

1. Mi a folytonosidejű SISO időinvariáns lineáris rendszer felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos általános alakja? Hogyan értelmezzük a felnyitott kör körerősítést és típuszámát? Legyen a felnyitott kör átviteli függvénye $W_0(s) = \frac{g}{s(s+1)}$. Adja meg a zárt körben keletkező állandósult hiba értékét egységugrás és sebességugrás alapjelek esetén!

$$W_0(s) = \frac{k}{s^i} \cdot \frac{\prod_i (1+sT_i)}{\prod_j (1+sT_j) \cdot \prod_k (1+2\mu_k T_k s + T_k^2 s^2)}$$

felnyitott kör átv. fg. (1 pont)

$$W_0(s) = \frac{g}{s(s+1)}$$

$i = 1$

$\xi(t) \rightarrow 0$

$t \cdot \xi(t) \rightarrow \frac{1}{k} = \frac{1}{g}$

$k = g$

k	körerősítés paramétere (1 pont)
i	típuszám paramétere (1 pont)
0	állandósult hiba egységugrás alapjelnél (1 pont)
$1/g$	állandósult hiba sebességugrás alapjelnél (1 pont)

2. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen $W_0(s) = \frac{0.3(1+10s)}{s(1+0.1s)(1+0.02s)}$. Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbéjét és határozza meg az abból következő ω_c vágási frekvenciát! Adja meg fázistartalék számítására szolgáló kifejezést a megadott átviteli függvény esetén! Döntse el, hogy stabil-e a zárt kör (válaszát indokolja)!

$$W_0(s) = \frac{0.3(1+10s)}{s \cdot (1+0.1s)(1+0.02s)}$$

$k = 0.3$, $i = 1$

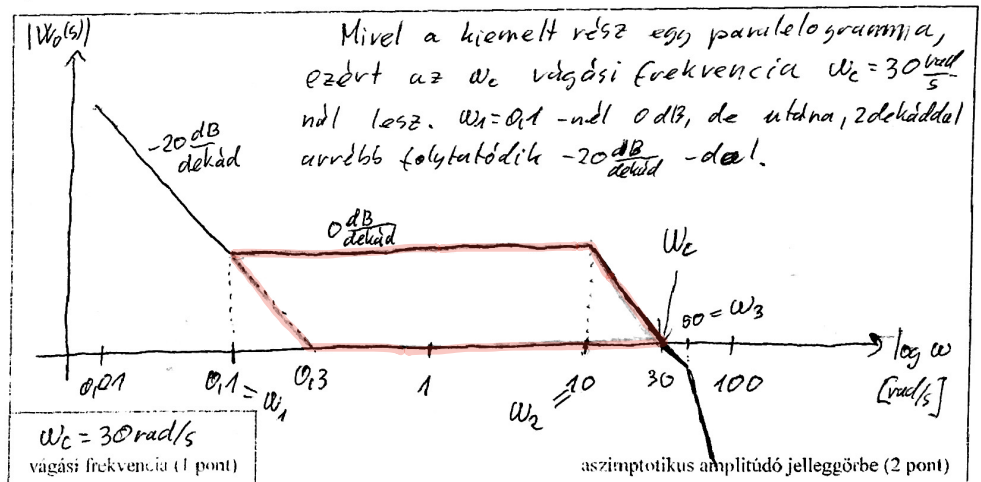
$$\sqrt[2]{k} = \sqrt[2]{0.3} = 0.173 \text{ [rad/s]}$$

töréspontok

$\omega_1 = 0.1 \text{ rad/s} \uparrow$

$\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$

$\omega_3 = 50 \text{ rad/s}$



$$\phi(\omega) = -90^\circ + \arctg(10\omega) - \arctg(0.1\omega) - \arctg(0.02\omega)$$

\uparrow
(integrál for
mraff)

$$\phi_t = 90^\circ + \arctg(300) - \arctg(3) - \arctg(0.6) \approx 90^\circ + 78^\circ - 71^\circ - 31^\circ = 76^\circ$$

ez nem kell

$\phi_t > 0^\circ$, ezért a rendszer stabil
stabilis/labilis indoklással (1 pont)

$$\phi_t = \phi(\omega_c) + 180^\circ = 180^\circ - 90^\circ + \arctg(10 \cdot 30) - \arctg(0.1 \cdot 30) - \arctg(0.02 \cdot 30)$$

Bode-kritérium: $\phi_t > 0^\circ \Rightarrow$ stabil a rendszer

Legyen egy szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye $D(z) = \frac{0,3z + 0,2}{z^2 + 0,7z + 0,1}$! Véges beállási idejű $D_c(z^{-1})$ szabályozót kívánunk

alkalmazni. Adja meg az elsőfokú $L(z^{-1})$ korrekciós polinom együtthatóit, ha $u_{max} = 2,5$! (Segítség: a szakasz számlálójának és nevezőjének negatív hatványok szerint rendezett alakjából kell kiindulni.) Hol lesznek a zárt szabályozási kör pólusai dead-beat szabályozásnál?

$$D(z) = \frac{0,3z + 0,2}{z^2 + 0,7z + 0,1} = \frac{0,3 \cdot z^{-1} + 0,2 \cdot z^{-2}}{1 + 0,7 \cdot z^{-1} + 0,1 \cdot z^{-2}} = \frac{b_0 \cdot z^{-m} + \dots + b_{m-1} \cdot z^{-(m-1)} + b_m \cdot z^{-n}}{1 + a_1 \cdot z^{-1} + \dots + a_{n-1} \cdot z^{-(n-1)} + a_n \cdot z^{-n}}$$

$L_0 = 2,5$
L0 értéke (2 pont)

$L_1 = -0,5$
L1 értéke (2 pont)

origó (FIR)
zárt kör pólusainak helye (1 pont)

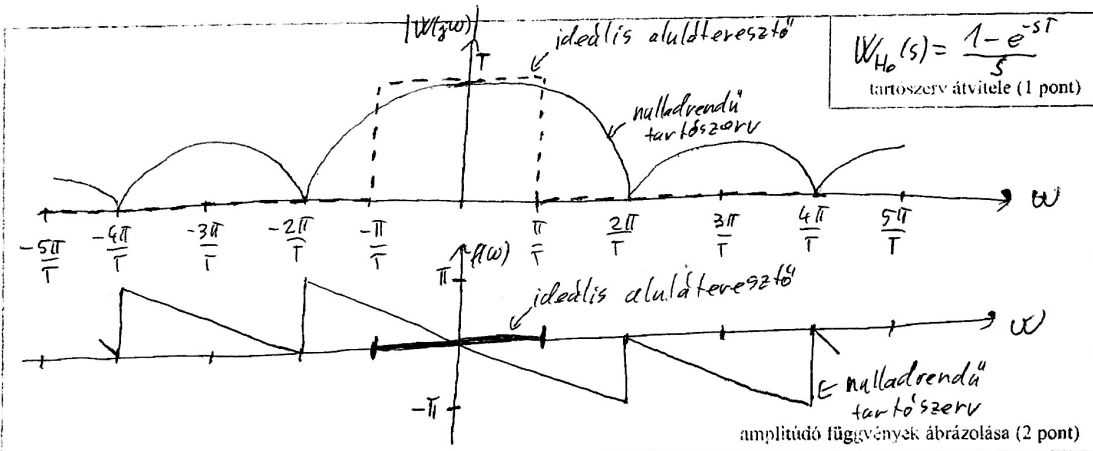
$M_{max} = l_0 \cdot a_0 \Rightarrow l_0 = \frac{M_{max}}{a_0} = \frac{2,5}{1} = 2,5$

$l_1 = \frac{1}{B(1)} - l_0 = \frac{1}{0,5} - 2,5 = 2 - 2,5 = -0,5$

$l_0 = L_0$

$l_1 = L_1$

4. Adja meg a nulladrendű tartószerv $W_{H_0}(s)$ átviteli függvényét! Ábrázolja a tartószerv amplitúdó függvényét ω -ban lineáris léptékben, és tüntesse fel a rajzon az ideális aluláteresztő szűrő amplitúdó és fázis függvényeit is. Miért használunk tartószervet az ideális aluláteresztő szűrő helyett?



Az ideális aluláteresztő nem kauzális, ugyanis viselkedésekor jövőbeli értékeket is figyelembe vesz, ezért nem realizálható. A nulladrendű tartó azonban realizálható, és kicsi T esetén kb. azonos tulajdonságokkal bír.
tartószervhasználatának indokai (2 pont)

$|W_{H_0}(j\omega)| = T \cdot \left| \frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}} \right|$ $\phi(\omega) = -\frac{\omega T}{2} + \arg\left(\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}\right)$

Fogalmazza meg folytonosidejű $\Sigma = (A, B, C, D)$ SISO rendszert feltételezve a pólusát helyezési feladatot állapot-visszacsatolás esetén, és adja meg a megoldás meghatározására szolgáló Ackermann-képletet a benne szereplő elemek magyarázatával! Adja meg a zárt rendszer hatásvázlatát az állapotvisszacsatolás és mérhető állapot esetén!

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad u = -k \cdot x$$

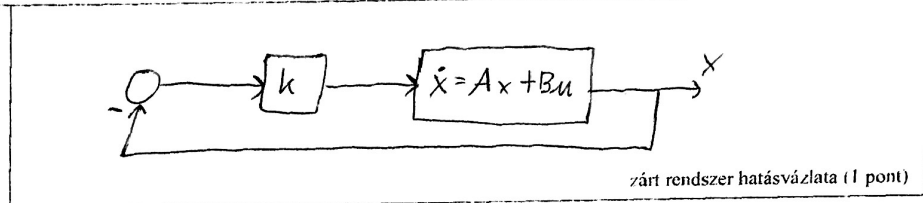
$$\dot{x} = Ax - B \cdot k \cdot x = (A - Bk) \cdot x \quad \text{sajátértékei egy adott } p_c(s) \text{ gyökei}$$

pólusát helyezési feladat (2 pont)

$$k = [0 \dots 0 \ 1] \cdot M_c^{-1} \cdot p_c(A)$$

$$M_c = [B, AB, \dots, A^{n-1} \cdot B]$$

Ackermann-képlet és elemei (2 pont)



6. Adja meg az LTI rendszerek irányíthatósági és megfigyelhetőségi mátrixainak általános alakját. Az irányíthatósági és a megfigyelhetőségi mátrixok felírása alapján döntse el, hogy a

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad \Rightarrow \underline{A} = \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad n=2$$

állapotegyenlettel adott rendszer irányítható-e, illetve megfigyelhető-e!

$$M_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \det = 2 \cdot (-2) - (1 \cdot 4) = 0$$

↓
rank(M_c) ≠ n

$$M_o = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \det = 0 \cdot 6 - 4 = -4$$

Számítások:

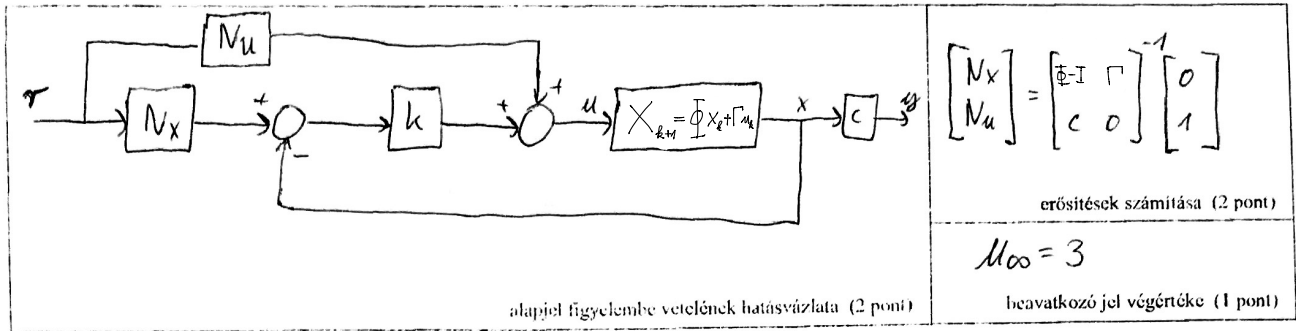
$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot (-9) + 1 \cdot 14 \\ 2 \cdot (-4) + 1 \cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$C \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & 14 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 6 \end{bmatrix}$$

↑
0 · (-9) + 1 · (-4) 0 · 14 + 1 · 6

$M_o = \begin{bmatrix} C \\ C \cdot A \\ \vdots \\ C \cdot A^{n-1} \end{bmatrix}$ <p style="text-align: center;">általános megfigyelhetőségi mátrix (1 pont)</p>	$M_c = [B \quad A \cdot B \quad \dots \quad A^{n-1} \cdot B]$ <p style="text-align: center;">általános irányíthatósági mátrix (1 pont)</p>
$M_o = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(M_o) = \text{rank}(A) = 2$ <p style="text-align: center;">a rendszer Megfigyelhető</p> <p style="text-align: center;">adott rendszer megfigyelhetőségi mátrixa és következtetés (1 pont)</p>	$M_c = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{rank}(M_c) \neq \text{rank}(A) = 2$ <p style="text-align: center;">a rendszer nem irányítható</p> <p style="text-align: center;">adott rendszer irányíthatósági mátrixa és következtetés (2 pont)</p>

Diszkrét idejű állapotteres szabályozás tervezésekor milyen erősítéseken keresztül és milyen struktúrában vehető figyelembe az alapjel hatása? Adja meg a beavatkozó jel figyelembe vételének hatásvázlatát és az N_x és N_u erősítések számításának szabályát, ha egységugrás alapjelet feltételezünk! Ugyanek egysegugras alapjel mellett számítsa ki a beavatkozó jel végértékét, ha $N_x = [1 \ 0.5 \ -2]$ és $N_u = 3$.



$M_{\infty} = r \cdot N_u$ $r=1 \rightarrow$ mert egységugrás az alapjel : $M_{\infty} = 3 \cdot 1 = 3$

[Ha kezdeti értéket kérdezik:]
 $M_0 = r \cdot N_u + K \cdot N_x \cdot r$
 ↑
 meg lesz adva

8. Vezesse le, hogy a $D(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 + a_1 z + a_2} = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}} = \frac{Y(z)}{U(z)}$ átviteli függvényű, diszkrétidejű rendszer identifikációja

$y(t) = \varphi^T(t) \vartheta$ alakú lineáris paraméterbecslési feladatra vezet, kihasználva, hogy $z^{-k} x(t) = x(t-k)$ (a mintavételi idő 1 sec).

Adja meg a felírásban található $\varphi^T(t)$ és ϑ vektorok elemeit is!

$$\varphi^T(t) = [-y(t-1) \quad -y(t-2) \quad u(t-1) \quad u(t-2)]$$

$\varphi^T(t)$ (3 pont)

$$M \cdot (b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}) = Y \cdot (1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})$$

$$b_1 \cdot u(t-1) + b_2 \cdot u(t-2) = y(t) + a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2)$$

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2)$$

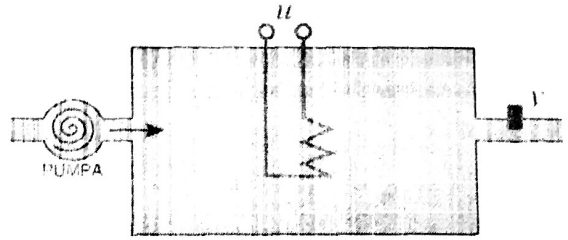
$$y(t) = \varphi^T(t) \cdot \vartheta$$

$$\vartheta = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

ϑ (2 pont)

1. feladat

Egy technológia működtetéséhez egy áramoltatott komponens hőmérsékletének előírt értéken tartása a feladat. A beavatkozó szerv egy elektronos fűtőegység, amelynek egy munkaponti értékéhez lépestí teljesítménye a szabályozott szakasz módosított jellemzője (U), a szabályozott jellemző pedig az áramoltatott komponens hőmérsékletének munkaponti értékétől mért eltérése (v.ö. ábra). Az elektronos fűtőegység és a hűtődés egyaránt egytarolós tagokként jellemezhetőek így az együttes átviteli függvény



$$W(s) = \frac{2}{(2s+1)(11s+1)}$$

amelyhez PI típusú analóg szabályozót tervezünk. A φ_i fázistöbblet értéke előírt $\varphi_i \approx 60^\circ$, és gyors működésre törekszünk. A megtervezett analóg szabályozót egységugrás ekvivalens $D_{PI}(z)$ mintavételes szabályozóként implementáljuk $T_s = 0.1 \text{ sec}$ mintavételei idő mellett. A tervezést az alábbi lépésekben kell elvégezni

1. Ejtse ki a szabályozó zérushelyével a domináns (nagyobb) időállandót és $A_p = 1$ erősítés esetén határozza meg a

$W_0(s) = W(s)W_{PI}(s)$ felnyitott kör ω_c vágási frekvenciáját és φ_i fázistöbbletét!

T_i (kicjtésből)	$T_i = 11$
(2 pont)	
φ_i (pontos)	$\varphi_i = 71^\circ$
(2 pont)	
ω_c	$\omega_c = 0,172 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$
(2 pont)	

$$W(s) = \frac{2}{(2s+1)(11s+1)} \quad W_{PI}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i}\right) = A_p \cdot \frac{sT_i + 1}{sT_i}$$

$$T_i = a \text{ lelassabb pólus} = 11$$

$$W_0(s) = W(s) \cdot W_{PI}(s)$$

$\gg \text{margin}(W_0);$

↓

$$\varphi_i = 71^\circ$$

$$\omega_c = 0,172 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2. Keresse meg azt a beállítást, amely mellett a felnyitott kör fázistöbblete az előírt $\varphi_i \approx 60^\circ$ értékű lesz (legalább 0,2° pontossággal)! Adja meg a feltételeket kielégítő analóg szabályozó $W_{PI}(s)$ átviteli függvényét és benne az A_p, T_i paraméterek numerikus értékével!

A_p	$A_p = 1,8429$
(3 pont)	

$W_{PI}(s)$ szabályzó átviteli függvénye	$W_{PI}(s) = \frac{20 \cdot 27s + 1,843}{11s}$
(4 pont)	

$\gg \text{margin}(W_0);$ % fázis görbén megkeresem % a -120° -hoz tartozó frekvenciát, majd az % amplitúdó görbén megnézem az erősítést

↓

$$-5,31 \text{ dB}$$

$$\gg A_p = 10^{(5,31/20)} \quad \% A_p = 1,8429$$

$$\gg W_{PI} = W_{PI}^* A_p$$

3. Határozza meg a megtervezett $W_{PI}(s)$ analóg szabályozó cvségugrás ekvivalens $D_{PI}(z)$ mintavételes közelítését az előírt T_s mintavételi idő mellett és írja fel a hozzá tartozó differenciaegyenletet!

$$\Rightarrow D_z = c2d(W_{PI}, 0.1, 'zoh')$$

$$D_z = \frac{1.843z - 1.826}{z - 1} = \frac{U(z)}{E(z)}$$

$$\begin{aligned} & \rightarrow E(z) \cdot 1.843z - E(z) \cdot 1.826 = \\ & = U(z) \cdot z - U(z) \end{aligned}$$

$D_{PI}(z)$ szabályozó átviteli függvénye $D_{PI}(z) = \frac{1.843z - 1.826}{z - 1}$ (2 pont)

Differencia egyenlet $u_k =$ $u[k-1] + 1.843 \cdot e[k] - 1.826 \cdot e[k-1]$ (5 pont)

$$U(z) = U(z) \cdot z^{-1} + E(z) \cdot 1.843 - \cancel{E(z) \cdot 1.826}$$

2. feladat

A szabályozott szakasz egy gyengén csillapított kéttárolós lengőtag, amelynek átviteli függvénye $W(s) = \frac{1}{1 + 0.1s + s^2}$. A DAC és ADC átalakítókval kiegészített szakaszhoz **2-szabadságfokú** (feedforward+feedback) mintavételes szabályozót tervezünk, amelynek mintavételi ideje $T_s = 0.2 \text{ sec}$. A zárt rendszer referenciamodelljét folytonos időben specifikáljuk a domináns póluspár $\xi = 0.7$ csillapításával és $\omega_0 = 1 \text{ sec}^{-1}$ csillapítatlan sajátfrekvenciájával. A statikus pontosság biztosítására a **szabályozónak integrátort is kell tartalmaznia**. A kauzalitási feltételek betartásakor az $A_0(z)$ megfigyelő (observer) polinom feleljen meg a folytonos időben specifikált $\xi_{obs} = 0.7$ és $\omega_{obs} = 3 \text{ sec}^{-1}$ paraméterű megfigyelő póluspárnak. A tervezést a következő lépésekben kell elvégezni:

1. Határozza meg a szabályozott szakasz $D(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ diszkrétidejű átviteli függvényét, ha a DAC átalakító nulladrendű

tartószervvel modellezhető! Adja meg a tervezéshez szükséges $B(z) = B^+(z)B^-(z)$ faktorizációt ($B^+(z)$ monik, azaz a legnagyobb hatványú tag együtthatója egy)!

$$\Rightarrow D = c2d(W, T_s, 'zoh')$$

$$\Rightarrow B = D.\text{num}\{1\}$$

$$\Rightarrow B = B(z:\text{end})$$

$$\Rightarrow A = D.\text{den}\{1\}$$

$$\Rightarrow \text{roots}(B) \quad \% \text{ ans} = -0.9933$$

$D(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{0.0198z + 0.01967}{z^2 - 1.841z + 0.9902}$ (2 pont)
--

$$B^- = B$$

(-0.9933 nem kifejtendő, mert tisztán valós, imagin)

$$B^+ = 1$$

(mert ez monik)

$B^-(z) = B$ (2 pont)

$B^+(z) = 1$ (2 pont)

2. Határozza meg a referencia modell, a szabályozó és a megfigyelő polinomjainak fokszámát a kauzalitási feltételek és a specifikációk betartása mellett, kis fokszámú polinomokra törekedve! Segítség:

$$gr A_m = 1 + gr B^- + \{1/0\}; \quad gr S = gr A + l - 1; \quad gr A_0 = gr A + l - 1 - \{1/0\}; \quad gr R_1' = gr B^-$$

$$gr B^- = 1$$

$$gr A = 2$$

$gr A_m = 2$ (1 pont)	$gr S = 2$ (1 pont)
$gr A_0 = 2$ (1 pont)	$gr R_1' = 1$ (1 pont)

$$gr A_m = 1 + 1 + 0 = 2$$

$$gr S = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$gr A_0 = 2 + 1 - 1 - 0 = 2$$

$$gr R_1' = 1$$

Matlab kód:

$$\begin{aligned} &\gg A = \text{conv}(A, [1 -1]); \\ &\gg BB = B; \\ &\gg CC = \text{conv}(Am, 10); \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} &\gg \text{atilde} = AA'; \\ &\gg \text{btilde} = [BB \text{zeros}(1,2)]'; \\ &\gg \text{brow} = \text{zeros}(1,3) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\gg Dmat = [\text{atilde} \text{toeplitz}(\text{btilde}, \text{brow})]; \\ &\gg Dvec = [CC(2:4)' - AA(2:end)']; CC(end)]; \\ &\gg Rs = \text{inv}(Dmat) * Dvec \\ &\gg R1v = [1 Rs(1)]; \gg S = Rs(2:end) \end{aligned}$$

3. Határozza meg a folytonos időben előírt $\xi, \omega_0, \xi_{obs}, \omega_{obs}$ értékek esetén a zárt rendszer referencia modellje nevezőjében a domináns póluspárnak megfelelő $A_m(z)$, és a megfigyelő póluspárnak megfelelő $A_0(z)$ másodfokú faktorokat diszkrét időben!

$$\begin{aligned} S_{1,2} &= -\omega_0 \cdot \xi \pm j \cdot \omega_0 \cdot \sqrt{1 - \xi^2} = -0,7 \pm 0,7141j \Rightarrow z_{1,2} = \exp(s_{1,2} \cdot T_s) \\ S_{obs1,2} &= -\omega_{obs} \cdot \xi_{obs} \pm j \cdot \omega_{obs} \cdot \sqrt{1 - \xi_{obs}^2} = -2,1 \pm 2,1424j \Rightarrow z_{obs1,2} = \exp(s_{obs1,2} \cdot T_s) \end{aligned}$$

$A_m(z) = z^2 - 1,721z + 0,7558$ (2 pont)	$\gg A_m = \text{poly}([z1, z2])$
$A_0(z) = z^2 - 1,1953z + 0,4317$ (2 pont)	$\gg A_0 = \text{poly}([z01, z02])$

4. Határozza meg a szabályozó polinomjainak együtthatóira felírható diophantoszi egyenlet megoldását és B'_m értékét!

① Diophantoszi egyenlet: $\underbrace{A \cdot (z-1)^c}_{AA \in \text{monik}} \cdot \underbrace{R_1}_{BB \in \text{nem monik}} + \underbrace{B^-}_{CC \in \text{monik}} \cdot S = A_m \cdot A_0$

② $AA = z^3 + a_2 z^2 + a_1 z + a_0$

$BB = b_0 z + b_1$

$CC = z^4 + c_1 z^3 + c_2 z^2 + c_3 z + c_4$

$S = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$ ← nem monik

$R_1 = r_1$ ← monik

③

$$\begin{pmatrix} 1 & b_0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & 0 \\ a_2 & 0 & b_1 & b_0 \\ a_3 & 0 & 0 & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$$

↑ ②
↑ ③
↑ ①
↑ ④

- ① $R_1 = r_1$, majd alá S-ek
- ② Mivel ①-es mátrix 4 sorú ezért 4×4 -es lesz, ki kell tölteni a-val
- ③ b_0, b_1 van, mert $\text{fig} B = z$, a többi nulla
- ④ ez így van, mindig C-a

$S(z) = 9,0822 z^2 - 17,7237 z + 8,3497$ (3 pont)
$R_1(z) = z - 0,1653$ (3 pont)

$B'_m = 0,881$ (2 pont)	$B'_m = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$	$\gg B_m v = \text{polyval}(A_m, 1) / \text{polyval}(B, 1);$
----------------------------	--------------------------------	--

5. Adja meg a szabályozó $R(z)$, $T(z)$ polinomjait is, illetve a szabályozó differencia-egyenletét numerikusan:

$\gg R = \text{conv}([1 -1], R1v)$

$\gg T = B_m v * A_0$

$\Gamma(z) = 0,881 z^2 - 1,053 z + 0,3803$ (2 pont)
--

$R(z) = z^2 - 1,1653 z + 0,1653$ (2 pont)
--

$A =$ (4 pont)
