai értelemben: a differenciál operátor azon sajátértékei, amelyek a peremfeltételeket is kielégítik.

$$h_i - \mathbf{E}_{z,i}^0 \text{ illetve } h_j - \mathbf{H}_{z,j}^0 \text{ párok } i, j = 1 \dots \infty$$

Mérnöki értelemben: a hullámterjedés független formái (káros/hasznos)

18.3 Négyzög keresztmetszetű csőtápvonal

18.3.1 Modell



18.3.1 Négyzög keresztmetszetű csőtápvonal

18.3.2 TM hullám

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2 \right) \mathbf{E}_z^0 = 0$$

Megoldás a változók szeparálásával

$$\mathbf{E}_z^0(x, y) = X(x)Y(y)$$

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + h^2 XY = 0$$

$$\underbrace{-\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}_{\text{csak } x\text{-től függ}} = \underbrace{\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + h^2}_{\text{csak } y\text{-től függ}}$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} &= \text{konstans} = -k_x^2 \\ \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} &= \text{konstans} = -k_y^2 \end{aligned} \right\} \text{szeparációs állandók}$$

Szeperációs feltétel:

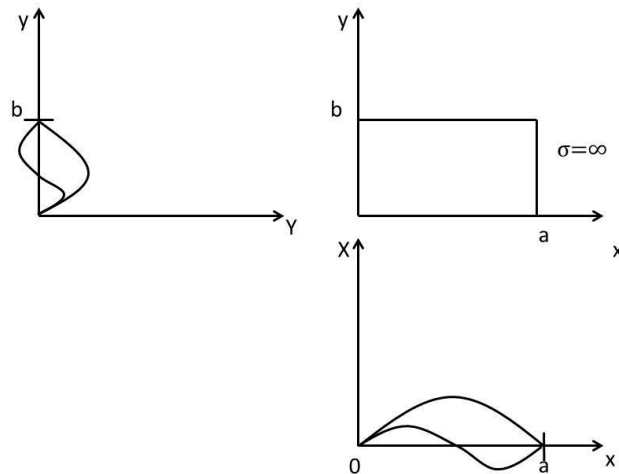
$$k_x^2 + k_y^2 = h^2$$

1D Helmholtz - egyenlet:

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k_x^2 X = 0$$

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k_y^2 Y = 0$$

Peremfeltételek



18.3.2 TM módus

$$E_t = 0, \quad E_z^0 = 0$$

$$E_z^0(0, y) = 0 \quad X(0) = 0$$

$$E_z^0(a, y) = 0 \quad X(a) = 0$$

$$E_z^0(x, 0) = 0 \quad Y(0) = 0$$

$$E_z^0(x, b) = 0 \quad Y(b) = 0$$

$$X(x) = \sin(k_x x) \quad k_x = \frac{m\pi}{a} \quad m, n = 1, 2, 3, \dots$$

$$Y(y) = \sin(k_y y) \quad k_y = \frac{n\pi}{b}$$

TM_{m,n} módus, ahol m,n a módusindex

$$E_z^0 = E_0 \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$$

18.3.3 TE módusok

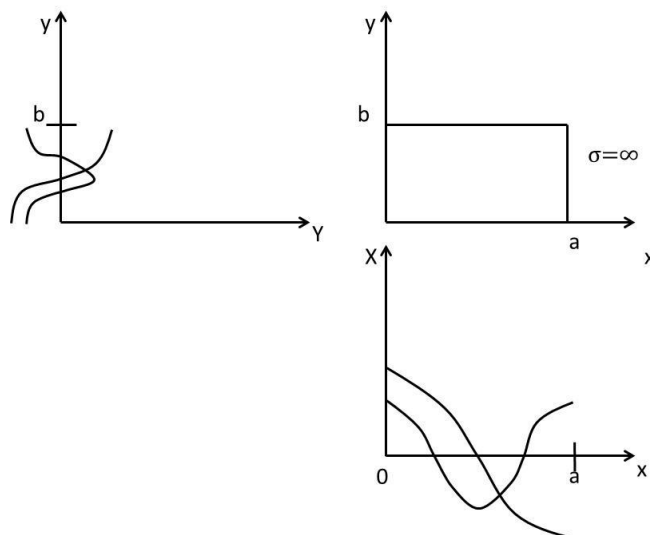
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + h^2 \right) H_z^0 = 0$$

Megoldás szeperációval

$$H_z^0(x, y) = X(x)Y(y)$$

Peremfeltételek

$$\left. \begin{array}{l} x = 0, a \quad E_y^0 = 0 \quad \frac{\partial H_z^0}{\partial x} = 0 \quad 5, \\ y = 0, b \quad E_x^0 = 0 \quad \frac{\partial H_z^0}{\partial y} = 0 \quad 4, \end{array} \right\} \text{Neumann feltétel}$$



18.3.3 TE módus

$$H_z^0 = H_0 \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

$$m, n = 0, 1, 2 \dots \quad m + n > 0$$

18.3.4 Diszperziós egyenlet, határfrekvencia

$$h^2 = k^2 + \gamma^2 = \omega^2 \mu \epsilon$$

$$h^2 = k_x^2 + k_y^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$\gamma^2 + \omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

Terjed-e az adott módus?

$$\gamma = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - \omega^2 \mu \epsilon} \begin{cases} \text{valós: } \gamma = \alpha \text{ (nincs terjedés)} \\ \text{képzetes: } \gamma = j\beta \text{ (van terjedés)} \end{cases}$$

Határfrekvencia:

$$\omega^2 \mu \epsilon = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$

$$f_h = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$$

Határhullámhossz:

$$\lambda_h = \frac{v}{f_h} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}}$$

Ez a szabadtéri határhullámhossz.

A módus terjed, ha $f > f_h$

Mekkora a csőben mérhető határhullámhossz?

$$\gamma = j\beta$$

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu \epsilon - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}{(2\pi \sqrt{\mu \epsilon})^2 f^2}} = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{f_h^2}{f^2}}$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon} \sqrt{1 - \frac{f_h^2}{f^2}}$$

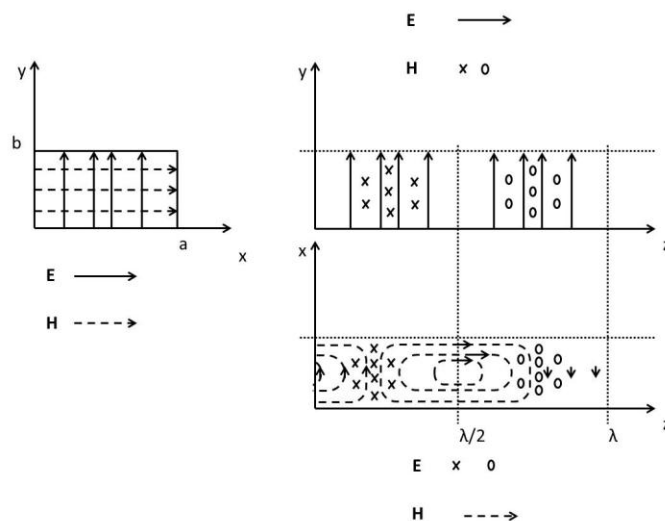
Fázissebesség, csoportsebesség

$$v_f = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}}{\sqrt{1 - \frac{f_h^2}{f^2}}} > c$$

csoportsebesség:

$$v_{cs} = v_g = \frac{1}{\frac{d\beta}{d\omega}} = \dots = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{1 - \frac{f_h^2}{f^2}} < c$$

18.3.5 Ábrázolás



18.3.4 Terjedő TE10

Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom Dr. Gyimóthy Szabolcs tanár úrnak a színvonalas előadásért, a jegyzet átnézéséért és javításáért. Továbbá köszönettel tartozom hallgatótársaimnak, akik javító kritikákkal és észrevételekkel illették e jegyzetet.