Analízis I. informatikusoknak

Jegyzet mérnök-informatikus hallgatók részére

Készítette: Kriván Bálint

dr. Tasnádi Tamás előadásai alapján

2009. szeptember - 2009. december 19.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Valós számok

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \boxed{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$$

1.1. Csoportok

Definíció 1.1 *Legyen G halmaz és $\cdot$ egy kétváltozós művelet G-n: $G \times G \to G$.*
*$(G, \cdot)$ **csoport**, ha*

1. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G$ *(tehát asszociatív)*
2. $\exists e \in G$, *hogy* $e \cdot g = g \cdot e = g \quad \forall g \in G$ *(létezik egység elem)*
3. $\forall g \in G$ *esetén* $\exists! g^{-1}$ *melyre* $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$ *(létezik inverze)*

Definíció 1.2 *Egy csoportot **kommutatív csoport**nak (Abel-csoport) hívunk, ha a művelet kommutatív. Tehát $(G; \cdot)$ kommutatív csoport, ha*

$$a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in G$$

Definíció 1.3 *A **test** egy olyan $F = (T, +, \cdot)$ kétműveletes algebrai struktúrát jelöl, ahol T kommutatív csoportot alkot a + („összeadás") műveletre nézve, a $\cdot$ („szorzás") kommutatív, asszociatív, minden nem nulla elemnek van inverze a $\cdot$ műveletre nézve, továbbá a $\cdot$ művelet disztributív a + műveletre. Tehát:*

1. $(T, +)$ *kommutatív csoport:* $e = 0, a^{-1} = -a$.
2. $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ *kommutatív csoport:* $e = 1, a^{-1} = \frac{1}{a}$.
3. $a \cdot (b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in T$

1.2. Valós számok axiómái

1-9. $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ testet alkot.

1.2.1. Rendezési axiómák

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$-re

10. A következő 3 közül pontosan 1 teljesül: $a < b; a = b; a > b$.
11. Tranzitivitás: $a < b$ és $b < c \quad \Rightarrow a < c$
12. A rendezés monoton az összeadásra: ha $a < b$, akkor $a + c < b + c$
13. A rendezés monoton a szorzásra:ha $a < b$, akkor $a \cdot c < b \cdot c$

1.2.2. Archimédesz-féle axióma

14. $\forall x \in \mathbb{R}$-hez $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $n > x$.

1.2.3. Cantor-féle axióma

15. $\mathbb{R}$ teljes:
Ha $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R} \neq \emptyset$ és $a_n \leqslant a_{n+1}, b_{n+1} \leqslant b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$:

$$I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots \subset I_n \quad \text{akkor} \quad \exists \xi \in \mathbb{R}, \text{hogy}$$

$$\xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$$

Megjegyzés: $\mathbb{Q}$-ban nem teljesül!

2. fejezet

Számsorozatok

2.1. Kör kerülete

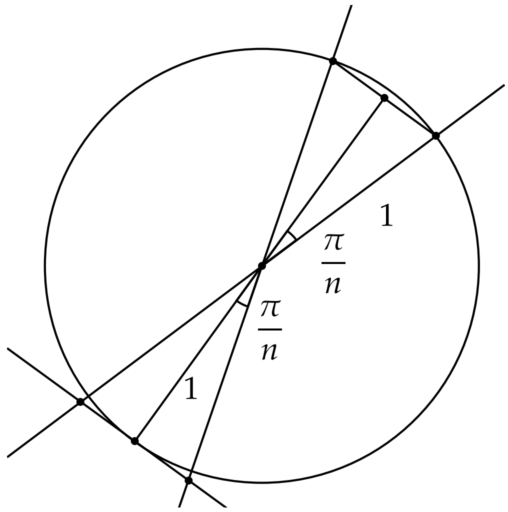
A kör (K) kerületét beírt (k_n) és hozzáírt (K_n) sokszögek kerületével közelítjük.

$$k_n = n \cdot 2 \cdot \sin \frac{\pi}{n}$$

$$K_n = n \cdot 2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{n}$$

$$k_n \leqslant K \leqslant K_n$$

n	3	4	10	100	…	$\to \infty$
k_m	$3\sqrt{3}$	$4\sqrt{2}$	$6,1803$	$6,2822$	…	$\to 2\pi$
K_n	$6\sqrt{3}$	8	$6,4983$	$6,2853$	…	$\to 2\pi$



2.2. Bevezetés; definíciók

Definíció 2.1 *Valós számsorozatok*

$$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R} \qquad a_n = f(n)$$

Megjegyzés: Van olyan, hogy néha nem értelmezzük a függvényt az első néhány természetes számon, pl.: $a_n = \dfrac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$

Definíció 2.2 *Az* $\{a_n\}$ *sorozat felülről korlátos, ha* $\exists K \in \mathbb{R} : a_n \leqslant K \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definíció 2.3 *Az* $\{a_n\}$ *sorozat alulról korlátos, ha* $\exists k \in \mathbb{R} : a_n \geqslant k \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Definíció 2.4 *Az* $\{a_n\}$ *sorozat korlátos, ha alulról* ***és*** *felülről is korlátos.*

Definíció 2.5 *Az* $\{a_n\}$ ***határértéke*** $A \in \mathbb{R}$*, ha* $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon)$*, hogy* $|a_n - A| < \varepsilon$*, ha* $n > N(\varepsilon)$*.*
Jelölés: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*, vagy* $a_n \xrightarrow{n\to\infty} A$

Definíció 2.6 *Az* $\{a_n\}$ *sorozat konvergens, ha* $\exists A \in \mathbb{R}$*, hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$*.*

Intervallumok:

- zárt: $[a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leqslant x \leqslant b\}$
- nyílt: $]a;b[$ vagy $(a;b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$
- félig nyílt v. zárt: $(a;b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leqslant b\}$

Definíció 2.7 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R}$, *ha* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén a sorozat véges számú eleme van az* $(A - \varepsilon; A + \varepsilon)$ *intervallumon kívül. Ez ekvivalens a 2.5. definícióval.*

2.2.1. Példák

(1) $a_n = \dfrac{1}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Bizonyítás a 2.5. definíció felhasználásával:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \to \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$$n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \to \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

Tehát küszöbindexnek $\forall \varepsilon > 0$-hoz az $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$-t választhatjuk.

(2) $b_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \to \quad \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \to \quad N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$$

(3) $c_n = \dfrac{3+n}{5-2n} \xrightarrow{n\to\infty} -\dfrac{1}{2}$

$$\left|\frac{3+n}{5-2n} + \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{6+2n+5-2n}{2(5-2n)}\right| = \left|\frac{11}{10-4n}\right| < \varepsilon$$

Ha $n \geqslant 3$, akkor:

$$\left|\frac{11}{10-4n}\right| = \frac{11}{4n-10} < \varepsilon \quad \to \quad \frac{11+10\varepsilon}{4\varepsilon} < n \quad \to \quad N(\varepsilon) = \max\left\{3, \left[\frac{11+10\varepsilon}{4\varepsilon}\right]\right\}$$

(4) $d_n = \dfrac{n^2-2n}{3n^3+2} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$$\left|\frac{n^2-2n}{3n^3+2} - 0\right| \overset{x\geqq 2}{=} \frac{n^2-2n}{3n^3+2} < \varepsilon \qquad \text{nehéz egzaktul megoldani} \to \text{becslés}$$

$$\frac{n^2-2n}{3n^3+2} < \frac{n^2}{3n^3} = \frac{1}{3n} < \varepsilon \quad \to \quad n > \frac{1}{3\varepsilon} \quad \to \quad N(\varepsilon) = \max\left\{2, \left[\frac{1}{3\varepsilon}\right]\right\}$$

(5) $e_n = \dfrac{n^3-2n}{3n^3-2} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{3}$

$$\left|\frac{n^3-2n}{3n^3-2} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3n^3-6n-3n^3+2}{9n^3-6}\right| = \left|\frac{-6n+2}{9n^3-6}\right| \overset{x\geqq 1}{=} \frac{6n-2}{9n^3-6} < \frac{6n}{9n^3-6n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon$$

$$\frac{2}{n^2} < \varepsilon \quad \to \quad n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \quad \to \quad N(\varepsilon) = \max\left\{1, \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right]\right\}$$

2.2.2. Divergens sorozatok és $\pm$ végtelenbe tartás

Definíció 2.8 *Az $\{a_n\}$ sorozat* ***divergens*** *ha $\nexists A \in \mathbb{R}$, hogy $a_n \to A$.*

Definíció 2.9 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, *ha $\forall P \in \mathbb{R} > 0 : \exists N(P)$ küszöbindex, hogy $a_n > P$, ha $n > N(P)$.*

Definíció 2.10 $a_n \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$, *ha $\forall M \in \mathbb{R} < 0 : \exists N(M)$ küszöbindex, hogy $a_n < M$, ha $n > N(M)$.*

Lemma 2.1 $\boxed{a_n \to \infty \Longleftrightarrow -a_n \to -\infty}$

2.2.3. Példák

(1) $a_n = n^3 + 10n + 2 \to \infty$
Kell, hogy adott P-re $a_n > P$:

$$a_n = n^3 + 10n + 2 \overset{*}{>} n^3 > P \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt[3]{P}$$

(*) becslünk: ha egy az erdetinél kisebb sorozatot vizsgálunk, akkor az ehhez tartozó küszöbindex az eredetihez is jó lesz.
Tehát küszöbindexnek $\forall P > 0$-hoz például az $N(P) = \left[\sqrt[3]{P}\right]$-t választhatjuk.

(2) $a_n = n^3 - 10n + 2 \to \infty$

$$a_n = n^3 - 10n + 2 > n^3 - 10n \overset{n\geqslant 5}{>} n^3 - \frac{n^3}{2} = \frac{n^3}{2} > P \quad \Longrightarrow \quad n > \sqrt[3]{2P}$$

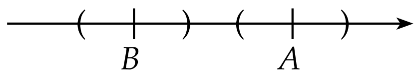
$$N(P) = \max\left\{5, \left[\sqrt[3]{2P}\right]\right\}$$

Megjegyzés: $a_n = (-1)^n$ divergens, nem tart se $+\infty$, se $-\infty$-be.

Tétel 2.1 *Ha egy sorozat konvergens, akkor a határértéke egyértelmű, tehát:*

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \text{ és } \lim_{n\to\infty} a_n = B \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad A = B}$$

Bizonyítás 2.1 Indirekt. Tfh: $A \neq B$. Legyen például: $B < A$
Legyen $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$.



$$\left.\begin{array}{l} a_n \to A \Rightarrow a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \text{ ha } n > N_a(\varepsilon) \\ a_n \to B \Rightarrow a_n \in (B-\varepsilon, B+\varepsilon) \text{ ha } n > N_b(\varepsilon) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{ha } n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\} \quad \Longrightarrow \\ a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \cup (B-\varepsilon, B+\varepsilon) = \emptyset \end{array}$$

Tehát az állításunk hamis, így igaz az eredeti állítás. ∎

2.3. Ekvivalens megfogalmazások

P és Q két állítás:

1. $P \Leftrightarrow Q \qquad Q \Leftrightarrow P$
2. P ekvivalens Q-val.
3. P pontosan akkor teljesül, amikor Q.
4. P akkor és csak akkor teljesül, ha Q.
5. P szükséges és elégséges feltétele Q-nak.
6. Q szükséges és elégséges feltétele P-nek.

1. $P \Rightarrow Q$
2. P-ből következik Q.
3. P maga után vonja Q-t.
4. P implikálja Q-t.
5. P elégséges feltétele Q-nak.
6. Q szükséges feltétele P-nek.

2.4. Korlátosság és konvergencia kapcsolata

Tétel 2.2 $\boxed{\text{Ha az } \{a_n\} \text{ sorozat konvergens, akkor korlátos}}$

Megjegyzés: Minden konvergens sorozat korlátos.
A korlátosság szükséges feltétele a konvergenciának, a konvergencia elégséges feltétele a korlátosságnak.

Bizonyítás 2.2
$a_n \to A \in \mathbb{R}$, tehát $\forall \varepsilon > 0 : \exists N(\varepsilon)$, hogy $a_n \in (A-\varepsilon, A+\varepsilon) \quad n > N(\varepsilon)$. Tehát az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$-on kívül csak véges sok elemek esnek kívül: $a_0, a_1, \ldots, a_{N(\varepsilon)}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \exists k & : \forall n\text{-re} \quad k \leqslant a_n \quad k = \min\{a_0, a_1, \ldots, a_{N(\varepsilon)}, A-\varepsilon\} \\ \exists K & : \forall n\text{-re} \quad K \geqslant a_n \quad K = \max\{a_0, a_1, \ldots, a_{N(\varepsilon)}, A+\varepsilon\} \end{cases}$$

Mivel van alsó és felső korlátja, ezért korlátos. ■

2.5. Műveletek konvergens számsorozatokkal

Tétel 2.3 $\boxed{a_n \to A \text{ és } b_n \to B \quad \Longrightarrow \quad (a_n + b_n) \to A + B}$

Bizonyítás 2.3
A $c_n = a_n + b_n$ sorozatról kell belátni, hogy $C = A + B$ a határértéke. Számsorozatok konvergenciája szerint: $\forall \varepsilon : \exists N(\varepsilon)$, hogy $|c_n - C| < \varepsilon$, ha $n > N_c(\varepsilon)$. Legyen $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{2}$. Hasonlóan elmondható, hogy:

$$\left.\begin{array}{ll} |a_n - A| < \varepsilon^* & \forall n > N_a(\varepsilon^*) \\ |b_n - B| < \varepsilon^* & \forall n > N_b(\varepsilon^*) \end{array}\right\} \text{Ha } n > \max\{N_a(\varepsilon^*), N_b(\varepsilon^*)\}, \text{ akkor}$$

$$|c_n - C| = |a_n + b_n - (A+B)| \underset{*}{\leqslant} |a_n - A| + |b_n - B| < 2\varepsilon^* = \varepsilon$$

Tehát $N_c(\varepsilon)$ küszöbindexnek $N_c(\varepsilon) = \max\left\{N_a\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), N_b\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$-t választhatjuk.
(*) = háromszög egyenlőtlenség! ■

Tétel 2.4 $\boxed{a_n \to A \quad \Longrightarrow \quad c \cdot a_n \to c \cdot A}$

Bizonyítás 2.4

$$|ca_n - cA| = |c||a_n - A| < \varepsilon \quad \Longrightarrow \quad |a_n - A| < \frac{\varepsilon}{|c|} \quad \to \quad N_{ca}(\varepsilon) = N_a\left(\frac{\varepsilon}{|c|}\right)$$

Következmény:

$$a_n \to A \text{ és } b_n \to B \quad \Longrightarrow \quad (a_n - b_n) \to A - B$$

Könnyen bizonyítható az előző két tétel felhasználásával. ■

Tétel 2.5 $\boxed{a_n \to 0 \textit{ és } b_n \textit{ korlátos} \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n \to 0}$

Bizonyítás 2.5

$$|a_n b_n - 0| = |a_n b_n| = |a_n||b_n| < \varepsilon$$

Mivel b_n korlátos, ezért $b_n \leqslant K \in \mathbb{R}$:

$$|a_n| < \frac{\varepsilon}{K} \quad \text{teljesül, ha: } n > N_a\left(\frac{\varepsilon}{K}\right) = N_{ab}(\varepsilon)$$

■

Tétel 2.6 $\boxed{a_n \to A \textit{ és } b_n \to B \quad \Longrightarrow \quad a_n b_n \to AB}$

Bizonyítás 2.6

$$a_n b_n = \overbrace{(\underbrace{a_n - A}_{\to 0})(\underbrace{b_n - B}_{\to 0})}^{\text{2.4. tétel köv.}} + \overbrace{\underbrace{Ab_n}_{\to AB} + \underbrace{Ba_n}_{\to AB}}^{\text{2.4. tétel}} - AB \quad \to \quad AB$$

■

Tétel 2.7 $\boxed{a_n \to A \quad \Longrightarrow \quad |a_n| \to |A|}$

Bizonyítás 2.7

$$||a_n| - |A|| \leqslant |a_n - A| < \varepsilon \quad \to \quad N_{|a|}(\varepsilon) = N_a(\varepsilon)$$

■

Tétel 2.8 $\boxed{b_n \to B \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{b_n} \to \frac{1}{B}}$

Bizonyítás 2.8

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| = \left|\frac{B - b_n}{b_n B}\right| = \frac{|b_n - B|}{|b_n||B|}$$

Felhasználva a 2.7. tételt: $|b_n| \to |B|$, tehát $\exists N_1\left(\frac{|B|}{2}\right)$, hogy $n > N_1\left(\frac{|B|}{2}\right)$ esetén:

$$|b_n| \in \left(|B| - \frac{|B|}{2}, |B| + \frac{|B|}{2}\right) \quad \Longrightarrow \quad |b_n| > \frac{|B|}{2}$$

Másrészt viszont $\exists N_2\left(\frac{\varepsilon}{2}|B|^2\right)$, hogy $|b_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}|B|^2$. Ezt a két dolgot felhasználva, ha $n > \max\{N_1, N_2\} = N(\varepsilon)$:

$$\frac{|b_n - B|}{|b_n||B|} < \frac{|b_n - B|}{\frac{|B|}{2}|B|} < \frac{\frac{\varepsilon}{2}|B|^2}{\frac{|B|}{2}|B|} = \varepsilon$$

Bizonyítottuk az állítást, hiszen $\forall \varepsilon : \exists N(\varepsilon)$, hogy $n > N(\varepsilon)$ esetén $\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{B}\right| < \varepsilon$. ∎

Tétel 2.9 $\boxed{a_n \to A \text{ és } b_n \to B \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{a_n}{b_n} \to \frac{A}{B}}$

Bizonyítás 2.9

$$\frac{a_n}{b_n} = \underbrace{a_n}_{\to A} \cdot \underbrace{\frac{1}{b_n}}_{\to 1/B} \quad \to \quad \frac{A}{B}$$

Felhasználva az előző, illetve a 2.6. tételt. ∎

2.5.1. Példák

$$a_n = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{500}{n^2}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Azért használhatjuk a 2.3. tételt, mert véges sok tagot adunk össze!

$$b_n = \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2}{n^2}}_{\to 0} + \ldots + \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} ?$$

Itt már nem használhatjuk; át kell alakítani:

$$b_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n^2} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

$$c_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

Viszont

$$d_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e \quad \text{majd visszatérünk rá!}$$

$$e_n = \frac{3n^3 - 2n^2 + 5}{-n^3 + 3n - 6} = \frac{3 - \frac{2}{n} + \frac{5}{n^3}}{-1 + \frac{3}{n^2} - \frac{6}{n^3}} \xrightarrow{n\to\infty} -3$$

$$f_n = \underbrace{\frac{n^2-8}{3n^3+n}}_{\to 0} \underbrace{\cos(2n+6)}_{\text{korlátos}} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \qquad 0 \cdot \text{korlátos} \to 0 \text{ (lásd 2.5. tétel!)}$$

2.6. Néhány jól használható tétel

Tétel 2.10 $\boxed{a_n \geqslant 0 \text{ és } a_n \to A \quad \Longrightarrow \quad \sqrt{a_n} \to \sqrt{A}}$

Bizonyítás 2.10

1. Ha $A = 0$:

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \underbrace{\sqrt{a_n} \leq \varepsilon}_{\text{igaz, ha } a_n < \varepsilon^2}$$

Tehát $N_{\sqrt{a}}(\varepsilon) = N_a(\varepsilon^2)$. ✓

2. Ha $A > 0$

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left|(\sqrt{a_n} - \sqrt{A}) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}\right| = \left|\frac{a_n - A}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}\right| \leqslant \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}}$$

$$\frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} < \varepsilon \quad \text{ha } |a_n - A| < \varepsilon\sqrt{A}$$

■

Tehát $N_{\sqrt{a}}(\varepsilon) = N_a(\varepsilon\sqrt{A})$. ✓

Lemma 2.2 $\boxed{a_n \geqslant 0 \text{ és } a_n \to A \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[k]{a_n} \to \sqrt[k]{A} \quad \forall k \in \mathbb{N}}$

Tétel 2.11 $\boxed{\text{Ha } \lim_{n\to\infty} a_n = A \text{ és } f \text{ folytonos } A\text{-ban, akkor}}$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(A) = f(\lim_{n\to\infty} a_n)}$$

Bizonyítás 2.11
Következik a folytonosság definíciójából ■

2.6.1. Példák

$$a_n = \underbrace{\sqrt{2n^2 + 3n - 1}}_{\to\infty} - \underbrace{\sqrt{2n^2 + n}}_{\to\infty} \qquad \text{határozatlan alak } (\infty - \infty)$$

Konjugálttal bővítünk:

$$a_n = \frac{(2n^2 + 3n - 1) - (2n^2 + n)}{\sqrt{2n^2 + 3n - 1} + \sqrt{2n^2 + n}} = \frac{2n - 1}{\sqrt{2n^2 + 3n - 1} + \sqrt{2n^2 + n}} =$$

$$= \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{2 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + \sqrt{2 + \frac{1}{n}}} \to \frac{2}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$b_n = \sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1} - \sqrt[3]{n^3 + 4} = \frac{n^3 + 3n^2 + 1 - (n^3 + 4)}{\sqrt[3]{n^3 + 3n^2 + 1}^2 + \sqrt[3]{(n^3 + 3n^2 + 1)(n^3 + 4)} + \sqrt[3]{n^3 + 4}^2} =$$

$$= \frac{3n^2-3}{\sqrt[3]{n^3+3n^2+1}^2+\sqrt[3]{(n^3+3n^2+1)(n^3+4)}+\sqrt[3]{n^3+4}^2} =$$

$$= \frac{3-\frac{3}{n^2}}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3}}^2+\sqrt[3]{(1+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^3})(1+\frac{4}{n^3})}+\sqrt[3]{1+\frac{4}{n^3}}^2} \to \frac{3}{1+1+1} = 1$$

Megjegyzés: $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$$c_n = \frac{\sqrt[4]{2n^4+n^3-2n^2+8}}{\sqrt[3]{n^6+5n^2+3}} = \frac{n\sqrt[4]{2+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}+\frac{8}{n^4}}}{n^2\sqrt[3]{1+\frac{5}{n^4}+\frac{3}{n^6}}} = \frac{1}{n}\cdot c \to 0$$

Tétel 2.12 $\boxed{\textit{Ha } a_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to 0}$

Bizonyítás 2.12
$a_n > P \geqslant 0$, ha $n > N_a(P) \quad \Longrightarrow \quad 0 < \frac{1}{a_n} < \frac{1}{P}$, ha $n > N_a(P)$. Tehát $N_{\frac{1}{a}}(\varepsilon) = N_a(\frac{1}{P})$ ∎

Lemma 2.3 $\boxed{0 < a_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to \infty}$

Lemma 2.4 $\boxed{0 > a_n \to 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{a_n} \to -\infty}$

Lemma 2.5 $\boxed{a_n \to \infty \quad \Longrightarrow \quad \frac{1}{|a_n|} \to \infty}$

Tétel 2.13 $\boxed{a_n \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad |a_n| \to 0}$

Bizonyítás 2.13
$|a_n - 0| = |a_n| < \varepsilon \qquad ||a_n| - 0| = |a_n| < \varepsilon$ ∎

2.6.2. Hasonló tételek

$$\frac{0}{\infty} = 0; \quad \frac{\text{korlátos}}{\infty} = 0; \quad \frac{\infty}{+0} = \infty; \quad \infty\cdot\infty = \infty; \quad \infty+\infty = \infty$$

2.6.3. Határozatlan alakok

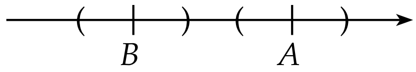
$$\frac{0}{0}; \quad \frac{\infty}{\infty}; \quad 0\cdot\infty; \quad \infty-\infty; \quad \infty^0; \quad 1^\infty; \quad 0^0$$

Megoldási lehetőségek: azonos átalakítás, becslés, (L'Hospital szabály)

Tétel 2.14 $\boxed{\textit{A limesz monoton: } a_n < b_n \textit{ és } a_n \to A, b_n \to B \quad \Longrightarrow \quad A \leqslant B}$
Megjegyzés: $a_n \leqslant b_n$-re is igaz az állítás.
Pl: $a_n = 1-\frac{1}{n} < b_n = 1+\frac{1}{n}$ $\quad \lim a_n = \lim b_n = 1$

Bizonyítás 2.14
Indirekt. Tfh: $B > A$

Legyen $\varepsilon = \dfrac{|A-B|}{3}$, ekkor a számsorozatok konvergenciája alapján:



$$A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon \qquad n > N_a(\varepsilon)$$
$$B-\varepsilon < b_n < B+\varepsilon \qquad n > N_b(\varepsilon)$$

Elsőt -1-el megszorozva, majd átrendezve a következőt kapjuk:

$$-A-\varepsilon < -a_n < -A+\varepsilon$$

Hozzáadva a B-s egyenlőtlenséghez:

$$B-A-2\varepsilon < b_n - a_n < \underbrace{\underbrace{B-A}_{-3\varepsilon}+2\varepsilon}_{-\varepsilon} \qquad n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon)\}$$

$$\text{Tehát} \quad b_n - a_n < -\varepsilon \ \lightning$$

Ellentmondás, hiszen feltétel szerint $a_n < b_n$ ($a_n \leqslant b_n$), tehát $b_n - a_n$ biztosan pozitív (nem negatív). ∎

Tétel 2.15 $\boxed{\textit{Rendőr-elv}}$
Ha $\lim a_n = A \in \mathbb{R}$ *és* $\lim b_n = A$*, illetve* $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$*, akkor* $\forall n > N_0 \in \mathbb{N}$*-re akkor* $\exists \lim c_n = A$

Bizonyítás 2.15

$$\left.\begin{array}{ll} A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon & n > N_a(\varepsilon) \\ A-\varepsilon < b_n < A+\varepsilon & n > N_b(\varepsilon) \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} A-\varepsilon < a_n \leqslant c_n \leqslant b_n < A+\varepsilon \\ \text{ha } n > \max\{N_a(\varepsilon), N_b(\varepsilon), N_0\} \end{array}$$

$$A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$$ ∎

Tétel 2.16 $\boxed{\textit{Speciális rendőr-elv}}$
Ha $a_n \to \infty$ *és* $a_n \leqslant b_n$ $\forall n > N_0$*, akkor* $b_n \to \infty$.
Ha $a_n \to -\infty$ *és* $a_n \geqslant b_n$ $\forall n > N_0$*, akkor* $b_n \to -\infty$.

Bizonyítás 2.16
Csak az elsőt bizonyítjuk:
$\forall P > 0$, ha $n > N_a(P)$, akkor: $P < a_n \leqslant b_n$. Tehát:

$$\forall P > 0 \quad n > N_b(P) = \max\{N_a(P), N_0\} \ \Rightarrow \ P < b_n$$ ∎

2.6.4. Példák a rendőr-elv használatára

(1) $a_n = \dfrac{2n^6+n^3-n}{n^4+3} \to \infty$
A fenti sorozatot egy nálánál kisebb sorozattal közelítjük, melyről belátjuk, hogy a végtelenhez tart. Ekkor felhasználhatjuk a speciális rendőr-elvet és kész:

$$a_n = \frac{2n^6+n^3-n}{n^4+3} \geqslant \frac{2n^6+0-n^6}{n^4+3n^4} = \frac{n^6}{4n^4} = \frac{1}{4}n^2 \ \to \ \infty \qquad \text{Tehát } a_n \to \infty$$

(2) $b_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}}$
Ezt a „sima” rendőr-elvvel oldjuk meg (kisebb sorozathoz minden elem helyére a legkisebbet írjuk, a nagyobbhoz pedig a legnagyobbat):

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant b_n \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}}_{\to 1} \leqslant b_n \leqslant \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}}_{\to 1}$$

Tehát rendőr-elv alapján $b_n \to 1$.

2.7. További gyakran használt határértékek

Tétel 2.17 $\boxed{\lim_{n\to\infty} a^n = \begin{cases} 0, \text{ ha } |a| < 1 \\ 1, \text{ ha } a = 1 \\ +\infty, \text{ ha } a > 1 \qquad (\nexists) \\ \nexists, \text{ ha } a \leq -1 \end{cases}}$

Bizonyítás 2.17
Itt az $0 < a < 1$ esetet bizonyítjuk:
$\forall \varepsilon > 0 \quad \to \quad |a^n - 0| = |a^n| = a^n < \varepsilon$

$$a^n < \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad n \cdot \underbrace{\ln a}_{<0} < \underbrace{\ln \varepsilon}_{<0 \text{ ha } 0<\varepsilon<1}$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a} > 0 \qquad \text{jó küszöbindexnek: } N(\varepsilon) = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln a}\right]$$

■

Tétel 2.18 $\boxed{\lim_{n\to\infty} n^k \cdot a^n = 0 \qquad \text{ha } |a| < 1 \text{ és } k \in \mathbb{N}^+}$

Bizonyítás 2.18
Elfogadjuk, később l'Hospital szabállyal beláthatjuk. Konkrét példára esetleg monoton csökkenéssel és korlátossággal bizonyítható. ■

Tétel 2.19 $\boxed{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1 \qquad \text{ha } p > 0}$

Bizonyítás 2.19
Ha $p = 1$, akkor ✓.
Ha $p > 1$, akkor $\sqrt[n]{p} > 1$, tehát $\sqrt[n]{p} = 1 + x_n$. Tehát kell, hogy $\lim x_n = 0$.

$$p = (1+x_n)^n = 1 + n \cdot x_n + \binom{n}{2} x_n^2 + \ldots$$

$$p = (1 + x_n)^n > 1 + n \cdot x_n \quad \Rightarrow \quad x_n < \frac{p-1}{n}$$

$$\underbrace{0}_{\to 0} < x_n < \underbrace{\frac{p-1}{n}}_{\to 0}$$

Tehát $x_n \to 0$ a rendőr-elv alapján. ✓
Ha $0 < p < 1$, akkor:

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{p}} \to 1} \to \frac{1}{1} = 1 \quad ✓$$

Megjegyzés: Bernoulli-egyenlőtlenség: ha $x > -1$, akkor $(1+x)^n > 1 + n \cdot x$. ■

Tétel 2.20 $n \to \infty, \quad a > 1, \quad k > 0$

$$\boxed{n^n \overset{\alpha}{\gg} n! \overset{\beta}{\gg} a^n \overset{\gamma}{\gg} n^k \gg \log n}$$

Illetve $a^n \gg b^n$, *ha* $a > b > 1$. *Továbbá* $n^k \gg n^l$, *ha* $k > l > 0$.

Megjegyzés: $x_n \gg y_n$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_y} = \infty$.

Bizonyítás 2.20
(α):

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}{n(n-1)(n-3) \cdot \ldots \cdot 1} = \frac{n}{n} \cdot \frac{n}{n-1} \cdot \frac{n}{n-2} \cdot \ldots \cdot n > \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot n}_{\to\infty}$$

Tehát spec. rendőr-elv alapján az eredeti sorozat is a végtelenhez tart! ✓

(β): $a > 1$

$$\frac{n!}{a^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a} = \underbrace{\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot [a]}{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}}_{\text{konst! } K > 0} \cdot \underbrace{\frac{[a]+1}{a}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{[a]+2}{a}}_{>1} \cdot \ldots \cdot \frac{n}{a} \geqslant K \cdot 1 \cdot 1 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{a} \to \infty \ ✓$$

(γ): $a > 1, k > 0$

$$\frac{n^k}{a^n} = n^k \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^n \to 0 \qquad \text{2.18. tétel alapján } (0 < \tfrac{1}{a} < 1)$$

$$\Longrightarrow \frac{a^n}{n^k} \to \infty \qquad \text{2.3. lemma alapján}$$

■

Tétel 2.21 $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1}$

Bizonyítás 2.21

$$\sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}} = (e^{\ln n})^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \cdot \ln n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \ln n = 0 \qquad \text{felhasználva a fentit}$$

$$\sqrt[n]{n} \to e^0 = 1 \quad ✓$$

■

Tétel 2.22 $\boxed{\text{\textit{Ha} } a_n \to A \text{ \textit{és} } a_{n_k} \text{ \textit{az} } a_n \text{ \textit{sorozat egy részsorozata, akkor} } a_{n_k} \to A}$

Bizonyítás 2.22
$\varepsilon > 0$ esetén $N_a(\varepsilon)$ jó küszöbindex a részsorozathoz is! ■

2.7.1. Példák a fentiek használatára

(1) $a_n = \dfrac{3^{2n}}{4^n + 3^{n+1}} = \dfrac{9^n}{4^n + 3 \cdot 3^n} = \dfrac{1}{\left(\frac{4}{9}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n} \to \dfrac{1}{0 + 3 \cdot 0} \to \infty$

Ennél a 2.17 tételt használtuk fel.

(2) $b_n = \dfrac{n^2 + 9^{n+1}}{2n^5 + 3^{2n-1}} = \dfrac{n^2 + 9 \cdot 9^n}{2n^5 + 3^{-1} \cdot 9^n} = \dfrac{\frac{n^2}{9^n} + 9}{\frac{2n^5}{9^n} + 3^{-1}} \to \dfrac{0 + 9}{0 + 3^{-1}} = 27$

Itt a 2.20 tételt használtuk fel, vagyis az exponenciális függvény nagyságrendje nagyobb a hatványfüggvénynél.

(3) $c_n = \sqrt[3n]{n} = \sqrt[3n]{\dfrac{3n}{3}} = \dfrac{\sqrt[3n]{3n}}{\sqrt[3n]{3}} \to \dfrac{1}{1} = 1$

Felhasználtuk a 2.22 tételt, hiszen mindkettő $\left(\sqrt[3n]{3n}, \sqrt[3n]{3}\right)$ részsorozat.

(4) $d_n = \sqrt[n]{\dfrac{3n^6 + 8n^2}{4n^3 - 2n + 1}}$. Rendőr-elvet használunk:

$$\sqrt[n]{\frac{n^2}{4n^3 + n^3}} \leqslant d_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{3n^6 + 8n^6}{4n^3 - 2n^3}}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{5n}} \leqslant d_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{11n^3}{2}}$$

$$\underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{5}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{n}}}_{\to \frac{1}{1}}}_{\to 1} \leqslant d_n \leqslant \underbrace{\underbrace{\sqrt[n]{\frac{11}{2}}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\left(\sqrt[n]{n}\right)^3}_{\to 1^3}}_{\to 1}$$

Tehát $d_n \to 1$.

(5) $e_n = \sqrt[n]{\dfrac{3^n + 5^n}{2^n + 4^n}}$. Rendőr-elv használatával:

$$\sqrt[n]{\frac{5^n}{4^n + 4^n}} \leqslant e_n \leqslant \sqrt[n]{\frac{5^n + 5^n}{4^n}}$$

$$\underbrace{\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{4}\right)^n}}_{\to \frac{5}{4}} \leqslant e_n \leqslant \underbrace{\sqrt[n]{2} \sqrt[n]{\left(\frac{5}{4}\right)^n}}_{\to \frac{5}{4}}$$

Tehát $e_n \to \dfrac{5}{4}$.

2.8. Rekurzív sorozatok

Adott a kezdőelem (a_0) és az eggyel előre lépés szabálya (vagyis a rekurzió).

$$a_{n+1} = f(a_n, a_{n-1}, \ldots)$$

Amit vizsgálhatunk:

- Monotonitás
- Korlátosság
- Konvergencia $\Rightarrow$ határérték

Példa: $a_0 = 2, a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n}$. Sejtés: mon. nő. Bizonyítsuk teljes indukcióval: $a_1 < a_2, a_2 < a_3 \checkmark$. Tfh: n-re igaz, bizonyítsuk $n+1$-re:

$$a_n \leqslant a_{n+1}$$

$$\sqrt{a_n} \leqslant \sqrt{a_{n+1}}$$

$$a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n} \leqslant 1 + \sqrt{a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Tehát igaz $\forall n$-re, tehát monoton nő a sorozatunk.

Ha van határérték, akkor $\{a_n\}$ és az $\{a_{n+1}\}$ sorozat is oda tart, tehát:

$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & 1 + \sqrt{a_n} \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & = & 1 + \sqrt{A} \end{array}$$

Ebből $A = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ vagy $A = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Mivel a sorozatunk mon. nő ezért a határértéke biztos nagyobb mint az első elem, tehát ha van határéték, akkor csak $A = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ lehet az. Bizonyítsuk be, hogy ez egy felső korlátja a sorozatnak; Sejtés: $a_n \leqslant A = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Ezt is teljes indukcióval bizonyítjuk. Első pár elemre igaz, tfh: n-re igaz, bizonyítsuk $n+1$-re:

$$a_n \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{Biz: } 1 + \sqrt{a_n} \leqslant \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$\checkmark$

$$\sqrt{a_n} \leqslant \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$a_n \leqslant \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Összefoglalva: $\{a_n\}$ monoton nő és felülről korlátos, tehát $\exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

2.9. Egy kitüntetett számsorozat

$$\boxed{e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Tétel 2.23 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \boxed{e_n \leqslant e_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

Bizonyítás 2.23

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \overset{?}{\leqslant} 1+\frac{1}{n+1}$$

$\checkmark$

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leqslant \frac{1+n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n+1}$$

Lásd számtani-mértani közti összefüggés

Tehát az e_n sorozat **monoton nő**. ∎

Tétel 2.24 $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leqslant 4$

Bizonyítás 2.24

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{?}{\leqslant} 1$$

$$\sqrt[n+2]{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \leqslant \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+n(1+\frac{1}{n})}{n+2} = 1 = \sqrt[n+2]{1}$$

∎

Mivel az e_n sorozat felülről korlátos és monoton növő, ezért $\exists \lim e_n = e$.

Tétel 2.25

$$\boxed{\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e^x \qquad x\in\mathbb{R}}$$

Bizonyítás 2.25
Csak speciális x-ekre bizonyítjuk. Legyen $x=-1$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} ?$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(\frac{n-1+1}{n-1}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n} =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}}_{\to 1/e} \cdot \underbrace{\left(\frac{n-1}{n}\right)}_{\to 1} \to \frac{1}{e}$$

Legyen $x=\frac{1}{p}$:

$$\left(1+\frac{1}{pn}\right)^n = \sqrt[p]{\underbrace{\left(1-\frac{1}{pn}\right)^{pn}}_{\to e}} \to \sqrt[p]{e} = e^{\frac{1}{p}}$$

Megjegyzés: p. gyökfüggvény folytonos. ∎

2.9.1. Példák

1. példa:

$$a_n = \left(\frac{n+6}{n+4}\right)^{n-3} = \frac{n^{n-3}}{n^{n-3}} \cdot \frac{\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n-3}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n-3}} = \frac{\left(1+\frac{6}{n}\right)^{n}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n}} \cdot \underbrace{\frac{\left(1+\frac{6}{n}\right)^{-3}}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^{-3}}}_{\to 1} \to \frac{e^6}{e^4} = e^2$$

2. példa:

$$a_n = \left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{2n^2} \qquad b_n = \underbrace{\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{4n^2}}_{=a_n^2} \qquad c_n = \underbrace{\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{2n^3}}_{a_n^n} \qquad d_n = \underbrace{\left(\frac{2n^2+2}{2n^2-1}\right)^{2n}}_{\sqrt[n]{a_n}}$$

$$a_n = \left(\frac{2n^2}{2n^2}\right)^{2n^2} \cdot \frac{\left(1+\frac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1-\frac{1}{2n^2}\right)^{2n^2}} \to \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3$$

Azért, mert $\left(1+\dfrac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}$ egy részsorozata $\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^{n}$-nek (lásd a 2.22 tétel).
Mivel $b_n = (a_n)^2$, ezért $b_n \to e^6$.
Tekintve, hogy $a_n \to e^3$, $\exists N_0$, hogy ha $n > N_0$, akkor $a_n > 8$. Mivel $c_n = (a_n)^n$, ezért speciális rendőrelv alapján:

$$\underbrace{8^n}_{\to\infty} < (a_n)^n = \underbrace{c_n}_{\to\infty}$$

A fenti logikából kiindulva, $\exists M_0$, hogy ha $n > M_0$, akkor $8 < a_n < 27$, tehát:

$$\underbrace{\sqrt[n]{8}}_{\to 1} < \underbrace{\sqrt[n]{a_n}}_{=d_n} < \underbrace{\sqrt[n]{27}}_{\to 1}$$

Tehát rendőrelv alapján: $d_n \to 1$.

2.10. További fontosabb tételek

Definíció 2.11 *Az $\{a_n\}$ sorozatban az a_k elem **csúcs**, ha $\forall n > k$-ra $a_n \leqslant a_k$.*

Tétel 2.26 $\boxed{\textit{Minden sorozatnak van monoton részsorozata}}$

Bizonyítás 2.26
Két eset lehetséges:

1. Ha véges sok csúcs van, akkor a csúcsok után $\exists$ monoton növekedő részsorozat, hiszen minden elemet követ nála nagyobb vagy egyenlő (különben lenne még csúcs)
2. Ha végtelen sok csúcs van, akkor a csúcsok monoton csökkenő részsorozatot alkotnak

Tehát mindkét esetben létezik monoton részsorozat. ∎

Tétel 2.27 $\boxed{\textit{Bolzano-Weierstrass tétel}}$
Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

Bizonyítás 2.27
Előző tétel alapján van monoton részsorozata, ami korlátos, hiszen az eredeti is az volt, tehát $\exists$ határértéke, azaz konvergens. ■

Tétel 2.28 $\boxed{\textit{Cauchy-féle konvergencia kritérium}}$
Az $\{a_n\}$ sorozat pontosan akkor konvergens, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad n, m > N(\varepsilon)$$

Megjegyzés: *Nem hivatkozik a határértékre!*

Másképp megfogalmazva:

Definíció 2.12 *Az $\{a_n\}$ sorozat **Cauchy-sorozat**, ha $\forall\varepsilon > 0$-hoz $\exists N(\varepsilon)$, hogy*

$$|a_n - a_m| < \varepsilon \qquad n, m > N(\varepsilon)$$

Tétel 2.29 $\boxed{\textit{Cauchy-féle konvergencia kritérium}}$

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \{a_n\} \text{ Cauchy-sorozat}$$

Bizonyítás 2.29
$\Rightarrow$

$$\exists \lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists N(\varepsilon), \text{ hogy } |a_n - A| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

Legyen $n, m > N(\varepsilon)$, ekkor:

$$|a_n - a_m| = |a_n - A + A - a_m| = |(a_n - A) - (a_m - A)| \leqslant |a_n - A| + |a_m - A| < 2\varepsilon$$

$\Leftarrow$ Ezt nem bizonyítjuk. ■

Példa ennek használatára:

$$s_1 = 1$$
$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}$$
$$s_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$
$$\vdots$$
$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Létezik-e $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$? Másképp fogalmazva: Cauchy-sorozat-e?

$$s_{2n} - s_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) =$$

$$= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \geqslant n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Tehát $\varepsilon < \frac{1}{2}$-hez biztosan nem létezik $N(\varepsilon)$!

2.11. Torlódási pont, $\overline{\lim}$, $\underline{\lim}$

Definíció 2.13 *$A \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $K_\varepsilon(A) = (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.*

Definíció 2.14 *∞ környezete: $K_P(\infty) = (P, \infty)$.*

Definíció 2.15 *$-\infty$ környezete: $K_M(-\infty) = (-\infty, M)$.*

Definíció 2.16 *$t \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontja, ha t minden környezetében végtelen sok eleme esik a sorozatnak.*

Legyen $S \subset \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza.

Példák:
$a_n = 1$, ekkor $S = \{1\}$
$a_n = (-1)^n$; $S = \{1, -1\}$
$a_n = \frac{1}{n}$; $S = \{0\}$
$a_n = n$; $S = \{\infty\}$

Tétel 2.30

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A \;\Leftrightarrow\; S = \{A\} \qquad A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}}$$

Tehát $\{a_n\}$ sorozat akkor és csak akkor konvergens ha pontosan 1 torlódási pontja van.

Tétel 2.31 *Ha S felülről korlátos, akkor $\exists$ legnagyobb torlódási pont ($\operatorname{Sup} S \in S$). Ha S alulról korlátos, akkor $\exists$ legkisebb torlódási pont ($\operatorname{Inf} S \in S$).*

Tétel 2.32 *t pontosan akkor torlódási pontja $\{a_n\}$-nek, ha létezik $\{a_n\}$-nek t-hez konvergáló részsorozata.*

Definíció 2.17 *Legyen $\{a_n\}$ sorozat torlódási pontjainak halmaza S. Ekkor:*

$$\left.\begin{aligned} \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \limsup_{n\to\infty} a_n = \operatorname{Sup} S \\ \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n &= \liminf_{n\to\infty} a_n = \operatorname{Inf} S \end{aligned}\right\} \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

Tétel 2.33

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = A}$$

Példák

1. $a_n = 2^{(-1)^n \cdot n} = \begin{cases} 2^n, \text{ha } n \text{ páros} \\ 2^{-n}, \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$
   $S = \{0; +\infty\} \quad \to \quad \overline{\lim}\, a_n = \infty, \underline{\lim}\, a_n = 0$. Mivel $\overline{\lim}\, a_n \neq \underline{\lim}\, a_n$, ezért $\nexists \lim a_n$!

2. $b_n = (-1)^n = \begin{cases} 1, \text{ha } n \text{ páros} \\ -1, \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$
   $S = \{-1; 1\}$, tehát $\nexists \lim a_n$!

3. fejezet

Numerikus sorok

Numerikus sor: $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$
Összeg: $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Definíció 3.1 *Részletösszeg:* $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

Definíció 3.2 *A **sor összege** a részletösszeg-sorozat határértéke:*

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Definíció 3.3 *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor **konvergens**, ha* S_n *sorozat konvergens.*

Definíció 3.4 *A* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor **divergens**, ha* S_n *sorozat divergens.*

Két speciális eset: $\sum_{n=1}^{\infty} = \pm\infty$, ha $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$

Definíció 3.5

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \underbrace{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}_{\textit{részletösszeg: } S_n} + \underbrace{a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots}_{\textit{maradékösszeg: } r_n}$$

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

$$S = S_n + r_n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

3.1. Példák

(1) $a_n = 1 \ \rightarrow \ \sum_{n=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n = -1 + 1 - 1 + \ldots = ?$

$$S_n = \begin{cases} 0, \text{ ha páros} \\ -1, \text{ ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \nexists \quad \text{div.}$$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = ?$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{1 - \frac{1}{n+1}} \right) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= a_1 = 1 - \frac{1}{2} \\ S_2 &= a_1 + a_2 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \\ S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}\right\} S_n = \overbrace{1 - \frac{1}{n+1}}$$

Teleszkópikus összeg!

(4) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots.$

Ez egy **geometriai sor** (lásd később), melynek kvóciense $\frac{1}{2}$.

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S_3 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$$

$$S_n = \frac{2^n - 1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} \qquad \to \text{teljes ind.-val bizonyítható}$$

Tehát $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} 2 - \frac{1}{2^{n-1}} = 2.$

(5) **Harmonikus sor**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2}$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} > 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_8 = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{>\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{6}}_{>\frac{1}{8}} + \underbrace{\frac{1}{7}}_{>\frac{1}{8}} + \frac{1}{8} > 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{16} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3}}_{>\frac{1}{4}} + \frac{1}{4} + \underbrace{\frac{1}{5}}_{>\frac{1}{8}} + \ldots + \frac{1}{8} + \underbrace{\frac{1}{9}}_{>\frac{1}{16}} + \ldots + \frac{1}{16} > 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}$$

$$S_{2^k} \geq 1 + k \cdot \frac{1}{2} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

3.2. Geometriai sor

Egymást követő tagok hányadosai állandók: $q = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. $a_n = a_0 \cdot q^n$. $q \neq 0$ (lásd később). Tehát a **geometria sor**:

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n}$$

3.2.1. Véges geometriai sor összege

$$\left.\begin{aligned} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k &= a_0 + a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q^{n-1} \\ q \cdot S_n &= a_0 \cdot q + a_0 \cdot q^2 + \ldots + a_0 \cdot q^{n-1} + a_0 \cdot q^n \end{aligned}\right\} S_n(q-1) = a_0 \cdot q^n - a_0$$

$$\boxed{S_n = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}}$$

Itt látható, hogy $q \neq 1$, ha $q = 1$, akkor azt nem szokás geometriai sornak nevezni! (Ezért zárjuk ki a defiben)

3.2.2. Végtelen geometriai sor összege

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = \begin{cases} \boxed{\dfrac{a_0}{1-q}, \quad \text{ha } |q| < 1} \\ \nexists, \quad \text{ha } |q| \geqslant 1 \end{cases}$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n = a_0 \cdot \frac{1}{1-q} \qquad \text{ha } |q| < 1$$

3.2.3. Példák

(1) $$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-5)^{k+1}}{2^{3k+4}} = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{-5}{2^4} \cdot \underbrace{\left(\frac{-5}{8}\right)^k}_{|q|<1\checkmark} = \underbrace{\frac{-5}{16} \cdot \left(\frac{-5}{8}\right)^3}_{=a_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{-5}{8}} = \frac{5^4}{2^{13}} \cdot \frac{8}{13} = \frac{5^4}{2^{10} \cdot 13}$$

(2) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-2)^{2k+1} + (-3)^{k+3}}{5^k} = ?$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{2k+1} + (-3)^{k+3}}{5^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{(-2)^{2k+1}}{5^k} + \frac{(-3)^{k+3}}{5^k} \right) =$$ **véges** tagú összeg, tehát:

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-2)^{2k+1}}{5^k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-3)^{k+3}}{5^k} = -2 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{4}{5}\right)^k + -27 \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-3}{5}\right)^k =$$

$$= -2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}} - 27 \cdot \frac{-3}{5} \cdot \frac{1 - \left(\frac{-3}{5}\right)^n}{1 - \frac{-3}{5}}$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{-8}{5} \cdot \frac{1}{\frac{1}{5}} + \frac{81}{5} \cdot \frac{1}{\frac{8}{5}} = -8 + \frac{81}{8}$$

Tehát konvergens geometriai sorokat lehet külön-külön összeadni:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \left(S_n^{(1)} + S_n^{(2)}\right) = \lim_{n\to\infty} S_n^{(1)} + \lim_{n\to\infty} S_n^{(2)} = S^{(1)} + S^{(2)}}$$

3.3. Tételek

Tétel 3.1 $\boxed{\text{Cauchy-kritérium sorokra}}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor konvergens* $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, *hogy* $|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+k}| < \varepsilon$, *ha* $m > N(\varepsilon)$ *és* $k \in \mathbb{N}$.

Bizonyítás 3.1
Áttérünk részletösszeg-sorozatra:

$$|a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+k}| = |S_{m+k} - S_{m-1}| < \varepsilon \qquad \text{ha } m > N(\varepsilon)$$

Cauchy-kritérium az S_n részletösszeg sorozatra $\Leftrightarrow$ S_n Cauchy-sorozat

$$\exists \lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \Longleftarrow$$

■

Tétel 3.2 $\boxed{\text{Sor konvergenciájának szükséges feltétele}}$

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Bizonyítás 3.2

$$\exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \Leftrightarrow \quad \text{teljesül a Cauchy-krit. a sorra}$$

$$\overset{k=0}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \ : \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}, \text{hogy } |a_n| < \varepsilon, \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

■

Bizonyítás 3.2
Másik megközelízés:

$$\begin{array}{ccccc} S_{n+1} & = & S_n & + & a_{n+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \infty & & \infty & \Rightarrow & 0 \end{array}$$

■

3.3.1. Példák a sor konvergenciájának szükséges feltételére

(1) $\sum\limits_{n}(-1)^n = \nexists$ mert $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n = \nexists \quad (\boxed{\neq 0})$.

(2) $\sum\limits_{n} 1 = \infty$ ($\nexists$) mert $\lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \boxed{\neq 0}$.

3.4. Váltakozó előjelű sorok

Definíció 3.6 *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *sor **váltakozó előjelű**, ha* $a_n \cdot a_{n+1} < 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$*-re.*

Például: $c_1 - c_2 + c_3 - c_4 + \ldots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-1)^{n+1} \cdot c_n}_{a_n}$, ahol $c_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

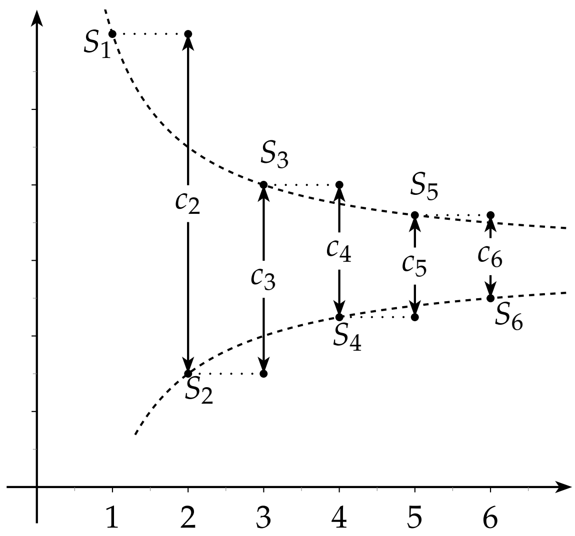
Definíció 3.7 *A* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot c_n$ *sor **Leibniz-sor**, ha:*

1. *Válatakozú előjelű (lásd fent)*
2. $c_n = |a_n|$ *monoton csökkenő sorozat;* $c_{n+1} = |a_{n+1}| \leqslant c_n = |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$
3. $c_n = |a_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Tétel 3.3 $\boxed{\textit{Leibniz-kritérium}}$

$$\text{Ha } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot c_n \text{ sor Leibniz-sor, akkor konvergens}$$

Bizonyítás 3.3
Csak vázlat:



$S_1 = a_1 = c_1$
$S_2 = a_2 = c_1 - c_2 = S_1 - c_2$
$S_3 = S_2 + c_3$
$S_4 = S_3 - c_3$
$S_5 = S_4 + c_4$
$\ldots$

1. $\left.\begin{array}{ll} S_1 \geqslant S_3 \geqslant S_5 \geqslant \ldots & \text{mon. csökken} \\ S_{2k+1} \geqslant S_2 & \text{alulról korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k+1} = S^*$

2. $\left.\begin{array}{ll} S_2 \leqslant S_4 \leqslant S_6 \leqslant \ldots & \text{mon. nő} \\ S_{2k} \leqslant S_1 & \text{felülről korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow$
   $\Rightarrow \exists \lim\limits_{k\to\infty} S_{2k} = S_*$

3. $$\begin{array}{ccccc} S_{2k+1} & = & S_{2k} & + & c_{2k+1} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S^* & & S_* & & 0 \end{array}$$

$S = S^* = S_*$

Ez lesz a határérték.

3.4.1. Példa

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \qquad \text{konvergens-e?}$$

Leibniz-kritérium ellenőrzése:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Váltakozó? } \checkmark \\ \text{2. } c_n = \frac{1}{n} \geqslant c_{n+1} = \frac{1}{n+1} \checkmark \\ \text{3. } \lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \checkmark \end{array}\right\} \text{konvergens } \checkmark$$

3.5. Hiba, hibabecslés

Definíció 3.8 *Az* $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ *részletösszeg* ***hibája****:*

$$H_n = |S - S_n|, \text{ ahol } S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ az egzakt összeg.}$$

Hibabecslés: $H_n = |S - S_n| < \underline{\text{becslés}}$

Tétel 3.4 $\boxed{\textit{Hibabecslés Leibniz-típusú sor esetén}}$
Az S_n *közelítő összeg hibája* $\leqslant$*, mint az első elhagyott tag abszolút értéke:*

$$|S - S_n| \leqslant |a_{n+1}| = c_{n+1}$$

Bizonyítás 3.4
Az előzőekben láttuk, hogy: $S_{2k} \leqslant S \leqslant S_{2k+1}$, ebből:

$$|S - S_{2k}| \leqslant |S_{2k+1} - S_{2k}| = c_{2k+1}$$

Hasonlóan: $S_{2k+2} \leqslant S \leqslant S_{2k+1}$, ebből:

$$|S - S_{2k+1}| \leqslant |S_{2k+2} - S_{2k+1}| = c_{2k+2}$$

Tehát valóban igaz, hogy:

$$|S - S_n| \leqslant c_{n+1} = |a_{n+1}|$$

■

3.5.1. Példák

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}+3}$. Konvergens-e? Milyen n-re lesz $|S - S_n| \leqslant 10^{-3}$?
Leibniz-típusú-e?:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Váltakozó? } \checkmark \\ \text{2. } c_n \geqslant c_{n+1}, \text{ hiszen } \sqrt{n} \leqslant \sqrt{n+1} \checkmark \\ \text{3. } c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0, \text{ mert } \sqrt{n} \to \infty \checkmark \end{array}\right\} \text{konvergens } \checkmark$$

Hiba: $|S - S_n| \leqslant c_{n+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+3} \leqslant 10^{-3}$

$$\sqrt{n+1} + 3 \geqslant 1000 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant 997^2 - 1$$

(2) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\ln k}$. Konvergens-e? Milyen n-re lesz $|S - S_n| \leqslant 10^{-3}$?

$$\cos(k\pi) = \begin{cases} +1, \text{ ha } k \text{ páros} \\ -1, \text{ ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \quad \Rightarrow \cos(k\pi) = (-1)^k$$

Tehát $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos(k\pi)}{\ln k} = \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{\ln k}$

Leibniz-kritérium ellenőrzése:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1. Váltakozó? } \checkmark \\ \text{2. } c_n \geqslant c_{n+1}\text{, hiszen } \ln n \text{ monoton nő } \checkmark \\ \text{3. } c_n \xrightarrow{n\to\infty} 0\text{, mert } \ln n \to \infty \ \checkmark \end{array}\right\} \text{konvergens } \checkmark$$

Hiba: $|S - S_n| \leqslant c_{n+1} = \frac{1}{\ln(n+1)} \leqslant 10^{-3}$

$$\ln(n+1) \geqslant 1000 \quad \Rightarrow \quad n \geqslant e^{1000} - 1$$

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \cdot 2k}{k^2 - 1}$. Konvergens-e?

- Alternáló? ✓
- $c_k = |a_k| = \frac{2k}{k^2-1} = \frac{2}{k - \frac{1}{k}} \xrightarrow{k\to\infty} 0$ ✓
- $c_k \overset{?}{\geqslant} c_{k+1}$

✓

$$\frac{2k}{k^2-1} \overset{?}{\geqslant} \frac{2(k+1)}{(k+1)^2-1}$$

$$(2k)((k+1)^2 - 1) \overset{?}{\geqslant} (2k+2)(k^2-1)$$

$$2k^2 + 2k + 2 \overset{?}{\geqslant} 0 \ \checkmark$$

Tehát a fenti sor Leibniz-sor, tehát konvergens.

Megjegyzés: A konvergenciához elég, ha a Leibniz-kritérium $n > N_0$-ra teljesül.

3.6. Abszolút és feltételes konvergencia

Definíció 3.9 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergens.*

Definíció 3.10 *A $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor **feltételesen konvergens**, ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Pl.: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n$ konvergens, sőt abszolút konvergens.

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{n}$ konvergens (Leibniz-sor), de nem abszolút.

Tétel 3.5 *Ha $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ abszolút konvergens $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens.*

Bizonyítás 3.5

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ abszolút konvergens} \overset{\text{def}}{\iff} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \text{ konvergens} \overset{\text{Cauchy-krit.}}{\Longrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N(\varepsilon) > 0, \text{hogy:}$$

$$\Big| \underbrace{|a_m| + |a_{m+1}| + |a_{m+2}| + \ldots + |a_{m+k}|}_{\geqslant\ a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}} \Big| < \varepsilon, \text{ha } m > N(\varepsilon), k \in \mathbb{N} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \;:\; \exists N(\varepsilon) > 0, \text{hogy: } |a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k}| < \varepsilon, \text{ha } m > N(\varepsilon), k \in \mathbb{N}$$

$$\Updownarrow \text{Cauchy-kritérium}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

■

3.7. Pozitív tagú sorok

Definíció 3.11 $\sum_{n}^{\infty} a_n$ *pozitív tagú sor, ha* $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Tulajdonságok:

1. pozitív tagú sorok részlet-összegei monoton nőnek: $S_n \leqslant S_{n+1} = S_n + \underbrace{a_{n+1}}_{>0}$ ✓
2. pozitív tagú sor konvergens $\iff$ a részlet-összeg sorozat korlátos.
   Biz $\Rightarrow$: Ha $\sum_{n}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\exists \lim\limits_{n\to\infty} S_n = S \quad \Rightarrow \quad S_n$ korlátos (minden konvergens sorozat korlátos).

   Biz $\Leftarrow$:
   $$\left.\begin{array}{l} S_n < k \in \mathbb{R} \\ S_n \nearrow \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_n = S = \sum_{n}^{\infty} a_n \quad ✓$$

Pozizív tagú sorok esetén:

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \text{ konvergens} \quad \iff \quad \sum_{n}^{\infty} a_n < \infty$$

$$\sum_{n}^{\infty} a_n \text{ divergens} \quad \iff \quad \sum_{n}^{\infty} a_n = \infty$$

Tétel 3.6

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \begin{cases} x \in \mathbb{R}, \textit{ha } \alpha > 1 \\ \infty, \textit{ha } \alpha \leqslant 1 \end{cases}}$$

Bizonyítás 3.6
∅ Majd félév végén.

Tétel 3.7 $\boxed{\textit{Majoráns kritérium}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 < a_n \leqslant c_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n < \infty$ (konvergens), akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n < \infty$ (konvergens).

Bizonyítás 3.7

$$0 < a_n \leqslant c_n \quad \Rightarrow \quad S_n^{(a)} \leqslant S_n^{(c)} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} c_n = S^{(c)} \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad \exists \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n^{(a)} = S^{(a)} \leqslant S^{(c)}$$

■

Tétel 3.8 $\boxed{\textit{Minoráns kritérium}}$
$\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $0 \leqslant d_n \leqslant a_n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n = \infty$ (divergens), akkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$ (divergens).

Bizonyítás 3.8

$$\begin{array}{ccc} S_n^{(d)} & \leqslant & S_n^{(a)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \infty & \Rightarrow & \infty \quad \text{(speciális rendőrelv)} \end{array}$$

■

3.7.1. Példa

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{3n+2}$. Konvergens-e?
A konvergencia szükséges feltétele teljesül: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Minoráns kritérium:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2} \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n+2n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{n}}_{\text{divergens}}$$

Tehát az eredeti sor is divergens.

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n^2 - \sqrt{n}}$. Konvergens-e?
A konvergencia szükséges feltétele teljesül: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Majoráns kritérium:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \sqrt{n}} \leqslant \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - \frac{1}{2}n^2} = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2}}_{\text{konvergens}}$$

Tehát az eredeti sor is konvergens.

3.7.2. Nem Leibniz-típusú pozitív tagú sorok hibabecslése

Ötlet: a sort konvergens geometriai sorral majoráljuk:

$$H_n = |S - S_n| = |r_n| = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \overset{a_k \leqslant Aq^k}{\leqslant} \sum_{k=n+1}^{\infty} A \cdot q^k = A \cdot q^{n+1} \frac{1}{1-q} \qquad \text{ha } |q| < 1$$

Példák

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{2^n}{4^n - 3}}_{0<a_n}$. Adjunk az $s \approx s_{1000}$ közelítés hibájára becslést!

$$H = \sum_{n=1001}^{\infty} \frac{2^n}{4^n - 3} \leqslant \sum_{n=1001}^{\infty} \frac{2^n}{4^n - \frac{1}{2}4^n} = \sum_{n=1001}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1001} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{999}$$

Tehát $H \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{999}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{5^n + n^2 \cdot 2^n}{3^n + 8^n}}_{0<a_n}$. Adjunk az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára becslést!

$$H = \sum_{n=101}^{\infty} \frac{5^n + n^2 \cdot 2^n}{3^n + 8^n} \leqslant \sum_{n=101}^{\infty} \frac{5^n + 5^n}{8^n} = \sum_{n=101}^{\infty} 2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^n = 2 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{101} \cdot \frac{1}{1-\frac{5}{8}} = \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{101}$$

Tehát $H \leqslant \frac{16}{3} \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{101}$

4. fejezet

Valós egyváltozós függvények

Definíció 4.1 *Valós egyváltozójú **függvény**: egyértelmű reláció.* $f : D_f \to R_f \quad \forall x \in D_f \subset \mathbb{R}$*-hez hozzárendel pontosan egy* $y \in R_f \subset \mathbb{R}$*-et.* D_f*: értelmezési tartomány (domain), ÉT;* R_f *: értékkészlet (range), ÉK.*

Definíció 4.2 *Az* $f : A \to B$ *leképezés **szürjektív** (ráképezés), ha* $\forall b \in B$*-re* $\exists a \in A$*, hogy* $f(a) = b$*.*

Definíció 4.3 *Az* $f : A \to B$ *leképezés **injektív**, ha* $f(a_1) = f(a_2)$ *esetén* $a_1 = a_2$*, tehát* $\forall b \in B$*-re legfeljebb egy A-beli elemre (*$a \in A$*) teljesül, hogy* $f(a) = b$*.*

Definíció 4.4 *Az* $f : A \to B$ *leképezés **bijektív** (egy-egy értelmű), ha f szürjektív és injektív, azaz* $\forall b \in B$ *esetén* $\exists!\ a \in A$*, hogy* $f(a) = b$*. Ilyenkor* $|A| = |B|$*.*

Definíció 4.5 *Legyen f injektív. Ekkor f **inverze*** $f^{-1} : R_f \to A$*,* $b \mapsto f^{-1}(b) = a$*, melyre* $f(a) = b$*.*

4.1. Topológiai alapfogalmak

Legyen $H \subset \mathbb{R}$

Definíció 4.6 $b \in H$ *a H **belső pont**ja, ha* $\exists \varepsilon > 0$*, hogy* $(b - \varepsilon, b + \varepsilon) = K_\varepsilon(b) \subset H$*. Jelölés:* $\mathrm{Int}(H)$

Definíció 4.7 $k \in \mathbb{R} \setminus H$ *a H **külső pont**ja, ha* $\exists \varepsilon > 0$*, hogy* $(k - \varepsilon, k + \varepsilon) = K_\varepsilon(k) \subset \mathbb{R} \setminus H$*.*

Tehát az előző kettőből: k a H külső pontja $\Leftrightarrow$ k az $\mathbb{R} \setminus H$ belső pontja.

Definíció 4.8 $h \in \mathbb{R}$ *a H **határpont**ja, ha nem külső és nem belső pontja, azaz* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén* $K_\varepsilon(h) \cap H \neq \emptyset$ *és* $K_\varepsilon(h) \cap (H \setminus \mathbb{R}) \neq \emptyset$*. Jelölés:* $\mathrm{Front}(H)$

Definíció 4.9 $H \subset \mathbb{R}$ ***nyílt**, ha H minden pontja belsőpont. (*$\mathrm{Int}(H) = H$*)*

Definíció 4.10 $H \subset \mathbb{R}$ ***zárt**, ha* $\mathbb{R} \setminus H$ *nyílt.*

Például $(a; b]$ se nem nyílt, se nem zárt.

Tétel 4.1 $\boxed{\mathbb{R} \text{ és } \emptyset \text{ nyílt és zárt is.}}$

Definíció 4.11 $H \subset \mathbb{R}$ ***kompakt**, ha H korlátos és zárt.*

4.2. Függvény tulajdonságok

Definíció 4.12
*f **felülről korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \leqslant K$.*
*f **alulról korlátos**, ha $\exists k \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $f(x) \geqslant k$.*
*f **korlátos**, ha $\exists K \in \mathbb{R}$, hogy $\forall x \in D_f$ esetén $|f(x)| \leqslant k$.*

Definíció 4.13
*f **páros**, ha $f(x) = f(-x)$.*
*f **páratlan**, ha $f(x) = -f(-x)$.*

Definíció 4.14
*f **monoton nő**, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*
*f **monoton csökken**, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*
*f **szigorúan monoton nő**, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.*
*f **szigorúan monoton csökken**, ha $x_1 < x_2$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.*

Definíció 4.15 *f **periodikus**, ha $\exists T > 0$, hogy $f(x+T) = f(T) \quad \forall x \in D_f$. A periódusa legyen a legkisebb ilyen T érték.*

Definíció 4.16
A $t \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ sugarú környezete: $K_\varepsilon(t) = (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.
A $t \in \mathbb{R}$ $\varepsilon > 0$ pontozott sugarú környezete: $\dot{K}_\varepsilon(t) = K_\varepsilon(t) \setminus \{t\}$.

Definíció 4.17 *$t \in \mathbb{R}$ a $H \subset \mathbb{R}$ **torlódási pontja**, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $|K_\varepsilon(t) \cap H| = \infty$, azaz $\forall K_\varepsilon(t)$ környezetbe végtelen sok H-beli pont esik.*

Definíció 4.18 *Alternatív definíció:*
*$t \in \mathbb{R}$ a $H \subset \mathbb{R}$ **torlódási pontja**, ha $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\dot{K}_\varepsilon(t) \cap H \neq \emptyset$ (bármely pontozott környezetbe esik H-beli elem).*

Tétel 4.2 *A fenti két definíció ekvivalens (4.17 $\Leftrightarrow$ 4.18)*

Bizonyítás 4.2
4.17 $\Rightarrow$ 4.18

$$|K_\varepsilon(t) \cap H| = \infty \quad \Rightarrow \quad |\dot{K}_\varepsilon(t) \cap H| = \infty \quad \Rightarrow \quad \dot{K}_\varepsilon(t) \cap H \neq \emptyset$$

4.18 $\Rightarrow$ 4.17 Egyre szűkülő környezetet veszünk: $\varepsilon > \varepsilon_2 > \ldots > \varepsilon_n > 0$

$$\dot{K}_\varepsilon(t) \cap H \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists h_1 \in \dot{K}_\varepsilon(t) \cap H$$

$$\dot{K}_{\varepsilon_2}(t) \cap H \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad \exists h_2 \in \dot{K}_{\varepsilon_2}(t) \cap H$$

$$\vdots$$

$$\Longrightarrow \{h_n\} \subset \dot{K}_\varepsilon(t) \cap H \quad \Rightarrow \quad |K_\varepsilon(t) \cap H| = \infty$$

■

Tétel 4.3 *$t \in \mathbb{R}$ a $H \subset \mathbb{R}$ torlódási pontja, ha $\exists h_n \in H, h_n \neq t$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = t$.*

4.3. Függvények határértéke

Definíció 4.19 *Az f függvény* ***határértéke*** *x_0-ban A, jelölve: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, ha*

1. *x_0 torlódási pontja D_f-nek és*
2. *$\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < |x - x_0| < \delta$*

Megjegyzés*: Nem kell, hogy $x_0 \in D_f$. x_0-ban felvett függvényérték nem befolyásolja a határértéket.*

Definíció 4.20 *Az f függvény* ***jobboldali határértéke*** *x_0-ban A, ha*

1. *x_0 torlódási pontja $D_f \cap (x_0, +\infty)$-nek és*
2. *$\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < x - x_0 < \delta$*

Jelölés*: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ vagy $f(x_0 + 0) = A$*

Definíció 4.21 *Az f függvény* ***baloldali határértéke*** *x_0-ban A, ha*

1. *x_0 torlódási pontja $D_f \cap (-\infty, x_0)$-nak és*
2. *$\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $x \in D_f$ és $0 < x_0 - x < \delta$*

Jelölés*: $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$ vagy $f(x_0 - 0) = A$*

Megjegyzés: Legyen x_0 a D_f belső pontja, ekkor:

Tétel 4.4 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \;\Leftrightarrow\; f(x_0 + 0) = f(x_0 - 0) = A$

Példák függvények határértékeinek, definícióval történő meghatározására

1. Definícióval igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to 2} \sqrt{2x+5} = 3 \qquad (\delta(\varepsilon) =?)$$

$D_f = [-\frac{2}{5}, \infty]$

$$|\sqrt{2x+5} - 3| = \left|\frac{(\sqrt{2x+5}-3)(\sqrt{2x+5}+3)}{\sqrt{2x+5}+3}\right| = \left|\frac{2x-4}{\sqrt{2x+5}+3}\right| = \frac{2|x-2|}{\sqrt{2x+5}+3} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{3} \cdot |x-2| < \varepsilon \qquad \text{teljesül, ha } |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Tehát $\boxed{\delta(\varepsilon) = \frac{3\varepsilon}{2}}$.

2. Definícióval igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to 2}(x^2 - 3x + 1) = -1 \qquad (\delta(\varepsilon) =?)$$

$$|x^2 - 3x + 1 - -1| = |x^2 - 3x + 2| = |x-1||x-2|$$

Nyugodtan feltehetjük, hogy $\delta(\varepsilon) \leqslant 1$, ekkor $|x-1| < 2$, tehát:

$$|x-1||x-2| < 2|x-2| < \varepsilon$$

Innen: $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$. (Az 1 a fenti feltevés miatt kell)

De akár feltehetjük, azt is, hogy $\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{2}$, ekkor $|x-1| < \frac{3}{2}$, így:

$$|x-1||x-2| < \frac{3}{2}|x-2| < \varepsilon$$

Tehát ebből $\delta(\varepsilon) = \min\left\{\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{1}{2}\right\}$.

3. Definícióval igazoljuk, hogy:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{x-3}{x^2-9}\right) = \frac{1}{6} \qquad (\delta(\varepsilon) = ?)$$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm 3\}$

$$\left|\frac{x-3}{x^2-9} - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{-x^2+6x-9}{6x^2-54}\right| = \left|\frac{(x-3)^2}{6(x+3)(x-3)}\right| = \frac{|x-3|}{6|x+3|}$$

Tegyük fel, hogy $\delta(\varepsilon) \leqslant 1$, ekkor $\frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{5}$ (hiszen $5 < |x+3| < 7$). Tehát:

$$\frac{|x-3|}{6|x+3|} < \frac{|x-3|}{30} < \varepsilon$$

Így $\delta(\varepsilon) = \min\{30\varepsilon, 1\}$.

Tétel 4.5 $\boxed{\textit{Átviteli-elv}}$ *(Szükséges és elégséges feltétel határérték létezésére)*

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \forall\{x_n\} \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \text{ sorozatra, melyre } x_n \in D_f \setminus \{x_0\} \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A \quad \text{(sorozat határérték)} \end{array}}$$

Megjegyzés: Főleg határérték **nem létezésére** használjuk, mert ahhoz, hogy bebizonyítsuk ennek segítségével, hogy létezik hatáérték, végtelen sorozatot kell megvizsgálni.

Bizonyítás 4.5

$\Rightarrow$ Teljesül, hogy $|f(x) - A| < \varepsilon$, ha $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ és $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$. Ebből:

$$|x_n - x_0| < \delta(\varepsilon) \quad \text{ha } n > N_1(\delta(\varepsilon))$$

De ekkor:

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon \quad \text{ha } n > N_1(\delta(\varepsilon))[= N(\varepsilon)]$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy $f(x_n) \to A$.

$\Leftarrow$ $\forall\{x_n\} \to x_0$-ra $f(x_n) \to A$. Következik-e, hogy $f(x) \to A$? Indirekt bizonyítjuk: Tegyük fel, hogy $\exists\varepsilon > 0$, melyre $\nexists\delta(\varepsilon)$, hogy:

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \text{ha } 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Tehát bármilyen δ-ra:

$$|f(x) - A| \geqslant \varepsilon, \text{ha } 0 < |x - x_0| < \delta$$

Vagyis $\delta = \dfrac{1}{m}$-re ($m \in \mathbb{N}^+$) is igaz, vagyis $\exists x_m$, hogy:

$$0 < |x_m - x_0| < \frac{1}{m} \qquad \text{hiszen feltétel alapján } \forall x_m \to x_0$$

De $|f(x_m) - A| \geqslant \varepsilon$. Ez viszont ellentmondás, hiszen ekkor $f(x_m) \nrightarrow A$. ∎

Példa: $\lim\limits_{x\to 0} \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) =?$ $\qquad D_f : \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Átviteli elvvel igazoljuk, hogy **nem** létezik!

Vegyünk fel két olyan sorozatot, melyre $\cos\left(\frac{1}{x_n}\right) \equiv 1$, illetve $\cos\left(\frac{1}{y_n}\right) \equiv -1$.

Tehát $x_n = \dfrac{1}{2n\pi}$; $\quad y_n = \dfrac{1}{\pi + 2n\pi}$ Mindkettőre: $x_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ és $y_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. **De**:

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1 \qquad \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{1}{y_n}\right) = -1}_{1\neq -1}$$

Így az Átviteli-elv alapján **nem** létezik a határérték!

4.3.1. Végesben vett határértékek

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{r}
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \\
\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A \\
\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0, \text{hogy} \\ |f(x) - A| < \varepsilon, \text{ha}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l}
0 < |x - x_0| < \delta \\
0 < x - x_0 < \delta \\
0 < x_0 - x < \delta
\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{r}
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty \\
\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \infty \\
\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \infty
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\forall \Omega > 0 : \exists \delta(\Omega) > 0, \text{hogy} \\ f(x) > \Omega, \text{ha}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l}
0 < |x - x_0| < \delta \\
0 < x - x_0 < \delta \\
0 < x_0 - x < \delta
\end{array}\right. \\
\left.\begin{array}{r}
\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \\
\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = -\infty \\
\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = -\infty
\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\forall \Omega > 0 : \exists \delta(\Omega) > 0, \text{hogy} \\ f(x) < -\Omega, \text{ha}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l}
0 < |x - x_0| < \delta \\
0 < x - x_0 < \delta \\
0 < x_0 - x < \delta
\end{array}\right.
\end{array}\right\} x \in D_f$$

Példa: $\lim\limits_{x\to 4+0} \dfrac{1}{8-2x} = -\infty \quad \delta(\Omega) =?$

$$\text{Kell, hogy:} \qquad \frac{1}{8-2x} < -\Omega \quad \text{ha } 0 < x - 4 < \delta(\Omega)$$

$$\frac{1}{-2(x-4)} < -\Omega$$

$$-2(x-4) > -\frac{1}{\Omega}$$

$$x - 4 < \frac{1}{2\Omega}$$

Ez akkor igaz, ha $0 < x - 4 < \delta(\Omega)$, tehát $\boxed{\delta(\Omega) = \dfrac{1}{2\Omega}}$.

4.3.2. Végtelenben vett határértékek

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\forall\varepsilon>0:\exists P(\varepsilon)>0,\text{ hogy}\\ |f(x)-A|<\varepsilon,\text{ ha}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l}x>P(\varepsilon)\\ \\ x<-P(\varepsilon)\end{array}\right\} x\in D_f$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty\end{array}\right\} \quad \begin{array}{c}\forall\Omega>0\text{-hoz}\\ \exists P(\Omega)>0,\text{ hogy}\end{array} \quad \left\{\begin{array}{l}f(x)>\Omega,\text{ ha } x>P(\Omega)\\ f(x)>\Omega,\text{ ha } x<-P(\Omega)\\ f(x)<-\Omega,\text{ ha } x>P(\Omega)\\ f(x)<-\Omega,\text{ ha } x<-P(\Omega)\end{array}\right\} x\in D_f$$

Példa: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2-3x}{x+1}=-3 \quad P(\varepsilon)=? \qquad D_f:\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

$$\left|\frac{2-3x}{x+1}+3\right|=\left|\frac{2-3x+3x+3}{x+1}\right|=\frac{5}{|x+1|}\overset{x>-1}{=}\frac{5}{x+1}<\varepsilon \qquad \text{ha } x>\boxed{\frac{5}{\varepsilon}-1=P(\varepsilon)}$$

Megjegyzés: Az átviteli-elv és a rendőr-elv is működik *mindegyik* határérték típusra.

1. példa: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin x}{x^2+3}=0$. Rendőr-elv alapján:

$$\underbrace{\frac{-1}{x^2+3}}_{\to 0}\leqslant\frac{\sin x}{x^2+3}\leqslant\underbrace{\frac{1}{x^2+3}}_{\to 0}$$

Megjegyzés: Az, hogy a bal és jobb oldal miért tart 0-hoz (bár kézenfekvő), a következő fejezetben tanultak alapján indokolható.

2. példa: $\nexists\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$. Átviteli-elv alapján:

$$\left.\begin{array}{lcl}x_k=k\pi\xrightarrow{k\to\infty}\infty & \Rightarrow & \sin(x_k)\equiv 0\\ y_k=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\xrightarrow{k\to\infty}\infty & \Rightarrow & \sin(y_k)\equiv 1\end{array}\right\}\lim_{k\to\infty}\sin(x_k)\neq\lim_{k\to\infty}\sin(y_k)\Rightarrow\nexists\lim_{x\to\infty}\sin x$$

4.4. Műveletek függvényekkel

Pontonként definiált műveletek; $x\in D=D_f=D_g\subset\mathbb{R}$

$$(f+g)(x):=f(x)+g(x)$$

$$(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)$$

$$(cf)(x):=c\cdot f(x) \quad c\in\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x):=\frac{f(x)}{g(x)} \qquad g(x)\neq 0$$

$$(f\circ g)(x):=f(g(x)) \qquad g(x)\in D_f$$

4.4.1. Határértékre vonatkozó tételek

Tétel 4.6 *Ha* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = A$, $\exists \lim_{x \to x_0} g(x) = B$ *és* $c \in \mathbb{R}$, *akkor:*

$$\lim_{x \to x_0} (c \cdot f)(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = c \cdot A$$

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = A + B$$

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)} = \frac{A}{B} \qquad \text{ha } B \neq 0$$

Bizonyítás 4.6
Mindegyiket az átviteli-elvvel könnyedén bizonyítható, pl. a szorzatra:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \to x_0,\ x_n \in D_f \setminus \{0\} \text{ és } \exists \lim_{n \to \infty} f(x_n) = A$$

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = B \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \to x_0,\ x_n \in D_f \setminus \{0\} \text{ és } \exists \lim_{n \to \infty} g(x_n) = B$$

Tehát a sorozatokra tanult szabályok értelmében:

$$\lim_{n \to \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{n \to \infty} (f(x_n) \cdot g(x_n)) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \to \infty} g(x_n)$$

Most alkalmazva az átviteli-elv $\Rightarrow$ irányát:

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) \cdot \lim_{n \to \infty} g(x_n) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) = A \cdot B$$

És az eredetire alkalmazva az átviteli-elv $\Leftarrow$ irányát:

$$\lim_{n \to \infty} (f \cdot g)(x_n) = \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = A \cdot B$$

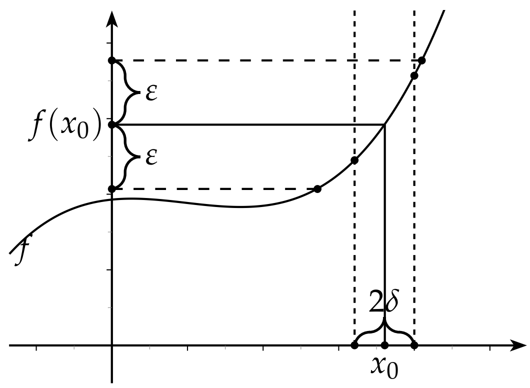
■

4.5. Folytonosság

Definíció 4.22 *Legyen* $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$. f ***folytonos*** x_0*-ban, akkor* $\exists f(x_0)$ *és* $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$, *illetve* $f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Alternatív definíciók:

Definíció 4.23 *Legyen* $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$. f ***folytonos*** x_0*-ban, ha* $\forall \varepsilon > 0$ *esetén* $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, *hogy* $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *ha* $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$.



Definíció 4.24 *f **folytonos** x_0-ban, ha* $f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$

Definíció 4.25 *f **jobbról folytonos** x_0-ban, ha* $f(x_0) = f(x_0+0)$

Definíció 4.26 *f **balról folytonos** x_0-ban, ha* $f(x_0) = f(x_0-0)$

Tétel 4.7 $x_0 \in \text{Int Df}$. *f folytonos x_0-ban $\quad\Leftrightarrow\quad$ f balről és jobbról folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás 4.7
Határértékre vonatkozó hasonló tétel alapján következik. ∎

Tétel 4.8 *Ha f, g folytonos x_0-ban, akkor $c\cdot f, f+g, f\cdot g$ is folytonos x_0-ban ($c\in\mathbb{R}$) és $g(x_0)\neq 0$ esetén $\dfrac{f}{g}$ is folytonos x_0-ban.*

Bizonyítás 4.8
Visszavezethető a függvény határértékre vonatkozó számolási szabályokra.
Például a szorzás:

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0)$$ ∎

Tétel 4.9 $\boxed{\textit{Folytonos függvények kompozíciója folytonos}}$
Ha g folytonos x_0-ban és f folytonos $g(x_0)$-ban, akkor $f\circ g$ folytonos x_0-ban.

Bizonyítás 4.9

$$\lim_{x\to x_0}(f\circ g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x\to x_0} g(x)) = f(g(x_0)) = (f\circ g)(x_0)$$ ∎

Lemma 4.1 *Folytonossági lemmák*

- *Minden polinom folytonos $\forall x_0\in\mathbb{R}$-ben.*
- *Minden racionális tört függvény (polinom/polinom) folytonos mindenütt, ahol értelmezve van*

4.5.1. Szakadási helyek

Ha f *nem* folytonos x_0-ban, akkor x_0-ban **szakad**. Fajtái:

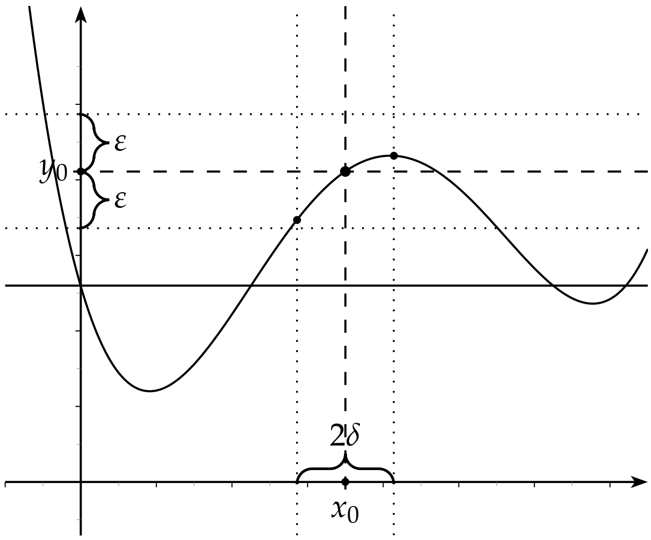
1. *Elsőfajú*: ha x_0-ban szakad és $\exists f(x_0+0)\in\mathbb{R}$ és $\exists f(x_0-0)\in\mathbb{R}$.
   (a) *Megszüntethető*, ha $f(x_0+0) = f(x_0-0)$
   (b) *Nem megszüntethető*, ha $f(x_0+0)\neq f(x_0-0)$. Másnevén: *véges ugrás*.
2. *Másodfajú*: ha x_0 nem elsőfajú szakadási hely.

4.5.2. Folytonos függvények tulajdonságai

Definíció 4.27 *f folytonos az $(a;b) \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\forall x \in (a;b)$ ponton folytonos.*

Definíció 4.28 *f folytonos az $[a;b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $(a;b)$-n folytonos és jobbról folytonos a-ban és balról folytonos b-ben.*

Tétel 4.10 *Ha f folytonos x_0-ban és $f(x_0) > c$, akkor $\exists \delta > 0$, hogy $x \in K_\delta(x_0)$ esetén $f(x) > c$.*



Bizonyítás 4.10
Mivel f folytonos x_0-ban ezért a folytonosság definícióját (4.23) alkalmazhatjuk. Legyen $\varepsilon = \dfrac{f(x_0) - c}{2}$. Ehhez létezik olyan $\delta(\varepsilon)$, hogy ha

$$|x - x_0| < \delta(\varepsilon), \text{ akkor } |f(x) - f(x_0)| = |f(x) - y_0| < \varepsilon$$

$$|f(x) - y_0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad y_0 - \varepsilon < f(x) < y_0 + \varepsilon$$

Mivel $\varepsilon = \dfrac{y_0 - c}{2}$, ezért:

$$c < c + \varepsilon = y_0 - \varepsilon < f(x)$$

■

4.5.3. Tételek korlátos zárt intervallumon folytonos függvényekhez

Tétel 4.11 $\boxed{\textit{Bolzano-tétel}}$
Ha f folytonos $[a,b]$-n és $f(a) < c < f(b)$, akkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = c$

Bizonyítás 4.11
(Vázlat) - Cantor-axióma (lásd 8. oldal)
Legyen $a_0 = a, b_0 = b$ és $I_0 = [a_0, b_0]$. Ha $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right) = c \quad \Rightarrow$ kész $\xi = \dfrac{a+b}{2}$
Ha $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) < c \quad \Rightarrow \quad I_1 := \left[\dfrac{a_0+b_0}{2}; b_0\right]$
Ha $f\left(\dfrac{a_0+b_0}{2}\right) > c \quad \Rightarrow \quad I_1 := \left[a_0; \dfrac{a_0+b_0}{2}\right]$
És így tovább, tehát mindig elfelezzük az intervallumot és azzal az intervallummal dolgozunk tovább, ami tartalmazza c-t. Tehát n lépés után: $f(a_n) < c; f(b_n) > c$

Ha $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) = c \quad \Rightarrow$ kész $\xi = \frac{a_n+b_n}{2}$

Ha $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) < c \quad \Rightarrow \quad I_{n+1} := \left[\frac{a_n+b_n}{2}; b_n\right]$

Ha $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right) > c \quad \Rightarrow \quad I_{n+1} := \left[a_n; \frac{a_n+b_n}{2}\right]$

$$I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n$$

$|I_n| = \frac{(b-a)}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, de Cantor-axióma alapján nem üres $\Rightarrow$ csak 1 pontot tartalmazhat:

$$\bigcap_n I_n = \{\xi\}$$

Amit még be kell látni: $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$ és $b_n \xrightarrow{n\to\infty} \xi$. Ez vázlatosan: Mivel $f(a_n) < c$ és $f(b_n) > c$, de mind a kettő egy egyre szükülő intervallumok két vége, melyek egyetlen közöspontja ξ, ezért:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} f(\xi) = c$$

■

Tétel 4.12 *Bolzano-tétel egy következménye*
Ha f folytonos $[a,b]$-n és $f(a) < 0 < f(b)$, akkor f-nek van gyöke (a,b)-n. (Tehát a Bolzano-tételt $c = 0$-ra alkalmazzuk)

Megjegyzés: Nagyon hatékony gyökkereső algoritmusokat lehet ennek felhasználásával írni.

Tétel 4.13 *Bolzano-tétel egy következménye*
Minden páratlan fokszámú polinomnak van legalább 1 valós gyöke.

$$p(x) = x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n} + \ldots + a_0 \qquad (n \in \mathbb{Z}^+)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$$

Tétel 4.14 $\boxed{\textit{Weierstrass I. tétel}}$
Korlátos zárt intervallumon[1] folytonos függvény korlátos.

Bizonyítás 4.14
(*) Indirekt
Tfh: f folytonos $[a,b]$-n, de nem korlátos felülről, tehát
1 nem felső korlát $\Rightarrow \exists x_1 \in [a,b] : f(x_n) > 1$.
2 nem felső korlát $\Rightarrow \exists x_2 \in [a,b] : f(x_n) > 2$.
$\vdots$
$n \in \mathbb{N}$ nem felső korlát $\Rightarrow \exists x_n \in [a,b] : f(x_n) > n$.
$\forall x_n \in [a,b]$, tehát $\{x_n\}$ korlátos $\overset{\text{B. W. kiv. t.}}{\Longrightarrow}$ $\exists x_{n_k}$ konvergens részsorozat: $\{x_{n_k}\} \to t \in [a,b]$.
$f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} \infty$, de mivel $f(x_{n_k})$ folytonos, ezért $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(t)$, de ez nem lehet, hiszen a határérték egyértelmű. $\lightning$

[1] Ehelyett mondhatjuk, hogy *kompakt halmazon* – ekkor egy erősebb állítást kapunk

Tétel 4.15 $\boxed{\textit{Weierstrass II. tétel}}$
Korlátos zárt intervallumon[2] folytonos függvény felveszi szélsőértékeit. Tehát

$$m := \operatorname{Inf}\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \in \mathbb{R} \qquad (\textit{W. I. alapján korlátos})$$

$$M := \operatorname{Sup}\{f(x) \mid x \in [a,b]\} \in \mathbb{R}$$

Ekkor $\exists \alpha, \beta \in [a,b]$, *hogy* $f(\alpha) = M, f(\beta) = b$.

Bizonyítás 4.15
Megmutatjuk, hogy $\exists \alpha : f(\alpha) = M$. Hasonlóan lehetne $f(\beta) = m$-re.
Indirekt, tfh: $\nexists \alpha \in [a,b] : f(\alpha) = M \quad \Rightarrow \quad M - f(x) > 0$, ha $x \in [a,b] \quad \Rightarrow$
$g(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$ folytonos $[a,b]$-ben $\overset{\text{W I. t.}}{\Longrightarrow}$ g korlátos $[a,b]$-ben, tehát $\exists K$:

$$\frac{1}{M - f(x)} < K \qquad x \in [a,b], K > 0$$

$$M - f(x) > \frac{1}{K} \qquad x \in [a,b], K > 0$$

$$f(x) < M - \frac{1}{K} < M$$

De ez nem lehet igaz, hiszen M a legkisebb felső korlátunk volt, mi viszont találtunk ennél kisebbet. ∎

Példa: $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 4}{x^2 + x - 2}$.

a. Hol és milyen szakadásai vannak?
   $f(x) = \dfrac{x^4 + 3x^2 - 4}{(x+2)(x-1)}$, tehát $x = -2$ és $x = 1$-ben nem értelmezett a függvény, itt milyen szakadások vannak?
   $\lim\limits_{x \to -2 \pm 0} f(x) = \mp\infty \quad \Rightarrow \quad$ másodfajú szakadás.
   $\lim\limits_{x \to 1 \pm 0} f(x) = \dfrac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad$ megszüntethető szakadás.

b. Van-e minimuma a $[-1,0]$-n?
   f folytonos $[-1,0]$-n, mivel mindenhol folytonos kivéve $x = -2$ és $x = 1$-ben. $[-1,0]$ egy korlátos zárt intervallum, tehát az f Weierstrass II. tétele alapján felveszi a szélső értékeket $\Rightarrow$ $\exists$ minimuma az $[-1,0]$-en.

4.5.4. Egyenletes folytonosság

Egyenletes folytonosság definícióját motiváljuk:

1. Mutassuk meg, hogy $f(x) = x^2 + 2$ folytonos az [1,2] minden pontjában. $\delta(\varepsilon, x_0) = ?$
   $x_0 \in [1,2]$

$$[f(x) - f(x_0)| = |x^2 + 2 - x_0^2 - 2| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0| \cdot |x + x_0| < \varepsilon$$

$$|x - x_0| \cdot |x + x_0| \leqslant |x - x_0| \cdot |2 + x_0| < \varepsilon \qquad \text{teljesül, ha:}$$

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2 + x_0} = \delta(\varepsilon, x_0)$$

[2]Ehelyett mondhatjuk, hogy *kompakt halmazon* – ekkor egy erősebb állítást kapunk

2. Létezik-e „univerzális” x_0-tól független $\delta(\varepsilon)$? Keressük a legkisebb $\delta(\varepsilon, x_0)$-t:
$$\delta(\varepsilon) := \frac{\varepsilon}{2+2} = \underbrace{\frac{\varepsilon}{4}}_{<0} \left[\leqslant \frac{\varepsilon}{|2+x_0|} = \delta(\varepsilon, x_0) \right]$$

Definíció 4.29 $\boxed{\textit{Egyenletes folytonosság}}$ *(Nem lokális tulajdonság!)*
*Az f az $A \subset D_f$ halmazon **egyenletesen folytonos**, ha $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta(\varepsilon) > 0$ (x_0-tól független, „univerzális”), hogy*
$$|f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } |x_1 - x_0| < \delta(\varepsilon) \text{ és } x_1, x_0 \in A$$

Megjegyzés: Ha f egyenletesen folytonos A-n, akkor folytonos $\forall x_0 \in A$-ban.

Példa: Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = x^2 + 2$ az $[1, \infty)$-on?
Tekintsük az $x_n = n$ és $y_n = n + \frac{1}{n}$ sorozatokat.
$$|y_n - x_n| = \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$
Tehát ha n-el tartunk végtelenbe, akkor a sorozatok n. tagjai egyre közelebbek lesznek egymáshoz. Ha vizsgáljuk az ezen számokhoz tartozó függvényértékek különbségét, akkor:
$$|f(y_n) - f(x_n)| = \left| \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2 \right| = 2 + \frac{1}{n} > 2$$
Tehát ha $n \to \infty$, akkor ezen két függvényértékek különbsége nagyobb lesz mint 2. Tehát ha $\varepsilon < 2$, akkor $\nexists \delta(\varepsilon)$, hiszen bármilyen kicsire is vesszük a $\delta(\varepsilon)$-t, láthatjuk, hogy a függényértékek különbsége nagyobb lesz, mint 2. Tehát **nem** egyenletesen folytonos a függvényünk az $[1, \infty)$ intervallumon.

Tétel 4.16 *Korlátos zárt intervallumon*[3] *folytonos függvény egyenletesen folytonos!*

Példák (ha a fentit tételt nem alkalmazhatjuk)

1. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \frac{1}{x}$ az $[1, \infty)$-on?
A fenti tételt nem használhatjuk, hiszen nem korlátos az intervallum, de ez nem zárja ki azt, hogy a függvényünk egyenletesen folytonos, pusztán a tételből nem következik. A kritikus rész az 1 környezete, hiszen ha ott találunk $\delta(\varepsilon)$-t, akkor az jó lesz végig, hiszen utána ha távolodunk az origótól, akkor adott ε esetén, a két helyettesítési pont egyre távolabb lesz egymástól, tehát jó lesz az előzőekben talált $\delta(\varepsilon)$. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $1 \leqslant x_0 < x_1$.
$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x_0 - x_1|}{x_0 x_1} = \frac{x_1 - x_0}{\underbrace{x_0 x_1}_{\geqslant 1}} \leqslant \frac{x_1 - x_0}{1}$$
$$\frac{x_1 - x_0}{1} < \varepsilon \quad \text{ha } |x_1 - x_0| < \boxed{\delta(\varepsilon) = \varepsilon}$$
Tehát $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ jó választás; egyenletesen folytonos $f(x)$ az $[1, \infty)$-n.

[3]Ehelyett mondhatjuk, hogy *kompakt halmazon* – ekkor egy erősebb állítást kapunk

2. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \sqrt{x}$ az $[0, \infty)$ intervallumon?
   Itt is a kritikus helyzetet keressük ez pedig az, ha mindkét szám helyettesítési érték közel van a 0-hoz. Legyen $\varepsilon > 0$ adott és $0 \leqslant x_0 < x_1$

$$|f(x_1) - f(x_0)| = |\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}| = (\sqrt{x_1} - \sqrt{x_0}) \cdot \frac{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}} = \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_0}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{x_1 - x_0}{\sqrt{x_1 - x_0} + \sqrt{x_0 - x_0}} = \sqrt{x_1 - x_0} < \varepsilon$$

   Ez akkor teljesül, ha $|x_1 - x_0| < \boxed{\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2}$

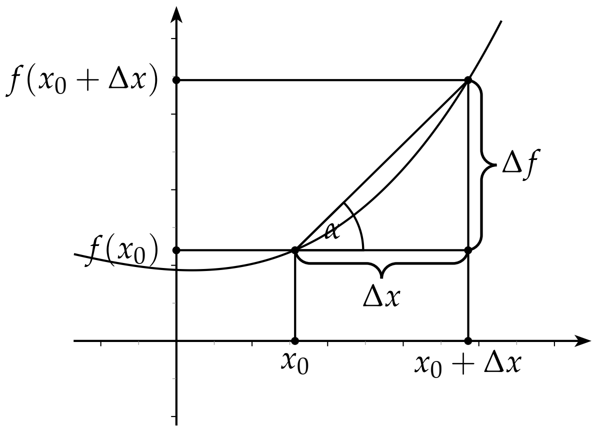
3. Egyenletesen folytonos-e az $f(x) = \dfrac{1}{x}$ az $(0, 1]$ intervallumon (korlátos, de nem zárt)?
   Vegyünk fel két pontsorozatot: $x_n = \dfrac{1}{n} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ és $y_n = \dfrac{1}{n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 0$. Ezek ha meggondoljuk, egyre közelebb lesznek egymáshoz.

$$|f(x_n) - f(y_n)| = |n - (n+1)| = 1 < \varepsilon$$

   Tehát, ha $\varepsilon < 1$, akkor $\nexists \delta(\varepsilon)$, mert ha létezne, akkor vegyünk, olyan n-et, hogy $|x_n - y_n| < \delta(\varepsilon)$, de ekkor $|f(x_n) - f(y_n)| = 1 > \varepsilon$ ↯ .

4.6. Függvények differenciálása

Definíció 4.30 *Differenciahányados:* $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$

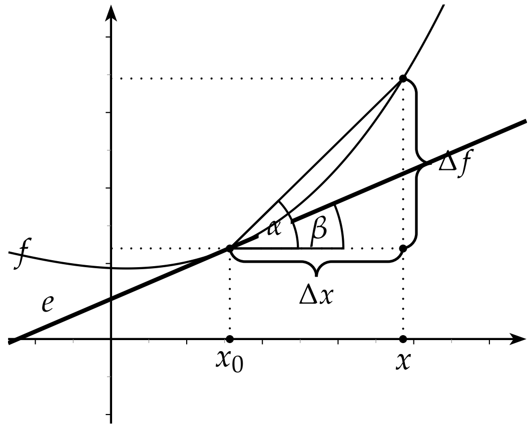


Ha $\Delta x \to 0$, akkor az x_0-ban vett érintőt kapjuk: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x)$.

Definíció 4.31 *Differenciálhányados:* $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$

$$f'(x_0) = \frac{df(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Definíció 4.32 *Derivált függvény:* $f' : x_0 \mapsto f'(x_0)$. *(Azaz minden pontban deriváljuk az eredeti függvényt)*



Húr meredeksége: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$f'(x_0) = \operatorname{tg}\beta = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

Derivált függvény: $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Definíció 4.33 *Jobb-oldali derivált:* $f'_+(x_0) = \lim\limits_{h\to 0+0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Definíció 4.34 *Bal-oldali derivált:* $f'_-(x_0) = \lim\limits_{h\to 0-0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Tétel 4.17

$$\boxed{\exists f'(x_0) = A \quad \Leftrightarrow \quad \exists f'_-(x_0), \exists f'_+(x_0) \textit{ és } f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = A}$$

Bizonyítás 4.17
Legyen $g(h) = \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, ekkor az állítást a következő képpen foglmazhatjuk át felhasználva a megfelelő definíciókat:

$$\exists \lim_{h\to 0} g(h) = A \qquad \Leftrightarrow \qquad \underbrace{\lim_{h\to 0+0} g(h)}_{=g(0+0)} = \underbrace{\lim_{h\to 0-0} g(h)}_{=g(0-0)} = \lim_{h\to 0} g(h)$$

Ez pedig igaz a 4.4 tétel (39. oldal) alapján. ■

Példa: $f(x) = |x|$. $\nexists f'(0)$, hiszen $f'_+(x_0) = 1$, de $f'_-(x_0) = -1$. Ekkor 0-ban *töréspont*ja van a függvénynek.

Definíció 4.35 $f(x)$ ***differenciálható*** $(a;b)$*-n, ha* $\forall x \in (a;b)$ *esetén* $\exists f'(x)$.

Definíció 4.36 $f(x)$ ***differenciálható*** $[a;b]$*-n, ha differenciálható* $(a;b)$*-n és* $\exists f'_-(a)$ *és* $\exists f'_+(b)$.

4.6.1. „Ismert” függvények deriváltja

$f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{c-c}{h} = 0$

$g(x) = x$; $g'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x+h-x}{h} = 1$

$i(x) = x^2$; $i'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{h^2+2xh}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h+2x = 2x$

$j(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Ennek a deriváltjához a binomiális-tételt alkalmazzuk:

Lemma 4.2 $\boxed{\textit{Binomiális-tétel}}$

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}\cdot b + \binom{n}{2}a^{n-2}\cdot b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a\cdot b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

$$j'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(n\cdot x^{n-1}\cdot h + \binom{n}{2} x^{n-2}\cdot h^2 + \ldots + h^n\right) = n\cdot x^{n-1}$$

Tehát természetes számokra igaz. Bármely valós számra megcsinálhatjuk a definíció segedelmével a bizonyítást, tehát igaz lesz az állítás valók számokra is. Nézzünk meg egy két példát:

$j(x) := \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

$$(\sqrt{x})' = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \checkmark$$

$j(x) := \frac{1}{x} = x^{-1}$.

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{x}{x(x+h)}-\frac{x+h}{x(x+h)}\right) =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)} = \frac{-1}{x^2} = -1\cdot x^{-2} \quad \checkmark$$

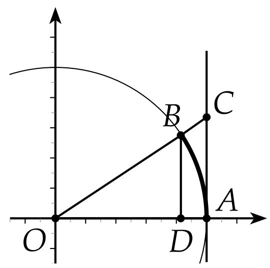
Tehát: $\boxed{(x^n)' = n\cdot x^{n-1} \quad n\in\mathbb{R}}$ (később explicit bizonyítjuk)

Tétel 4.18

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1}$$

Bizonyítás 4.18

$$T_{OAC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x} \qquad T_{OAB\ \text{körcikk}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot x \qquad T_{OBD} = \frac{1}{2}\cdot\sin x\cos x$$



$$T_{OBD} \leqslant T_{OAB\ \text{körcikk}} \leqslant T_{OAC}$$

$$\frac{1}{2}\cdot\sin x\cos x \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \qquad /\cdot\frac{2}{\sin x}$$

$$\cos x \leqslant \frac{x}{\sin x} \leqslant \frac{1}{\cos x}$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\ 1/1}}{\frac{1}{\cos x}} \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \underset{\substack{\downarrow\\ 1}}{\cos x}$$

Rendőr szabály használva: $\frac{\sin x}{x} \to 1$ ∎

Szinusz és koszinusz deriváltjai

$$(\sin x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\sin x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} + \cos x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right) = \boxed{\cos x}$$

$$(\cos x)' = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \sin x \sin h - \cos x}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\cos x \cdot \underbrace{\frac{\cos h - 1}{h}}_{\to 0} - \sin x \cdot \underbrace{\frac{\sin h}{h}}_{\to 1} \right) = \boxed{-\sin x}$$

Tétel 4.19 *Szükséges és elégséges feltétel a differenciálhatóságra*

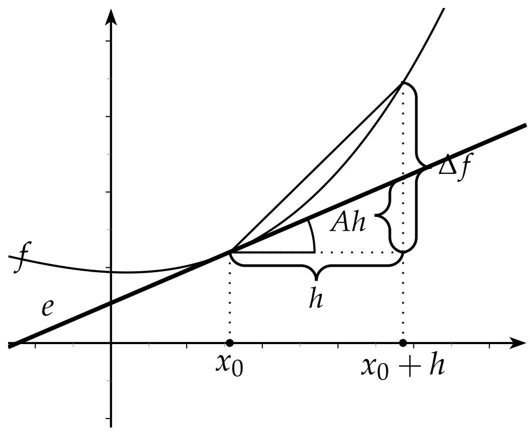
Legyen $x_0 \in \operatorname{Inf} Df$.

$$\exists f'(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0) =$$

$$= \underbrace{A \cdot h}_{\textit{főrész}} + \underbrace{\varepsilon(h) \cdot h}_{\textit{elenyésző rész}} \qquad A \in \mathbb{R}$$

$$\varepsilon(h) \xrightarrow{h\to 0} 0 \quad \textit{ekkor} \quad A = f'(x_0)$$

Ezért hívjuk a főrészt *másképpen* linearizált növekmény*nek, hiszen ha* $h \to 0$*, akkor* $A \cdot h = f'(x_0) \cdot h$.



Bizonyítás 4.19 $\Rightarrow$

$$\text{Tudjuk, hogy } \exists \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\to 0} \qquad / \cdot h$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \underbrace{f'(x_0)}_{A} \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

$\Leftarrow$

$$f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\xrightarrow{h\to 0} 0} \cdot h \qquad / : h$$

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A + \varepsilon(h)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A = f'(x_0) \in \mathbb{R}$$

■

Következmény:

Tétel 4.20 *Deriválhatóság szükséges feltétele: folytonosság*

$$\exists f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f \text{ folytonos } x_0\text{-ban}$$

Bizonyítás 4.20

$$\exists f'(x_0) \Leftrightarrow f(x_0+h) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot h + \varepsilon(h)\cdot h$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{h\to 0} f(x_0+h) = \lim_{h\to 0} f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\to 0} + \underbrace{\varepsilon(h)\cdot h}_{\to 0} = f(x_0)$$

Ha megnézzük akkor a fenti sor a folytonosság definíciója, tehát f folytonos x_0-ban. ∎

Megjegyzés: A feltétel nem elégséges! (Például: $f(x) = |x|$, hiszen folytonos 0-ban, de nem itt differenciálható)

Definíció 4.37 ***Függvény differenciálja***: *f függvény elsőrendű differenciálja az x_0 helyen a h növekmény mellett:*

$$df(x_0, h) = \underbrace{f'(x_0)\cdot h}_{\textit{linearizált főrész}}$$

Egyéb jelölések:

$$df = f'(x)\cdot dx = df(x, dx)$$

$$\frac{df}{dx} = f'(x)$$

Pl.: $d(x^3) = 3x^2\,dx$
$d(x^2) = (x+dx)^2 - x^2 = x^2 + 2x\,dx + dx^2 - x^2 \approx 2x\cdot dx$ (elsőrendben számolunk!)
Közelítéseknél lehet jól alkalmazni:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) \approx df(x_0, dx) = f'(x_0)\cdot dx$$

4.6.2. Érintő egyenlete

Egy érintő egyenlete az x_0 pontban:

$$y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

Nem nehéz meggondolni miért: a meredeksége a függvény deriváltja az x_0 pontban, és rajta van az $(x_0, f(x_0))$ pont (az érintési pont).

4.6.3. Deriválási szabályok

Tétel 4.21 *Ha $\exists f'(x_0)$ és $c \in \mathbb{R}$*

$$\boxed{\exists (c\cdot f)'(x_0) = c\cdot f'(x_0)}$$

Bizonyítás 4.21

$$(c\cdot f)'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{(cf)(x_0+h) - (cf)(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{c\cdot f(x_0+h) - c\cdot f(x_0)}{h} =$$

$$= c\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = c\cdot f'(x_0)$$

∎

Tétel 4.22 *Ha* $\exists f'(x_0)$ *és* $\exists g'(x_0)$

$$\boxed{\exists (f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)}$$

Bizonyítás 4.22

$$(f+g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f+g)(x_0+h) - (f+g)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - (f(x_0) + g(x_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} = f'(x_0) + g'(x_0)$$

■

Tétel 4.23 *Ha* $\exists f'(x_0)$ *és* $\exists g'(x_0)$; ***Leibniz-szabály***:

$$\boxed{\exists (f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + g'(x_0)\cdot f(x_0)}$$

Bizonyítás 4.23

$$(f\cdot g)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{(f\cdot g)(x_0+h) - (f\cdot g)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot g(x_0+h) - f(x_0)\cdot g(x_0) + \overbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{=0 \quad \text{trükk} \ \ddot\smile}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)\cdot \Big(g(x_0+h) - g(x)\Big) + g(x_0)\cdot \Big(f(x+h) - f(x_0)\Big)}{h} =$$

$$= f(x_0)\cdot g'(x_0) + g(x_0)\cdot f'(x_0)$$

■

Tétel 4.24 *Ha* $\exists g'(x_0)$ *és* $g(x_0) \neq 0$

$$\boxed{\exists \left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Bizonyítás 4.24

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{g(x_0+h)} - \frac{1}{g(x_0)}\right) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\cdot \frac{g(x_0) - g(x_0+h)}{g(x_0+h)g(x_0)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-\Big(g(x_0+h) - g(x_0)\Big)}{h}\cdot \frac{1}{g(x_0+h)g(x_0)} = \frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

■

Tétel 4.25 *Ha $\exists f'(x_0)$, $\exists g'(x_0)$ és $g(x_0) \neq 0$* *(Az előző két tétel következménye)*

$$\boxed{\exists \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}}$$

Bizonyítás 4.25

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(x_0) = f'(x_0) \cdot \frac{1}{g}(x_0) + f(x_0) \cdot \left(\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right) =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}$$

■

Példák

$\left(x^3 + \sqrt{x} - \frac{2}{x^3}\right)' = 3x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{-1}{2}} - 2 \cdot (-3) \cdot x^{-4}$

$(\mathrm{tg}\, x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cos x - \sin x \cdot - \sin x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$

Tétel 4.26 *Összetett függvény deriválása;* ***láncszabály***

Ha g differenciálható x_0 helyen és f differenciálható $g(x_0)$ helyen, akkor

$$\exists (f \circ g)'(x_0) = f' \circ g(x_0) \cdot g'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

Bizonyítás 4.26

$$(f \circ g)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + h) - (f \circ g)(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(g(x_0 + h)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + h) - g(x_0)} \cdot \underbrace{\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h}}_{\to g'(x_0)}$$

$\Delta g = g(x_0 + h) - g(x_0)$. Mivel $h \to 0$, ezért $\Delta g \to 0$ (g folytonos) tehát:

$$\lim_{\Delta g \to 0} \frac{f(g(x_0) + \Delta g) - f(g(x_0))}{\Delta g} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$$

■

Példák

$(\sin 2x)' = \cos(2x) \cdot 2.$

Másképp: $(\sin 2x)' = (2 \cos x \sin x)' = -2 \cdot sin^2 x + 2 \cos^2 x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2 \cos 2x.$

$\left(\sqrt{\mathrm{tg}(3x^3 + 2x)}\right)' = \frac{1}{2}(\mathrm{tg}(3x^3 + 2x))^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2(3x^3 + 2x)} \cdot (9x^2 + 2)$

4.6.4. Inverz függvény deriválása

Definíció 4.38 *f az I intervallumon **szigorúan monoton nő**, ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ esetén $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definíció 4.39 *f az I intervallumon **szigorúan monoton csökken**, ha $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in I$ esetén $f(x_1) > f(x_2)$.*

Tétel 4.27 *Ha f szig. mon. az I intervallumon, akkor $\exists f^{-1}$ (azaz f **injektív**).*

Bizonyítás 4.27
Tegyük fel, hogy f szig. mon. nő. Ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $x_1 = x_2$, különben nem teljesül a szig. monotonitás. Tehát nem lesz olyan érték, amit a függvény kétszer vesz fel, tehát az inverze is függvény marad. ∎

Tétel 4.28 *Ha $D_f = I$ intervallum és f szig. mon. I-n ($\Rightarrow \exists f^{-1}$) és f folytonos I-n, akkor $f(I)$ is intervallum és ezen f^{-1} folytonos.*

Tétel 4.29 $\boxed{\textit{Inverz függvény deriváltja}}$
Legyen

- *f szig. mon. az I-n ($\rightsquigarrow \exists f^{-1}$)*
- *f differenciálható I-n ($\rightsquigarrow$ f folytonos és f^{-1} is)*
- *$f'(x) \neq 0$, ha $x \in I$*

Ekkor f^{-1} differenciálható I belsejében és

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Bizonyítás 4.29

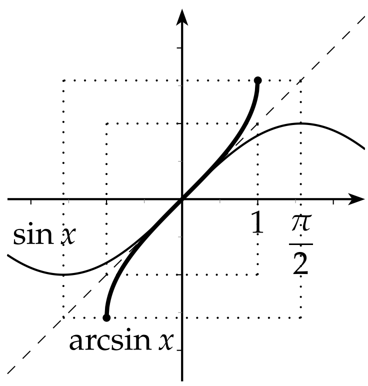
$$f^{-1}(f(x)) = x \quad \xrightarrow{\frac{d}{dx}} \quad (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$ ∎

Szögfüggvények inverzei

A $\sin x$ függvény szig. mon. nő a $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$-ben, tehát itt invertálható: $\sin^{-1} x = \arcsin x$. $\arcsin x : [-1; 1] \mapsto \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

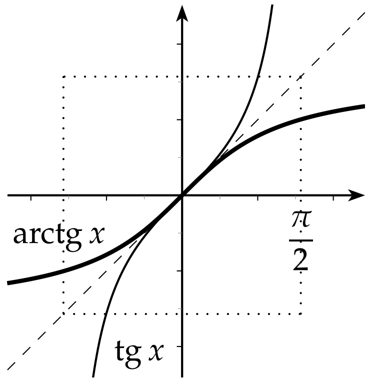
$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sin'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\underbrace{\arcsin x}_{\alpha})} \qquad (\sin\alpha = x)$$



Mivel $\cos^2\alpha = (1 - \sin^2\alpha)$, ezért $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$, de mivel $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ezért $\cos\alpha \geqslant 0$, tehát:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}} \qquad \text{ha } x \in (-1; 1)$$

A $\operatorname{tg} x$ függvény szig. mon. nő a $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$-ben, tehát itt invertálható: $\operatorname{tg}^{-1} x = \operatorname{arctg} x$. $\operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \mapsto \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

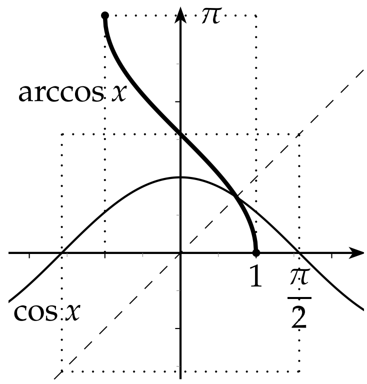


$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{tg}'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)}} = \cos^2(\underbrace{\operatorname{arctg} x}_{\alpha})$$

Mivel $\operatorname{tg}\alpha = x$ és $\cos^2\alpha = \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, ezért:

$$(\operatorname{arctg} x)' = \cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \boxed{\frac{1}{1+x^2}}$$

A $\cos x$ függvény szig. mon. csökken a $[0;\pi]$ intervallumon, tehát itt invertálható: $\cos^{-1} x = \arccos x$. $\arccos x : [-1;1] \mapsto [0;\pi]$

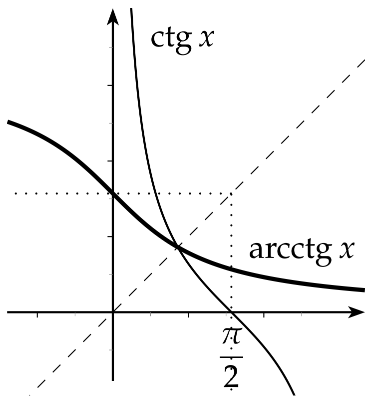


$$(\arccos x)' = \frac{1}{\cos'(\arccos x)} = \frac{1}{-\sin(\underbrace{\arccos x}_{\alpha})} \qquad (\cos\alpha = x)$$

Mivel $\sin^2\alpha = (1-\cos^2\alpha)$, ezért $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, de mivel $\alpha \in [0;\pi]$, ezért $\sin\alpha \leqslant 0$, tehát:

$$(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(\alpha)}} = \boxed{\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}} \quad \text{ha } x \in (-1;1)$$

A $\operatorname{ctg} x$ függény szig. mon. csökken a $[0;\pi]$ intervallumon, tehát itt invertálható: $\operatorname{ctg}^{-1} x = \operatorname{arcctg} x$. $\operatorname{arcctg} x : \mathbb{R} \mapsto [0;\pi]$



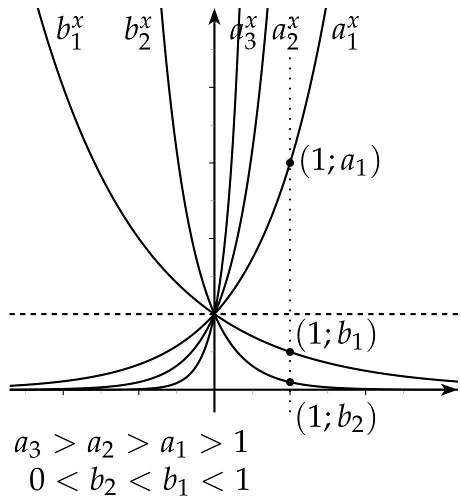
$$(\operatorname{arcctg} x)' = \frac{1}{\operatorname{ctg}'(\operatorname{arcctg} x)} = \frac{1}{-\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)}} = -\sin^2(\underbrace{\operatorname{arcctg} x}_{\alpha})$$

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\sin^2\alpha = \frac{-\sin^2\alpha}{sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$$

Mivel $\operatorname{ctg}\alpha = x$, ezért:

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2\alpha} = \boxed{-\frac{1}{1+x^2}}$$

4.6.5. Exponenciális függvények



$f : \mathbb{R} \mapsto (0;\infty)$. $f(x) = a^x$ $(a \in \mathbb{R} > 0)$

Tulajdonságok

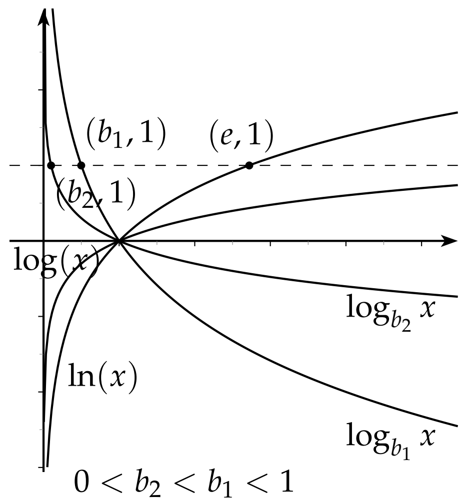
1. $f(x) = a^x$ folytonos $\mathbb{R}$-ben
2. $a^0 = 1; \quad a^1 = a$
3. $f(x) = a^x \quad \begin{cases} \text{szig. mon. nő, ha } a > 1 \\ \text{konstans 1, ha } a = 1 \\ \text{szig. mon. csökken, ha } 0 < a < 1. \end{cases}$
4. $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$
5. $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0, \text{ ha } 0 < a < 1 \\ 1, \text{ ha } a = 1 \\ \infty, \text{ ha } a > 1 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = \begin{cases} \infty, \text{ ha } 0 < a < 1 \\ 1, \text{ ha } a = 1 \\ 0, \text{ ha } a > 1 \end{cases}$

Tétel 4.30 *Ha $a = e$, akkor $x \mapsto e^x$ meredeksége 0-ban 1. Tehát $g(x) := e^x$, ekkor $g'(0) = 1$, azaz* $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h - e^0}{h} = 1$.

$$(e^x)' = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h\to 0} e^x \cdot \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\to 1} = \boxed{e^x}$$

4.6.6. Logaritmus függvények



A logaritmus függvény az exponenciális függvény inverze, azaz: $y = a^x \Leftrightarrow x = \log_a y$.
Tehát $f : (0;\infty) \mapsto \mathbb{R}$. $f(x) = \log_a x$ $(a \in \mathbb{R}; a > 0; a \neq 1)$

Tulajdonságok

1. $f(x) = \log_a x$ folytonos $(0;\infty)$-n
2. $\log_a 1 = 0; \quad \log_a a = 1$
3. $f(x) = \log_a x \quad \begin{cases} \text{szig. mon. nő, ha } a > 1 \\ \text{szig. mon. csökken, ha } 0 < a < 1. \end{cases}$
4. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
5. $\log_a x^y = y \cdot \log_a x$
6. $\lim\limits_{x\to\infty} \log_a x = \begin{cases} -\infty, \text{ ha } 0 < a < 1 \\ \infty, \text{ ha } a > 1 \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 0+0} \log_a x = \begin{cases} \infty, \text{ ha } 0 < a < 1 \\ -\infty, \text{ ha } a > 1 \end{cases}$

7. $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$

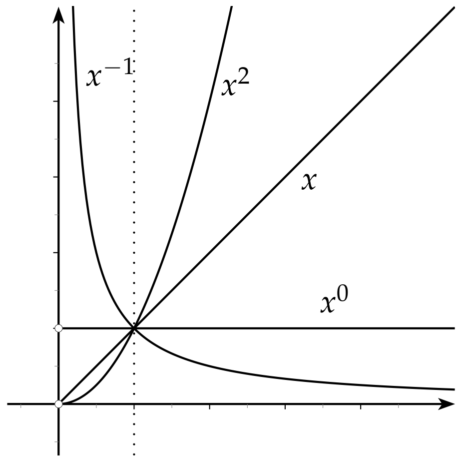
Derivált függvények

$$(\log_e x)' = (\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

$$(a^x)' = ((e^{\ln a})^x)' = (e^{x \cdot \ln a})' = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

4.6.7. Hatvány függvények



$f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$. $f(x) = x^a$ $(a \in \mathbb{R}, x > 0)$.

Tulajdonságok

$$f(x) = x^a \quad \begin{cases} \text{szig. mon. nő, ha } a > 0 \\ \text{szig. mon. csökken, ha } 0 < a. \end{cases}$$

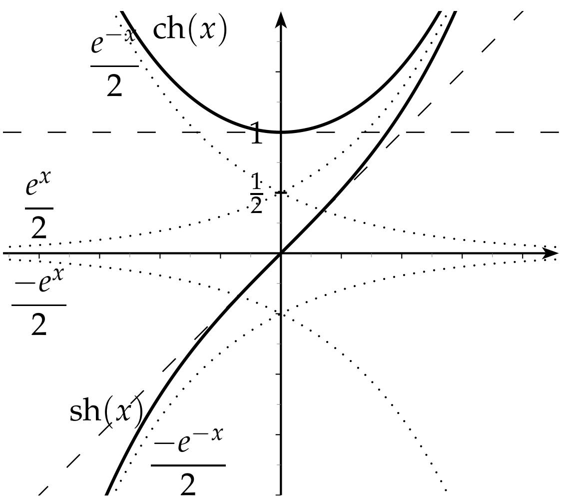
Derivált függvények

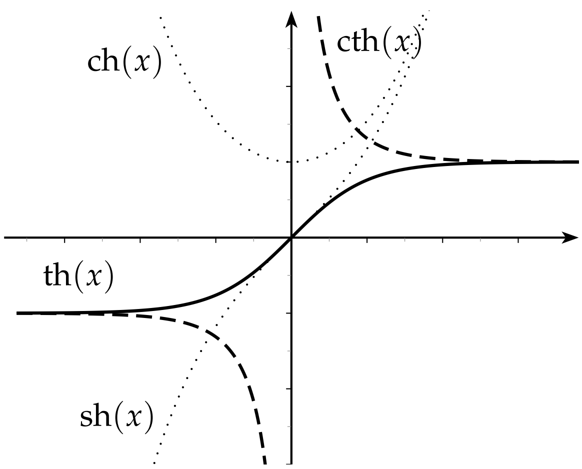
$$(x^a)' = ((e^{\ln x})^a)' = (e^{\ln x \cdot a})' = x^a \cdot \frac{a}{x} = a \cdot x^{a-1}$$

$$(x^x)' = ((e^{\ln x})^x)' = (e^{\ln x \cdot x})' = x^x \cdot \left(\frac{x}{x} + \ln x\right) = (1 + \ln x) \cdot x^x$$

4.6.8. Hiperbolikus függvények

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh}(-x) \qquad \operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$
$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(-x) \qquad \operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$





Tétel 4.31

$$\boxed{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1}$$

Bizonyítás 4.31

$$\frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + e^{-2x} + 2 - (e^{2x} + e^{-2x} - 2)}{4} = \frac{4}{4} = 1 \qquad \blacksquare$$

Tétel 4.32

$$\boxed{\operatorname{sh}(\alpha + \beta) = \operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta}$$

Bizonyítás 4.32

$$\operatorname{sh}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{ch}\alpha \operatorname{sh}\beta = \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha})(e^\beta + e^{-\beta})}{4} + \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})(e^\beta - e^{-\beta})}{4} =$$

$$= \frac{2e^\alpha e^\beta - 2e^{-\alpha}e^{-\beta}}{4} = \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \operatorname{sh}(\alpha + \beta) \qquad \blacksquare$$

Tétel 4.33

$$\boxed{\operatorname{ch}(\alpha + \beta) = \operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta}$$

Bizonyítás 4.33

$$\operatorname{ch}\alpha \operatorname{ch}\beta + \operatorname{sh}\alpha \operatorname{sh}\beta = \frac{(e^\alpha + e^{-\alpha})(e^\beta + e^{-\beta})}{4} + \frac{(e^\alpha - e^{-\alpha})(e^\beta - e^{-\beta})}{4} =$$

$$= \frac{2e^\alpha e^\beta + 2e^{-\alpha}e^{-\beta}}{4} = \frac{e^{\alpha+\beta} + e^{-(\alpha+\beta)}}{2} = \operatorname{ch}(\alpha + \beta) \qquad \blacksquare$$

Derivált függvények

$$\operatorname{sh}' x = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x$$

$$\operatorname{ch}' x = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh} x$$

$$\operatorname{th}' x = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}\right)' = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\operatorname{cth}' x = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}\right)' = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$$

Inverzek

$y = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \dfrac{q - \frac{1}{q}}{2} \quad / \cdot 2q \qquad (q = e^x > 0)$
$2qy = q^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 - 2qy - 1 = 0$. Ebből $q_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2+1}$, de mivel $q > 0$, ezért $q = y + \sqrt{y^2+1}$. Tehát $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$, így $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.
Innen látszik, hogy $\operatorname{sh} x$ inverzét felírhatjuk a logaritmus segítségével, tehát

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Hasonlóképpen $\operatorname{arch} x$ is levezethető:
$y = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \dfrac{q + \frac{1}{q}}{2} \quad / \cdot 2q \qquad (q = e^x > 0)$
$2qy = q^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad q^2 - 2qy + 1 = 0$. Ebből $q_{1/2} = y \pm \sqrt{y^2-1}$, de mivel $q > 0$, ezért $q = y + \sqrt{y^2-1}$. Tehát $e^x = y + \sqrt{y^2-1}$, így $x = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$. Tehát ch inverze:

$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$$

Nézzük meg $\operatorname{arth} x$-et:
$y = \operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{q - \frac{1}{q}}{q + \frac{1}{q}} = \dfrac{q^2-1}{q^2+1} \qquad (q = e^x > 0)$

$(q^2+1)y = q^2 - 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)q^2 + y + 1 = 0$. Ebből $q^2 = \dfrac{1+y}{1-y} \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$.

Tehát $e^x = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$, így $x = \ln\sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$. Tehát th inverze:

$$\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Végül $\operatorname{arcth} x$:
$y = \operatorname{cth} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{q + \frac{1}{q}}{q - \frac{1}{q}} = \dfrac{q^2+1}{q^2-1} \qquad (q = e^x > 0)$

$(q^2-1)y = q^2 + 1 \quad \Leftrightarrow \quad (y-1)q^2 - y - 1 = 0$. Ebből $q^2 = \dfrac{y+1}{y-1} \quad \Leftrightarrow \quad q = \sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$.

Tehát $e^x = \sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$, így $x = \ln\sqrt{\dfrac{y+1}{y-1}}$. Tehát cth inverze:

$$\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

Inverzek deriváltjai

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\underbrace{\operatorname{arsh} x}_{y})} = \frac{1}{\operatorname{ch}(y)} = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}'(\underbrace{\operatorname{arch} x}_{y})} = \frac{1}{\operatorname{sh}(y)} = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 y - 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (\operatorname{ch} y \geqslant 1 \Rightarrow x > 1)$$

$$\operatorname{arth}' x = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-x}{1+x}\cdot\frac{(1-x)+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \neq \pm 1$$

$$\operatorname{arcth}' x = \left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right)' = \frac{1}{2}\cdot\frac{x-1}{1+x}\cdot\frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{1-x^2} \qquad x \neq \pm 1$$

4.6.9. Differenciálszámítás középérték-tételei

Definíció 4.40 *Legyen $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$.*
*f-nek az x_0 helyen **lokális maximuma** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy $f(x) \leqslant x_0$ $\forall x \in K_\varepsilon(x_0)$ esetén.*

Definíció 4.41 *Legyen $x_0 \in \operatorname{Int} D_f$.*
*f-nek az x_0 helyen **lokális minimuma** van, ha $\exists \varepsilon > 0$, hogy $f(x) \geqslant x_0$ $\forall x \in K_\varepsilon(x_0)$ esetén.*

Megjegyzés: $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ esetén f-nek minden pontjában lokális minimuma és maximuma is van.

Tétel 4.34 $\boxed{\textit{Lokális szélsőérték szükséges feltétele}}$
Ha f differenciálható x_0-ban és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(x_0) = 0$.

Bizonyítás 4.34
Tfh x_0-ban lokális maximuma van (konretizálva egyszerűbb a bizonyítás – hasonlóan megy ha lokális minimuma van).

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0-0} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{h}_{\leqslant 0}} \geqslant 0 \qquad \text{hiszen ha } |h| < \varepsilon \Rightarrow f(x_0) \geqslant f(x_0+h)$$

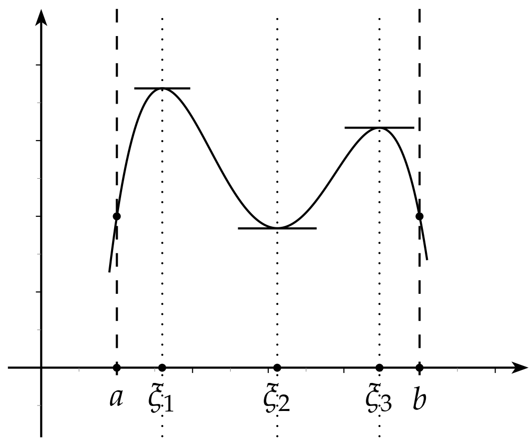
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0+0} \frac{\overbrace{f(x_0+h)-f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{h}_{\geqslant 0}} \leqslant 0$$

Mivel deriválható f az x_0 pontban, ezért:

$$\underbrace{f'_-(x_0)}_{\geqslant 0} = \underbrace{f'_+(x_0)}_{\leqslant 0} = f'(x_0) = 0$$

■

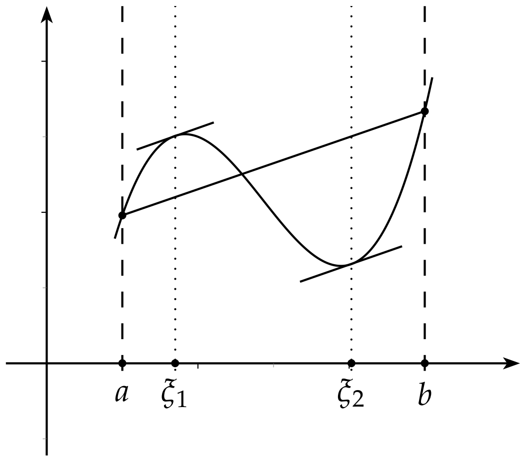
Tétel 4.35 $\boxed{\textit{Rolle-tétel}}$
Ha f folytonos $[a,b]$-n és differenciálható (a,b)-n és $f(a) = f(b)$, akkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f'(\xi) = 0$



Bizonyítás 4.35
Weierstrass II. tétele alapján (f korlátos, zárt intervallumon folytonos) felveszi szélsőértékeit.

1. ha f az intervallum végpontjaiban veszi fel a maximumát és minimumát is, akkor $f(x) \equiv c$, ekkor $\forall \xi \in (a,b)$-re $f'(\xi) = 0$.
2. ha az egyik szélső érték hely nem a végpont, akkor itt $f'(\xi) = 0$ ∎

Tétel 4.36 $\boxed{\textit{Lagrange-tétel}}$
Ha f folytonos $[a,b]$-n ($a, b \in \mathbb{R}$) és f differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ = intervallum végpontjai közti húr meredeksége



Bizonyítás 4.36
(*)

Húr egyenlete: $h(x) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)$
$g(x) := f(x) - h(x)$-re alkalmazhatjuk a Rolle-tételt:

$$g'(x) = f'(x) - h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \quad \overset{\text{Rolle-t.}}{\Longrightarrow}$$

$$\Longrightarrow \quad \exists \xi \in (a,b) : g'(\xi) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$ ∎

Tétel 4.37 *Legyen f folytonos $[a,b]$-n ($a, b \in \mathbb{R}$) és differenciálható (a,b)-n, továbbá $f'(x) = 0$, ha $x \in (a,b)$. Ekkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = c \ \forall x \in [a,b]$.*

Bizonyítás 4.37
Legyen $x_1, x_2 \in (a,b)$, $a < x_1 < x_2 < b$. Lagrange-tételt alkalmazva:

$$\exists \xi \in (x_1, x_2) \text{ hogy } \underbrace{f'(\xi)}_{=0} = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = 0 \qquad x_2 - x_1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) - f(x_1) = 0$$

Tehát $f(x_2) = f(x_1) \quad \forall x_2, x_1 \in (a,b)$. ∎

Tétel 4.38 $\boxed{\textit{Integrálszámítás alaptétele}}$
Legyen f és g folytonos $[a,b]$-n ($a, b \in \mathbb{R}$) és differenciálható (a,b)-n, továbbá $f'(x) = g'(x)$ ($x \in (a,b)$), ekkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $f(x) = g(x) + c \quad \forall x \in [a,b]$.

Bizonyítás 4.38
$h(x) := f(x) - g(x)$, ekkor $h'(x) = f'(x) - g'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$, alkalmazva az előző tételt: $h(x) = c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in (a,b)$, tehát $f(x) = g(x) + c$. ∎

Példák a fenti tételek alkalmazására

1. Alkalmazható-e a Rolle-tétel az $f(x) = e^{-|x|}$-re az $I = [-2, +2]$-n?
   - f folytonos $[-2, +2]$-n ✓
   - $f(-2) = f(2)$ ✓
   - **de** f nem differenciálható $(-2, 2)$-ben, hiszen töréspontja van $x = 0$-ban.

2. Alkalmazható-e a Lagrange-tétel az $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$-re az $I = [-1, 0]$-n? ($\xi =$?)
   - f folytonos $[-1, 0]$-n ✓
   - f differenciálható $(-1, 0)$-n ✓

   A húr meredeksége: $\dfrac{f(0) - f(-1)}{0 - (-1)} = \dfrac{\frac{1}{1} - \frac{1}{4}}{1} = \dfrac{3}{4}$. Keressük ξ-t, melyre $f'(\xi) = \dfrac{3}{4}$:

$$f'(\xi) = \left((\xi - 1)^{-2}\right)' = -2 \cdot (\xi - 1)^{-3} = \frac{3}{4}$$

$$(\xi - 1)^{-3} = \frac{-3}{8} \qquad \to \qquad \xi = \sqrt[3]{\frac{8}{-3}} + 1 = \frac{2}{-\sqrt[3]{3}} + 1$$

3. Igazoljuk, hogy ha $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$, akkor

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} < \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a < \frac{b-a}{\cos^2 b}$$

   $f(x) = \operatorname{tg} x$-re az $I = \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$-n alkalmazhatjuk a Lagrange-tételt, hiszen folytonos I-n és differenciálható I belsejében. Tehát $\exists \xi \in (a, b) \subset \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, hogy:

$$\operatorname{tg}' \xi = \frac{1}{\cos^2 \xi} = \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a}$$

   Mivel $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ és $\xi \in (a, b)$, ezért:

$$\cos a > \cos \xi > \cos b > 0$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} > \frac{1}{\cos^2 \xi} > \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\frac{1}{\cos^2 a} > \frac{\operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a}{b - a} > \frac{1}{\cos^2 b}$$

$$\frac{b-a}{\cos^2 a} > \operatorname{tg} b - \operatorname{tg} a > \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad \checkmark$$

Tétel 4.39 $\boxed{\textit{L'Hospital szabály}}$ $\left(\dfrac{0}{0}, \dfrac{\infty}{\infty}\right.$ *típusú határérték számításához használható*$\left.\right)$
Legyen f és g differenciálható $\dot{K}_\varepsilon(x_0)$, ahol $\varepsilon > 0$, illetve $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, ahol $x \in \dot{K}_\varepsilon(x_0)$. Továbbá $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ és $\exists \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$. Ekkor ha $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \beta$, akkor $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \beta$.

Megjegyzés: Bizonyítása nem tananyag. De $x \to x_0$ helyett állhat $x \to x_0 + 0$, $x \to x_0 - 0$, $x \to \infty$ és $x \to -\infty$ is. Hasonlóan β lehet valós és $\pm\infty$ is! Továbbá akkor is igaz a szabály, ha $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$.

A fenti tétel segedelmével az alábbi határozatlan alakok könnyedén meghatározhatóak, de olyan alakra kell őket hozni, hogy a tételt alkalmazni lehessen:

- $\dfrac{0}{0}; \dfrac{\infty}{\infty}$: közvetlen L'Hospital szabály
- $0 \cdot \infty : f \cdot g = \dfrac{f}{1/g}$ vagy $\dfrac{g}{\underbrace{1/f}_{\to\pm\infty}}$ (2. esetben előjel vizsgálat szükséges!)
- $\infty - \infty : f - g = \dfrac{1}{1/f} - \dfrac{1}{1/g} = \dfrac{1/g - 1/f}{1/f \cdot 1/g}$
- $0^0, 1^\infty, \infty^0 : f^g = e^{g\cdot \ln f}$ és ekkor $g \cdot \ln f$ határértékét kel vizsgálni.

Példák a L'Hospital szabály alkalmazására

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{x^2}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x}{e^x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

   A fenti feladatnál mindig feltesszük, hogy létezik az adott határérték, ezért alkalmazhatjuk a L'Hospitalt, de amikor a végére jutunk, láthatjuk, hogy valóban létezik, ezért az előzőek is léteztek ✓.

2. $\lim\limits_{x\to 1-0} \underbrace{\ln x}_{\to 0} \cdot \underbrace{\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}_{\to\infty} = \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 1-0} \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)} \cdot \frac{\pi}{2}} = \lim\limits_{x\to 1-0} -\dfrac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{\pi \cdot x} =$

   $-\dfrac{2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi \cdot 1} = \dfrac{-2}{\pi}$

3. $\lim\limits_{x\to 0+0} \left(\underbrace{\dfrac{1}{x}}_{\to+\infty} - \underbrace{\dfrac{1}{e^x - 1}}_{\to+\infty} \right) = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x \cdot (e^x - 1)} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^x - 1}{x \cdot (e^x) + e^x - 1} \stackrel{L'H}{=}$

   $\stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^x}{x \cdot (e^x) + e^x + e^x} = \lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{e^x}{e^x} \cdot \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{2}$

4. $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0} \exp\left(\dfrac{1}{x^2} \cdot \ln(\cos 3x)\right) = \exp\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2}\right)$ Kitevőt vizsgáljuk:

   $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos 3x)}{x^2} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\cos 3x} \cdot - \sin 3x \cdot 3}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3 \cdot \operatorname{tg} 3x}{2x} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-9 \cdot \frac{1}{\cos^2 3x}}{2} = \dfrac{-9}{2}$

   Tehát $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 3x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\frac{-9}{2}}$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{e^{3x}} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3\operatorname{ch} 3x}{3e^{3x}} \stackrel{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{e^{3x}}$. Ez nem vezet eredményre.

   $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh} 3x}{e^{3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{-3x}}{2 \cdot e^{3x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{1}{2} - \underbrace{\dfrac{e^{-6x}}{2}}_{\to 0} \right) = \dfrac{1}{2}$

A L'Hospital szabállyal eddig explicit be nem látott tételek igazolhatóak:
Láttuk, hogy $\sqrt[n]{n} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad n \in \mathbb{N}$. Ezt bármilyen $n := x \in \mathbb{R}$-re beláthatjuk:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = \exp\left(\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\cdot \ln x\right)$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = e^0 = 1$.

Hasonlóan bizonyíthatjuk $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x \xrightarrow{x\to\infty} e \quad x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \exp\left[x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right] = \exp\left[\lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\frac{-1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$$

Tehát $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e^1 = e$.

4.6.10. Nyílt intervallumon differenciálható függvények tulajdonságai

Legyen $I = (a,b) \qquad a,b \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.

Definíció 4.42 *f **monoton nő** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.*

Definíció 4.43 *f **szigorúan monoton nő** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) < f(x_2)$.*

Definíció 4.44 *f **monoton csökken** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.*

Definíció 4.45 *f **szigorúan monoton csökken** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I$ esetén, ha $x_1 < x_2$, akkor $f(x_1) > f(x_2)$.*

Definíció 4.46 *f **alulról konvex** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén x_1, x_2 pontokban állított húr a függvény grafikonja fölött halad. Azaz: $h(x) \geqslant f(x) \quad x \in [x_1, x_2]$.*

Definíció 4.47 *f **alulról konkáv** I-n, ha $\forall x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2$ esetén x_1, x_2 pontokban állított húr a függvény grafikonja alatt halad. Azaz: $h(x) \leqslant f(x) \quad x \in [x_1, x_2]$.*

Definíció 4.48 *f-nek x_0-ban **inflexiós pontja** van, ha f folytonos x_0-ban és x_0-ban konvex és konkáv szakaszok találkoznak.*

Tétel 4.40 *Ha f differenciálható I-n, akkor:*

$$\left.\begin{array}{lll} 1.\ f \text{ mon. nő} & \Leftrightarrow & f'(x) \geqslant 0 \\ 2.\ f \text{ szig. mon. nő} & \Leftarrow & f'(x) > 0 \\ 3.\ f \text{ mon. csökken} & \Leftrightarrow & f'(x) \leqslant 0 \\ 4.\ f \text{ szig. mon. csökken} & \Leftarrow & f'(x) < 0 \end{array}\right\} \forall x \in I$$

Bizonyítás 4.40
1. $\Rightarrow f'(x) = f'_+(x) = \lim_{h\to 0+0} \frac{\overbrace{f(x+h)-f(x)}^{\geqslant 0}}{\underbrace{h}_{>0}} \geqslant 0 \quad \checkmark$

$\Leftarrow$ Lagrange-tétel alapján $\exists \xi \in (x_1, x_2) \quad a < x_1 < x_2 < b$, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \text{ ez a feltétel szerint } \geqslant 0 \quad \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geqslant 0 \quad \checkmark$$

2. $\Leftarrow$ Szintén Lagrange-tétel $[x_1, x_2] \subset I$-re

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > 0 \quad \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0 \quad \checkmark$$

■

Megjegyzés: A 2-es és 4-es állítás megfordítása **nem** igaz. Például: $f(x) = x^3$ szig. mon. nő $\mathbb{R}$-en, de $f'(x) = 3x^2$-nek van zérushelye: $f'(0) = 0$.

Tétel 4.41 *Legyen f differenciálható I-n.*

1. *f konvex I-n* $\Leftrightarrow$ *f' monoton nő I-n*
2. *f konkáv I-n* $\Leftrightarrow$ *f' monoton csökken I-n*

Tétel 4.42 *Legyen f kétszer differenciálható I-n.*

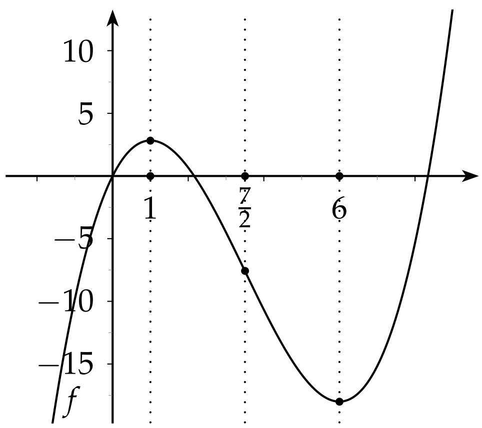
$$\left.\begin{array}{llll} 1. & f \text{ konvex } I\text{-n} & \Leftrightarrow & f''(x) \geqslant 0 \\ 2. & f \text{ konkáv } I\text{-n} & \Leftrightarrow & f''(x) \leqslant 0 \end{array}\right\} \forall x \in I$$

Bizonyítás 4.42
Előző két tétel alapján. ■

Példák

$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{2}x^2 + 6x$. $D_f = \mathbb{R}$, végtelenszer differenciálható. Melyek azok a legbővebb intervallumok, ahol f monoton nő/csökken, konvex/konkáv?
$f'(x) = x^2 - 7x + 6 = (x-6)(x-1)$. Parabola, ami $1 < x < 6$ esetén negatív, egyébként pozitív. Táblázatba foglalva:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1,6)$	6	$(6, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$



Ábrázolva $f(x)$-et (analízis után)

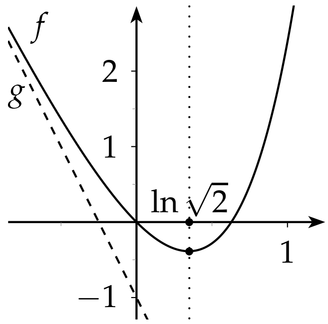
$f''(x) = 2x - 7$. Tehát:

x	$(-\infty, \frac{7}{2})$	$\frac{7}{2}$	$(\frac{7}{2}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Másik példa: $f(x) = e^{2x} - (4x+1)$. Monotonitás? Konvexitás?
$f'(x) = 2 \cdot e^{2x} - 4$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \ln\sqrt{2}$
$f''(x) = 4 \cdot e^{2x} > 0$.

x	$(-\infty, \ln\sqrt{2})$	$\ln\sqrt{2}$	$(\ln\sqrt{2}, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

x	$\mathbb{R}$
f''	$+$
f	$\cup$



Az ábrán $g(x) = -4x - 1$ az $f(x)$ függvény egy lineáris asszimptotája ($-\infty$-ben ehhez tart).

4.6.11. Differenciálható függvények lokális tulajdonságai

Definíció 4.49 *f az x_0-ban* $\left\{ \begin{array}{c} \textbf{\textit{lokálisan növekedő}} \\ \textbf{\textit{lokálisan csökkenő}} \end{array} \right\}$, *ha* $\exists \varepsilon > 0$, *hogy* $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \leqslant f(x_0) \\ f(x) \geqslant f(x_0) \end{array} \right\}$, *ha* $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0]$ *és* $\left\{ \begin{array}{c} f(x) \geqslant f(x_0) \\ f(x) \leqslant f(x_0) \end{array} \right\}$, *ha* $x \in [x_0, x_0 + \varepsilon)$

Tétel 4.43 *Legyen f az x_0-ban deriválható. Ekkor*

1. *Ha f lokálisan nő x_0-ban* $\Rightarrow$ $f'(x_0) \geqslant 0$
2. *Ha $f'(x_0) > 0$* $\Rightarrow$ *f lokálisan nő x_0-ban*

$1'$. *Ha f lokálisan csökken x_0-ban* $\Rightarrow$ $f'(x_0) \leqslant 0$
$2'$. *Ha $f'(x_0) < 0$* $\Rightarrow$ *f lokálisan csökken x_0-ban*

Bizonyítás 4.43

1.

$$\exists f'(x_0) = f'_+(x_0) = \lim_{h \to 0+0} \frac{\overbrace{f(x_0+h) - f(x_0)}^{\geqslant 0 \quad (h \in (0,\varepsilon))}}{\underbrace{h}_{>0}} \geqslant 0$$

2. $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0+0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A > 0$, tehát $\exists \varepsilon_1 > 0$, hogy ha $h \in (0, \varepsilon_1)$ akkor:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > \frac{A}{2} > 0 \qquad \text{mivel } h > 0, \text{ ezért}$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x_0+h) > f(x_0)}$$

Hasonlóan: $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0-0} \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = A > 0$, tehát $\exists \varepsilon_2 > 0$, hogy ha $h \in (-\varepsilon_2, 0)$ akkor:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} > \frac{A}{2} > 0 \qquad \text{mivel } h < 0, \text{ ezért}$$

$$f(x_0+h) - f(x_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x_0+h) < f(x_0)}$$

Tehát $\exists \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} > 0$, hogy $f(x_0) < f(x_0+h)$, és $f(x_0-h) < f(x_0)$, ha $h \in (0, \varepsilon)$ tehát f lokálisan nő x_0-ban.

Megjegyzés: A vesszős állítások hasonlóan bizonyíthatóak. ∎

Tétel 4.44 *Legyen f differenciálható x_0 egy környezetében.*

1 *Ha f-nek x_0-ban lokális minimuma van* $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ *(lokális szélsőérték szük. felt.).*
2/a *Ha $f'(x_0) = 0$ és $f'(x)$ $\underbrace{\text{negatívból pozitívba vált}}$* $\Rightarrow$ *f-nek x_0-ban lokális minimuma van.*

2/b $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0, \text{ ha } x \in (x_0 - \varepsilon, x_0) \\ f'(x) > 0, \text{ ha } x \in (x_0; x_0 + \varepsilon) \end{array}\right\}$ $\Longrightarrow f'(x)$ *lokálisan növekedő x_0-ban.*

Tehát ha f deriválható x_0 környékén és $\exists f''(x_0)$ $\Rightarrow$
ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) > 0$ $\Rightarrow$ *f-nek lokális minimuma van x_0-ban*
ha $f'(x_0) = 0$ és $f''(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ *f-nek lokális maximuma van x_0-ban*

Bizonyítás 4.44
1 Lásd 4.34 tétel (62. oldal).
2/a Tehát $\exists\varepsilon$, hogy f szig. mon. csökkenő, ha $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0)$ és f szig. mon. nő, ha $x \in (x_0, x_0 + \varepsilon)$, illetve x_0-ban lokális szélsőértéke van, tehát x_0-ban lokális minimuma van.
2/b A 4.43. tétel alapján ha $f''(x_0) > 0$, akkor f' lokálisan nő x_0-ban. Mivel $f'(x_0) = 0$, ezért a lokálisan növekedés miatt f' az x_0 pontban előjelet vált (negatívból pozitívba), ezért itt lokális minimuma van. Ugyanígy bizonyítható a másik fele. ∎

Tétel 4.45 $\boxed{\textit{Elégséges feltétel inflexiós pont létezésére}}$

1. *Ha f kétszer differenciálható x_0 egy környezetében és $f''(x_0) = 0$, és*
   $f''(x)$ előjelet vált x_0-ban vagy $f''(x)$ lokálisan nő v. csökken x_0-ban
   $\Rightarrow$ f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.
2. *Ha f kétszer differenciálható x_0 egy környezetében és $f''(x_0) = 0$ és $\exists f'''(x_0) \neq 0$, akkor f-nek x_0-ban inflexiós pontja van.*

4.6.12. Implicit deriválás

Explicit kapcsolat: $y(x) = \ldots$
Implicit kapcsolat: $f(x, y) = 0$
Cél: Implicit kapcsolat segítségével adjuk meg az $y'(x_0)$ deriváltat egy adott x_0 pontban.

Példák

1. példa: $y(x)$ folytonos, kétszer deriválható és kielégíti a következő implicit egyenletet:

$$y + x \cdot \ln y + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1$$

Az $(x_0, y_0) = (0, 1)$ pontban milyen lokális tulajdonságok vannak az $y(x)$ függvény grafikonjában? ($y'(x_0) = ?, y''(x_0) = ?$)

$(x_0, y_0) = (0, 1)$ valóban kielégíti a fenti egyenletet. y is valamilyen függvény, hiszen függ x-től:

$$y(x) + x \cdot \ln y(x) + 2x^2 - x + \ln(1 + x) = 1 \qquad / \frac{d}{dx}$$

$$y'(x) + \ln y(x) + x \cdot \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1 + x} = 0$$

$$y'(x) = \frac{1 - 4x - \frac{1}{1+x} - \ln y(x)}{1 + x \cdot \frac{1}{y(x)}}$$

$$y'(x) = \left(\frac{y(x)}{y(x)+x}\right) \cdot \left(1 - 4x - \frac{1}{1+x} - \ln y(x)\right)$$

Nézzük meg, hogy akkor mi lehet az $(0,1)$ pontban ($x = 0, y(x) = 1$):

$$y'(0) = \left(\frac{1}{1+0}\right) \cdot \left(1 - 0 - \frac{1}{1+0} - \ln y(1)\right) = 0$$

Tehát itt lehet lokális szélső érték, határozzuk meg a 2. deriváltat:

$$\left(y'(x) + \ln y(x) + x \cdot \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) + 4x - 1 + \frac{1}{1+x}\right)' = 0$$

$$y''(x) + \frac{y'(x)}{y(x)} + \frac{y'(x)}{y(x)} + x \cdot \left(-\frac{1}{y^2(x)}\right) \cdot y'^2(x) + x \cdot \frac{1}{y(x)} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1+x)^2} = 0$$

$x = 0, y(x) = 1, y'(x) = 0$, tehát:

$$y''(x) + 2 \cdot \frac{0}{1} + 0 \cdot \left(-\frac{1}{1}\right) \cdot 0 + 0 \cdot \frac{1}{1} \cdot y''(x) + 4 - \frac{1}{(1+0)^2} = 0$$

$$y''(x) = -3 \quad \Rightarrow \quad \text{lokális maximuma van } (0,1)\text{-ben az } y(x)\text{-nek}$$

2. példa: $x \cdot \operatorname{sh} x - y \cdot \operatorname{ch} y = 0$. $y(x)$ kétszer folytonosan deriválható. Milyen lokális tulajdonságai vannak y-nak $x_0 = 0$-ban? Először is ekkor mennyi az y_0?

$$0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y_0 \cdot \operatorname{ch} y_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad y_0 \cdot \operatorname{ch} y_0 = 0$$

Mivel $\operatorname{ch} y_0 \geqslant 1$, ezért $y_0 = 0$. Lederiváljuk:

$$\operatorname{sh} x + x \cdot \operatorname{ch} x - y' \cdot \operatorname{ch} y - y \cdot \operatorname{sh} y \cdot y' = 0$$

$x = 0, y = 0$, tehát:

$$\operatorname{sh} 0 + 0 \cdot \operatorname{ch} 0 - y' \cdot \operatorname{ch} 0 - 0 \cdot \operatorname{sh} 0 \cdot y' = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(0) = 0$$

Tehát $(0,0)$-ban lehet szélsőérték, nézzük meg a második deriváltat:

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} x + x \cdot \operatorname{sh} x - y'' \cdot \operatorname{ch} y - y' \cdot \operatorname{sh} y \cdot y' - y' \cdot \operatorname{sh} y \cdot y' - y \cdot \operatorname{ch} y \cdot y'^2 - y \cdot \operatorname{sh} y \cdot y'' = 0$$

Beírva az ismert adatokat: $x = 0, y = 0, y' = 0$:

$$2 \cdot \operatorname{ch} 0 + 0 \cdot \operatorname{sh} 0 - y'' \cdot \operatorname{ch} 0 - 2 \cdot 0^2 \cdot \operatorname{sh} 0 - 0 \cdot \operatorname{ch} 0 \cdot 0^2 - 0 \cdot \operatorname{sh} 0 \cdot y'' = 0$$

$$2 = y''(0) > 2 \quad \Rightarrow \quad \text{lokális minimuma van } (0,0)\text{-ban}$$

4.7. Teljes függvény vizsgálat

4.7.1. Teendők

1. D_f, zérushelyek, periocitás, paritás, szakadási helyek, határértékek ($\pm\infty$, szakadási helyeken, D_f végpontjaiban)
2. $f'(x)$: monotonitás, lokális szélsőértékek
3. $f''(x)$: konvexitás, inflexiós pontok
4. (Lineáris asszimptoták vizsgálatat – nem tanultuk!)
5. R_f, grafikon felrajzolása

4.7.2. Konkrét példákon való függvény vizsgálat

$$\boxed{f(x) = x^2 \cdot \ln x}$$

$D_f = (0; \infty)$. Nem periodikus, nem páros/páratlan. Folytonos D_f-en, tehát nincs szakadási hely. Zérushely:

$$x^2 \cdot \ln x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$$

Határértékek:

$$\lim_{x \to 0} \left(x^2 \cdot \ln(x) \right) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{x^{-2}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{-2} = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x^2 \cdot \ln(x) \right) = \infty$$

Deriváltakat felírjuk, majd keressük a zérushelyeket:

$$f'(x) = (x^2 \cdot \ln x)' = 2x \cdot \ln x + x = x(2 \ln x + 1) = 0$$

Mivel $x \in (0; \infty)$, ezért $f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \ln x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = e^{-\frac{1}{2}}$.

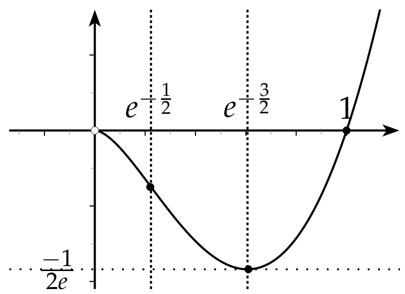
$$f''(x) = (2x \cdot \ln x + x)' = 2 \cdot \ln x + 2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = e^{-\frac{3}{2}}$$

Táblázatba foglalva:

x	$(0, e^{-\frac{1}{2}})$	$e^{-\frac{1}{2}}$	$(e^{-\frac{1}{2}}, \infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

x	$(0, e^{-\frac{3}{2}})$	$e^{-\frac{3}{2}}$	$(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	infl. pont	$\cup$

Felrajzolva (az analízis és a rajz után R_f könnyen meghatározható: $R_f = \left[\frac{-1}{2e}, \infty\right)$):



$$\boxed{g(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}} \qquad D_f = \mathbb{R}$$

A függvény nem periodikus, de páros, hiszen $f(-x) = f(x)$. Folytonos $\mathbb{R}$-en. Zérushelyek:

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x^2-1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Határértékek:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = \infty$$

Derivált függvény:

$$f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (x^2-1)^{\frac{-1}{3}} \cdot 2x = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}} \quad \text{ha } x \neq \pm 1$$

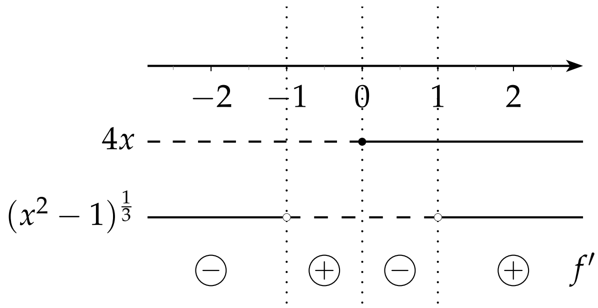
$$f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$$

Derivált függvény $x = \pm 1$-ben nem értelmezett, de definíció alapján megnézhetjük, hogy van-e differenciálhányados vagy nincs:

$$\lim_{h\to 0+0} \frac{f(\pm 1 + h) - f(\pm 1)}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\sqrt[3]{((\pm 1+h)^2-1)^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0+0} \frac{\sqrt[3]{(h^2 \pm 2h)^2} - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0+0} \sqrt[3]{\frac{h^4+4h^2 \pm 4h^3}{h^3}} = \lim_{h\to 0+0} \sqrt[3]{h + \frac{4}{h} \pm 4} = \infty$$

Tehát $\nexists f'(1)$ és $\nexists f'(-1)$. Táblázat felrajzolásához segítségül hívunk egy számegyenest, hogy a törtben melyik tag, milyen előjelű:



x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f'	$-$	$\nexists$	$+$	0	$-$	$\nexists$	$+$
f	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min	$\nearrow$

Második derivált:

$$f''(x) = \left(\frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2-1}}\right)' = \frac{12\sqrt[3]{x^2-1} - 8x^2 \cdot (x^2-1)^{\frac{-2}{3}}}{9(\sqrt[3]{x^2-1})^2} = \frac{12(x^2-1)^{\frac{1}{3}} - 8x^2 \cdot (x^2-1)^{\frac{-2}{3}}}{9(x^2-1)^{\frac{2}{3}}} =$$

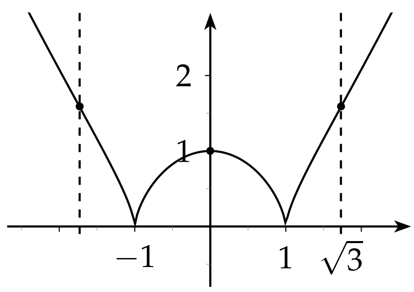
$$= \frac{12 - 8x^2 \cdot (x^2-1)^{\frac{-3}{3}}}{9(x^2-1)^{\frac{1}{3}}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 12 - 8x^2 \cdot (x^2-1)^{\frac{-3}{3}} = 0$$

$$12 - \frac{8x^2}{x^2-1} = 0$$

$$12x^2 - 12 = 8x^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 = 12$$

$$x = \pm\sqrt{3}$$

x	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
f''	$+$	0	$-$	$\nexists$	$-$	$\nexists$	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl. pont	$\cap$		$\cap$		$\cap$	infl. pont	$\cup$



$R_f = [0, \infty)$.

4.7.3. Folytonos függvények szélsőértékei zárt intervallumon (abszolút szélsőértékhely)

Zárt intervallumon folytonos függvénynek van minimuma és maximuma (lásd Weierstrass II. tétele (jegyzetben a 4.15. tétel a 47. oldalon). Vizsgálandó pontok:

- Derivált zérushelyei
- Ahol a függvény nem deriválható
- intervallum végpontjai.

Példa

$f(x) = \sqrt[3]{2x-8} - \frac{2}{3}x + 3$. $I = \left[0; \frac{9}{2}\right]$.
Intervallum végpontjaiban: $f(0) = -2 + 3 = 1$. $f\left(\frac{9}{2}\right) = 1 - 3 + 3 = 1$.
Derivált: $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (2x-8)^{\frac{-2}{3}} - \frac{2}{3}$. $\nexists f'(x)$, ha $x = 4$. $f(4) = \frac{1}{3}$.
$f'(x) = 0$, ha:

$$\frac{2}{3} \cdot (2x-8)^{\frac{-2}{3}} - \frac{2}{3} = 0$$

$$\sqrt[3]{\frac{1}{(2x-8)^2}} = 1$$

$$2x - 8 = \pm 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad x_1 = \frac{7}{2};\ x_2 = \frac{9}{2}$$

$f\left(\frac{7}{2}\right) = -\frac{1}{3}$.
Tehát a függvény abszolút minimuma I-n: $\operatorname{Inf}\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\} = -\frac{1}{3}$, amit akkor vesz fel, ha $x = \frac{7}{2}$. Abszolút maximuma: $\operatorname{Sup}\left\{1, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\} = 1$, amit akkor vesz fel ha $x = 0$ vagy ha $x = \frac{9}{2}$.

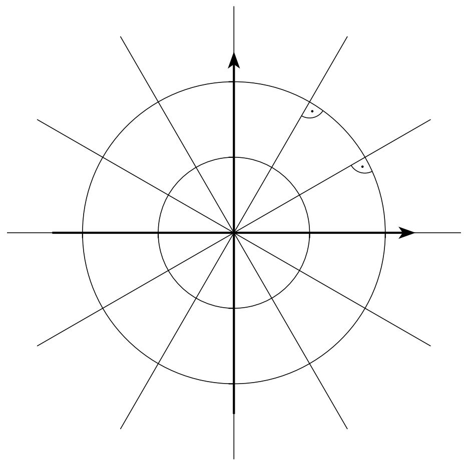
5. fejezet

Polár koordináták

Egy adott P pont megadása a két koordinátával: (r, φ), ahol r az origótól mért távolság (OP szakasz hossza), φ pedig az x tengely és az OP szakasz irányított szögtávolsága. Tehát: $(r, \varphi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi)$. Ezzel a koordinátázással az origó kivételével a sík összes pontját egy-egy értelműen megfeleltethetjük, az origónál $r = 0$, de φ tetszőleges.

5.1. Ortogonális koordinátarendszer

Amennyiben φ-t állandónak vesszük r pedig befutja a $[0, \infty)$ intervallumot, akkor egy az origón átmenő félegyenest kapunk. Ha pedig φ futja be a $[0, 2\pi)$ intervallumot, r pedig állandó, akkor egy r sugarú origó középpontú kört kapunk.



Amennyiben egy a derékszögű koordinátarendszerben megadott (x, y) pontot, szeretnénk polár koordinátákkal felírni, akkor:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad \operatorname{ctg} \varphi = \frac{x}{y}$$

Visszafele pedig:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& r \cdot \cos \varphi \\ y &=& r \cdot \sin \varphi \end{array}\right\}$$

5.2. Görbék paraméteres megadása

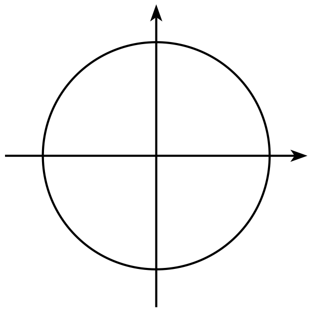
Eddig a következő megadást használtuk: $y(x) = f(x)$, ahol a görbe a függvény grafikonja. Ennek feltétele, hogy $\forall x_0$-hoz legfeljebb egy $y = f(x_0)$ érték tartozzon. Ehelyett a paraméteres megadást használjuk:

$$\left.\begin{array}{rcl} x &=& \xi(t) \\ y &=& \eta(t) \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \\ \xi[t_1, t_2] \to \mathbb{R} \\ \eta[t_1, t_2] \to \mathbb{R} \end{array}$$

Tehát a görbe:

$$\Big\{ \big(\xi(t), \eta(t)\big) \;\big|\; t \in [t_1, t_2] \Big\} \subset \mathbb{R}^2$$

5.2.1. Kör

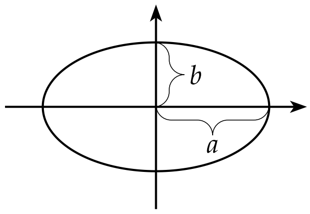


$t \in [0, 2\pi)$

$$x(t) = \xi(t) = R \cdot \cos t$$
$$y(t) = \eta(t) = R \cdot \sin t$$

Ahol R a kör sugara.

5.2.2. Ellipszis

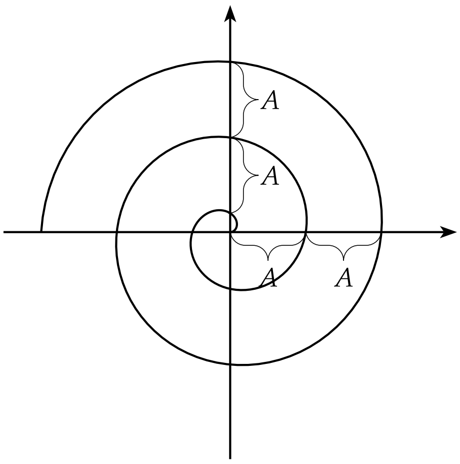


$t \in [0, 2\pi)$

$$x(t) = \xi(t) = a \cdot \cos t$$
$$y(t) = \eta(t) = b \cdot \sin t$$

Ahol a és b rendre a nagy- és kistengely hosszának a fele.

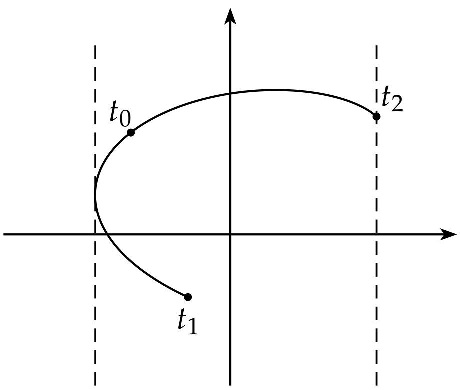
5.2.3. Archimédeszi spirál



$$x(t) = \xi(t) = \frac{A}{2\pi} \cdot t \cdot \cos t$$
$$y(t) = \eta(t) = \frac{A}{2\pi} \cdot t \cdot \sin t$$

Az ábrán látható spirálhoz $t \in [0, 5\pi]$ paramétert használtunk.

5.3. Görbék invertálhatósága, differenciálása



$$t \in [t_1, t_2] \subset \mathbb{R} \qquad \text{Legyen } t_0 \in I$$

Tétel 5.1 *Ha $I' \subset I$-n a $\xi(t)$ invertálható, akkor $\xi(I') \subset \mathbb{R}$-en felírható a görbe $y(x)$ alakban.*

Bizonyítás 5.1

$$y(x) = \eta\Big(\underbrace{\xi^{-1}(x)}_{t\in I'}\Big) \qquad x \in \xi(I')$$

■

Következmény: $\boxed{\text{Az invertálás elégséges feltétele}}$

- $\exists\dot{\xi}$ és nem vált előjelet t_0 egy környezetében.
- $\dot{\xi}$ folytonos t_0-ban és $\dot{\xi}(t_0) \neq 0$

Ahol $\dot{\xi} = \dfrac{d\xi}{dt}$

Ilyenkor (ha az intervallumon invertálható a függvény) tudjuk vizsgálni az y egy x_0-ban vett deriváltját, de előtte nézzük meg mégegyszer az y értékét x_0-ban:

$$y(x_0) = \eta(\xi^{-1}(x_0)) = \eta(t_0) \qquad (x_0 = \xi(t_0))$$

Elsőrendű derivált (ha $\exists\dot{\eta}(t_0)$ és $\exists\dot{\xi}(t_0)$, illetve $\dot{\xi}(t_0) \neq 0$):

$$\frac{dy(x_0)}{dx_0} = y'(x_0) = \dot{\eta}(\xi^{-1}(x_0)) \cdot \frac{1}{\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))} = \boxed{\frac{\dot{\eta}(t_0)}{\dot{\xi}(t_0)}}$$

Másodrendű derivált:

$$\frac{d^2y(x_0)}{dx_0^2} = y''(x_0) = \left(\frac{\dot{\eta}(\xi^{-1}(x_0))}{\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))}\right)' = \frac{\left(\dot{\eta}(\xi^{-1}(x_0))\right)'\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))}{\dot{\xi}^2(\xi^{-1}(x_0))} -$$

$$-\frac{\dot{\eta}(\xi^{-1}(x_0))\left(\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))\right)'}{\dot{\xi}^2(\xi^{-1}(x_0))} = \frac{\ddot{\eta}(\xi^{-1}(x_0))\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))}{\dot{\xi}^2(\xi^{-1}(x_0))} \cdot \frac{1}{\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))} -$$

$$-\frac{\dot{\eta}(\xi^{-1}(x_0))\ddot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))}{\dot{\xi}^2(\xi^{-1}(x_0))} \cdot \frac{1}{\dot{\xi}(\xi^{-1}(x_0))} = \boxed{\frac{\ddot{\eta} \cdot \dot{\xi} - \dot{\eta} \cdot \ddot{\xi}}{\dot{\xi}^3}\Big(t_0\Big)}$$

6. fejezet

Integrálszámítás

6.1. Határozatlan integrál

6.1.1. Primitív függvény

Definíció 6.1 *F az f függvény* ***prmitív függvénye*** *az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, ha $\forall x \in I$ esetén $\exists F'(x) = f(x)$.*

Például:
$F(x) = \cos(2x) \;\Rightarrow\; F'(x) = -2\sin(2x)$.
$G(x) = 2\cos^2 x \;\Rightarrow\; G'(x) = -4\cos x \sin x = -2\sin(2x)$. Tehát $f(x) = -2\sin(2x)$-nek F és G is primitív függvénye.

Tétel 6.1 *Ha F és G az f primitív függvénye I-n, akkor $\exists c \in \mathbb{R}$, hogy $F(x) = G(x) + c$, $\forall x \in I$-re.*

Bizonyítás 6.1

$$F'(x) = G'(x) = f(x) \quad \underset{\text{I.}}{\overset{\text{Int. szám.}}{\Rightarrow}} \quad F(x) - G(x) = c$$

Megjegyzés: Csak intervallumon! ■

Definíció 6.2 *Az f függvény* ***határozatlan integrálja*** *az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon az f primitív függvényeinek összessége:*

$$\int f(x)\,dx = \Big\{ F(x) \;\Big|\; F'(x) = f(x) \quad \forall x \in I \Big\}$$

Példa

$f(x) = \dfrac{1}{x} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \left.\begin{cases} \ln x + c_1, & \text{ha } x > 0 \\ \ln(-x) + c_2, & \text{ha } x < 0 \end{cases}\right\} = \ln|x| + c$$

6.1.2. Határozatlan integrál tulajdonságai

$$\int \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int f(x)\,dx \qquad c\in\mathbb{R}$$

$$\int \Big(f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\Big)\,dx = F(\varphi(x))+c \qquad F'(t)=f(t)$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \qquad n\neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|+c$$

$$\int \varphi^{\alpha}(x)\cdot\varphi'(x)\,dx = \frac{\varphi^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1}+c \qquad \alpha\neq -1$$

$$\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx = \ln|\varphi(x)|+c$$

$$\int e^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)\,dx = e^{\varphi(x)}+c$$

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a}+c \qquad a\neq 0$$

A fentiek a már ismeretes deriválás szabályaival levezethetőek.

Példák

$$\int \sin(3x)\,dx = \frac{-\cos(3x)}{3}+c$$

$$\int \frac{6\cdot e^3x-2e^{-x}}{e^{2x}}\,dx = 6\int e^x\,dx - 2\int e^{-3x}\,dx = 6e^x+\frac{2}{3}e^{-3x}+c$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}+c$$

$$\int \Big(\operatorname{sh}x\cdot(3+4\operatorname{ch}x)^3\Big)\,dx = \frac{(3+4\operatorname{ch}x)^4}{16}+c$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx = \int\frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x|+c$$

$$\int \operatorname{tg}^2x\,dx = \int\frac{\sin^2x}{\cos^2x}\,dx = \int\frac{1-\cos^2x}{\cos^2x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2x}\,dx - \int dx = \operatorname{tg}x - x + c$$

$$\int \frac{\operatorname{tg}^2x}{\cos^2x}\,dx = \int \operatorname{tg}^2x\cdot\frac{1}{\cos^2x}\,dx = \frac{\operatorname{tg}^3x}{3}+c$$

$$\int \Big(\sin x\cdot\cos^3x\Big)\,dx = -\frac{\cos^4x}{4}+c$$

$$\int \Big(x^2\operatorname{sh}(3x^3-5)\Big)\,dx = \frac{1}{9}\operatorname{ch}(3x^3-5)+c$$

$$\int \frac{3}{2+5x}\,dx = \frac{3}{5}\ln|2+5x|+c$$

$$\int \frac{3}{(2+5x)^2}\,dx = \frac{3}{5}\cdot\frac{-1}{2+5x}+c$$

$$\int \frac{3}{2+5x^2}\,dx = \int \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{5}{2}x^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)^2}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{5}}\cdot\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}x\right)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{\arcsin(2x)}{2}+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+(4x)^2}}\,dx = \frac{1}{4}\operatorname{arsh}(4x)+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-8x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2x)^2}}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin(2x)+c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3+5x^2}}\,dx = \frac{2(3+5x^2)^{\frac{1}{2}}}{10}+c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{3-2x-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{4-(x+1)^2}}\,dx = \int \frac{1}{2\sqrt{1-\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}}\,dx = \arcsin\left(\frac{x+1}{2}\right)+c$$

6.1.3. Integrálási módszerek

1. $\boxed{\sin(ax)\cos(bx); \quad \sin(ax)\sin(bx); \quad \cos(ax)\cos(bx)}$

   A jól ismert addíciós tételek segítségével:

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta)\pm\cos(\alpha)\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta)\mp\sin(\alpha)\sin(\beta)$$

   Felírhatjuk a következőket:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) &= 2\sin(\alpha)\cos(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta) &= 2\cos(\alpha)\cos(\beta)\\ \cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta) &= -2\sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

   Ezek alapján könnyű a fenti típusú integrálokat kiszámolni, hiszen összegre/különbségre alakíthatjuk őket, és ezeket tagonként integrálhatjuk, pl:

$$\int \sin(2x)\sin(3x)\,dx = -\frac{1}{2}\int\Big(\cos(3x+2x)-\cos(3x-2x)\Big)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(5x)}{5}-\sin x\right)+c = -\frac{\sin(5x)}{10}+\frac{\sin x}{2}+c$$

$$\int \cos(3x)\cos(5x)\,dx = \frac{1}{2}\int\Big(\cos(5x+3x)+\cos(5x-3x)\Big)\,dx = \frac{\sin(8x)}{16}+\frac{\sin(2x)}{4}+c$$

2. $\boxed{\sin^n x\cdot\cos^m x}$

   a) $sin^n x$ vagy $cos^m x$ és n, m páratlan

$$sin^{2k+1}x = \sin x\cdot(sin^2 x)^k = \sin x\cdot(1-\cos^2 x)^k = \sum_l a_l\cdot\underbrace{\sin x\cdot\cos^l x}_{\varphi'\cdot\varphi^l}$$

Hasonlóan $\cos^{2k+1}$ is felírható. Példa:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)^2\,dx = \int \cos x\,dx + \int \cos x \sin^4 x\,dx -$$

$$-2\int \cos x \sin^2 x\,dx = \sin x + \frac{sin^5 x}{5} - 2\cdot\frac{\sin^3}{3} + c$$

b) $sin^n x$ vagy $cos^m x$ és n, m páros

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

A fentieket felhasználva, tehát:

$$\sin^{2k} x = (\sin^2 x)^k = \frac{(1-\cos 2x)^k}{2^k} \quad \text{illetve:} \quad \cos^{2k} x = \frac{(1+\cos 2x)^k}{2^k}$$

$$\int \underbrace{\sin^6 x}_{(\sin^2 x)^3}\,dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos 2x)^3\,dx = \frac{1}{8}\left(\int dx + 3\int \underbrace{\cos^2 2x}_{\frac{1+\cos 4x}{2}}\,dx - 3\int \cos 2x\,dx -\right.$$

$$\left.-\int \cos^3 2x\,dx\right) = \frac{1}{8}\left(x + \frac{3}{2}\int (1+\cos 4x)\,dx - \frac{3}{2}\sin 2x - \int \cos^3 2x\,dx\right) =$$

$$\frac{x}{8} + \frac{3x}{16} + \frac{3}{16\cdot 4}\sin 4x - \frac{3}{16}\sin 2x - \frac{1}{8}\int \cos 2x(1-\sin^2 2x)\,dx = \frac{5x}{16} + \frac{3}{64}\sin 4x -$$

$$-\frac{3}{16}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 2x + \frac{1}{8\cdot 3\cdot 2}\sin^3 2x + c$$

c) $sin^n x \cdot cos^m x$, ha n és m közül valamelyik páratlan, lásd a). Példa:

$$\int \cos^3 x \sin^2 x\,dx = \int \cos x(1-\sin^2 x)\sin^2 x\,dx =$$

$$= \int \cos x \sin^2\,dx - \int \cos x \sin^4 x\,dx = \frac{\sin^3}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + c$$

d) $sin^n x \cdot cos^m x$, ha n és m páros, lásd b). Példa:

$$\int \sin^2 x \cos^4 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cos^4 x\,dx = \int \cos^4 x\,dx - \int \cos^6 x\,dx =$$

$$= \int \frac{(1+\cos 2x)^2}{4}\,dx - \int \frac{(1+\cos 2x)^3}{8}\,dx = \frac{1}{4}\int \left(1+\cos^2 2x + 2\cos 2x\right)\,dx -$$

$$-\frac{1}{8}\int 1+\cos^3 2x + 3\cos^2 2x + 3\cos 2x\,dx = \frac{1}{8}\int \left(1-\cos^2 2x + \cos 2x - \cos^3 2x\right)\,dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{1}{8\cdot 2}\int (1+\cos 4x)\,dx + \frac{1}{8\cdot 2}\sin 2x - \frac{1}{8}\int \cos 2x(1-\sin^2 2x)\,dx =$$

$$= \frac{x}{8} - \frac{x}{16} - \frac{1}{16\cdot 4}\sin 4x + \frac{1}{8\cdot 2}\sin 2x - \frac{1}{8\cdot 2}\sin 2x + \frac{1}{8\cdot 3\cdot 2}\sin^3 2x + c =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + c$$

3. $\boxed{\text{Parciális integrálás}}$

$$\boxed{\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx}$$

Azért gyorsan nézzük meg, hogy ez honnan jött ki:

$$(u\cdot v)' = u'\cdot v + u\cdot v'$$

$$u\cdot v' = (u\cdot v)' - u'\cdot v \qquad /\int$$

$$\int u\cdot v'\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

Mikor célszerű használni? Ha $v(x)$-nek ismert az integrálja és $u(x)$-nek a deriváltja. Példák:

a) $\displaystyle\int \underbrace{\text{polinom}}_{u}\cdot \underbrace{\begin{cases}\text{exp.}\\ \text{trig.}\\ \text{hiper.}\end{cases}}_{v'} dx$

$$\int (x^2+x+1)\,\text{sh}\,2x\,dx = (x^2+x+1)\frac{\text{ch}\,2x}{2} - \int (2x+1)\frac{\text{ch}\,2x}{2}\,dx =$$

$$(x^2+x+1)\frac{\text{ch}\,2x}{2} - (2x+1)\frac{\text{sh}\,2x}{4} + \int 2\frac{\text{sh}\,2x}{4}\,dx =$$

$$= (2x^2+2x+3)\frac{\text{ch}\,2x}{4} - (2x+1)\frac{\text{sh}\,2x}{4} + c$$

b) $\displaystyle\int \underbrace{\text{polinom}}_{v'}\cdot \underbrace{\begin{cases}\text{log}\\ \text{arsh, arch}\\ \text{arcsin, arccos}\end{cases}}_{u} dx$

$$\int \ln x\,dx = \int 1\cdot \ln x\,dx = x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x(\ln x - 1) + c$$

$$\int x\cdot \text{arctg}\,x\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}\cdot\text{arctg}\,x - \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\text{arctg}\,x + c$$

c) $\displaystyle\int \begin{cases}e^x\\ \text{sh, ch}\\ \text{sin, cos}\end{cases} \cdot \begin{cases}e^x\\ \text{sh, ch}\\ \text{sin, cos}\end{cases} dx$

$$\int e^{3x}\cdot\text{sh}(2x)\,dx = e^{3x}\cdot\frac{\text{ch}(2x)}{2} - \int 3\cdot e^{3x}\cdot\frac{\text{ch}(2x)}{2}\,dx =$$

$$e^{3x}\cdot\frac{\text{ch}(2x)}{2} - \frac{3}{2}\left(e^{3x}\cdot\frac{\text{sh}(2x)}{2} - \int 3\cdot e^{3x}\cdot\frac{\text{sh}(2x)}{2}\,dx\right)$$

Tehát azt kaptuk, hogy:

$$\int e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x)\,dx = e^{3x} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2} - \frac{3}{4}e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x) + \frac{9}{4}\int e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x)\,dx$$

$$\int e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x)\,dx = -\frac{4}{5}\left(e^{3x} \cdot \frac{\operatorname{ch}(2x)}{2} - \frac{3}{4}e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x)\right) + c$$

$$\int e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x)\,dx = -\frac{2}{5} \cdot e^{3x} \cdot \operatorname{ch}(2x) + \frac{3}{5} \cdot e^{3x} \cdot \operatorname{sh}(2x) + c$$

4. Racionális törtfüggvények integrálása

Definíció 6.3 *Racionális törtfüggvény a* $\frac{p(x)}{q(x)}$*, ahol* $p(x)$*,* $q(x)$ *polinomok. Valódi racionális törtről beszélünk, ha a számláló foka kisebb, mint a nevezőé* ($\deg p(x) < \deg q(x)$)*.*

Lépések:

i) Ha nem valódi a racionális tört, akkor felírjuk polinom + valódi rac. tört alakban. Ekkor a polinomot a megszokott módon integráljuk a valódi racionális törtet pedig a következő lépés alapján.

$$\frac{p_n(x)}{q_m(x)} = r_k(x) + \frac{\tilde{p}_{\tilde{n}}(x)}{q_m(x)}$$

ii) Ha valódi racionális törtünk van, akkor a nevezőt ($q(x)$-et) valós gyöktényezők (valós gyök: $(x-\alpha)$ vagy ha komplex gyökpár, akkor: (x^2+ax+b)) szorzatára bontjuk.

iii) Parciális törtekre való bontás, esetek:

a) n darab csupa egyszeres valós gyöktényező van, pl: $q(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x-\alpha_n)$, $\alpha_i \neq \alpha_j$, ha $i \neq j$.

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n} \qquad A_1,\ldots,A_n \in \mathbb{R}$$

b) Ha $(x-\alpha)$ n-szeres valós gyöke $q(x)$-nek; $q(x) = (x-\alpha)^n \cdot \ldots$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{B_1}{x-\alpha} + \frac{B_2}{(x-\alpha)^2} + \frac{B_3}{(x-\alpha)^3} + \ldots + \frac{B_n}{(x-\alpha)^n} + \ldots$$

c) Ha (x^2+Ax+B) egyszeres, másodfokú tovább nem bontható gyöktényező:

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{Cx+D}{x^2+Ax+B} + \ldots$$

d) (*) Többszörös komplex gyökpár $q(x) = (x^2+Ax+B)^n \cdot \ldots$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{C_1x+D_1}{x^2+Ax+B} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+Ax+B)^2} + \ldots + \frac{C_nx+D_n}{(x^2+Ax+B)^n} + \ldots$$

Tétel 6.2 *Az így kapható parciális tört felbontás egyértelmű.*

Bizonyítás 6.2
$\emptyset$. Megjegyzés: Legyen $\deg q = n$. Ekkor $\deg q \leqslant n-1$, tehát n darab együttható $(0,1,\ldots,n-1)$ és a parciális tört felbontásban is n darab szabad paraméter van. ∎

Láttuk, hogy hogy lehet a valódi racionális törtet parciális törtekre bontani, ezek után már csak ezeket kell a tanult szabályok alapján integrálni. Nézzünk egy példát:

$$\int \frac{x^4+2x^2-1}{x^4-1}\,dx = \int \left(1+\frac{2x^2}{x^4-1}\right) dx = x + \int \frac{2x^2}{x^4-1}\,dx$$

Tehát először a nem valódiból valódi törtet csináltunk, majd ennek a nevezőjének keressük a gyökeit:

$$(x^4-1) = (x^2+1)(x^2-1) = (x^2+1)(x+1)(x-1)$$

$$\frac{2x^2}{x^4-1} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x-1}$$

Határozzuk meg A, B, C és D értékét:

$$2x^2 = (Ax+B)(x^2-1) + C(x-1)(x^2+1) + D(x+1)(x^2+1)$$

$$2x^2 = x^3(A+C+D) + x^2(B-C+D) + x(-A+C+D) + (-B-C+D)$$

$$\left.\begin{array}{rrrrcl} A & & +C & +D & = & 0 \\ & +B & -C & +D & = & 2 \\ -A & & +C & +D & = & 0 \\ & -B & -C & +D & = & 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2C & + & 2D & = & 0 \\ -2C & + & 2D & = & 2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{1}{2};\ C = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad A = 0;\ B = 1$$

Tehát:

$$\int \frac{x^4+2x^2-1}{x^4-1}\,dx = x + \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{2x+2}\,dx + \int \frac{1}{2x-2}\,dx =$$

$$= x + \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1| + c$$

Másik példa:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,dx = ?$$

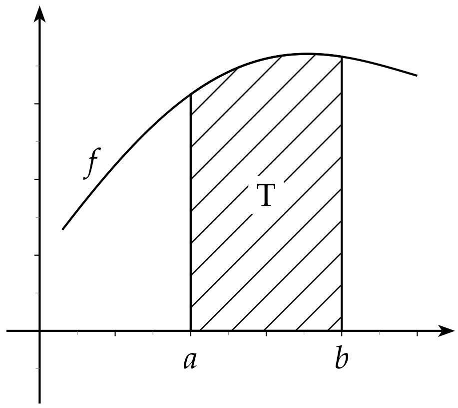
Itt a nevező nem bontható tovább, ez már tulajdonképpen 1 darab parciális tört. $(x^2 - 2x+3)' = 2x-2$, tehát ezt kéne belecsempészni a számlálóba:

$$\int \frac{3x+1}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x+5}\,dx = \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)}{x^2-2x+5}\,dx + 4\cdot\int \frac{1}{(x-1)^2+4}\,dx =$$

$$\frac{3}{2}\cdot\ln(x^2-2x+5) + 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2+1}\,dx = \frac{3}{2}\cdot\ln(x^2-2x+5) + 2\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right) + c$$

6.2. Határozott integrál (Riemann-integrál)

Motiváció: Legyen $[a,b] \subset \mathbb{R}$ **korlátos intevallum** és legyen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ valós, **korlátos függvény**. Szeretnénk az $[a,b]$ intervallum függvény alatti területét kiszámolni:



Definíció 6.4 $[a, b]$ *egy* ***felosztása*** $F_n = \{I_k\}_{k=1}^{n}$; $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. *Véges sok osztópont:*

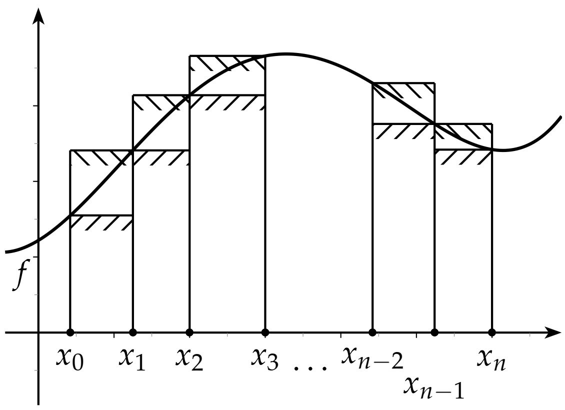
$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

Legyen $m_k = \operatorname*{Inf}_{x \in I_k} \{f(x)\}$ (ezek léteznek, hiszen f korlátos).
Legyen $M_k = \operatorname*{Sup}_{x \in I_k} \{f(x)\}$.
Ekkor az F felosztáshoz tartozó alsó (s_F) ill. felső (S_F) közelítő összeg:

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot |I_k|$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot |I_k|$$

Ezeket az ábrán jelölve (tetején sráffal jelölt téglalapok területeinek összege):



Tétel 6.3 $s_f \leqslant S_f$, *hiszen* $m_k \leqslant M_k$. ✓

Tétel 6.4 *Legyen* F^* *az* F *felosztás egy új osztóponttal vett finomítása. Ekkor* $s_{F^*} \geqslant s_F$ *és* $S_{F^*} \leqslant S_F$.

Bizonyítás 6.4
Legyen az új x^* osztópont x_k és x_{k+1} között. Ekkor:

$$\left.\begin{aligned} m_k' &= \operatorname*{Inf}_{x \in [x_k, x^*]} \{f(x)\} \\ m_k'' &= \operatorname*{Inf}_{x \in [x^*, x_{k+1}]} \{f(x)\} \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} m_k' &\geqslant m_k \\ m_k'' &\geqslant m_k \end{aligned}$$

Hasonlóan $M_k' \leqslant M_k$, illetve $M_k'' \leqslant M_k$. Tehát igaz az állítás. ■

Tétel 6.5 *Legyen F_1, F_2 két véges felosztás. Ekkor:*

$$s_{F_1} \leqslant S_{F_2}; \qquad s_{F_2} \leqslant S_{F_1}$$

Bizonyítás 6.5

$$s_{F_1} \leqslant s_{F_1 \cup F_2} \leqslant S_{F_1 \cup F_2} \leqslant S_{F_2}$$

Először a 6.4. tételt (felosztás finomítása) használjuk, majd a 6.3. tételt, és majd megint a 6.4-et. ■

Definíció 6.5 *Legyen F véges felosztás,* ***Darbaux-féle alsó integrál****:*

$$h := \operatorname{Sup} s_F = \underline{\int_{x=a}^{b}} f(x)\, dx$$

Ha $[a,b]$ véges és f ezen korlátos, akkor $\exists h$.

Definíció 6.6 *Legyen F véges felosztás,* ***Darbaux-féle felső integrál****:*

$$H := \operatorname{Inf} S_F = \overline{\int_{x=a}^{b}} f(x)\, dx$$

Ha $[a,b]$ véges és f ezen korlátos, akkor $\exists H$.

Definíció 6.7 *Az f korlátos függvény az $[a,b]$ korlátos intervallumon* ***Riemann-szerint integrálható****, ha $h = H$ és ekkor $h = H = \int_{x=a}^{b} f(x)\, dx$. Jelölés: $f \in R[a,b]$ (Megjegyzés: $R[a,b]$ az $[a,b]$ korlátos intervallumon Riemann-szerint integrálható függvények halmaza).*

Példák a definíció alkalmazására:

Példa 1: Legyen $f(x) \equiv c \in \mathbb{R}$ ($\rightsquigarrow m_k = \operatorname{Inf}_{x \in I_k}\{f(x)\} = M_k = \operatorname{Sup}_{x \in I_k}\{f(x)\} = c$). Legyen F felosztása $[a,b]$-nek.

$$s_F = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^{n} |I_k| = c(b-a)$$

$$S_F = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$$

Ebből következően nyílván $h = H$, tehát:

$$\int_{x=a}^{b} c\, dx = c(b-a)$$

Példa 2: Dirichlet-függvény:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tetszőleges F felosztásra:

$$\left.\begin{array}{r} s_F = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{m_k}_{0} |I_k| = 0 \\ S_F = \sum\limits_{k=1}^{n} \underbrace{M_k}_{1} |I_k| = b - a \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} h = \operatorname{Sup} s_F = 0 \\ H = \operatorname{Inf} S_F = b - a \end{array}\right\} \quad h \neq H$$

Tehát $D(x)$ Riemann-szerint **nem** integrálható!
Láthatjuk, hogy néhány esetben kézenfekvő a definíció használata, de általánosabb esetekben nehézkes. De ennek kiküszöbölésére a következő tétel segítséget nyújt, ami összekapcsolja a határozott integrált a határozotlan ingtegrállal:

Tétel 6.6 $\boxed{\textit{Newton-Leibniz formula}}$
Ha f Riemann-integrálható $[a, b]$-n és F az f primitív függvénye az $[a, b]$-n, akkor:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás 6.6
Majd később visszatérünk rá. ∎

Definíció 6.8 *F_n felosztás **finomsága**:* $\Delta F_n = \max\limits_{k=1,\ldots,n} \{(x_k - x_{k-1})\}$.

Definíció 6.9 ***Minden határon túl finomodó felosztás sorozat*** *(röv: m.h.t.f.f.s.):*

$$\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}; \qquad \Delta F_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Például: n osztópontos egyenletes felosztás.

6.2.1. Riemann-integrálhatóság szükséges és elégséges feltételei

Tétel 6.7 *(Segéd tétel)*
Ha F_n m.h.t.f.f.s. $[a, b]$-n, akkor

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_{F_n}(f) = h(f); \quad \exists \lim_{n\to\infty} S_{F_n}(f) = H(f)$$

Tétel 6.8

1. *Ha $\exists \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \Rightarrow \forall F_n$ m.h.t.f.f.s. esetén $\exists \lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n}(f) = I = \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$.*
2. *Ha $\exists F_n$ m.h.t.f.f.s., hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n}(f) \Rightarrow f \in R[a, b]$ és $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} s_{F_n}(f) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{F_n}(f)$.*

Bizonyítás 6.8

1. Az előző tétel alapján $\exists h, H$, de mivel $\exists \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$, ezért $h = H = I$.

2. Mivel $h = H$, ezért definíció alapján $f \in R[a,b]$.

■

Definíció 6.10 ***Oszcillációs összeg:***

$$O_{F_n}(f) = S_{F_n}(f) - s_{F_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{(M_k - m_k)}_{\geqslant 0} \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\geqslant 0} \geqslant 0$$

Tétel 6.9

$$\exists \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \textit{ esetén } \exists F \textit{ felosztás, hogy } O_F(f) < \varepsilon$$

Bizonyítás 6.9

($\Rightarrow$) $h = H$, tehát $\exists F_1 : I - \dfrac{\varepsilon}{2} < s_{F_1}$, $\exists F_2 : I + \dfrac{\varepsilon}{2} > S_{F_2}$. Vegyük $F_1 \cup F_2$ felosztást, ekkor ugye: $s_{F_1 \cup F_2} \geqslant s_{F_1}$, illetve $S_{F_1 \cup F_2} \leqslant S_{F_2}$. Tehát:

$$O_{F_1 \cup F_2}(f) = S_{F_1 \cup F_2} - s_{F_1 \cup F_2} < S_{F_2} - s_{F_1} < \varepsilon$$

($\Leftarrow$) $\forall \varepsilon > 0$-ra:

$$H - h \leqslant S_F - s_f = O_f < \varepsilon$$

Tehát $H - h = 0 \quad \Rightarrow \quad H = h = I$. ■

Tekintsük az F_n felosztását $[a,b]$-nek, és vegyünk fel minden $[x_{k-1}, x_k]$-n ($k = 1, \ldots, n$) egy ξ_k reprezentáns pontot.

Definíció 6.11 ***Integrál közelítő összeg:***

$$\sigma_{F_n}(f) = \sum_{k=1}^{n} \overbrace{\underbrace{f(\xi_k)}_{\geqslant m_k}}^{\leqslant M_k} (x_k - x_{k-1})$$

$$s_{F_n}(f) \leqslant \sigma_{F_n}(f) \leqslant S_{F_n}(f)$$

Tétel 6.10

1. *Ha* $\exists \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \quad \Rightarrow \quad \forall F_n$ *m.h.t.f.f.s. esetén* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{F_n}(f) = \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$.
2. *Ha* $\exists F_n$ *m.h.t.f.f.s., hogy* $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{F_n}(f)$ *a* $\{\xi_k\}$ *reprezentáns pontok választásától függetlenül*

   $\Rightarrow \quad f \in R[a,b]$ *és* $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{F_n}(f)$.

Bizonyítás 6.10

1. Rendőr-elv alapján:

$$\underbrace{s_{F_n}}_{\to h} \leqslant \sigma_{F_n} \leqslant \underbrace{S_{F_n}}_{\to H}$$

   De mivel $\exists \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$, ezért $h = H = I$, tehát $\sigma_{F_n} = I$.

2. $\emptyset$

■

6.2.2. Elégséges feltételek a Riemann-integrálhatóságra

Tétel 6.11 *Ha f monoton az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás 6.11
Tfh. f monoton nő. Legyen F_n az $[a,b]$ intervallumon való egyenletes felosztás: $|I_k| = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$. Ekkor:

$$O_{F_n}(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))$$

Ha jól meggondoljuk ez egy teleszkópikus összeg, amiből azt kapjuk, hogy:

$$O_{F_n}(f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(b) - f(a)) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

A 6.9. tételnél láthattuk, hogy $O_{F_n}(f) \to 0 \Leftrightarrow f \in R[a,b]$. ■

Tétel 6.12 *Ha $f \in C[a,b]$ ($\overset{W.I.}{\rightsquigarrow}$ f korlátos $[a,b]$-n), akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás 6.12
Weierstrass II. tétele alapján (4.15. tétel; 47. oldal) a függvény felveszi szélsőértékeit a kérdéses intervallumokon (I_k-n ξ_k helyen veszi fel maximumát, η_k helyen a minimumát), tehát:

$$O_{F_n}(f) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}\Big(f(\xi_k) - f(\eta_k)\Big)(x_k - x_{k-1})$$

Zárt intervallumon folytonos függvény egyenletesen folytonos, tehát:

$$|f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad |\xi_k - \eta_k| < \delta(\varepsilon)$$

Adott $\varepsilon > 0 : \exists\delta(\varepsilon) > 0$. Legyen $\Delta F_n < \delta(\varepsilon)$, ekkor

$$\xi_k - \eta_k < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |f(\xi_k) - f(\eta_k)| < \varepsilon$$

Tehát:

$$O_{F_n} \leqslant \varepsilon\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \varepsilon\cdot(b-a) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

■

Tétel 6.13 *Ha f egy pont kivételével folytonos $[a,b]$-n és f korlátos, akkor $f \in R[a,b]$.*

Bizonyítás 6.13
Legyen $x^* \in [a,b]$ a szakadási pont, illetve $x^* \in (x_{k-1}, x_k)$. Legyen O_I az $[a, x_{k-1}]$ intervallumon, O_{II} pedig az $[x_k, b]$ intervallumon vett oszcillációs összeg. Legyen $|f(x^*)| < K$. Ekkor adott $\varepsilon > 0$-hoz válasszuk úgy az F felosztás finomságát, hogy $O_I < \frac{\varepsilon}{3}$, $O_{II} < \frac{\varepsilon}{3}$, az $[x_{k-1}, x_k]$ intervallumhoz tartozó oszcillációs összeg helyett vegyünk egy intervallum szélességnyi $2K$ magas téglalap területét. Legyen $x_k - x_{k-1} < \frac{\varepsilon}{6K}$, ekkor:

$$O_F = O_I + O_{II} + (x_k - x_{k-1})2K < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

Tétel 6.14 *Ha f véges pont kivételével folytonos $[a,b]$-n és f korlátos, akkor $f \in R[a,b]$.*

Tétel 6.15 *Ha $f \in R[a,b]$ és $f(x) = g(x)$ véges sok x kivételével, akkor $g \in R[a,b]$ és $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{b} g(x)\,dx$*

Tétel 6.16 $\boxed{\textit{Newton-Leibniz formula}}$
Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n és F az f primitív függvénye az $[a,b]$-n, akkor:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^{b} = F(b) - F(a)$$

Bizonyítás 6.16
Legyen ϕ_n az $[a,b]$ egy m.h.t.f.f.s; osztópontok: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} \Big(F(x_k) - F(x_{k-1})\Big) \overset{\text{Lagrange-t}}{=} \sum_{k=1}^{n} F'(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1})$$

Mivel F az f primitív függvénye $[a,b]$-n, ezért $F'(x) = f(x) \quad \forall x \in [a,b]$:

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \cdot (x_k - x_{k-1}) = \sigma_{\phi_n}(f) \quad \xrightarrow[\text{m.h.t.f.f.s.}]{n\to\infty} \quad \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

■

Például:

$$\int_{x=0}^{\pi} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{\pi} = -\cos\pi - (-\cos 0) = 2$$

6.2.3. Riemann-integrál tulajdonságai

Eddig mindig úgy vettük, hogy $a < b$, és $[a,b]$ intervallumon számoltuk ki a határozott integrált. Lehet másik irányba is:

Definíció 6.12

$$\int_{x=b}^{a} f(x)\,dx := -\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$$

Tulajdonságok:

1. Intervallum additív: $a < c < b$ és $f \in R[a,b]$:

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{b} f(x)\,dx$$

2. Az integrál lineáris vektorteret alkot $R[a,b]$-n, azaz ha $f, g \in R[a,b]$ és $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, akkor $\alpha f + \beta g \in R[a,b]$ és

$$\int_{x=a}^{b} (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx + \beta \int_{x=a}^{b} g(x)\,dx$$

3. Az integrál monoton: Ha $f(x) \geqslant g(x)$ $\forall x \in [a,b]$-re, akkor $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \geqslant \int_{x=a}^{b} g(x)\,dx$.

6.2.4. Az integrálszámítás középértéktétele

Legyen f korlátos függvény $[a,b] \subset \mathbb{R}$-en, ekkor:

$$(b-a) \operatorname*{Inf}_{x\in[a,b]} \{f(x)\} \leqslant \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \leqslant (b-a) \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$$

Hiszen:

$$(b-a) \operatorname*{Inf}_{x\in[a,b]} \{f(x)\} \quad \leqslant \quad \sigma_F(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot(x_k - x_{k-1}) \quad \leqslant \quad (b-a) \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$$

Mivel $\operatorname*{Inf}_{x\in[a,b]} \{f(x)\} \leqslant f(\xi_k) \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$.

Definíció 6.13 ***Integrál közép***:

$$\kappa := \frac{\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx}{b-a}$$

Tétel 6.17

$$\operatorname*{Inf}_{x\in[a,b]} \{f(x)\} \leqslant \kappa \leqslant \operatorname*{Sup}_{x\in[a,b]} \{f(x)\}$$

Bizonyítás 6.17
A fenti egyenletet leosztva $(b-a)$-val kapjuk az állítást. ∎

Tétel 6.18 *Ha f folytonos $[a,b]$-n, akkor $\exists \xi \in (a,b)$, hogy $f(\xi) = \kappa$.*

Bizonyítás 6.18
Lásd Bolzano-tétel (4.11. tétel; 45. oldal) ∎

Definíció 6.14 *f függvény **pozitív/negatív** része:*

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x), \text{ ha } f(x) \geqslant 0 \\ 0, \text{ ha } f(x) \leqslant 0 \end{cases}$$

$$f^-(x) = \begin{cases} f(x), \text{ ha } f(x) \leqslant 0 \\ 0, \text{ ha } f(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Lemma 6.1

$$f(x) = f^+(x) + f^-(x)$$

$$|f(x)| = f^+(x) - f^-(x)$$

Tétel 6.19 *Ha $f \in R[a,b]$ ($b > a$), akkor:*

1. $f^+, f^-, |f| \in R[a,b]$
2. $\left|\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x=a}^{b} \left|f(x)\right| dx$

Bizonyítás 6.19

1.

$$O_F(f^+) \leqslant O_F(f) < \varepsilon$$

$$O_F(f^-) \leqslant O_F(f) < \varepsilon$$

Tehát az $O_F(f)$-hez tartozó ε-hoz jó $\delta(\varepsilon)$ jó az $O_F(f^+)$-hoz és $O_F(f^-)$-hoz is.

$$\int_{x=a}^{b} |f(x)|\,dx = \int_{x=a}^{b} \Big(f^+(x) - f^-(x)\Big)\,dx = \int_{x=a}^{b} f^+(x)\,dx - \int_{x=a}^{b} f^-(x)\,dx$$

2.

$$-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$$

Mivel az integrál monoton, ezért:

$$-\int_{x=a}^{b} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=a}^{b} f(x)\,dx \leqslant \int_{x=a}^{b} |f(x)|\,dx$$

■

6.2.5. Integrál függvény

Definíció 6.15 *Legyen $f \in R[a,b]$ ($\rightsquigarrow f \in R[c,d]$, ha $[c,d] \subset [a,b]$). Ekkor f **integrálfüggvénye**:*

$$F(x) := \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt \qquad x \in [a,b]$$

Tétel 6.20 $\boxed{\textit{Az integrálszámítás II. alaptétele}}$

1. *$F(x)$ folytonos $[a,b]$-n*
2. *Ha f folytonos $x_0 \in [a,b]$-ben, akkor F differenciálható x_0-ban és $F'(x_0) = f(x_0)$*

Következmény: Ha $f \in C[a,b] \subset R[a,b]$ akkor $\forall x \in [a,b]$ esetén $F'(x) = f(x)$ (végpontokban féloldalú folytonosság/derivált).

Bizonyítás 6.20

1. Legyen $x_0 \in [a,b]$

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt - \int_{t=a}^{x_0} f(t)\,dt \right| =$$

$$= \left| \int_{t=a}^{x_0} f(t)\,dt + \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,dt - \int_{t=a}^{x_0} f(t)\,dt \right| = \left| \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,dt \right|$$

Mivel $f \in R[a,b]$, ezért f korlátos, tehát $\exists K : |f(t)| \leqslant K$:

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_{t=x_0}^{x} f(t)\,dt \right| \leqslant K|x - x_0| < \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$$

Ez teljesül, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$, tehát $\delta(\varepsilon) := \dfrac{\varepsilon}{K}$. Tehát folytonos ✓.

2. f folytonos $x_0 \in [a,b]$-ben.

$$F'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} \stackrel{?}{=} f(x_0)$$

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| = \left|\frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} - f(x_0)\cdot\frac{h}{h}\right| =$$

$$= \left|\frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} f(t)\,dt}{h} - \frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} f(x_0)\,dt}{h}\right| = \left|\frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt}{h}\right| =$$

$$= \frac{\left|\int_{t=x_0}^{x_0+h} f(t)-f(x_0)\,dt\right|}{|h|} \leqslant \frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt}{|h|}$$

Mivel f folytonos x_0-ban, ezért $|f(t)-f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|t-x_0| < \delta(\varepsilon)$, tehát:

$$\frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} |f(t)-f(x_0)|\,dt}{|h|} < \frac{\int_{t=x_0}^{x_0+h} \varepsilon\,dt}{|h|} = \varepsilon$$

Vagyis:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h} - f(x_0)\right| < \varepsilon$$

Tehát $F'(x_0) = f(x_0)$. ■

Példák

$F(x) = \int_{t=0}^{x} \cos^3(t)\,dt$
$G(x) = \int_{t=x^2}^{e^x} \cos^3(t)\,dt$

$F'(x) = \cos^3 x$, hiszen $\cos^3 x$ folytonos.
$G(x) = \int_{t=x^2}^{e^x} \cos^3(t)\,dt = \int_{t=0}^{e^x} \cos^3(t)\,dt - \int_{t=0}^{x^2} \cos^3(t)\,dt = F(e^x) - F(x^2)$.
$G'(x) = \Big(F(e^x) - F(x^2)\Big)' = f'(e^x)\cdot e^x - f'(x^2)\cdot 2x = e^x\cdot\cos^3 e^x - 2x\cdot\cos^3 x^2$.

6.2.6. Parciális integrálás

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

$$\int_{x=a}^{b} u(x)\cdot v'(x)\,dx = \Big[u(x)\cdot v(x)\Big]_a^b - \int_{x=a}^{b} u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

6.2.7. Integrálás helyettesítéssel

Tétel 6.21 *Ha $x = \varphi(t)$, akkor:*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(t)) + c = F(x) + c = \int f(x)\,dx$$

ahol F az f egy primitív függvénye, tehát:

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\underbrace{\varphi(t)}_{x})\cdot\underbrace{\varphi'(t)}_{\frac{dx}{dt}}\,dt$$

Feltételek: φ folytonosan differenciálható, szig. monoton.

Bizonyítás 6.21

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c$$

$$\int f(x)\,dx\Big|_{x=\varphi(t)} = F(\varphi(t)) + c$$

$$\frac{d}{dt}\Big(F(\varphi(t)) + c\Big) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$$ ∎

Tétel 6.22 *Ha $x = \varphi(t)$, akkor:*

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt$$

Bizonyítás 6.22

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \Big[F(x)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\ dt = \Big[F(\varphi(t))\Big]_{\alpha}^{\beta} = F(\overbrace{\varphi(\beta)}^{b}) - F(\overbrace{\varphi(\alpha)}^{a})$$ ∎

Helyettesítéssel megadható integrálok

1. $\boxed{\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)\ dx}$ Módszer: teljes négyzetté alakítunk:

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} \to \begin{cases} c\sqrt{1 - A^2(x)} & A(x) := \sin t \\ c\sqrt{1 + A^2(x)} & A(x) := \operatorname{sh} t \\ c\sqrt{A^2(x) - 1} & A(x) := \operatorname{ch} t \end{cases}$$

Pl: $\int \sqrt{x^2 + 2x + 2}\,dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 1}\,dx$. Legyen $\operatorname{sh} t = x + 1$, ekkor $dx = \operatorname{ch} t \cdot dt$

$$\int \sqrt{(x+1)^2 + 1}\,dx = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \cdot \operatorname{ch} t\,dt = \int \operatorname{ch}^2 t\,dt = \int \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 dt =$$

$$= \frac{1}{4}\int e^{2t}\,dt + \frac{1}{2}\int dt + \frac{1}{4}\int e^{-2t}\,dt = \frac{e^{2t}}{8} + \frac{t}{2} - \frac{e^{-2t}}{8} + c = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2t) + c$$

Visszatérünk x-re:

$$\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\underbrace{\operatorname{sh}(2t)}_{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} + c = \frac{\operatorname{arsh}(x+1)}{2} + \frac{1}{2}(x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 2} + c$$

2. $\boxed{\int R(e^x)\,dx}$ Itt $t := e^x$, ekkor $dx = \dfrac{dt}{t}$.

Pl: $\displaystyle\int \frac{1}{e^{2x}-2e^x}\,dx = \int \frac{1}{t^2-2t}\cdot\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{1}{t^2(t-2)}\,dt$. Ezt parciális törtekre bontjuk:

$$\int \frac{1}{t^2(t-2)}\,dt = \int \frac{A}{t}\,dt + \int \frac{B}{t^2}\,dt + \int \frac{C}{t-2}\,dt$$

$$1 = A(t)(t-2) + B(t-2) + C(t^2) = t^2(A+C) + t(-2A+B) - 2B$$

Ebből $B = -\frac{1}{2}$, $A = -\frac{1}{4}$ és $C = \frac{1}{4}$. Tehát:

$$-\int \frac{1}{4t}\,dt - \int \frac{1}{2t^2}\,dt + \int \frac{1}{4t-8}\,dt = -\frac{1}{4}\ln|t| - \frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\ln|t-2| + c$$

Visszatérünk x-re:

$$-\frac{1}{4}\ln|t| - \frac{1}{2}\frac{t^{-1}}{-1} + \frac{1}{4}\ln|t-2| + c = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2e^x} + \frac{1}{4}\ln|e^x-2| + c$$

3. $\boxed{\int R\left(x, \sqrt[n]{ax+b}\right)\,dx}$ Ekkor $t := \sqrt[n]{ax+b}$.

Pl: $\displaystyle\int x\sqrt{5x+3}\,dx$. Így $t = \sqrt{5x+3}$, $x = \dfrac{t^2-3}{5}$, illetve $dx = \dfrac{2t}{5}dt$. Tehát:

$$\int x\sqrt{5x+3}\,dx = \int \frac{t^2-3}{5}\cdot t\cdot\frac{2t}{5}\,dt = \frac{2}{25}\int (t^2-3)t^2\,dt = \frac{2}{25}\left(\int t^4\,dt - \int 3t^2\,dt\right) =$$

$$= \frac{2}{25}\cdot\frac{t^5}{5} - \frac{6}{25}\cdot\frac{t^3}{3} + c = \frac{2}{125}(5x+3)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{25}(5x+3)^{\frac{3}{2}} + c$$

4. $\boxed{\int R\big(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, \dots\big)\,dx}$ Itt $t := x^{\frac{1}{q}}$, ahol q a q_i legkisebb közös többszöröse.

Pl: $\displaystyle\int \frac{1+x^{\frac{3}{2}}}{3-x^{\frac{1}{3}}}\,dx$. Így $t = x^{\frac{1}{6}}$, $dx = 6t^5dt$.

$$6\int \frac{1+x^{\frac{3}{2}}}{3-x^{\frac{1}{3}}}\,dx = \int \frac{1+t^9}{3-t^2}\cdot 6t^5\,dt =$$

$$= 6\int\left(-729 - 3t - 243t^2 - t^3 - 81t^4 - 27t^6 - 9t^8 - 3t^{10} - t^{12} + \frac{9(243+t)}{3-t^2}\right)dt =$$

$$= \underbrace{6\Big(-729t - 3\frac{t^2}{2} - 81t^3 - \frac{t^4}{4} - 81\cdot\frac{t^5}{5} - 27\frac{t^7}{7} - t^9 - 3\cdot\frac{t^{11}}{11} - \frac{t^{13}}{13}\Big)}_{G} + 6\int \frac{9(243+t)}{3-t^2}\,dt =$$

$$G + 6\int \frac{(-2t)\cdot(-\frac{9}{2})}{3-t^2}\,dt + 18\cdot 243\cdot\int \frac{1}{1-\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}\,dx =$$

$$= G - 27\ln|3-t^2| + 18\sqrt{3}\cdot 243\cdot \operatorname{arth}\frac{t}{\sqrt{3}} + c$$

Visszaírva x-et:

$$4374\sqrt[6]{x} - 9\sqrt[3]{x} - 486\sqrt{x} - \frac{3}{2}\cdot x^{\frac{2}{3}} - \frac{486}{5}\cdot x^{\frac{5}{6}} - \frac{162}{7}x^{\frac{7}{6}} - 6\cdot x^{\frac{3}{2}} - \frac{18}{11}\cdot x^{\frac{11}{6}} - \frac{6}{13}x^{\frac{13}{6}} -$$

$$-27\ln|3-\sqrt[3]{x}| + 4374\sqrt{3}\cdot\operatorname{arth}\frac{\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3}} + c$$

5. $\boxed{\int R(\sin x, \cos x)\,dx}$ Itt $t := \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x = 2\operatorname{arctg} t$ és $dx = \frac{2}{1+t^2}dt$

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{2t}{t^2+1}$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+1} = \frac{1-t^2}{t^2+1}$$

Pl: $\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx$:

$$\int \frac{1}{2-\cos x}\,dx = \int \frac{1}{2-\frac{1-t^2}{t^2+1}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{2+2t^2-1+t^2}\,dt = \int \frac{2}{1+3t^2}\,dt =$$

$$= 2\int \frac{1}{1+(\sqrt{3}t)^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}t) + c = \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}) + c$$

6.3. Improprius integrál

Eddig korlátos intervallumon korlátos függvényt integráltunk.

6.3.1. Ha az intervallum nem korlátos

Definíció 6.16 *Legyen* $f \in R[a,\omega]$ $\quad\forall\omega > a$ *esetén, ekkor* $\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\int_{x=a}^{\omega} f(x)\,dx$, *ha a limesz létezik.*

Definíció 6.17 *Legyen* $f \in R[\omega,b]$ $\quad\forall\omega < b$ *esetén, ekkor* $\int_{x=-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\omega\to-\infty}\int_{x=\omega}^{b} f(x)\,dx$, *ha a limesz létezik.*

Definíció 6.18 *Az* $\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx$ *improprius integrál konvergens, ha* $\forall c \in [a,b]$ *esetén*

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{b} f(x)\,dx$$

Pl: $\int_{x=-\infty}^{\infty} x\,dx$ nem konvergens, hiszen $\nexists \int_{x=0}^{\infty} x\,dx$.

6.3.2. Ha a függvény nem korlátos

Definíció 6.19 *Ha a-ban nem korlátos, de* $\forall\delta > 0$ *esetén* $f \in R[a+\delta,b]$*:*

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+0}\int_{x=a+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Definíció 6.20 *Ha b-ben nem korlátos, de* $\forall\delta > 0$ *esetén* $f \in R[a,b-\delta]$*:*

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+0}\int_{x=a}^{b-\delta} f(x)\,dx$$

Definíció 6.21 *Ha* $c \in (a,b)$*-ben nem korlátos, de* $\forall\delta > 0$ *esetén* $f \in R[a,c-\delta]$ *és* $f \in R[c+\delta,b]$*:*

$$\int_{x=a}^{b} f(x)\,dx = \int_{x=a}^{c} f(x)\,dx + \int_{x=c}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\delta\to0+0}\int_{x=a}^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to0+0}\int_{x=c+\delta}^{b} f(x)\,dx$$

Példák

1.

$$\int_{x=0}^{1} \frac{(\arcsin x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \int_{x=0}^{1-\delta} \frac{(\arcsin x)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \left[\frac{(\arcsin x)^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\right]_0^{1-\delta} =$$

$$= \frac{3}{4} \lim_{\delta\to 0+0} (\arcsin^{\frac{4}{3}}(1-\delta) - \arcsin^{\frac{4}{3}} 0) = \frac{3}{4}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{4}{3}}$$

2.

$$\int_{x=3}^{7} \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \int_{x=3+\delta}^{7} \frac{x}{\sqrt{x-3}}\,dx =$$

Legyen $t = \sqrt{x-3}$, figyeljünk arra, hogy az intervallumokat is transzformáljuk:

$$= \lim_{\delta\to 0+0} \int_{0+\delta}^{2} \frac{t^2+3}{t} \cdot 2t\,dt = 2 \lim_{\delta\to 0+0} \int_{0+\delta}^{2} (t^2+3)\,dt = 2 \lim_{\delta\to 0+0} \left[\frac{t^3}{3} + 3t\right]_{0+\delta}^{2} =$$

$$= 2 \lim_{\delta\to 0+0} \left(\frac{8}{3} + 6 - \frac{\delta^3}{3} + 3\delta\right) = \frac{16}{3} + 12$$

3. Milyen α-ra konvergens a $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$?
Ha $\alpha = 1$

$$\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} (\ln\omega - \ln 1) = \infty, \quad \text{tehát divergens}$$

Ha $\alpha \neq 1$

$$\int_{x=1}^{\infty} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^{\omega} = \lim_{\omega\to\infty} \left(\frac{\omega^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{1}{-\alpha+1}\right) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, \text{ ha } \alpha > 1 \\ \infty, \text{ ha } \alpha < 1 \end{cases}$$

Tehát $\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergens, ha $\alpha > 1$, divegens, ha $\alpha \leqslant 1$.

4. Milyen α-ra konvergens a $\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$?
Ha $\alpha = 1$

$$\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} (\ln 1 - \ln\delta) = \infty, \quad \text{tehát divergens}$$

Ha $\alpha \neq 1$

$$\int_{x=0}^{1} x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\delta\to 0+0} \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_{\delta}^{1} = \lim_{\delta\to 0+0} \left(\frac{1}{-\alpha+1} - \frac{\delta^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} -\right) = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \text{ ha } \alpha < 1 \\ \infty, \text{ ha } \alpha > 1 \end{cases}$$

Tehát $\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ konvergens, ha $\alpha < 1$, divegens, ha $\alpha \geqslant 1$.

5. Milyen α-ra konvergens a $\displaystyle\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$?

$$\int_{x=0}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \underbrace{\int_{x=0}^{1} \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{div., ha } \alpha \geqslant 1} + \underbrace{\int_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx}_{\text{div., ha } \alpha \leqslant 1} \quad \text{tehát divergens}$$

6.3.3. Improprius integrál néhány tulajdonsága

Tétel 6.23 *$f \in R[a,\omega]$ $\quad \forall\omega > a$ esetén.*
$\displaystyle\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx$ improprius integrál konvergens $\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $\left|\displaystyle\int_{x=\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx\right| <$ ε, ha $\omega_1, \omega_2, > \Omega$.

Tétel 6.24 *Legyen $F(x) = \int_{t=a}^{x} f(t)\,dt$ integrál függvény. F folytonos $[a,\infty)$-n.*
$\displaystyle\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} F(x) \overset{\text{Cauchy}}{\Leftrightarrow} \forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists\Omega(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, hogy $\left|\displaystyle\int_{x=\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx\right| = |F(\omega_2) -$ $F(\omega_1)| < \varepsilon$, ha $\omega_1, \omega_2, > \Omega$.

Definíció 6.22 $\displaystyle\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx$ ***abszolút konvergens***, *ha $\exists \int_{x=a}^{\infty} |f(x)|\,dx < \infty$.*

Definíció 6.23 $\displaystyle\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx$ ***feltételesen konvergens***, *ha konvergens, de nem abszolút konvergens.*

Tétel 6.25 *Ha $\displaystyle\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx$ abszolút konvergens, akkor konvergens.*

Bizonyítás 6.25 (Cauchy-kritérium)

$$\left|\int_{x=\omega_1}^{\omega_2} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{x=\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,dx < \varepsilon, \text{ ha } \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

■

6.3.4. Majoráns kritérium

Tétel 6.26 *$f \in R[a,b]$, illetve $g \in R[a,b]$ $\quad \forall b > a$ esetén és $|f(x)| \leqslant g(x)$ $\quad \forall x > a$ esetén, ha $\displaystyle\int_{x=a}^{b} g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\displaystyle\int_{x=a}^{b} |f(x)|\,dx$ is az, illetve*

$$\int_{x=a}^{\infty} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=a}^{\infty} g(x)\,dx$$

Bizonyítás 6.26 (Cauchy-kritérium)

$$\int_{x=\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=\omega_1}^{\omega_2} g(x)\,dx < \varepsilon \quad \text{ha } \omega_1, \omega_2 > \Omega(\varepsilon)$$

Teáht $\displaystyle\int_{x=\omega_1}^{\omega_2} |f(x)|\,dx$ konvergens és az integrál monotonitásából következik, hogy ha $|f(x)| \leqslant g(x)$, akkor:

$$\int_{x=a}^{\omega} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=a}^{\omega} g(x)\,dx \quad / \lim_{\omega\to\infty}$$
$$\int_{x=a}^{\infty} |f(x)|\,dx \leqslant \int_{x=a}^{\infty} g(x)\,dx$$

■

6.3.5. Minoráns kritérium

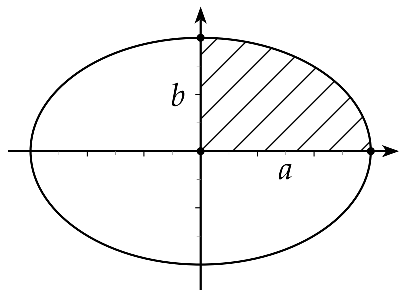
Tétel 6.27 *Ha h és $f \in R[a,\omega]$ $\forall \omega > a$ esetén és $\int_{x=a}^{\infty} h(x)\,dx = \infty$ és $f(x) \geqslant h(x)$ $\forall x > a$ esetén akkor $\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx = \infty$.*

Bizonyítás 6.27
Ha $\int_{x=a}^{\infty} f(x)\,dx < \infty$ lenne, akkor a majoráns kritérium miatt $\int_{x=a}^{\infty} h(x)\,dx < \infty$ lenne, ami ellentmondás. ∎

6.4. Az integrálás néhány alkalmazása

6.4.1. Terület számítás

Pl: Ellipszis területe. Egyenlete: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Számoljuk ki a besatírozott területet, és ezt 4-el megszorozva megkaphatjuk a teljes területét.



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Ezzel megkaptuk az ellipszis felső ágának egyenletét. Magyarán az ellipszis területe:

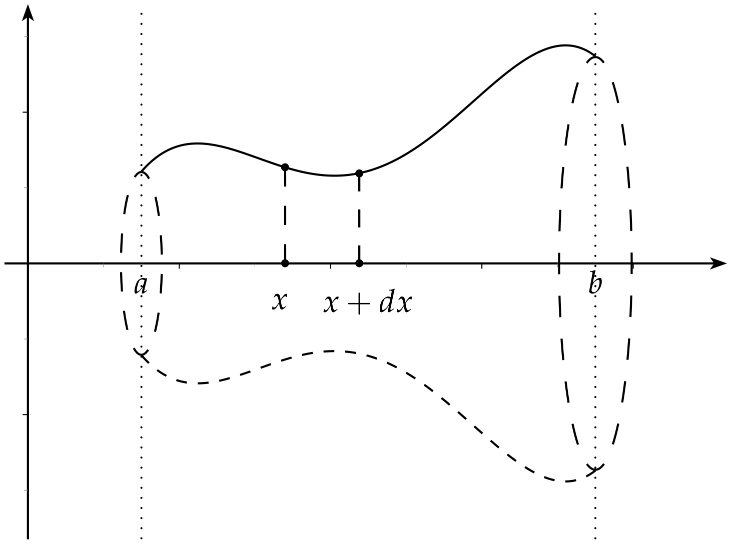
$$4\int_0^a \left(b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right) dx = 4b\int_0^a \sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\,dx$$

Legyen $\sin t := \frac{x}{a}$. Ekkor $dx = a\cos t \cdot dt$, a határok pedig: 0, $\frac{\pi}{2}$, Tehát:

$$4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin t^2}\cdot a\cos t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,dt = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = 4ab\left[\frac{1}{2}t + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4ab\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin\pi}{4} - \frac{\sin 0}{4}\right) = \boxed{ab\pi}$$

6.4.2. Forgástest térfogatának kiszámolása



Ha megnézzük akkor az x és $x + dx$ közti rész, ha megforgatjuk, akkor jó közelítéssel egy hengert ad ki (dx tetszőleges kicsiny), ennek a térfogata:

$$dV(x) = \underbrace{\pi \cdot f^2(x)}_{\text{alapterület}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{magasság}}$$

A teljes térfogat:

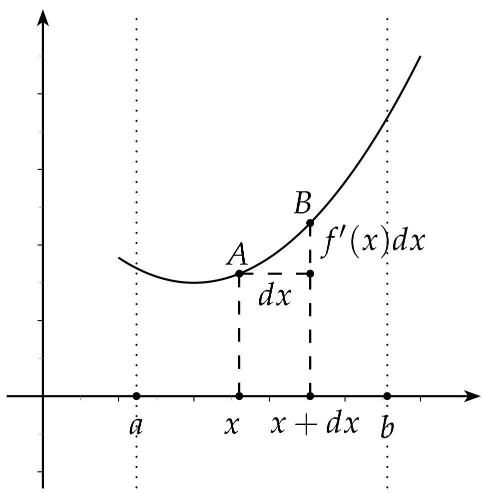
$$V = \int_a^b \pi \cdot f^2(x)\, dx$$

Például a kúp térfogata: Legyen a magassága m, alapterülete r. A kúpot kaphatjuk például az $y = \frac{r}{m}x$ egyenletű egyenes megforgatásásval:

$$V = \int_0^m \pi \cdot \frac{r^2}{m^2}x^2\, dx = \pi\frac{r^2}{m^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^m = \pi\frac{r^2}{m^2} \cdot \frac{m^3}{3} = \boxed{\frac{r^2\pi \cdot m}{3}}$$

6.4.3. Ívhossz

Ha megnézzük az ábrát, akkor A és B közti ív jó közelítéssel egy szakasz, Pithagorasz-tétel alapján:



$$dS(x)^2 = dx^2 + (f'(x)dx)^2$$

$$dS(x) = dx\sqrt{1 + f'^2(x)}$$

A teljes ívre pedig:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\, dx$$

Pl. a kör kerülete. Kör egyenlete: $x^2 + y^2 = r^2$, ekkor a felső ív függvénye:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{2\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Ha ennek a felének a hosszát kiszámoljuk, majd beszorozzuk 4-el, akkor megkapjuk a kör kerületét:

$$K = 4\int_0^r \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}\right)^2}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx = 4\int_0^r \sqrt{\frac{1}{1-\left(\frac{x}{r}\right)^2}}\,dx =$$

$$4\left[\frac{\arcsin\frac{x}{r}}{\frac{1}{r}}\right]_0^r = 4r\left(\arcsin 1 - \arcsin 0\right) = 4r\frac{\pi}{2} = \boxed{2r\pi}$$

6.5. Integrál kritérium

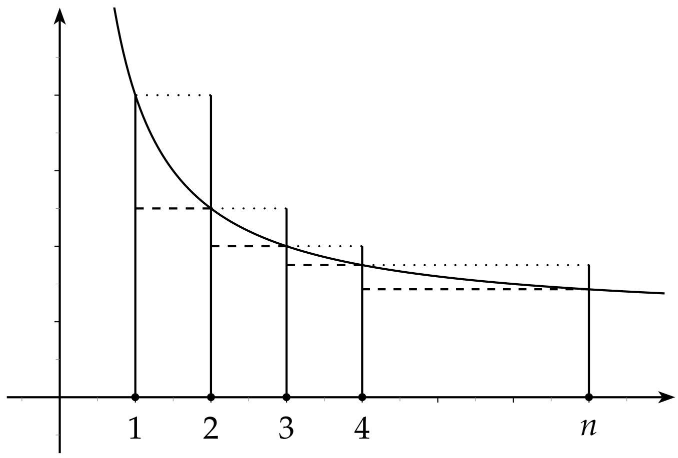
Tétel 6.28 $\boxed{\textit{Integrál kritérium}}$

Legyen $f \in R[1,a]$ $\forall a > 1$ esetén, és f monoton csökkenő és $f(x) \geqslant 0$ $\forall x \geqslant 1$ esetén. Legyen $a_n = f(n)$. Ekkor

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{és} \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx \quad \text{ekvikonvergensek, azaz}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx < \infty \quad \text{és}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \int_1^{\infty} f(x)\,dx = \infty$$



Bizonyítás 6.28

$$\sum_{k=2}^{n} a_k \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

Illetve:

$$\int_1^{n+1} f(x)\,dx \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant a_1 + \int_1^{n} f(x)\,dx$$

Mindkét esetben minoráns és majornás kritérium alapján igaz az állítás. ■

Pl:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \underbrace{\sim}_{\text{ekvikonv.}} \quad \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \infty$$

Tehát

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

6.5.1. Hibabecslés

$$R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \leqslant \int_{n}^{\infty} f(x)\, dx$$

7. fejezet

Számsorozatok nagyságrendje

Definíció 7.1 *Ekvivalencia reláció:*

- $a \sim b \Leftrightarrow b \sim a$ *(szimmetrikus)*
- $a \sim a$ *(reflexív)*
- $a \sim b, b \sim a \Rightarrow a \sim b$ *(tranzitív)*

Definíció 7.2 $a_n = O(b_n)$, *ha* $\exists c \in \mathbb{R}$ *és* $N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$|a_n| \leqslant c|b_n| \quad \text{ha } n > N$$

Definíció 7.3 $a_n = \Omega(b_n)$, *ha* $\exists c \in \mathbb{R}^+$ *és* $N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$c|b_n| \leqslant a_n \quad \text{ha } n > N$$

Definíció 7.4 $a_n = \Theta(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad b_n = \Theta(a_n)$, *ha*

$$a_n = O(b_n) \quad \text{és} \quad a_n = \Omega(b_n)$$

Tehát $a_n = \Theta(b_n) \quad \Leftrightarrow \quad \exists c, d > 0, N \in \mathbb{N}$, *hogy*

$$c|b_n| \leqslant a_n \leqslant d|b_n| \quad \text{ha } n > N$$

Definíció 7.5 $a_n \sim b_n$ *(asszimptotikusan egyenlő), ha*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Lemma 7.1 $a_n > 0, b_n > 0$
Θ *és* $\sim$ *ekvivalencia relációk és*

$$a_n \sim b_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \Theta(b_n)$$

Bizonyítás:

$$1 - \varepsilon \leqslant \frac{a_n}{b_n} \leqslant 1 + \varepsilon \quad \text{ha } n > N$$

$$(1 - \varepsilon)b_n \leqslant a_n \leqslant (1 + \varepsilon)b_n \quad \text{ha } n > N$$

7.0.2. Műveleti szabályok

Tétel 7.1 *Ha* $a_n = \Theta(b_n)$ *és* $c_n = \Theta(d_n)$

$$a_n + c_n = \Theta(b_n + d_n)$$
$$a_n \cdot c_n = \Theta(b_n \cdot d_n)$$
$$\frac{a_n}{c_n} = \Theta\left(\frac{b_n}{d_n}\right)$$

Megjegyzés*: különbségre nincs szabály! És hasonló szabályok igazak a* $\sim$*-re.*

Tétel 7.2 $a_n > 0$*,* $b_n > 0$ *és* $a_n \sim b_n$*, akkor*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{ekvikonvergens} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ -el}$$

Tétel 7.3 $\boxed{\textit{Stirling-formula}}$

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$