# AZ IDEÁLIS GÁZ ÉS A KINETIKUS GÁZELMÉLET

*„Nem túl kicsi,*
*Nem túl inhomogén,*
*Nem túl homogén"*

LÁNCZOS KORNÉL
(a statisztikailag elemezhető rendszerek ismertető jelei)

## 20.1 Bevezetés

Ebben a fejezetben megtesszük az első lépéseket ahhoz, hogy az anyag makroszkopikus tulajdonságainak mélyére hatoljunk, és – ha lehetséges – az atomok és molekulák mozgását és kölcsönhatását figyelembe véve próbáljuk felfogni a jelenségeket. Rendkívül nehéz feladat az anyag összes megjelenési formájának alapjául szolgáló mikroszkopikus „gépezet" megértése. Először is, az atomok és molekulák nem követik a newtoni mechanika szabályait. Ehelyett a kvantummechanika radikálisan eltérő megközelítésére van szükség. Bár a kvantummechanikai tárgyalást későbbre halasztjuk, e szemlélet bevezetéseként kiválasztunk egy egyszerű problémát, amit meg tudunk oldani és ez, a gázfázisban lévő anyag viselkedése. Annak érdekében, hogy tárgyalásunkat olyan helyzetekre korlátozzuk, amelyeknél a kvantumhatások elhanyagolhatók, elkerüljük majd a szélsőségesen alacsony hőmérsékleteket, ahol a légnemű anyag megközelíti a folyékonyba való fázisátalakulást és a nagyon nagy nyomásokat, ahol a gázmolekulák olyan szorosan vannak „összepréselve", hogy számításba kell venni maguknak a molekuláknak a méretét is.

A következő négy fejezetben két különböző nézőpontból közelítjük meg a témát. A termodinamika az anyag makroszkopikus vizsgálatával foglalkozik, azaz olyan laboratóriumi mérésekkel, mint pl. egy anyag melegítésekor, vagy összenyomásakor a térfogat- és hőmérsékletváltozás meghatározása. (Ami mikroszkóp alatt látható, az szintén makroszkopikus jelenségnek minősül.) Az anyag viselkedésének megértéséhez vezető másik megközelítést statisztikus mechanikának nevezik: ez a mikroszkopikus képpel foglalkozik, azaz maguknak az atomoknak és molekuláknak a mozgásával. Mivel az egyes atomok, vagy molekulák mozgását külön-külön képtelenek vagyunk követni, a részecskék átlagos viselkedésének leírására matematikai módszereket alkalmazunk.

Az anyag e kétféle szemlélete – a makroszkopikus és a mikroszkopikus – együttesen egységes világképet alkot, mivel a makroszkopikus jellemzők valójában a nagyszámú mikroszkopikus kölcsönhatás időbeli átlagértékei. Például a gáz nyomása lényegében nem más, mint az edény falával történő rendkívül nagy számú molekuláris ütközés átlagos hatása.

## 20.2 Az ideális gáz

Amidőn a természettudományban egy fizikai elméletet megalkotunk, azt rendszerint bizonyos fogalmak definíciójával és az azokra vonatkozó megfelelő jelölések bevezetésével kezdjük. Ezután a fogalmak közötti összefüggéseket matematikai egyenletekkel fejezzük ki. Az anyag fizikai állapotának leírására szolgáló matematikai összefüggést **állapotegyenletnek** nevezzük, mert ez az egyenlet *bármilyen lehetséges feltétel mellett* leírja az anyag állapotát. A legtöbb anyag állapotegyenlete olyan bonyolult, hogy pontos alakját nem ismerjük. Elképzelhető azonban olyan példa, – ez az ún. *ideális gáz*, – amelynek az állapotegyenlete nagyon egyszerű. Ez egy fontos egyenlet, mert a valódi gázok közepes nyomásnál és hőmérsékleten jól követik az ideális gáz viselkedését. Bevezető tárgyalásunk során csak a gáz *egyensúlyi állapotával* foglalkozunk. Ez azt jelenti, hogy mind a hőmérsékletnek, mind a nyomásnak a gáz teljes térfogatában azonosnak kell lennie. (Ha például a térfogatban gyors változások történnek, és a gáz egyes részei átmenetileg nagyobb sűrűségűre lettek összenyomva, mint más helyeken; akkor az állapotegyenlet csak azokra a részekre alkalmazható, ahol azonos feltételek uralkodnak. Ezeket az eseteket a következő fejezetben részletesebben is tárgyaljuk.)

Vizsgálatainkhoz alkalmas rendszert alkot pl. egy olyan hengerbe zárt gáz, amely surlódás nélkül mozgó dugattyúval van ellátva. (20-1 ábra). Már a kezdeti kísérletekben nyilvánvalóvá vált, hogy adott mennyiségű gáz jellemző paraméterei: a nyomás ($p$), a térfogat ($V$) és az abszolút hőmérséklet ($T$). Igy az állapotegyenlet felírható, mint egy $f(p, V, T)$ függvény. Az első sikerek a megfelelő összefüggések felfedezésében Robert Boyle brit kémikus (1660) és két francia fizikus, J. A. C. Charles és Joseph Louis Gay-Lussac (1802) nevéhez fűződnek. Különböző gázok meghatározott mennyiségével végzett nagy számú kísérlet alapján a következő összefüggésekre jutottak:

BOYLE-TÖRVÉNY $\quad pV = \text{állandó}$ (állandó hőmérsékleten) **(20-1)**

CHARLES- ÉS GAY LUSSAC TÖRVÉNY $\quad \dfrac{V}{T} = \text{állandó}$ (állandó nyomáson) **(20-2)**

E két összefüggés egyetlen egyenletbe foglalható:

$$\frac{pV}{T} = \text{állandó} \qquad \textbf{(20-3)}$$

A következő gondolatmenetből az adódik, hogy a (20-3) egyenletben szereplő konstansnak *arányosnak kell lenni a szóban forgó gáz tömegével.* Tegyük fel, hogy a $V$ térfogatú gáz nyomása és hőmérséklete adott. Ha most


**20-1 ábra**
A gázok viselkedésének vizsgálatára szolgáló egyszerű termodinamikai rendszer: hengerben lévő, súrlódásmentesen mozgatható dugattyúval elzárt gáz. Boyle összefüggést talált az állandó hőmérsékletű gáz térfogata és a nyomása között.

csak egy részét, mondjuk az eredeti térfogat felét vizsgáljuk, akkor ebben a második esetben azonos nyomás- és hőmérsékletértéknél a térfogat csak fele akkora. Ahhoz, hogy a (20-3) egyenlet mindkét esetben érvényes legyen, az állandónak kell azt az információt tartalmaznia, mely szerint a kisebb térfogatban az eredetihez képest csak a fele mennyiségű gáz van.

A gáz mennyiségének kifejezésére alkalmas egy dimenzió nélküli mennyiség, amit mólszámnak neveznek. A **mól** (mol) definíciója:

**EGY MÓL (mól)** **Bármely anyagból az a mennyiség, ami ugyanannyi elemi részecskét tartalmaz, mint ahány atom található 0,012 kg 12-es C izotópban. Ezt a számot Avogadro-számnak nevezzük[1]**

**AVOGADRO SZÁM** $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ **részecske/mol**

Amikor a mól-t használjuk, meg kell határozni a részecskék fajtáját. Ezek lehetnek atomok, molekulák, ionok, elektronok, más részecskék, vagy egyes részecskék meghatározott csoportjai. Igy például 1 mól jelenthet 1 mól elektront, 1 mól atomot, vagy 1 mól molekulát.

A kémikusok felfedeztek néhány érdekes tényt a mólnyi mennyiségről. A következőkben ezeket tekintjük át. **Normál állapotban a** hőmérséklet és nyomás rendre 0°C és 1,013246 $10^5$ Pa. *Normál állapotban bármely gáz mólnyi mennyisége azonos térfogatot foglal el:*

**MÓLNYI MENNYISÉGŰ GÁZ TÉRFOGATA 0°C-ON ÉS ≈ $10^5$ Pa NYOMÁSON** 0,0224 $m^3$ vagy 22,4 liter

Egy másik jól használható tény az, hogy tetszőleges anyag mólnyi mennyiségének grammokban kifejezett tömege számértékben megegyezik az **atomi tömegegységben** kifejezett **molekulatömeggel**[2].

**ATOMI TÖMEGEGYSÉG (u)** **Az atomi tömegegységet a $^{12}$C szénizotóp atom tömegének (beleértve az elektronokat is) 1/12-ed részeként definiálták:** $1\ u \approx 1{,}66053\ 10^{-27}$ **kg**

Ezeket az összefüggéseket egyesítve, a (20-3) egyenlet állandóját *nR*-nek választották, ahol *n* a mólszám, *R* pedig a kísérletileg meghatározott univerzális gázállandó, olyan mértékegységben, ami ellentmondásmentessé teszi az egyenletet:

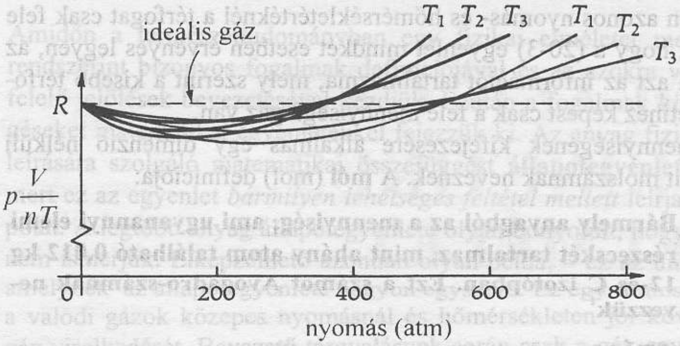
UNIVERZÁLIS GÁZÁLLANDÓ

$$R \begin{cases} = 8{,}315\ \mathrm{J / (mol \cdot K)} \\ = 0{,}08206\ \mathrm{l \cdot atm / (mol \cdot K)} \\ = 1{,}986\ \mathrm{cal / (mol \cdot K)} \end{cases}$$

Az *„univerzális"* szó azt jelenti, hogy adott mértékrendszerben *R* minden gázra azonos értékű. Igy jutunk tehát az ideális gáz állapotegyenletéhez:

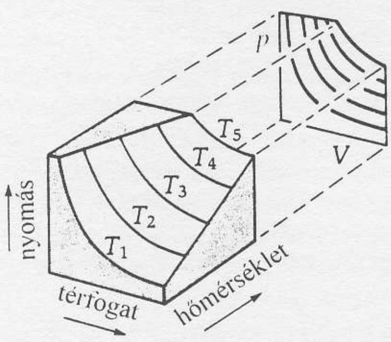
[1] Amadeo Avogadro gróf olasz kémikus és fizikus, (1776–1856) tiszteletére, aki 1811-ben javasolta, hogy az atomokból álló modell segítségével meg lehetne magyarázni a gáz viselkedésének különböző tulajdonságait.

[2] A molekulatömeg szorosan kapcsolódik a **relatív móltömeg** fogalmához. A relatív molekula-tömeget az adott molekulát felépítő atomok **relatív atomtömegének** összeadásával kapjuk. Például mivel a hidrogén (H) és az oxigén (O) relatív atomtömege 1, illetve 16, a víz ($H_2O$) relatív molekulatömege 18. Molekulatömege 18 u. Ezenkívül 18 g víz 1 mólnyi, azaz az Avogadro-számnak megfelelő molekulát tartalmaz. (Pontosabb relatív atomtömeg értékére vonatkozóan lásd a J függeléket)

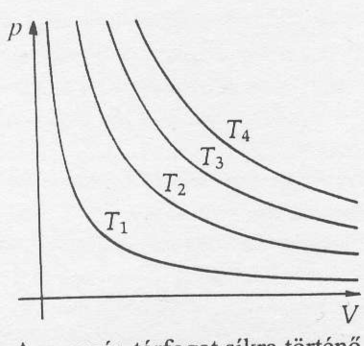



## 20-2 ábra

Két valódi gáz kvalitatív viselkedése. A $pV/nT$ összefüggés értékeit ábrázoltuk három különböző hőmérsékletre. Jegyezzük meg, hogy a nyomás csökkenésével minden valódi gáz esetében $pV/nT$ azonos értékhez közelít. Ez az érték az $R$ univerzális gázállandó. Ideális gáz esetén a $pV/nT$ értéke $R$, tetszőleges nyomáson és hőmérsékleten.




a) Az ideális gáz $pV = nRT$ állapotegyenletének megfelelő háromdimenziós $p$-$V$-$T$ felület. A felületre berajzoltuk az állandó hőmérséklet görbéit.




b) A nyomás-térfogat síkra történő vetítést *p-V diagramnak* nevezik, ez az egyik leghasznosabb grafikon az ideális gáz viselkedésének elemzése szempontjából. Az állandó hőmérsékletű görbék, az *izotermák*, hiperbola-sokaságot alkotnak.

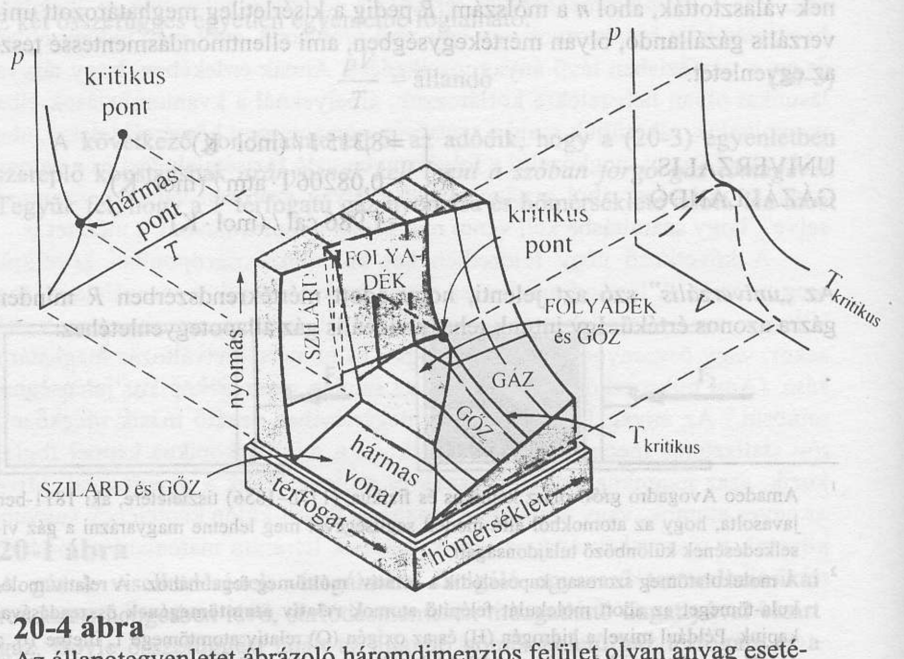
## 20-3 ábra

Ideális gáz nyomása, térfogata és hőmérséklete közötti kapcsolatok.

IDEÁLIS GÁZ ÁLLAPOTEGYENLETE $\quad pV = nRT \qquad (20\text{-}4)$

ahol $T$-t kelvinben kell kifejezni. (Tudjuk az előző fejezetből, hogy a termodinamikai egyenletekben a hőmérsékletet kelvinben kell kifejezni.).

A (20-4) egyenletet az *ideális* gáz állapotegyenletének nevezzük, mivel ez írja le azt a viselkedést, ami felé minden reális gáz tart, ha a nyomása nagyon kicsivé válik. Ezt vázolja kvalitatíven a 20-2 ábra. A nyomás csökkenésével $pV/nT$ kísérleti értéke minden gáz esetében $R$ értékéhez közelít. Tehát az **ideális gáz** úgy definiálható, mint olyan – hipotetikus – gáz, amelynél $pV/nT$ összefüggés értéke egyenlő az $R$ állandóval bármely nyomás mellett. Néhány atmoszférányi tartományban a legtöbb valódi gáz viselkedése jól megközelíti ezt. Különösen jellemző ez az egyatomos gázokra, ha atomjaik távol vannak egymástól, ( így tömegpontokként viselkednek ) és nincsenek



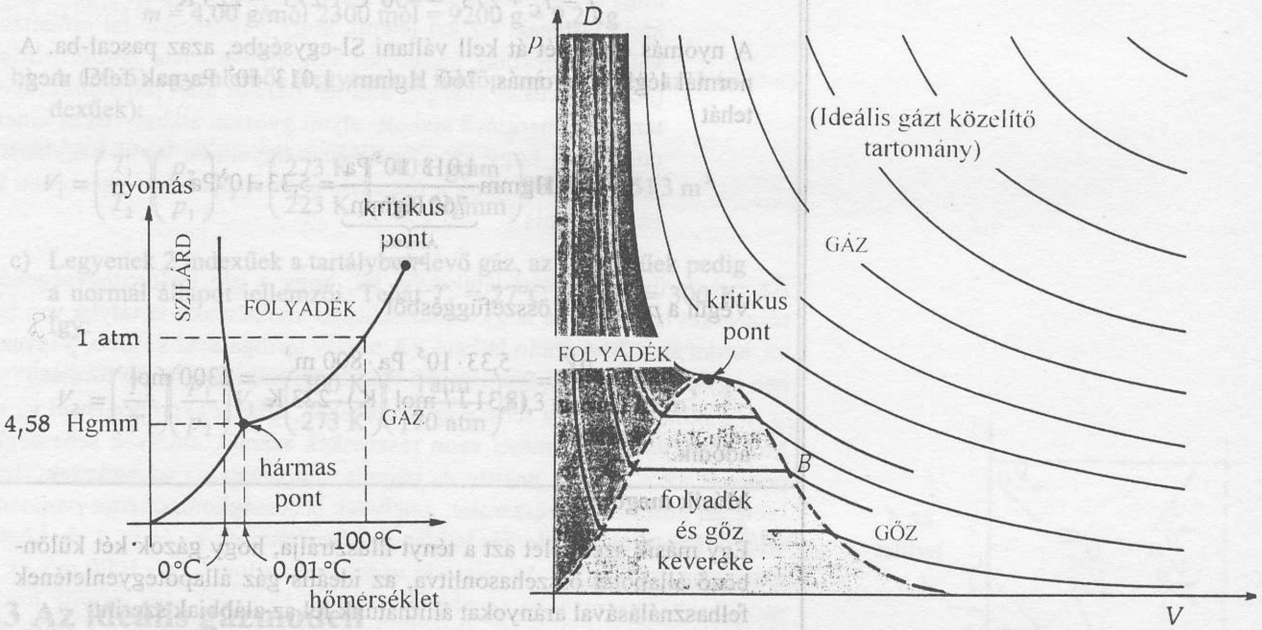

## 20-4 ábra

Az állapotegyenletet ábrázoló háromdimenziós felület olyan anyag esetében, amely fagyáskor a vízhez hasonlóan tágul. A skálák torzítottak, hogy a jellegzetes vonások világosabbak legyenek.

túl közel a cseppfolyósodás hőmérsékletéhez. A hélium kis nyomáson tulajdonképpen egészen addig ideális gázként viselkedik, amíg néhány foknyira meg nem közelíti a Kelvin-skála abszolút zérus pontját. Így az „ideális gáz" fogalma nincs túl távol attól, ami ténylegesen megvalósul. *A feladatokban – hacsak nem jelezzük másként – feltételezzük, hogy minden reális gáz ideálisként viselkedik.*

Az ideális gáz állapotegyenletét egy háromdimenziós felülettel szemlélhetjük, ahogyan ezt a 20-3 ábra mutatja. Az állandó hőmérsékletű görbéket **izotermáknak** nevezik (a görög isos szóból, aminek jelentése: „egyenlő", vagy „azonos"). A *p-V* síkra kivetítve, az izotermák hiperbola sokaságot alkotnak. (Emlékeztetünk arra, hogy a hiperbola egyenlete: $pV =$ állandó).

A valódi anyagok szilárd, folyékony vagy gáz halmazállapotra érvényes állapotegyenlete általában nagyon bonyolult. Valójában a pontos állapotegyenlet sokszor ismeretlen is. Mindazonáltal felvázolhatók olyan diagramok, amelyek a kvalitatív jellemzőket jól bemutatják, mint ahogyan ezt a 20-4 és 20-5 ábra illusztrálja. Két jellemző dolgot kell megjegyezni. A 20-4 ábra mutatja, hogy a gázok nem cseppfolyósíthatók a *kritikus hőmérséklet* felett, bármilyen nagy nyomást alkalmazunk is. A 20-5b nyomás-hőmérséklet diagramján a *hármaspont* azt a nyomást és hőmérsékletet jelzi, ahol az anyag szilárd, folyékony és gőz halmazállapotban egyidejűleg létezhet.




a) A 20-4 ábra vetülete a nyomás-hőmérséklet síkon. A különböző fázisokat elválasztó három görbe metszéspontját hármas-pontnak nevezzük. (A numerikus értékek a vízre vonatkoznak.)

b) A 20-4 ábra vetülete a nyomás-térfogat síkon. A $T_{kritikus}$ feletti hőmérsékleteknél a gáz nem cseppfolyósítható semmilyen nyomáson, mert ezeken a hőmérsékleteken az ütközések átlagenergiája elég nagy ahhoz, hogy a molekulákat folyadékként összetartó kötőerőket szétszakítsa. Az izoterma mentén A-tól B-ig az anyag gőzfázisban van. (A $T_{kritikus}$ alatti légnemű állapotra szokás a *gőz* elnevezést használni.) B-től C-ig kondenzáció megy végbe, miközben az ehhez a hőmérséklethez tartozó állandó gőznyomásnál folyadék és gőz keveréke keletkezik. A tiszta folyadékfázis esetében, C-től D-ig, az izoterma csaknem függőleges, ami azt jelenti, hogy nagy nyomásnövekedés szükséges a folyadéknak kisebb térfogatúra történő összenyomásához.

**20-5 ábra**
A *p-T* és *p-V* diagram a cseppfolyósodó gáz viselkedésének jellegzetességeit mutatja. Ezek annak a háromdimenziós *p-V-T* felületnek (20-4 ábra) a vetületei, amely a szilárd, folyékony és légnemű anyagra vonatkozó állapotegyenletet reprezentálja. (Az itt ábrázolt értékek tartománya nem tartalmazza a szilárd fázisú állapotot.)

## 20-1 PÉLDA

Nagy magassági kutatásokat végző léggömb hélium gázt tartalmaz. 20 km-es maximális magasságnál a külső hőmérséklet –50°C, és a nyomás 40 Hgmm-re csökkent. Ebben a helyzetben a léggömb térfogata 800 m³. Határozzuk meg a léggömbben lévő hélium mólszámát, feltéve, hogy a hélium hőmérséklete és nyomása megegyezik a környező légkörével.

### MEGOLDÁS

Mivel feltételezzük, hogy minden valódi gáz ideális gázként viselkedik, az ideális gáz állapotegyenlete, a $pV = nRT$ összefüggés bármilyen feltételek mellett érvényes az állapotjelzőkre. Az első lépés az, hogy az összes adatot egységes mértékrendszerre számítjuk át. Az SI-egységeket választjuk és az $R$ = 8,31 J/mól K értéket használjuk. Mint már említettük, a hőmérsékletet kelvinben kell kifejezni. Tehát a 19-25 egyenletből

$$T = T_C + 273° = -50°\mathrm{C} + 273° = 223\ \mathrm{K}$$

A nyomás egységét át kell váltani SI-egységbe, azaz pascal-ba. A normál légköri nyomás, 760 Hgmm, 1,013 10⁵ Pa-nak felel meg, tehát

$$40\,\mathrm{Hgmm}\underbrace{\frac{1{,}013\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}}{760\,\mathrm{Hgmm}}}_{\text{Átváltási arány}} = 5{,}33\cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$$

Végül a $pV = nRT$ összefüggésből

$$n = \frac{pV}{RT} = \frac{5{,}33\cdot 10^5\ \mathrm{Pa}\cdot 800\ \mathrm{m^3}}{(8{,}31\ \mathrm{J/mol\cdot K})\cdot 223\ \mathrm{K}} = 2300\ \mathrm{mol}$$

adódik.

**Másik megoldás:**

Egy másik szemlélet azt a tényt illusztrálja, hogy gázok két különböző állapotát összehasonlítva, az ideális gáz állapotegyenletének felhasználásával arányokat állíthatunk fel az alábbiak szerint:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right) \qquad \textbf{(20-5)}$$

Ennek az egyenlőségnek az az előnye, hogy *az egyes arányok tetszőleges mértékegységben kifejezhetők*, mivel ugyanaz az átszámítási tényező jelenik meg a számlálóban és a nevezőben is.

A nyomás lehet: atm. Hgcm, Pa, stb.
A térfogat lehet: liter, m³, stb.
Az anyagmennyiség lehet: mol, kg, stb.

*Figyelmeztetés*: a nyomásnak mindig *abszolút* nyomásnak kell lenni (nem műszer-nyomásnak) és a hőmérsékletet mindig *kelvinben* kell megadni. (Más hőmérséklet- és nyomás-skálák *additív* konstansokban térnek el ezektől, amikkel nem lehetne egyszerűsíteni.).

Helyettesítsük be például a normál állapothoz tartozó értékeket az 1 indexű állapotra vonatkozóan:

$$\left(\frac{760\ \text{Hgmm}}{40\ \text{Hgmm}}\right)\cdot\left(\frac{0{,}0224\ \text{m}^3}{800\ \text{m}^3}\right)=\left(\frac{1\ \text{mol}}{n_2}\right)\cdot\left(\frac{273\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)$$

$n_2$-re megoldva, adódik: $n_2 =$ 2300 mól.

**20-2 PÉLDA**

Határozzuk meg az előző példában szereplő adatokkal *a)* a hélium tömegét és *b)* a léggömb térfogatát, amikor normál nyomáson és hőmérsékleten elindították a földről! *c)* Mekkora térfogatú tartály tartja ezt a nagy mennyiségű héliumot 27°C-on, 170 atm nyomáson?

*MEGOLDÁS*

a) A hélium relatív molekulatömege 4,00, így 1 mól hélium tömege 4,00 g. Tehát 2300 mól tömege:

$$m = 4{,}00\ \text{g/mól}\ 2300\ \text{mól} = 9200\ \text{g} = 9{,}2\ \text{kg}$$

b) A (20-5) egyenletből (legyenek a földön mért értékek az 1 indexűek):

$$V_1=\left(\frac{T_1}{T_2}\right)\left(\frac{p_2}{p_1}\right)V_2=\left(\frac{273\ \text{K}}{223\ \text{K}}\right)\left(\frac{40\ \text{Hgmm}}{760\ \text{Hgmm}}\right)800\ \text{m}^3=51{,}3\ \text{m}^3$$

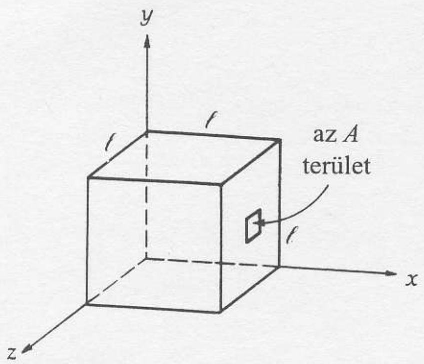
c) Legyenek 2 indexűek a tartályban levő gáz, az 1 indexűek pedig a normál állapot jellemzői. Tehát $T_2 = 27°\text{C} + 273° = 300$ K. Így:

$$V_2=\left(\frac{T_2}{T_1}\right)\left(\frac{p_1}{p_2}\right)V_1=\left(\frac{300\ \text{K}}{273\ \text{K}}\right)\left(\frac{1\ \text{atm}}{170\ \text{atm}}\right)51{,}3\ \text{m}^3=0{,}33\ \text{m}^3$$

## 20.3 Az ideális gázmodell

A következőkben az ideális gáz egyszerű modelljét ismertetjük, amely kezdetben a molekuláknak csak két jellemzőjét foglalja magában: ez a *tömeg* és a *sebesség*. Érdekes, hogy az ideális gáz általános viselkedése már ilyen egyszerű modellel is értelmezhető. Nem részletezzük a további lépéseket, az elmélet tökéletesíthető úgy, hogy megadjuk a molekulák véges méretét és alakját (ahelyett, hogy tömegpontoknak gondolnánk őket). Ezzel számot adhatunk olyan tulajdonságokról, mint a viszkozitás, a diffúziós tényező, és a hővezető képesség. Ha megadjuk a molekulák közötti hosszú hatótávolságú erők jellemzőit, további jelenségeket tudunk megmagyarázni, pl. a cseppfolyósodást és a megszilárdulást. Ha ezenkívül az egyes molekuláknak és atomoknak valamilyen belső szerkezeti felépítést is tulajdonítunk, akkor előre meg tudjuk mondani az anyag kémiai, elektromos és mágneses jellemzőit, az emissziós és abszorpciós színképet, és így tovább. Ez minden fizikai elmélet fejlődésének a mintája. A lehető legegyszerűbb modellel kezdjük, ami – a kísérleti eredményeket illetően, – néhány helyes előrejelzéshez vezet. A későbbi módosítások kiterjesztik és tökéletesítik az egyezést. Néha ez a folyamat addig folytatódik, amíg látszólag alig észrevehető eltérés lép fel az elméleti és a kísérleti eredmények között, mondjuk a numerikus adatok ötödik, vagy hatodik tizedesjegyében. Ezen a ponton drámai áttörést érhet el az, aki olyan radikálisan új modellt javasol, amely nemcsak megmagyarázza mindazt, amit a régi elmélet tudott, hanem a régi elméletben megmaradt kis mérvű ellentmondást is helyesen feloldja. Ezek a fizikának azok az izgató fejleményei, amelyek indokolt tiszteletet vívtak ki Newton, Einstein, Bohr, Planck, Schrödinger és mások számára.

Az ideális gázra vonatkozó első modellünk a következő feltevéseket tartalmazza:

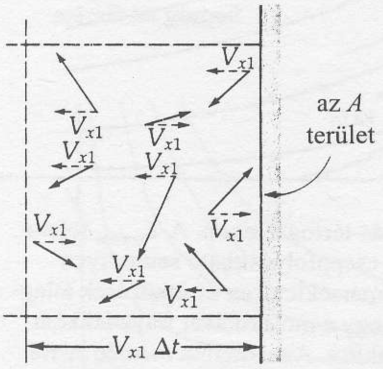



**20-6 ábra**
A kocka alakú, zárt térrész, térfogategységenként $N$ részecskét tartalmaz, (mindegyikük $m$ tömegű) amelyek különböző sebességű, véletlenszerű mozgást végeznek.

1. A gáz nagyszámú azonos tömegpontból áll. (Ezek valójában atomok, vagy stabil molekulák modelljei, és időnként e nevekkel fogjuk jelölni őket, annak ellenére, hogy – ebben az első közelítésben – mindössze a tömeg és a sebesség az, amit jellemzőjükként megadunk.) Az egyes részecskék tömege $m$.
2. A részecskék különböző sebességű, véletlenszerű mozgást végeznek és oly módon ütköznek rugalmasan a fallal[3], hogy az impulzusuk és a mozgási energiájuk megmarad.
3. A részecskék és a falak között, az ütközések alatti kölcsönhatásoktól eltekintve nem hatnak erők. Az ütközésekről feltételezzük, hogy az ütközések közötti időtartamokhoz képest elhanyagolható ideig tartanak. Ez azt jelenti, hogy a részecske–fal erőhatások a valódi molekulák méretéhez viszonyítva *rövid hatótávolságúak.* (Az a kinetikus energia, ami az ütközés alatt pillanatszerűen potenciális energiává alakult, olyan gyorsan alakul vissza kinetikus energiává, hogy ezt az effektust figyelmen kívül hagyhatjuk és feltételezzük, hogy a részecskék energiája teljes egészében kinetikus energia.)

Az egyszerűség kedvéért tételezzük fel, hogy a gáz térfogategységeként $N$ részecskét tartalmaz és hogy $l$ élhosszúságú kocka alakú tartályba van bezárva, amint az a 20-6 ábrán látható. (A tartály térfogatával később, a levezetésben egyszerűsíthetünk, így jogosan választjuk ezt a megfelelő formát.)

Tekintsünk egy **v** sebességű részecskét. Sebességkomponensei $v_x$, $v_y$, $v_z$. Most kísérjük figyelemmel azon részecskék számát, amelyek sebességkomponense az $x$ tengely pozitív és negatív irányában $v_{xl}$ nagyságúak. Természetesen nincs olyan részecske, amelynek sebességkomponense *pontosan* $v_{xl}$ értékű. Pontosabb kijelentés lenne: „a komponensek $v_{xl}$ és $v_{xl} + \Delta v$ közti tartományba esnek, ahol $\Delta v$ kicsi, de véges intervallum", (pl. 1000 m/s és 1001 m/s közötti tartományba esnek). A rövidség kedvéért nem visszük tovább a $\Delta v$ jelölést, de az itt következő tárgyalás során gondolnunk kell a fentiekre.




**20-7 ábra**
A vázlat azokat a részecskéket ábrázolja, amelyek $\pm x$ irányú sebességkomponense $v_{xl}$ és a fal közelében, $(v_{xl}\Delta t)A$ térfogat-ban helyezkednek el. Mivel átlagosan ezek fele $-x$ irányban mozog, ezért $\Delta t$ idő alatt csak a részecskék fele ütközik a fallal. (A fallal való ütközés nélkül az adott térfogatból kilépő molekulák számát kiegyenlíti a környezetből a választott térrészbe belépő részecskék száma.)

Jelöljük $n_1$-gyel a $v_{xl}$ nagyságú sebességkomponenssel rendelkező, egységnyi térfogatban lévő részecskék számát. Ezekből a részecskékből bizonyos számú $\Delta t$ időtartamon belül ütközni fog az $x = \ell$ távolságban levő, $A$ felületű zárófallal. Az ütköző részecskéknek nyilvánvalóan a $v_{xl}\Delta t$ távolságon belül kell lenniük a faltól ahhoz, hogy $\Delta t$ idő alatt elérjék a falat. Ezért ezek a $(v_{xl}\Delta t)A$ térfogatban helyezkednek el, amint azt a 20-7 ábra mutatja. Mivel átlagosan a részecskék fele távolodik a faltól, $\Delta t$ idő alatt az $A$ felületű falba ütköző részecskék száma

[3] Ha a részecskék valóban tömegpontok, nem kerülhetnek egymással kölcsönhatásba (mert végtelenül kicsiny méretűek). Talán reálisabb lenne az elhanyagolható, de véges méretű apró, kemény golyóból álló modell. Mindegy, hogy a kezdeti tárgyalás során melyik modellt választjuk, mivel a molekulák egymással történő rugalmas ütközése közben megmarad mind az impulzus, mind az energia. Ezért az ütközésnek ez a fajtája semmiképpen nem változtatja meg a gáz makroszkopikus viselkedését.

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\text{egységnyi térfogatban lévő,}\\ v_{x1}\text{ sebességkomponensű}\\ \text{részecskék száma}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\text{a } \Delta t \text{ idő alatt a falba ütköző}\\ \text{részecskék számára}\\ \text{elég közeli teljes térfogat}\end{bmatrix}= \tag{20-6}$$

$$=\frac{1}{2}n_1 v_{x1}\Delta t A=\frac{n_1 v_{x1}\Delta t A}{2}$$

Minden részecske $F_1\Delta t = \Delta p_1$ erőimpulzust közvetít a falnak, s ez $2mv_{x1}$-gyel egyenlő. (A 2 tényező abból adódik, hogy a $v_{x1}$ sebességkomponens pontosan az ellenkezőjére változik a rugalmas ütközés során.) Így a falon az ezzel a sebességkomponenssel rendelkező összes részecskétől származó erőimpulzus

$$\text{erőimpulzus}=\begin{bmatrix}\Delta t\text{ idő alatt a falba}\\ \text{ütközések száma}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\text{az egyes ütközések által}\\ \text{közvetített erőimpulzus}\end{bmatrix}$$

$$F_1\Delta t=\left[\frac{n_1 v_{x1} A\Delta t}{2}\right]\left[2mv_{x1}\right] \tag{20-7}$$

$$F_1 = n_1 m A v_{x1}^2$$

Mivel a nyomás $p_1 = F_1/A$, így

$$p_1 = n_1 m v_{x1}^2 \tag{20-8}$$

Hasonlóképpen a további sebességtartományokra:

$$p_2 = n_2\ m\ v_{x2}^2$$

$$p_3 = n_3\ m\ v_{x3}^2$$

$$\vdots$$

Az $x$-irányú összes sebességtartományból adódó $p$ nyomás ezek összege:

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 \dots \tag{20-9}$$

amit a (20-8) egyenlet alapján így írhatunk:

$$p = m(n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \dots) \tag{20-10}$$

Első pillantásra lehetetlennek tűnik a (20-10) egyenlettel dolgozni, mivel ezen a szinten valójában semmit sem tudunk a zárójelben lévő kifejezésről. De – egy kis kitérőt téve – megmutatjuk, hogy a zárójelben lévő mennyiség tömör és egyszerű alakba írható.

Hogyan számítjuk ki egy sor különböző értékű mennyiség *átlagát*? Például mennyi az átlagos életkora az évfolyamra járó hallgatóknak? Ha $n_1$ hallgató életkora $a_1$, $n_2$ hallgatóé $a_2$, és így tovább, az évfolyam hallgatóinak átlagos életkora ($\overline{a}$):

$$\text{átlagos életkor,}\qquad \overline{a}=\frac{n_1a_1+n_2a_2+n_3a_3+\dots}{n_1+n_2+n_3+\dots} \tag{20-11}$$

A mennyiséget jelölő szimbólum feletti vonás az adott paraméternek az átlagértékét jelöli[4].

---

[4] A (20-11) egyenlet példa a *súlyozott számtani középértékre*. Az életkorok egyszerű számtani középértéke helyett minden életkort megszorzunk egy $n_i$ *súlyozó tényezővel*. (Itt a súlyozó tényező az azonos korú hallgatók száma)

A (20-11) egyenlet bármely különböző értéket felvevő mennyiségre érvényes, alkalmazzuk tehát az ideális gázmodellben megismert *négyzetes sebességösszetevőkre*:

$$\overline{v_x^2} = \frac{n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \ldots}{n_1 + n_2 + n_3 + \ldots} \tag{20-12}$$

A nevező éppen az egységnyi térfogatban lévő teljes részecskeszám. Ha az $\mathcal{N}$ szimbólummal jelöljük, akkor

$$\mathcal{N}\overline{v_x^2} = n_1 v_{x1}^2 + n_2 v_{x2}^2 + n_3 v_{x3}^2 + \ldots \tag{20-13}$$

Ezt a kifejezést felhasználhatjuk arra, hogy a (20-10) egyenletet a:

$$p = m\,\mathcal{N}\overline{v_x^2} \quad \text{(csak az x-komponensből adódóan)} \tag{20-14}$$

alakúra írjuk át.

A három dimenziós Pitagorász tételből egyetlen részecske sebessége:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 \tag{20-15}$$

Átlagolva ezt az összes részecskére, azt kapjuk,hogy:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} \tag{20-16}$$

Mivel a részecskék mozgása teljesen véletlenszerű – nincs szél, vagy más, ami kitüntetett irányba sodorná a őket, – azt is tudjuk, hogy:

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} \tag{20-17}$$

Ezért a fenti két egyenletből arra következtetünk, hogy

$$\overline{v_x^2} = \frac{1}{3}\overline{v^2} \tag{20-18}$$

Tehát a (20-14) egyenletet így írhatjuk:

$$p = \frac{1}{3}\mathcal{N} m \overline{v^2} \tag{20-19}$$

$$\text{vagy } p = \frac{2}{3}\mathcal{N}\frac{1}{2}m\overline{v^2} \tag{20-20}$$

ahol az $\frac{1}{2}m\overline{v^2}$ kifejezés az *egy részecskére jutó átlagos transzlációs kinetikus energia*. Mivel $\mathcal{N}$ az egységnyi térfogatra jutó részecskeszám, a $V$ térfogatban lévő részecskék teljes száma: $N$

$$N = \mathcal{N}V \tag{20-21}$$

Az utóbbi két egyenletből:

$$pV = \frac{2}{3}N\left(\frac{1}{2}m\overline{v^2}\right) \tag{20-22}$$

Összevetve ezt az egyenletet az ideális gáz állapotegyenletével:

$$pV = nRT$$

azt kapjuk, hogy: $$nRT = \frac{2}{3} N(\frac{1}{2} m\overline{v^2}) \quad \textbf{(20-23)}$$

Bármely anyag mólnyi mennyisége az Avogadro-számnak megfelelő számú molekulát tartalmaz, amit $N_A$-val jelölünk. Ha a (20-23) egyenlet mindkét oldalát osztjuk $N_A$-val:

$$\frac{nRT}{N_A} = \frac{2}{3}\frac{N}{N_A}(\frac{1}{2} m\overline{v^2})$$

Az $R/N_A$ tényező *az egy molekulára vonatkozó univerzális gázállandó*, amit **Boltzmann-állandóként** ismerünk ($k$):

BOLTZMANN-ÁLLANDÓ $$k = \frac{R}{N_A} = 1{,}3805 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{molekula}} \quad \textbf{(20-24)}$$

Az $N/N_A$ tényező az $n$ mólszám. Ha ezeket behelyettesítjük a (20-24) egyenletbe és azt rendezzük, azt kapjuk, hogy:

EGY MOLEKULA ÁTLAGOS KINETIKUS ENERGIÁJA $$\frac{1}{2} m\overline{v^2} = \frac{3}{2} kT \quad \textbf{(20-25)}$$

Ez a fontos összefüggés azt fejezi ki, hogy az egy gázmolekulára jutó átlagos kinetikus energia *csak* a $T$ hőmérséklettől függ és független a nyomástól, térfogattól, ill. a molekulák típusától.[5]

Hasonló kifejezést kaphatunk egy mól gázra, ha felhasználjuk az $mN_A = M$ (egy mól tömege) és a $kN_A = R$ összefüggéseket. Elvégezve ezeket a helyettesítéseket azt kapjuk, hogy:

EGY MÓL ÁTLAGOS KINETIKUS ENERGIÁJA $$\frac{1}{2} M\overline{v^2} = \frac{3}{2} RT \quad \textbf{(20-26)}$$

Egy másik fontos összefüggés a gázmolekulák **négyzetes középsebessége**: $v_{nks} = \sqrt{\overline{v^2}}$. (Jegyezzük meg, hogy a sebesség négyzetének átlaga ($\overline{v^2}$) nem ugyanaz, mint az átlagsebesség négyzete ($\bar{v}^2$).) Ha $\sqrt{\overline{v^2}}$ értékét az előző két egyenletből kifejezzük, azt kapjuk, hogy

NÉGYZETES KÖZÉPSEBESSÉG $$v_{nks} = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} \quad \textbf{(20-27)}$$

A kinetikus elmélet fontos kapocs az atomok és molekulák közvetlenül nem látható, mikroszkopikus világa és a laboratóriumi műszerekkel történő makroszkopikus mérések között. Azonosítja a molekulák véletlenszerű transzlációs kinetikus energiájának mikroszkopikus fogalmát a $T$ hőmérséklettel, mint makroszkopikus változóval. Érdekes módon, éppen a hőmérő az, amivel meghatározhatjuk az ideális gáz molekuláinak átlagos transzlációs sebességét. Mivel a $\frac{3}{2}k$ tényező állandó, azonos hőmérsékleten a különböző

[5] A (20-25) egyenletből azt a következtetést vonhatnánk le, hogy a T → 0 határátmenet esetén minden molekuláris rezgés megszűnik. Ahogyan már korábban említettük, ez nem igaz. Nagyon alacsony hőmérsékleten a molekulák viselkedését a kvantummechanika írja le, amely kimondja, hogy a részecskék a lehető legalacsonyabb energiaszinten - az alapállapotban - sincsenek teljesen nyugalomban. Ehelyett az abszolút zérushoz közeledve, a molekulák kinetikus energiája egy véges értékhez, az ún. *zérusponti energiához* tart. (Itt és a továbbiakban csak transzlációs energiáról van szó - a ford.)

molekulák átlagos kinetikus energiája egyenlő. Igy a különböző gázoknak – mint a $H_2$ He és $O_2$ – azonos hőmérsékleten eltérő tömegük ellenére azonos az egy molekulára jutó átlagos transzlációs kinetikus energiája.

A kinetikus modell a fentiek szerint a következő korrekciókkal „magyarázza" az ideális gáz állapotegyenletét: (1) Az *abszolút* (kelvinben mért) *hőmérséklet a molekulák transzlációs kinetikus energiájával* függ össze. (2) A gáz által a tartály falára gyakorolt *nyomás* az egységnyi felületre ható átlagerő, ami a molekuláknak a falakon történő *rugalmas ütközéseiből* ered.

## 20-3 PÉLDA

A 20-8 ábra a molekulák sebességeloszlását mutatja egy gázban termikus egyensúly esetén. Számoljuk ki a négyzetes középsebességet hidrogén molekulákra ($H_2$), 20°C-on.

### *MEGOLDÁS*

Egyetlen $H_2$ molekula tömegét megkapjuk a moláris tömegből (2 g/mól) (ld. a 20-1 táblázatot!) és az Avogadro-számból:

$$m=\frac{M}{N_A}=\frac{2\,\dfrac{\text{g}}{\text{mol}}}{6{,}022\cdot 10^{23}\,\dfrac{\text{molekula}}{\text{mol}}}\underbrace{\frac{1\,\text{kg}}{10^3\,\text{g}}}_{\substack{\text{Átszámítási}\\ \text{arány}}}=3{,}32\cdot 10^{-27}\,\frac{\text{kg}}{\text{molekula}}$$

A hőmérséklet 20°C + 273° = 293 K

$$\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3\cdot 1{,}38\cdot 10^{-23}\,\dfrac{\text{J}}{\text{molekula}}\,293\text{K}}{3{,}32\cdot 10^{-27}\,\dfrac{\text{kg}}{\text{molekula}}}}=1910\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Ugyanezt az eredményt kapnánk – talán még egyszerűbben, mivel nem tartalmazná egyetlen molekula tömegének kiszámítását, – a $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{3RT/M}$ kifejezésből. Ez a sebesség körülbelül 50%-kal nagyobb, mint a hang sebessége hidrogén gázban ugyanezen a hőmérsékleten, és valamivel gyorsabb, mint egy nagy sebességű lövedék.

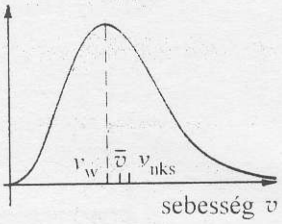
## 20-4 PÉLDA

Egy 10 részecskéből álló együttesben az egyedi sebességek (m/s egységben): 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, és 7. Határozzuk meg a) a részecskék átlagsebességét ($\bar{v}$) és b) a négyzetes középsebességet ($\sqrt{\overline{v^2}}$)!

### *MEGOLDÁS*

a) Az átlagsebesség:

$$\bar{v}=\frac{\Sigma n_i v_i}{\Sigma n_i}=\frac{(1+2\cdot 2+3\cdot 3+2\cdot 4+5+7)\,\text{m/s}}{10}=3{,}40\,\text{m/s}$$




**20-8 ábra**
Termikus egyensúlyban lévő gáz molekuláinak sebességeloszlása. A görbe aszimmetrikus a nagyobb sebességek felé elnyúló hosszú „farok" miatt. A legvalószínűbb sebesség ($v_w$) a görbe csúcsánál van. Jegyezzük meg, hogy az átlagsebesség ($\bar{v}$) az eloszlás aszimmetriája miatt a csúcshoz tartozó sebesség értékénél nagyobb lesz, és a négyzetes középsebesség ($v_{nks}$) még nagyobb értéknél található, mivel a négyzetes középérték számításánál nagyobb súlyt kapnak a nagyobb sebességek. Ezt a görbét Maxwell-eloszlásként ismerjük. Nevét James Clerk Maxwell (1831–1879) skót fizikus után kapta, aki először vezette le matematikai alakját (ld. 20C-43 feladatot!). Maxwell elektromágneses hullámelméletéről is híres, amit a 35. fejezetben tárgyalunk.

b) A négyzetes középsebesség:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{\Sigma n_i v_i^2}{\Sigma n_i}} = \sqrt{\frac{(1^2 + 2\cdot 2^2 + 3\cdot 3^2 + 2\cdot 4^2 + 5^2 + 7^2)}{10}} = 3{,}77\ \mathrm{m/s}$$

vegyük észre, hogy $\sqrt{\overline{v^2}}$ nagyobb, mint $\bar{v}$.

## 20-5 PÉLDA

A 600 km feletti, ritkított légkörben – ahol a hőmérséklet kb. 1500 K, – a molekuláknak jó esélyük van a Föld gravitációs vonzásából való kiszabadulásra anélkül, hogy más molekulákkal ütközznének. (Feltéve, ha sebességük meghaladja a (16-24) egyenlettel adott szökési sebességet $v_{sz} = \sqrt{2\gamma M / R}$, ahol $\gamma$ az univerzális gravitációs állandó (6,67 $10^{-11}$ $\mathrm{Nm^2/kg^2}$), $M$ a Föld tömege (5,98 $10^{24}$ kg), $R$ a Föld középpontjától mért távolság ($R_{Föld}$ = $6{,}37\times10^3$ km). a) Számoljuk ki a szökési sebességet ebben a magasságban! b) Vessük össze az 1500 K hőmérsékleten lévő hidrogénmolekulák négyzetes középsebességével!

### *MEGOLDÁS*

a) 600 km magasságban a sugár $R = R_{Föld}$ + 600 km = 6370 km + 600 km = 6970 km.

$$v_{sz} = \sqrt{\frac{2\gamma M}{R}} = \sqrt{\frac{2\cdot 6{,}67\cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}}\,5{,}98\cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}97\cdot 10^6\,\mathrm{m}}} = 1{,}07\cdot 10^4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

b) Mivel egy mól hidrogén gáz tömege $M$ = 2 g, a (20-18) egyenletből:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}} = \sqrt{\frac{3\cdot 8{,}31\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{mól\cdot K}}\,1500\,\mathrm{K}}{0{,}002\,\mathrm{kg}}} = 4{,}32\cdot 10^3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

Bár a négyzetes középsebesség csak mintegy 0,4-szerese a szökési sebességnek, néhány molekula sebessége sokszorosa lesz a négyzetes középsebességnek és ezért elegendő energiája lesz a szökéshez (20-9 ábra). Abban a 4,6 milliárd évben, amióta a Föld kialakult, volt elég idő arra, hogy lényegében a Föld őslégkörében lévő összes hidrogén és hélium az alsóbb magasságokból szétterjedjen és megszökjön.

## Gázkeverékek

Különböző gázok keverékében az összes nyomás azon *parciális nyomások* összege, amiket az egyes gázok hoznának létre, ha egyedül – a többi gáz jelenléte nélkül – töltenék ki a teljes térfogatot: $p = p_a + p_b + p_c + \ldots$ Ez az összefüggés, amelyet először John Dalton, brit kémikus írt fel 1801-ben, jól érthető az ideális gázmodell azon feltevése alapján hogy a molekulák között nincs kölcsönhatás.

**20-1 táblázat Gyakran szereplő atomok és molekulák közelítő tömege***

| Atom | Vegyjel | Atomtömeg (u) |
|---|---|---|
| Hidrogén | H | 1 |
| Hélium | He | 4 |
| Szén | C | 12 |
| Oxigén | O | 16 |
| Alumínium | Al | 27 |
| Vas | Fe | 56 |
| Urán | U | 238 |

| Molekula | Képlet | Molekula tömeg (u) |
|---|---|---|
| Hidrogén | $H_2$ | 2 |
| Metán | $CH_4$ | 16 |
| Víz | $H_2O$ | 18 |
| Nitrogén | $N_2$ | 28 |
| Oxigén | $O_2$ | 32 |
| Metil-alkohol | $CH_3OH$ | 32 |
| Etilalkohol | $CH_3CH_2OH$ | 46 |

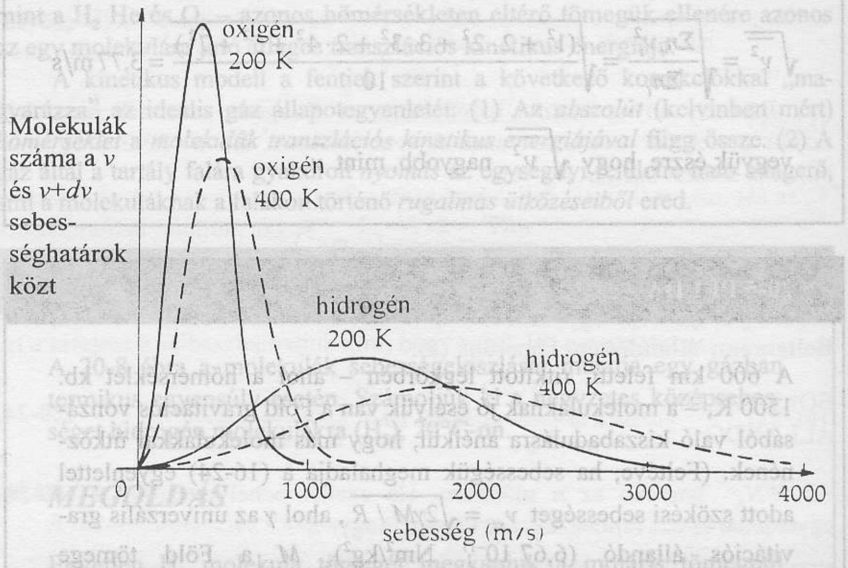
* Az itt felsorolt tömegek egész számra kerekített értékek. Ha pontosabb atomtömegekre van szükség, ld. a J függeléket.

**20-2 táblázat**
**A száraz levegő komponensei**

| Alkotóelem | Térfogatszázalék |
|---|---|
| $N_2$ | 78,084 |
| $O_2$ | 20,94 |
| Ar | 0,934 |
| $CO_2$ | 0,033 |

plusz 0,003%-nál kevesebb egyéb gáz

A száraz levegő átlagos molekulatömege 28,964 u.




## 20-9 ábra

Maxwell-eloszlás két különböző gázra, két különböző hőmérsékleten. Adott hőmérsékleten a könnyebb molekulák gyorsabban mozognak, mint a nehezebbek.

### 20-6 PÉLDA

Határozzuk meg a normál állapotú levegőben az oxigén parciális nyomását.

***MEGOLDÁS***

A 20-2. táblázatból láthatjuk, hogy az oxigén az átlagos levegő 20,9%-át (térfogatszázalék) teszi ki. Igy, normál állapotú levegőre vonatkozóan, az oxigén az 1 atm-hoz 20,9%-kal járul hozzá:

$$p_{O_2} = 0{,}209 \text{ (1 atm)} = 0{,}209 \text{ atm}$$

Az az oxigén mennyiség, ami a tüdőn keresztül elnyelődik a véráramban és a test más szöveteiben, arányos a belélegzett levegőben lévő oxigén parciális nyomásával. 5000 m magasságban a légköri nyomás mintegy fele a tengerszinten lévőnek, ez néha magassági betegséget okoz, ami nem más, mint a vér oxigénhiánya. A víz alá merülő búvárokat szintén érhetik káros hatások. Például 10 méteres mélységben a víz nyomása körülbelül $2 \cdot 10^5$ Pa, így a tüdőben lévő levegő nyomása a normális érték kétszerese. Mivel a nitrogén az oxigénnél jóval nagyobb mértékben oldódik a vérben, az abszorbeált nitrogén mennyisége a normál értéknek több, mint kétszerese. A túl gyors felszínre emelkedés következtében a felesleges nitrogén buborékokká alakul a vérben és a szövetekben. Ez okozza a keszonbetegségnek nevezett veszélyes és fájdalmas állapotot. Fokozatos és lassúbb felszínre emelkedéssel a probléma elkerülhető.

## *Összefoglalás*

Az anyagmennyiség kifejezésére alkalmas egység a mól.

**Bármely anyag *egy mólja* (mol) annyi részecskét tartalmaz, mint ahány atom van a 12-es szénizotóp 0,012 kg-jában. Ezt a számot *Avogadro-számnak* nevezik: $N_A = 6{,}022 \times 10^{23}$ részecske/mól. A részecskék lehetnek atomok, molekulák, ionok, elektronok, stb., vagy egyes részecskék meghatározott csoportjai.**

Valamely gáz egy mólja normál állapotban, 0°C-on és $1 \cdot 10^5$Pa nyomáson, 0,0224 $m^3$ (22,4 l) térfogatot foglal el. Egy anyag *gramm-molekula-tömege* a mólnyi anyag tömege grammokban kifejezve. Ez megegyezik továbbá egy molekula *atomi tömegegységben* (u) kifejezett tömegével, ahol 1 u ≈ $1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg.

A nyomás csökkenésével minden valódi gáz viselkedése ugyanazzal az *állapotegyenlettel* írható le, ez az *ideális gáztörvény*:

$$pV = nRT$$

ahol $p$ = nyomás
$V$ = térfogat
$T$ = kelvinben mért hőmérséklet
$n$ = mólok száma
$R$ = egyetemes gázállandó = 8,315 J/mól K
= 0,08206 l.atm/mól.K
= 1,986 cal/mol K.

Ha az ideális gáz két különböző állapotát tárgyaljuk, sokszor kényelmes módszer a

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)\left(\frac{V_1}{V_2}\right) = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

arány felírása.
Ennek az az előnye, hogy az egyes arányok bármely megfelelő mértékegységgel kifejezhetők, *még akkor is, ha azok a többi arány egységeivel összeegyeztethetetlenek.* Ennek az az oka, hogy ugyanaz az átszámítási tényező szerepel mind a számlálóban, mind a nevezőben.

Az ideális gázra vonatkozó *kinetikus elmélet* amelyben a molekulákat tökéletes rugalmas ütközésekben résztvevő tömegpontoknak tekintjük, – a makroszkopikus és mikroszkopikus fogalmak közötti hasznos összefüggésekhez vezet és megadja a Kelvin-féle hőmérsékleti skálával való kapcsolatukat.

Egy molekulára: $\frac{3}{2}kT = \frac{1}{2}mv^2$

ahol k a Boltzmann-állandó ($k = R/N_A = 1{,}3805 \cdot 10^{-23}$ J/Kmolekula)

Egy mólra: $\frac{3}{2}RT = \frac{1}{2}M\overline{v^2}$

ahol $M$ egy mól tömege. Mint minden termodinamikai egyenletben, a $T$ hőmérséklet itt is mindig kelvinben van megadva.

A gázmolekulák négyzetes középsebessége:

$$\sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Gázkeverékekben minden alkotóelemnek parciális nyomása van, ez megegyezik azzal a nyomással, amivel az alkotóelemek akkor rendelkeznének, ha egyedül töltenék ki az egész térfogatot. Az összes nyomás az egyes parciális nyomások összege.

## Kérdések

1. Adjunk kvalitatív magyarázatot a 20-5b ábra alapján arra a korcsolyázók által használt kifejezésre, hogy: „Ma sima a jég"!
2. Milyen fizikai bizonyítékok támasztják alá az atomok létezését?
3. Milyen bizonyíték támasztja alá, hogy a kinetikus gázmodell – a gázmolekulák tömegpontokként rugalmas ütközésben vesznek részt, – jobb, mint az a modell, amely a gázmolekulákat bolyhos, rugalmas golyóknak tekinti, amelyek kiterjedve kitöltik a rendelkezésükre álló teret?
4. Magyarázzuk meg, hogy miért egyszerűbb a kinetikus gázelmélet ha egy gáztartályban rendkívül nagyszámú gázmolekula van!
5. Egy tartályban lévő gázmolekulák sebességének átlagos nagysága nem zérus annak ellenére, hogy az átlagsebesség zérus. Miért?
6. Közölhetünk-e hőt egyatomos gázzal anélkül, hogy a gáz hőmérséklete megváltozna? Mi a helyzet a kétatomos gázzal? Mi történik egy folyadék esetében?
7. Kérdésünk a 20-7 ábra alapján termikus egyensúlyban lévő gázmolekulák *sebesség*eloszlására vonatkozik. A *sebességeloszlást* rendszerint egy komponensre – mondjuk az $x$-irányúra – ábrázolják. Ennek az előzőtől nagyon eltérő alakja van. A sebességeloszlás az origóra szimmetrikus, pozitív és negatív értékekre egyaránt kiterjed és alakja az ismert haranggörbe, vagy *Gauss-eloszlás*. Hogyan magyarázható a minőségi különbség e két eloszlás között! Miért szimmetrikus az egyik az origóra vonatkozóan és miért aszimmetrikus a másik?
8. A 20-8 ábra alapján $v_w$, $\bar{v}$ és $\sqrt{\overline{v^2}}$ közül melyik az a sebesség, amely a gázmolekulák átlagos kinetikus energiája?
9. Néhány száz kilométerrel a Föld felszín felett a levegő hőmérséklete több, mint 1000 K. Az űrhajósoknak ennél a magasságnál mégis olyan ruhát kell viselniük, amit külső energiaforrással fűtenek, hogy melegen tartsák. Magyarázzuk meg ezt a látszólagos paradoxont!
10. Tekintsük két különböző relatív atomtömegű gáz keverékét. Igazoljuk azt az állítást, hogy termikus egyensúlyban az egyes gázok sebességeloszlása olyan, mintha a másik gáz nem lenne jelen (ld. a 20-8 ábrát!)
11. Ha hőközlés nélkül, gyorsan összenyomunk egy gázt, akkor hőmérséklete növekszik. Értelmezzük a kinetikus elmélet alapján, hogyan tesznek szert a gázmolekulák a megnövekedett sebességre!

**12.** Figyelembe véve, hogy a Kelvin-féle hőmérsékleti skála összefügg a gázmolekulák átlagos kinetikus energiájával, vajon a relativitáselmélet – az elérhető legnagyobb sebességre vonatkozó feltevésével (c), – jelenti-e azt, hogy van egy maximális hőmérsékleti határ is?

**13.** Tegyük fel, hogy egy gáztartály szemközti falait állandóan különböző hőmérsékleten tartjuk. Írjuk le a hővezetés folyamatát a gázon keresztül.

**14.** Vázoljuk a 20-3a ábra vetületét a nyomás-hőmérséklet síkon! Ábrázoljuk a $T_1$, $T_2$, stb. állandó hőmérsékletű görbéket!

## *Feladatok*

### 20.2 Az ideális gáz

**20A-1** Határozzuk meg a tartály térfogatát, ha az eredetileg normál állapotú, 6 m$^3$ térfogatú hidrogént $1{,}36 \cdot 10^5$ Pa nyomásra nyomjuk össze és a hőmérséklete 27°C lesz.

**20A-2** Egy autó kerekét $1{,}655 \cdot 10^5$ Pa nyomásúra fújták fel 27°C-on. Rövid ideig tartó vezetés után a nyomás $2{,}34\ 10^5$ Pa-ra nőtt. Mekkora a levegő hőmérséklete az autógumi belsejében?

**20A-3** a) Határozzuk meg 200 mól normál állapotú nitrogéngáz ($N_2$) térfogatát! b) Mekkora a tömege?

**20A-4** Nagy magasságokban végzett kutatásokra használt nagy méretű léggömb térfogata 500 m$^3$. Ha a hélium $150.10^5$ Pa nyomású, 40 literes tartályokban kapható, hány tartályra van szükség ahhoz, hogy a léggömböt $1.10^5$ Pa nyomásra feltöltsük?

**20A-5** Egy nitrogén-tartályban a nyomás 21°C-on $1{,}86 \cdot 10^7$ Pa. Mekkora a tartály térfogata, ha $10^5$ Pa nyomáson és 21°C hőmérsékletnél a nitrogén térfogata 8,5 m$^3$ lenne?

**20A-6** a) Hány mól az a normál állapotú oxigéngáz ($O_2$) amelynek térfogata 6,9 m$^3$? b) Határozzuk meg ennek az oxigéngáztömegét!

**20A-7** Mekkora 2 mól ideális gáz térfogata $4 \cdot 10^5$ Pa nyomáson és 20 °C hőmérsékleten?

**20A-8** Határozzuk meg 10 g vashidroxidban ($Fe(OH)_2$) lévő molekulák számát!

**20A-9** Egy autógumi $1{,}79 \cdot 10^5$ Pa túlnyomású, 27°C-os levegőt tartalmaz. Mekkora lenne a túlnyomás 60°C-on?

**20A-10** Egy ajtó területe 2,3 m$^2$. A légnyomás különbsége az ajtó két oldala között $0{,}01 \cdot 10^5$ Pa. Határozzuk meg az ajtóra ható eredő erőt!

**20A-11** Egy íróasztal felső lapjának mérete 91,5 cm × 183 cm. Határozzuk meg a levegő által kifejtett erőt az íróasztal tetejére!

**20A-12** A Föld népességét 2000-re 6,3 milliárdra becsülik. Hány mólnyi ember ez?

**20A-13** a) Hány elektron szükséges ahhoz, hogy tömege 1 kg legyen? b) Hány mól elektron van 1 kg-nyi elektronban?

**20A-14** a) Hány mól $H_2O$ van a 200 g vizet tartalmazó pohárban? b) Hány vízmolekula van a pohárban?

**20A-15** Tegyük fel, hogy a Föld légkörének sűrűsége azonos minden magasságban a tengerszinten mért értékkel (1,29 kg/m$^3$). Határozzuk meg a légkör magasságát, ami a tengerszinten megfigyelt $10^5$ Pa nyomást adja! (Összehasonlításként: a Mount Everest 8,85 km magas)

**20B-16** A legkisebb nyomás, ami laboratóriumban elérhető: $10^{-10}$ Hgmm ($1{,}3 \cdot 10^{-8}$ Pa) körüli érték. Hány gázmolekulát tartalmaz ennek a „vákuumnak" 1 cm$^3$-e szobahőmérsékleten (27°C) ?

**20B-17** a) Határozzuk meg az 500 literes tartályban tárolt 10 mól széndioxid ($CO_2$), 25°C hőmérsékleten felvett nyomását! b) Mekkora a tartályban levő gáz sűrűsége?

**20B-18** A levegő hozzávetőlegesen 78 térfogatszázalék nitrogént ($N_2$), 21% oxigént ($O_2$) és 1% más gázt tartalmaz. Határozzuk meg 1 m$^3$ normál állapotú levegő tömegét ezen adatok felhasználásával, figyelmen kívül hagyva az 1% egyéb gázt!

**20B-19** A kereskedelmi forgalomban árult oxigén olyan tartályban van, amely 21°C-on 0,046 m$^3$, és $1{,}52 \cdot 10^7$ Pa nyomású gázt tartalmaz. Mekkora lenne az ilyen menynyiségű oxigén térfogata $10^5$ Pa nyomáson, 21°C hőmérsékleten?

**20B-20** Egy átlagos csillagban nagyjából $10^{59}$ neutron és proton van, és egy tipikus galaxisban kb. $10^{11}$ csillag. Átlagosan kb. $10^3$ galaxis alkot egy galaxis-halmazt, az Univerzum ismert részében pedig kb. $10^9$ halmaz van. a) Hozzávetőlegesen hány proton és neutron van az ismert Univerzumban? b) Tegyük fel, hogy mindezen anyagot összenyomtuk egy „nukleáris-gömbbé" úgy, hogy minden részecske $10^{-45}$ m$^3$ térfogatot foglaljon el. (kb. ennyi a „térfogata" egy protonnak, illetve neutronnak) Mekkora lenne ennek a „nukleáris gömbnek" a sugara? c) Hány mól nukleáris részecske van a megfigyelhető univerzumban?

**20B-21** A legkisebb objektum, amit elektronmikroszkóppal meg tudunk különböztetni, 1 nm nagyságrendű. ( 1 nm = $10^{-9}$ m) Hány arany atomot tartalmaz egy 1 nm élhosszúságú kocka? Az arany relatív atomtömege 197, sűrűsége 19,3 g/ cm$^3$.

**20B-22** A látható fénnyel működő mikroszkóppal észrevehető legkisebb objektum 1μm nagyságrendű. Hány szénatomot tartalmaz az a kocka, amelynek élhosszúsága 1μm? A szén relatív atomtömege 12,01, sűrűsége (grafit alakjában) 2550 kg/m$^3$.

**20B-23** A Föld felszínén körülbelül $10^{21}$ kg tömegű víz van. Tegyük fel, hogy egy doboznyi színes festéket, melynek térfogata 32 cm$^3$, sűrűsége 1 g/cm$^3$, molekulatömege 200 u, alaposan elkevertünk az összes óceán vízében. Hány molekula festékanyagot tartalmaz ekkor egy doboznyi tengervíz?

**20B-24**. Tegyük fel, hogy egy normál állapotú gázban az egyes molekulák átmérője $10^{-10}$ m. Képzeljük el, hogy a molekulák köbös elrendezésüek, azaz egymásra merőleges három irányban találhatók egymástól egyenlő távolságban. Egy molekula átmérőjének hányszorosa az egyes szomszédos molekulák közti távolság?

**20B-25** Egy napon, amikor a légnyomás $10^5$ Pa, és a hőmérséklet 20°C, egy 4 m magas, henger alakú, a felső végén zárt búvárharangot eresztenek a vízbe, hogy egy híd pillérének alapozási munkálatait segítsék. A víz a búvárharang belsejében a tetőtől mérve 1,5 m-ig emelkedik, a hőmérséklet pedig 8°C-ra csökken. a) Mekkora a levegő nyomása a harang belsejében? b) A víz felszíne alatt milyen mélyen helyezkedik el a harang? (A valóságban további levegőt szivattyúznak be, hogy kiszorítsák a vizet, így biztosítva munkateret a munkásoknak.)

**20B-26** Egy tó fenekén, ahol a hőmérséklet 4°C, egy 0,2 cm átmérőjű légbuborék képződött. Ez 25 m-t emelkedik a felszínig, ahol a víz hőmérséklete 24°C. Határozzuk meg a gömb alakú buborék méretét, amint éppen eléri a víz felszínét, feltételezve, hogy a buborék belsejében lévő levegő mindig felveszi a környező víz hőmérsékletét! A légköri nyomás $10^5$ Pa.

**20B-27** Igazoljuk ,hogy egy héliummal töltött léggömb emelő ereje 92,6%-a egy hasonló, hidrogén-töltésű léggömbének! Tegyük fel, hogy a levegő molekulatömege 28,9 u.

**20B-28** A levegőt közelítőleg 78% nitrogén ($N_2$), 21% oxigén ($O_2$) és 1% egyéb gáz alkotja. Számítsuk ki az 1 m$^3$ térfogatú, hélium-töltésű léggömbre ható emelő erőt $10^5$ Pa nyomásnál, ezen adatok felhasználásával, figyelmen kívül hagyva az 1% egyéb gázt!

### 20.3 Az ideális gázmodell

**20A-29** A Nap belsejének hőmérséklete kb 2.10$^7$ K. a) Határozzuk meg egy proton átlagos transzlációs kinetikus energiáját a Nap belsejében! b) Határozzuk meg a proton négyzetes középsebességét!

**20A-30** Határozzuk meg 1 mól egyatomos ideális gáz teljes kinetikus energiáját 0°C-on!

**20A-31** A deutérium (atomtömege 2u) fúziós reakciója csak akkor megy végbe, ha a deutérium kinetikus energiája nagyobb, mint $1{,}2\cdot10^{-13}$ J. Határozzuk meg azt a hőmérsékletet, amelynél a deutérium atommagjainak átlagos kinetikus energiája éppen megindítaná a fúziós reakciót!

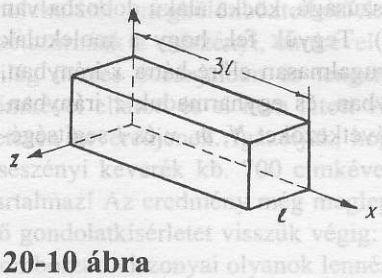
**20A-32** Egy $p_0$ nyomású, $T_0$ hőmérsékletű ideális gázt tartalmazó tartályt addig fűtenek, amíg a molekulák átlagos kinetikus energiája megkétszereződik. a) Határozzuk meg az új hőmérsékletet $T_0$-lal kifejezve. b) Határozzuk meg az új nyomást $p_0$-lal kifejezve.

**20B-33** Képzeljünk el egy ρ sűrűségű, $p$ nyomású ideális gázt. a) Igazoljuk, hogy a gázmolekulák négyzetes középsebessége $\sqrt{3p/\rho}$ . b) A normál állapotú levegő sűrűsége 1,29 kg/m$^3$. Igazoljuk, hogy – ha a levegőt hipotetikus, $M$ molekulatömegű ideális gázként vizsgáljuk, – a levegő ekvivalens molekula-tömege 28,9 u. (Útmutatás: emlékeztetünk, hogy 1 mól ideális gáz térfogata normál állapotban 22,4 l)

**20B-34** Részecskék egy csoportjának sebességértékei a következők: 3, 4, 6, 6, 7, 8, 8, 8, 10, 13. a) Mekkora az átlagsebesség? b) Mekkora a négyzetes középsebesség?

**20B-35** Becslések alapján, ha a levegőt alkotó molekulák négyzetes középsebessége 20%-kal nagyobb a szökési sebességnél, akkor a Föld kialakulása óta eltelt idő elegendő volt ahhoz, hogy ezek a molekulák elszökjenek a légkörből. a) Számítsuk ki a nitrogén molekulára ($N_2$) a négyzetes középsebességet 1500 K hőmérsékleten, vagyis a 600 km magasságban lévő hőmérsékleten, ahol a molekuláknak valószínűsíthető szökési esélyük van anélkül, hogy a levegőben lévő más molekulákkal ütköznének. b) Hasonlítsuk össze a négyzetes középsebességet az erre a magasságra jellemző minimális szökési sebességgel, ami 10,7 km/s!

**20B-36** Milyen hőmérsékleten egyenlő az oxigén molekulák ($O_2$) négyzetes középsebessége a Föld felszínéről való szökési sebességgel?



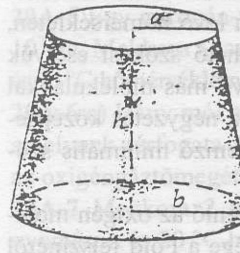

**20-10 ábra**
A 20B-37 feladathoz

**20B-37** A 20-10 ábrán látható doboz 6.10$^{12}$ hidrogén molekulát tartalmaz. Használjuk fel azt az egyszerűsítő feltevést, hogy a molekulák egyharmada mozog a ± $x$ tengely mentén, egyharmada a ± $y$ tengely mentén, és egyharmada a ± $z$ tengely mentén. Tegyük fel azt is, hogy minden molekula a 27°C-nak megfelelő négyzetes középsebességgel mozog. Határozzuk meg a falra gyakorolt nyomást az $l$ élhosszúsággal kifejezve.

**További feladatok**

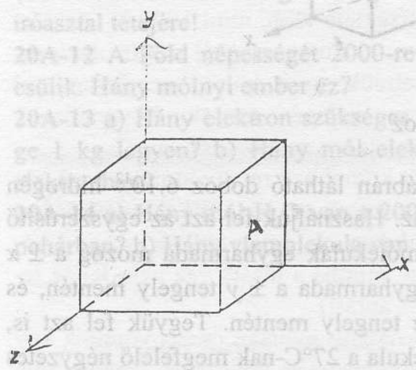
**20C-38** Edmund Halley, angol csillagász, aki megjósolta a ma nevét viselő üstökös visszatérését, a búvárok merülési technikája iránt is érdeklődött. 1716-ban, a Királyi Társaság *„Philosophical Transactions"* c. kiadványában publikált egy dolgozatot, amiben leírja a fából készült, 1,7 m$^3$ levegőt tartalmazó csonkakúp alakú búvárharangját, amelynek átmérője felül 0,914 m, alul 1,524 m volt. A teteje üvegből készült, hogy átengedje a fényt. A harangot időnként a felszínről leengedett hordókból kellett friss levegővel feltölteni. a) Mekkora volt a harang belsejének függőleges magassága? b) Meddig emelkedett a víz a harang nyitott végű aljától, amikor leeresztették a 18 m mély vízbe? A 20-11 ábrán látható csonkakúp térfogata $\pi h(a^2 + ab + b^2)/3$.

**20C-39** Egy tartály normál állapotú hidrogéngázt ($H_2$) tartalmaz. Tegyük fel, hogy minden molekula a négyzetes középsebességgel mozog: egyharmaduk a $\pm x$ tengely irányában, egyharmaduk a $\pm y$ tengely irányában, és egyharmaduk a $\pm z$ tengely irányában. Másodpercenként hány ütközés történik az $yz$ síknak megfelelő fal 1 cm$^2$-es felületén?

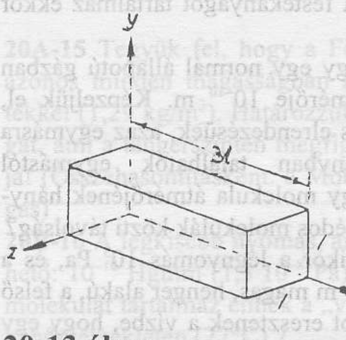



**20-11 ábra**
A 20C-38 feladathoz

**20C-40** $N$ darab, egyenként $m$ tömegű, $v$ sebességű molekula egy $l$ élhosszúságú, kocka alakú dobozba van bezárva (20-12 ábra). Tegyük fel, hogy a molekulák egyharmada mozog rugalmasan előre-hátra $x$ irányban, egyharmaduk $y$ irányban, és egyharmaduk $z$ irányban. Határozzuk meg a következőket $N$, $m$, $v$ és $l$ segítségével kifejezve: a) egy teljes ide-oda mozgáshoz szükséges időtartamot, b) egy molekula megfordulásakor bekövetkező impulzusváltozást, c) hányszor ütközik másodpercenként egy molekula az $A$ oldallal, d) a teljes impulzusváltozást az $A$ felületen, amit a dobozban lévő összes molekula okoz 1 s alatt, e) az $A$ oldalra ható átlagerőt, f) a gáz $\rho$ sűrűségét.




**20-12 ábra**
A 20A-40 feladathoz




**20-13 ábra**
A 20C-41 feladathoz

**20C-41** A 20-13 ábrán látható, hasáb alakú dobozban egyetlen $m$ tömegű atom van, amelynek $v$ sebességű mozgása csak $\pm x$ tengely irányú lehet. Az atom tökéletesen rugalmasan ütközik az $l^2$ felületű véglapokkal. Vezessük le az alapelvekből kiindulva, hogy hogyan függ a véglapokra vonatkozó átlagos nyomás ($p_{átl}$) az $m$, $v$ és $l$ mennyiségektől!

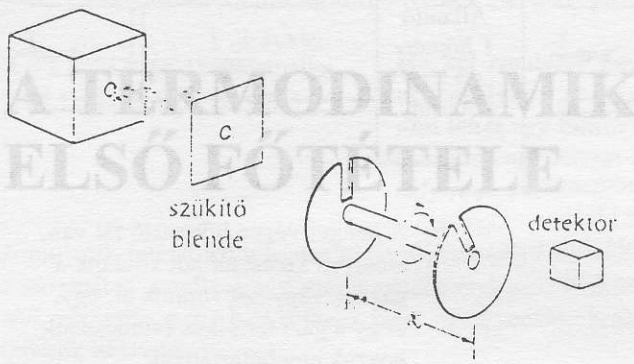
**20C-42** Hogyan adható meg a joule és a literatmoszféra energiaegységek közötti átszámítási tényező (1 joule = ? l atm), ha kizárólag a mechanika alapelveit használjuk (nem a termodinamikáét).? Igazoljuk a választ az $R$ gázállandó átszámításával egyik egységből a másikba!

**20C-43** James Clerk Maxwell a következő kifejezést vezette le egy $T$ hőmérsékleten termikus egyensúlyban lévő, $N$ molekulát tartalmazó ideális gáz sebességeloszlására. A $v$ és $v + dv$ tartományba eső molekulák száma $N(v)dv$, ahol

$$N(v) = 4\pi N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v^2 e^{-\frac{mv^2}{2kT}}$$

A 20-8 ábra ezt a függvényt ábrázolja. Igazoljuk, hogy a legvalószínűbb sebesség ($v_w$), (a görbe csúcsa): $v_w = \sqrt{2kT/m}$! (Útmutatás: a csúcsnál a görbe meredeksége zérus. Azaz $dN(v)/dv = 0$)

**20C-44** Az első amerikai űrállomás, a *Skylab* fedélzetén a belélegezhető gázkeverék kb 75% oxigénből és 25% (térfogatszázalék) nitrogénből állt $3{,}45 \cdot 10^4$ Pa nyomáson. Így a tengerszintnek megfelelővel közel azonos oxigénnyomást lehetett fenntartani. A tengerszinten a légkör kb. 79% nitrogénből és 21% (térfogatszázalék) oxigénből áll. Literenként hányszorosa a tengerszinten levő normál állapotú oxigén mólszáma a Skylab belsejében, azonos hőmérsékleten lévőnek?




**20-14 ábra**
A 20C-45, 20C-46, 20C-47 feladathoz

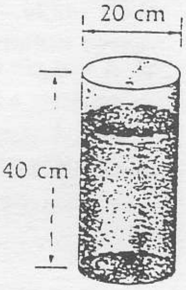
**20C-45** Izzító kemencében anyag elgőzölögtetésével gázmolekula-nyalábot hozunk létre, majd egy szűkítő blendén át a gázmolekulák a 20-14 ábrán látható módon légüres térbe jutnak. A nyalábban levő molekulák sebességét két olyan, egymástól $x$ távolságra lévő , réssel ellátott forgó tárcsa segítségével mérjük, amelyek bizonyos sebességű molekulákat mindkét résen átengednek egy detektorhoz. Határozzuk meg a tárcsák szögsebességét $v$ sebességű molekulák észlelésekor, ha a tárcsákon kialakított rések közötti szögeltolódás $\theta$.

**20C-46** Szerepeljen az előző feladatban higany-atomokból álló nyaláb (relatív atomtömeg 200). Milyen nagy $\theta$ szögeltolódás mellett észlelhetők a 800 K hőmérsékletnek megfelelő négyzetes középsebességű higanyatomok, ha a tárcsák közti távolság 20 cm és a fordulatszám 100 fordulat/s.?

**20C-47** A 20-45 feladatban szereplő tárcsák közti távolság legyen 40 cm, a fordulatszám pedig 100 1/s. Tegyük fel, hogy a rések közötti szögeltolódással 400 m/s molekulasebesség észlelhető. A nyaláb 8 cm-re van a tárcsák forgástengelyétől, és a blende, amin a nyaláb átmegy, 2 mm széles. Melyik az a legkisebb és legnagyobb molekulasebesség, amit a detektor érzékel?

**20C-48** Készítsük el egy nyomás-hőmérséklet diagram vázlatát a 20-5a ábrához hasonlóan, egy olyan anyagra vonatkozóan, ami fagyáskor összehúzódik! Ne tartalmazzon numerikus értékeket, de adjuk meg a különböző fázisokat elválasztó vonalak helyes kvalitatív értelmezését.

**20C-49** A 20-15 ábrán látható módon egy 15 kg-os dugattyút helyeztek egy normál állapotú, egyatomos ideális, gázt tartalmazó hengeres edény tetejére. Amint a dugattyú – elhanyagolható súrlódással – lesüllyed a henger teteje alatti egyensúlyi helyzetbe, összenyomja a gázt. a) Meddig süllyed le a dugattyú, ha a hőmérsékletet állandó értéken tartjuk a folyamat alatt? b) Milyen hőmérsékletre kell a gázt hevíteni, hogy a dugattyú visszakerüljön a henger tetejére?




**20-15 ábra**
A 20C-49 és 20C-50 feladathoz

**20C-50** Tegyük fel, hogy az előző feladatban szereplő gázt még jobban összenyomjuk oly módon, hogy a dugattyú tetejére higanyt öntünk. Határozzuk meg a higany maximális mélységét, mielőtt a henger felső végénél túlcsordulna. A gáz hőmérséklete a folyamat alatt 27°C marad. (Tegyük fel, hogy a dugattyú vastagsága elhanyagolható.)

**20C-51** Egy hőlégballon térfogata 1000 $m^3$ és forró gázokkal van megtöltve. A külső hőmérséklet 5°C, a nyomás pedig a ballonon belül és kívül egyaránt $10^5$ Pa. Mennyinek kellene lenni a hőmérsékletnek a hőlégballon belsejében, hogy a 220 kg-os teljes tömegű ballon éppen felemelkedjék, feltételezve, hogy a ballon belsejében lévő gázok és a külső levegő ideális gázként viselkednek, és a molekulatömegük 28,9 u!

**20C-52** Egy Lord Kelvin által javasolt számítás nyilvánvalóvá teszi, hogy milyen hihetetlenül kicsik az atomok és molekulák. Tegyük fel, hogy képesek lennénk egy teáscsészényi vízben (kb. 1/6 $l$) az összes molekulát felcímkézni úgy, hogy a többi közönséges vízmolekulától megkülönböztethetőek legyenek. Ezután szétszórnánk a csészényi, címkével ellátott molekulát a világ összes óceánjaiban és tengereiben úgy, hogy a címkével ellátott és el nem látott vízmolekulák egyenletesen keveredjenek. Igazoljuk, hogy ezután egy teáscsészényi keverék kb. 700 címkével ellátott molekulát tartalmaz! Az eredmény még meglepőbb, ha a következő gondolatkísérletet visszük végig: amennyiben a Föld domborzati viszonyai olyanok lennének, hogy a felszíne tökéletesen sima gömbfelületet képezne, akkor a felszínét 2,6 km mélységben víz borítaná.

**16C-51** $T = 2\pi\sqrt{R^3 / GM} = 84{,}5$ perc
**16C-53** 1,41 óra
**16C-55** $\dfrac{GMm}{2R}\left[3-\left(\dfrac{r}{R}\right)^2\right]$
**16C-57** $\dfrac{Gm}{R^2}\left(\dfrac{M}{4}-\dfrac{m}{3}\right)$

## XVII. Fejezet

**17B-1** 90,0%
**17B-3** A válasz adott.
**17A-5** 250 N
**17A-7** 20 cm
**17B-9** a) 5000 kg/m$^3$ b) 667 kg/m$^3$
**17B-11** a) 2704 kg/m$^3$ b) 59,8 N
**17B-13** 0,89 kg/dm$^3$
**17B-15** 4,00 mg
**17B-17** $\Delta V/V = 0{,}0830$
**17A-19** $1{,}77 \times 10^{-3}$ m$^3$/s
**17A-21** 40 cm/s
**17B-23** $3{,}7 \times 10^4$ N/m$^2$
**17B-25** 4,49 atm
**17B-27** $\rho A v^2$
**17B-29** a) 7,67 m/s b) 2,80 mm
**17B-31** A válasz adott.
**17C-33** $al/g$
**17C-35** 0,933
**17C-37** $(1-1/\sqrt{2})$
**17C-39** $(1-1/\sqrt{2})$
**17C-41** A válasz adott.
**17C-43** $T = 2\pi\sqrt{m/\rho A g}$
**17C-45** A válasz adott.
**17C-47** 27,3 cm$^3$/s
**17C-49** $H/2$

## XVIII. Fejezet

**18A-1** a) $2{,}27 \times 10^{-3}$ s b) 0,782 m
**18A-3** A válasz adott.
**18A-5** 8,33 cm
**18B-7** $A = 7 \times 10^{-4}$ m, $k = 3{,}14$ m$^{-1}$, $\omega = 6{,}28 \times 10^{-3}$ s$^{-1}$
**18B-9** a) 1,27 Pa b) 170 Hz c) 2,00 m
d) 340 m/s
**18B-11** 18,56 m
**18B-13** 860 m
**18A-15** $2{,}94 \times 10^{-16}$ J/cm$^3$
**18B-17** 1,13 µW
**18B-19** A válasz adott.
**18B-21** a) 565 Hz b) mélyülő hang
**18A-23** 2,07 N
**18A-25** a) 515 Hz b) 4,13 cm
**18A-27** a) 0,773 m b) 1,55 m c) 330 Hz d) 220 Hz
**18A-29** 870 Hz, 2610 Hz
**18B-31** a) 34,8 m/s b) 0,977 m
**18B-33** 800 Hz
**18A-35** 19,9 m/s
**18B-37** a) 1091 Hz b) 1100 Hz c) 1000 Hz
**18A-39** 28,4°
**18B-41** 5,64 Hz
**18C-43** A válasz adott.
**18C-45** 3,14 m/s, $9{,}87 \times 10^3$ m/s$^2$
**18C-47** $K = 2{,}47 \times 10^{11}$ N/m$^2$
$G = 1{,}25 \times 10^{11}$ N/m$^2$
**18C-49** b) $v = R\omega$
**18C-51** a) +6,99 dB b) 2,24
**18C-53** $\mu = 4{,}00 \times 10^{-3}$ kg/m, 2,50 cm hosszú
**18C-55** 12,6 m/s$^2$
**18C-57** 60,0 Hz
**18C-59** 0,335 cm

## XIX. Fejezet

**19A-1** 7,2 mm-t hozzá kell adni
**19A-3** $3 \times 10^{-5}$/°C
**19B-5** $2{,}17 \times 10^5$ N
**19B-7** 0,72 l
**19A-9** 6,44 kJ
**19A-11** 0,463 kJ/kg·°C
**19A-13** 0,431 joule/ g·°C
**19A-15** 0,122 kg
**19B-17** 0,126 kJ/kg·°C
**19B-19** 87,5
**19B-21** A válasz adott.
**19A-23** 557 J/s
**19A-25** $1{,}38 \times 10^8$ J
**19B-27** a) 290 g b) 42,9 g
**19B-29** a) 8,44 kW b) 162 dollár
**19A-31** 5,00 W/m$^2$°C
**19B-33** 2,84 J/s
**19A-35** a) 61,1 kW·h b) \$3,67
**19C-37** A válasz adott.
**19C-39** a) 13,9 cm b) $2{,}6 \times 10^{-5}$ (C°)$^{-1}$
**19C-41** 8,0039 cm
**19C-43** a) $\dfrac{T_2 k_1 \Delta x_2 + T_1 k_2 \Delta x_1}{k_2 \Delta x_1 + k_1 \Delta x_2}$
**19C-45** A válasz adott.
**19C-47** $3{,}52 \times 10^4$ s = 9,78 h
**19C-49** A válasz adott.
**19C-51** A válasz adott.

## XX. Fejezet

**20A-1** 48,5 l
**20A-3** a) 4,48 m$^3$ b) 5,60 kg
**20A-5** 0,046 m$^3$
**20A-7** 12,0 l
**20A-9** $1{,}98 \times 10^5$ Pa

**20A-11** $1{,}7 \times 10^5$ N
**20A-13** a) $1{,}10 \times 10^{30}$ elektron b) $1{,}82 \times 10^6$ mol
**20A-15** 8,01 km
**20B-17** a) 0,489 atm b) 0,888 kg/ $m^3$
**20B-19** 6,59 $m^3$
**20B-21** átlagban 59,0 atom
**20B-23** átlagosan 3,48 molekula
**20B-25** a) 2,56 atm b) 16,1 m
**20B-27** A válasz adott.
**20A-29** a) $4{,}14 \times 10^{-16}$ J b) $7{,}04 \times 10^5$ m/s
**20A-31** $5{,}80 \times 10^9$ K
**20B-33** A válasz adott.
**20B-35** b) A szökési sebesség 10,8%-a
**20B-37** $(8{,}28 \times 10^{-9}/l^3)$ N/m$^2$ ($l$ méterben)
**20C-39** $8{,}22 \times 10^{23}$ ütközés/sec
**20C-41** $mv^2/3l^3$
**20C-43** A válasz adott.
**20C-45** $\omega = v\theta/x$
**20C-47** 385 m/s, 417 m/s
**20C-49** a) 1,77 cm b) 12,6C°
**20C-51** 63,4C°

## XXI. Fejezet

**21A-1** a) 209 J b) 209 J c) 0 d) 0,0896 l
**21A-3** a) 0,144 atm b) 157 K
**21A-5** a) 0,160 atm b) 131 K
**21B-7** a) 546 K b) 4538 J
c) $1{,}13 \times 10^4$ J d) 6806 J
**21B-9** A válasz adott.
**21B-11** $2{,}09 \times 10^4$ J
**21B-13** A válasz adott.
**21A-15** $2{,}93R$
**21B-17** a) 216C° b) 0,178 L
**21B-19** $4{,}14 \times 10^{-21}$ J
**21A-21** 56,1
**21C-23** A válasz adott.
**21C-25** a) 70,2 J b) 36,0 J c) 208,3 J
d) –53,6 J e) –36,0 J f) 16,6 J
**21C-27** a) 47,3 J b) $1{,}61 \times 10^{-4}$ m$^3$ c) 13,5 J
d) 33,8 J
**21C-29** b) $\frac{13}{11}$

## XXII. Fejezet

**22A-1** 150 J
**22A-3** 14,2%
**22A-5** 280 K
**22A-7** 5,76%
**22B-9** a) 44,6% b) 25%
**22B-11** –5,40C°
**22B-13** A válasz adott.
**22B-15** a) 414 J b) 4600 J
**22B-17** a) 0,99 J b) 3,45 J
**22B-19** $1{,}97 \times 10^5$ J
**22B-21** a) 370 személy b) 14800,00 dollár c) 4,80 dollár
**22B-23** a) $\frac{4}{3}P_oV_o$ b) 22,2%
**22B-25** $\frac{2}{13}$
**22C-27** a) 12,4 b) $2{,}07 \times 10^7$ J c) $6{,}00 \times 10^7$ J
d) 2,32 l e) 1,33 l
**22C-29** 173 W
**22C-31** $\left(1-\frac{V_1}{V_2}\right)^{(\gamma-1)}$
**22C-33** a) α: 4,92 ℓ; *b*: 1,67 atm; *c*: 6,69 ℓ, $T_c$ = 408 K
b) 52,7 J
**22C-35** A válasz adott.
**22C-37** 300 N, 400 N

## XXIII. Fejezet

**23A-1** -24,2 J/K
**23A-3** 123 J/K
**23A-5** 5,27 J/K
**23B-7** 12,6 J/K
**23B-9** A válasz adott.
**23B-11** $\sim 5 \times 10^5$ J/K
**23B-13** A válasz adott.
**23C-15** 3807 J
**23C-17** A válasz adott.
**23C-19** b) $mc\left[(T_2+T_1)-2\sqrt{T_2T_1}\right]$
**23C-21** A válasz adott.
**23C-23** A válasz adott.
**23C-25** a) 588 J b) zérus c) 1,96 J/K d) 1,96 J/K
**23C-27** $8k \ln 2$
**23C-29** $2{,}40 \times 10^{26}$ J/K·h