

3. Analízis a frekvenciatartományban

Egy rendszernek vagy hálózatnak az időtartományban történő leírása és analízisa tekinthető a természetes eljárásnak.

Egyes esetekben azonban akár a modell számítása, akár az objektum mérése szempontjából ez a kézenfekvő eljárás körülményes. Előnyösebb lehet a rendszert a frekvenciatartományban leírni, az objektumot ilyen megfontolások alapján mérni. Bizonyos feladatok megfogalmazása és megoldása csak a frekvenciatartományban reményteljes (például a szűrőtervezés).

Míg azonban a lineáris, invariáns rendszerekre az időtartományban értelmezett állapotváltozós leírás elvileg egyszerűen általánosítható nemlineáris és variáns rendszerekre (2.5. fejezet), a frekvenciatartománybeli leírás csak lineáris, invariáns rendszerekre kényelmes.

A továbbiakban ezért lineáris, invariáns diszkrét idejű és folytonos idejű rendszerek tárgyalására szorítkozunk. Többnyire feltételezzük a rendszer GV stabilitását. A nem GV stabilis rendszerek frekvenciatartománybeli vizsgálata körültekintést igényel, mert a látszólag helyes eredmény alapvetően értelmetlen lehet. A veszteségek elhanyagolásával előáll, a stabilitás határhelyzetében lévő nem stabilis rendszerekre az e fejezetben tárgyalt módszerek többnyire alkalmazhatók.

A 3.1. fejezetben a szinuszos és a periodikus gerjesztéshez tartozó válasz (pontosabban: gerjesztett válasz) számítását tárgyaljuk. Ha a rendszer GV stabilis (ezt célszerű a számítás elkezdése előtt vagy az eredmény ismeretében megvizsgálni), akkor ez a belépő, szinuszos vagy periodikus gerjesztéshez tartozó, ugyancsak szinuszos vagy periodikus állandósult választ jelenti, amelyhez a válasz tart. Kellően hosszú idő után a válasz az állandósult válasszal egyenlőnek tekinthető. Ha a rendszer nem GV stabilis, akkor a számított szinuszos vagy periodikus válasznak nincs fizikai tartalma. A szinuszos gerjesztéshez tartozó válasz vizsgálata kapcsán bevezetjük a rendszernek a rögzített frekvenciára vonatkozó átviteli együtthatóját és frekvenciafüggő átviteli karakterisztikáját. Megmutatjuk, hogy a Fourier-felbontás (véges illetve végtelen tagszámú Fourier-sor) segítségével a periodikus válasz számítása visszavezethető szinuszos válaszok számításának szuperpozíciójára.

A 3.2. fejezetben általánosítjuk a szinuszos jelek szuperpozícióján alapuló eljárást nem periodikus jelek előállítására, továbbá a nem periodikus gerjesztéshez tartozó nem periodikus válasz előállítására (spektrális előállítás, Fourier-transzformáció). Az eljárás akkor alkalmazható elvileg egyszerűen, ha a rendszer stabilis és a gerjesztő jel is elegendően bizonyos korlátossági tulajdonságnak. Ennél általánosabb esetben a frekvenciatartománybeli analízis gondosságot igényel, ezért célszerűbb lehet a következő fejezetben tárgyalt, komplex frekvenciatartománybeli módszert alkalmazni. Frekvenciatartománybeli analízisre jól kidolgozott, gyors numerikus módszerek ismertek.

A 3.3. fejezetben megadjuk a hálózattal reprezentált rendszer átviteli együtthatójának és átviteli karakterisztikájának számításmódját is. Az átviteli karakterisztika ismeretében a hálózat stabilitása eldönthető, az átviteli együttható ismeretében erre nincs lehetőség, ezért a stabilitást előzetesen célszerű megvizsgálni.

Aki át fogja tanulmányozni a következő részt is (4. Analízis a komplex frekvenciatartományban), az a 3.3. fejezetet ki is hagyhatja. A 4.3 szakaszban tárgyalandó módon számított átviteli függvény ismeretében ugyanis a rendszer GV stabilitása egyszerűen eldönthető, majd az átviteli karakterisztika is egyszerűen számítható. Ha azonban csak egyetlen frekvencián akarjuk az átviteli együtthatót meghatározni, akkor azt esetleg célszerűbb a hálózat ismeretében a frekvenciatartományban elvégezni.

3.1. Állandósult válasz

A 2. részben leírtakból (például az állapotváltozós leírás megoldásából) következik, hogy ha egy lineáris, invariáns rendszer gerjesztése periodikus jel, akkor válaszának gerjesztett összetevője is periodikus jel. Ha a rendszer gerjesztés-válasz stabilis, akkor ez egyúttal a belépő periodikus gerjesztéshez tartozó állandósult válasz is. Sok gyakorlati esetben csak az állandósult válaszra van szükségünk (megtakaríthatjuk a sajátértékek, a kezdeti értékek, stb. számítását). A következő fejezetben látni fogjuk, hogy az itt bevezetett technika általánosítható nem periodikus gerjesztések hatásának vizsgálatára is.

A 3.1-1. szakaszban a szinuszos gerjesztéshez tarozó szinuszos válasz vizsgálatát tárgyaljuk. Bevezetjük a lineáris, invariáns rendszer átviteli együtthatóját és átviteli karakterisztikáját. A 3.1-2. szakaszban a DI és a FI periodikus jel Fourier-soros előállítását tárgyaljuk. Ennek alapján meghatározhatjuk a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasz Fourier-soros alakját. (Egy más lehetőséget a 4.2-2.4. pontban fogunk tárgyalni.)

3.1-1. Szinuszos válasz

3.1-1.1. A szinuszos jel

Egy $x = x[k]$ diszkrét idejű illetve egy $x = x(t)$ folytonos idejű *szinuszos jel* három valós adattal jellemezhető. Ezek

- az x jel X *amplitúdója* vagy csúcserőértéke ($X > 0$);
- az x jel ρ *kezdőfázisa* vagy fázisszöge ($-\pi \leq \rho < \pi$);
- az x jel ϑ vagy Θ diszkrét idejű, illetve ω vagy Ω folytonos idejű *körfrekvenciája*.

A folytonos idejű szinuszos jel mindig periodikus, a diszkrét idejű szinuszos jel csak akkor periodikus, ha $\vartheta / 2\pi$ racionális. Ebben az esetben a körfrekvencia mellett használatos a következő két jellemző is:

- az L diszkrét idejű, illetve a T folytonos idejű *periódusidő* ($\vartheta = 2\pi M / L$, $\omega = 2\pi / T$);
- az f folytonos idejű *frekvencia* ($f = 1 / T$, $\omega = 2\pi f$).

A periodicitással kapcsolatos mennyiségek SI egységének neve (jele):

DI körfrekvencia: radián (rad); DI periódusidő: dimenzió nélküli;

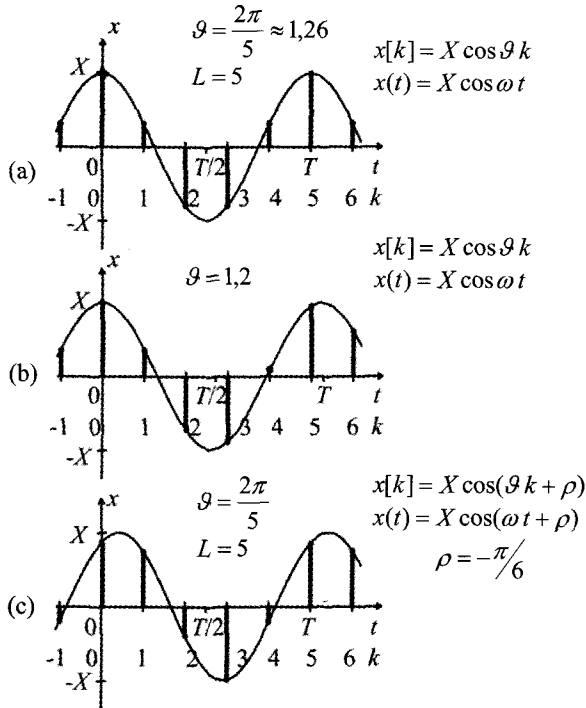
FI körfrekvencia: radián per másodperc (rad/s); FI periódusidő: másodperc (s), FI frekvencia: hertz (Hz).

Megjegyezzük, hogy a „körfrekvencia” helyett gyakran a rövid „frekvencia” is használatos, különösen összetételekben (frekvenciafüggés, frekvenciatartomány). A DI körfrekvenciára más jelek (például ω vagy Ω) is használatosak.

A szinuszos jel leírására többnyire a következő alakot fogjuk használni:

$$\text{DI: } x[k] = X \cos(\vartheta k + \rho); \quad \text{FI: } x(t) = X \cos(\omega t + \rho). \quad (3.1-1)$$

Az 1. ábrán szinuszos jelek grafikonja látható. Az ábrán a DI szinuszos jel a $T = 5$ periódusidejű FI szinuszos jel mintáit jelenti, azaz $x[k] = x(t)|_{t=kT_s}$, ahol T_s a mintavételi („sampling”) periódusidő. Mivel $\vartheta k = k\omega T_s$, ezért $\vartheta = \omega T_s = 2\pi T_s / T$. A mintavétellel előálló DI jel akkor periodikus, ha $\vartheta / 2\pi = T_s / T$ racionális. Az 1a és 1c ábrán látható esetben $\vartheta = 2\pi / 5 = 0,4\pi$, tehát a DI jel periodikus, $\vartheta / 2\pi = 1/5$, vagyis $L = 5$. Az 1b ábrán látható esetben $\vartheta = 1,2$, vagyis $\vartheta / 2\pi$ nem racionális, ez a szinuszos DI jel nem periodikus.



3.1-1. ábra Szinuszos folytonos idejű és (mintáiból alkotott) szinuszos diszkrét idejű jel. A DI jel az (a) és (c) esetben periodikus, a (b) esetben nem periodikus

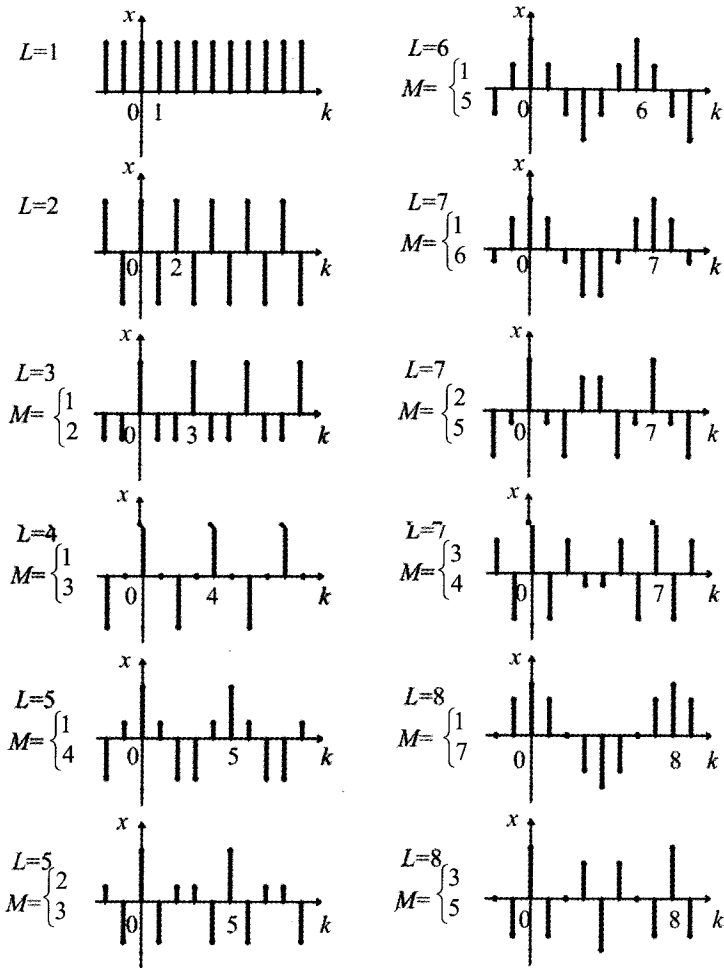
A FI szinuszos jel T periódusideje egyértelműen meghatározza a jel $\omega = 2\pi / T$ körfrekvenciáját. A DI periodikus szinuszos jel L periódusideje nem határozza meg egyértelműen a ϑ körfrekvenciáját, amely lehet $2\pi / L, 2(2\pi / L), \dots, (L-1)(2\pi / L)$, vagyis általában $M(2\pi / L)$, ahol M pozitív egész szám. Ez nem jelent feltétlenül L különböző DI jelet. A továbbiakban elsősorban a ϑ illetve ω körfrekvenciát (és nem a frekvenciát vagy a periódusidőt) használjuk a periodicitás leírására.

A 2. ábrán láthatjuk az $x[k] = \cos(2\pi M / L)k$ jelet $L = 1, 2, \dots, 8$ esetére. Nem tüntettük fel azokat, amelyekre M / L egyszerűsíthető (például $6/8 = 3/4$).

Trigonometriai azonosságokat felhasználva a szinuszos jelek felírhatók a következő alakban is:

$$\text{DI: } x[k] = X_A \cos \vartheta k + X_B \sin \vartheta k; \quad \text{FI: } x(t) = X_A \cos \omega t + X_B \sin \omega t. \quad (3.1-2)$$

Az (1) alak ismeretében a (2) előállítható és viszont:



3.1-2. ábra Néhány egyszerű periodikus diszkrét idejű szinuszos jel, $x[k] = \cos(2\pi M k / L)$

$$X_A = X \cos \rho, \quad X_B = -X \sin \rho. \quad (3.1-3)$$

$$X = \sqrt{(X_A)^2 + (X_B)^2}, \quad \rho = -\arctg \frac{X_B}{X_A} = \arccos \frac{X_A}{X}, \quad (3.1-4)$$

ahol rendszerint $-\pi \leq \rho < \pi$ vagy $0 \leq \rho < 2\pi$ választással élünk. A ρ számításánál önmagában egyik összefüggés sem ad egyértelmű értéket!

Az (1) alak közvetlenebb információkat ad a jelről. A (2) alak viszont előnyösebb jelek összeadása, eltolása vagy FI jel differenciálása esetén. A kétféle alak előnyei egyesíthetők a következő pontban tárgyalandó komplex írásmód alkalmazásával.

3.1-1.2. Szinuszos jel komplex leírása

A szinuszos DI és FI jelek komplex alakú leírásának alapja az *Euler-reláció*:

$$e^{j\alpha} \equiv \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad (3.1-5)$$

ahol $j \equiv \sqrt{-1}$ a képzetes (imaginárius) egység, amelynek jeleként j és i is használatos. Az $e^{j\alpha}$ komplex szám valós (reális) és képzetes (imaginárius) része

$$\Re\{e^{j\alpha}\} \equiv \cos \alpha, \quad \Im\{e^{j\alpha}\} \equiv \sin \alpha. \quad (3.1-6)$$

Felhívjuk a figyelmet arra, hogy a komplex szám képzetes része is valós szám. Az $e^{j\alpha}$ komplex szám abszolút értéke (modulusa) egységnyi, szöge (arkusza) α :

$$|e^{j\alpha}| = \sqrt{(\Re\{e^{j\alpha}\})^2 + (\Im\{e^{j\alpha}\})^2} \equiv 1, \quad \arg e^{j\alpha} = \alpha. \quad (3.1-7)$$

Az Euler-relációból következik, hogy

$$\cos \alpha \equiv \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}, \quad \sin \alpha \equiv \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2j}. \quad (3.1-8)$$

A valós értékű szinuszos jel kifejezhető a komplex értékű exponenciális jel valós részeként:

$$\begin{aligned} x[k] &= X \cos(\vartheta k + \rho) \equiv \Re\{X e^{j(\vartheta k + \rho)}\} \equiv \Re\{X e^{j\rho} e^{j\vartheta k}\}; \\ x(t) &= X \cos(\omega t + \rho) \equiv \Re\{X e^{j(\omega t + \rho)}\} \equiv \Re\{X e^{j\rho} e^{j\omega t}\}. \end{aligned}$$

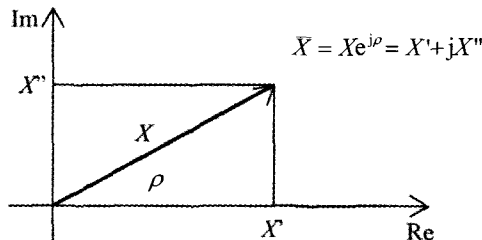
Használhatnánk a képzetes részt is, amely a szinusz függvényt szolgáltatja.

Az $x[k]$ illetve az $x(t)$ szinuszos jel, amelynek amplitúdója X , kezdőfázisa ρ , tömören jellemezhető az \bar{X} fazorral (komplex amplitúdóval):

$$\bar{X} = X e^{j\rho}. \quad (3.1-9)$$

Az \bar{X} fazor a komplex számsíkon egy nyíllal szemléltethető, amelynek hossza X , a valós tengellyel bezárt szöge ρ , amint azt a 3. ábra szemlélteti. Az \bar{X} fazor és a ϑ illetve az ω körfrekvencia ismeretében a szinuszos jel kifejezése:

$$\text{DI: } x[k] = \Re\{\bar{X} e^{j\vartheta k}\}; \quad \text{FI: } x(t) = \Re\{\bar{X} e^{j\omega t}\}. \quad (3.1-10)$$

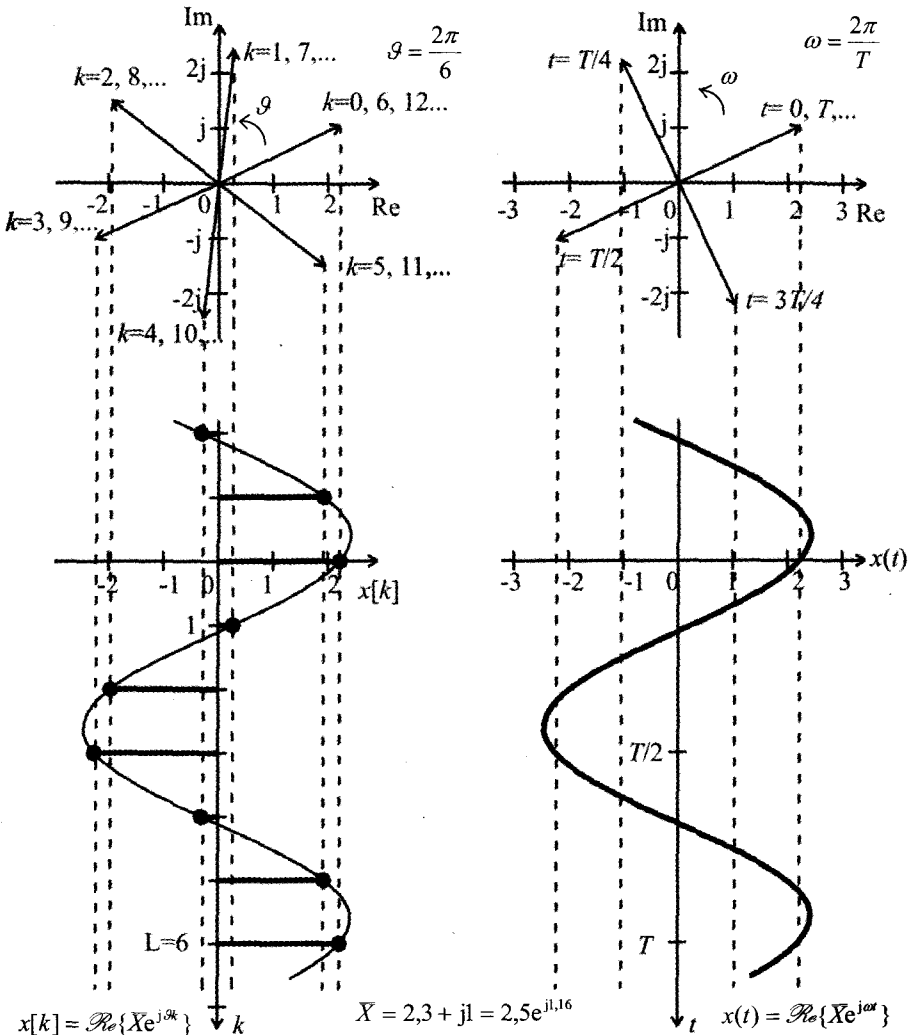


3.1-3. ábra A komplex szám ábrázolása nyíllal

Néha célszerű komplex értékű DI vagy FI jelet értelmezni, amelynek valós része adja a szinuszos időfüggvényt:

$$\text{DI: } \bar{x}[k] = \bar{X} e^{j\vartheta k}; \quad \text{FI: } \bar{x}(t) = \bar{X} e^{j\omega t} \quad (3.1-11)$$

E komplex jel grafikus reprezentációja egy nyíl, amely a matematikai pozitív irányban (az óramutató járásával ellentétesen) forog. A DI esetben $\bar{x}[0] = \bar{X}$ és a nyíl minden ütemben ϑ szöggel előre ugrik (4. ábra). Ha $\vartheta = 2\pi M/L$, akkor a $k = L$ ütemben a nyíl ugyanabban a helyzetében van, mint a $k = 0$ ütemben, tehát ekkor a jel ekkor periodikus. A FI esetben $\bar{x}(0) = \bar{X}$, a nyíl állandó ω szögsebességgel forog.



3.1-4. ábra DI és FI szinuszos jelek komplex reprezentációja és valós reprezentációja

Ha komplex értékű jeleket használunk, akkor tisztázni kell, hogy mi a komplex érték fizikai jelentése. Az előzőleg tárgyalt esetben a komplex értékű jel valós része jelenti a valós értékű szinuszos jelet. Grafikusan ez a forgó fazornak a valós tengelyre vett vetületét jelenti. A szinuszos jel fazorjának az abszolút értéke és a szöge bír fizikai tartalommal, valós és képzetes részének rendszerint nincs önálló jelentése. A továbbiakban a jeleket valós értékűnek tekintjük, ha az ellenkezőjét nem hangsúlyozzuk.

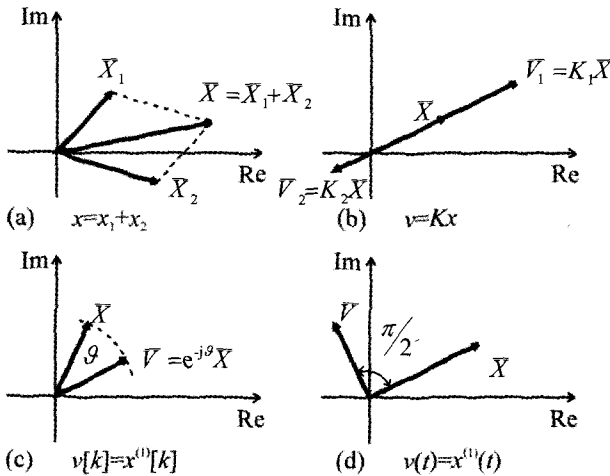
Vizsgáljuk meg a szinuszos jeleken végzett műveletek fazor reprezentációját. A következőkben minden DI illetve FI szinuszos jel \mathcal{G} illetve ω körfrekvenciája közös:

$$\text{DI: } x[k] = X \cos(\mathcal{G}k + \rho); \quad \text{FI: } x(t) = X \cos(\omega t + \rho).$$

Ha az x szinuszos jel az x_1 és x_2 szinuszos jelek összege, akkor az x fazorja az x_1 és x_2 fazorjának összege, mert komplex számok összegének valós része megegyezik a valós részek összegével:

$$x = x_1 + x_2 \Leftrightarrow \bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2. \quad (3.1-12)$$

A műveletet az 5a ábra szemlélteti. Az általánosítás több tag összegére kézenfekvő.



3.5. ábra Szinuszos jeleken végzett egyes lineáris műveletek fazor reprezentációja:

(a) összeadás, (b) szorzás valós állandóval, (c) DI jel képleteltetése, (d) FI jel differenciálása

Ha K egy valós állandó, akkor nyilvánvaló, hogy

$$v = Kx \Leftrightarrow \bar{V} = K \bar{X}. \quad (3.1-13)$$

Ha $K > 0$, akkor v és x fázisban vannak, ha $K < 0$, akkor v és x ellenfázisban vannak, amint az a fazorokra az 5b ábra szemlélteti.

Ha x egy diszkrét idejű szinuszos jel, akkor az egy ütemmel késleltetett jelre

$$x^{(1)}[k] \equiv x[k-1] = \Re_e \{ \bar{X} e^{j\theta(k-1)} \} = \Re_e \{ \bar{X} e^{-j\theta} e^{j\theta k} \}.$$

Ebből következik a fazorok kapcsolata:

$$v[k] = x^{(1)}[k] \equiv x[k-1] \Leftrightarrow \bar{V} = e^{-j\theta} \bar{X}. \quad (3.1-14)$$

A $v[k] = x[k - 1]$ késleltetett jel az $x[k]$ jelhez képest fázisban \mathcal{G} szöggel késik (az $x[k]$ jel az $x[k - 1]$ jelhez képest \mathcal{G} szöggel siet), a \bar{V} fázor \mathcal{G} szöggel hátra van forgatva az \bar{X} fázorhoz képest. Ezt szemlélteti az 5c ábra. A fentiekből következnek a fázorok kapcsolata $n \in \mathbf{Z}_+$ ütemmel történő késleltetés vagy $n \in \mathbf{Z}_-$ ütemmel történő siettetés esetén: a \bar{V} fázor $n\mathcal{G}$ szöggel van elforgatva az \bar{X} fázorhoz képest.

Ha x egy folytonos idejű szinuszos jel, akkor deriváltjának kifejezése

$$x^{(1)}(t) = -\omega X \sin(\omega t + \rho) \equiv \omega X \cos\left(\omega t + \rho + \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x^{(1)}(t) = \mathcal{R}_e \left\{ \bar{X} e^{j\omega t} \right\}^{(1)} = \mathcal{R}_e \left\{ j\omega \bar{X} e^{j\omega t} \right\}.$$

Ebből következik a fázorok kapcsolata:

$$v(t) = x^{(1)}(t) \Leftrightarrow \bar{V} = j\omega \bar{X}. \quad (3.1-15)$$

Az $x^{(1)}(t)$ jel az $x(t)$ jelhez képest fázisban $\pi/2 = 90^\circ$ szöggel siet vagyis az $x(t)$ jel az $x^{(1)}(t)$ jelhez képest $\pi/2 = 90^\circ$ szöggel késik. A \bar{V} és az \bar{X} fázorja közötti szög ugyancsak $\pi/2 = 90^\circ$. Ezt szemlélteti az 5d ábra. Ebből már következik, hogy az n -szer ($n \in \mathbf{Z}_+$) differenciált jel fázorja $(j\omega)^n$ -szerese a jel fázorjának.

A folytonos idejű szinuszos jel idő szerinti integrálja csak akkor szinuszos jel, ha feltételezhetjük, hogy az additív állandó nullának tekinthető, vagy hogy az integrálás alsó határa megfelelően van megválasztva. Ekkor az x integráljának fázorja $\bar{X}/j\omega$. Ezt a kapcsolatot a továbbiakban nem fogjuk alkalmazni.

3.1-1.3. Az átviteli karakterisztika

Legyen egy lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer gerjesztése *szinuszos*:

$$\begin{aligned} \text{DI: } u[k] &= U \cos(\mathcal{G}k + \rho_u) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{j\mathcal{G}k} \right\}; \\ \text{FI: } u(t) &= U \cos(\omega t + \rho_u) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{j\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1-16)$$

ahol $\bar{U} = U e^{j\rho_u}$. Az $y_g = y$ gerjesztett válasz ugyancsak szinuszos lesz azonos frekvenciával, de más amplitúdóval és kezdőfázissal:

$$\begin{aligned} \text{DI: } y[k] &= Y \cos(\mathcal{G}k + \rho_y) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\mathcal{G}k} \right\}; \\ \text{FI: } y(t) &= Y \cos(\omega t + \rho_y) \equiv \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\omega t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.1-17)$$

ahol $\bar{Y} = Y e^{j\rho_y}$. Ha a rendszer GV stabilis, akkor az állandósult válasz megegyezik a válasz gerjesztett összetevőjével. Ellenkező esetben a válasz gerjesztett összetevőjének nincs fizikai tartalma.

Tekintsük ismertnek a szinuszos gerjesztést (U amplitúdóját, ρ_u kezdőfázisát és \mathcal{G} illetve ω körfrekvenciáját) és a rendszer egy leírását (például állapotváltozós leírását). Meg akarjuk határozni a rendszer szinuszos válaszát. Mivel a szinuszos gerjesztett válasz körfrekvenciája megegyezik a gerjesztés körfrekvenciájával, ezért csak a válasz Y amplitúdóját és ρ_y kezdőfázisát, vagyis $\bar{Y} = Y e^{j\rho_y}$ fázorját kell meghatároznunk, amely arányos a gerjesztés fázorjával.

A lineáris, invariáns rendszer \bar{H} átviteli együtthatója a rögzített \mathcal{G} illetve ω körfrekvencián

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}}, \quad (3.1-18)$$

ahol \bar{U} illetve \bar{Y} a szinuszos gerjesztés, illetve válasz fázorja (komplex amplitúdója). Szokásos jelöléssel $\bar{H} = K e^{j\varphi}$, ahol $K = |\bar{H}|$ az átviteli együttható nagysága (abszolút értéke), $\varphi = \arg \bar{H}$ az átviteli együttható szöge a vizsgált körfrekvencián.

Ismerve a gerjesztés \bar{U} fázorját és a vizsgált frekvencián az átviteli együttható \bar{H} értékét, meghatározhatjuk a válasz $\bar{Y} = \bar{H} \bar{U}$ fázorját vagy a válasz $Y = K U$ amplitúdóját és $\rho_y = \varphi + \rho_u$ kezdőfázisát.

Gyakran előfordul, hogy a választ különböző frekvenciákon akarjuk meghatározni (l. a 3.1-2 szakaszt és a 3.2. fejezetet). Ilyenkor célszerű a \mathcal{G} vagy az ω körfrekvenciát változóként kezelni.

A DI rendszer $H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a FI rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikája a rendszer átviteli együtthatója mint a \mathcal{G} illetve az ω körfrekvencia függvénye.

Az átviteli karakterisztikát rendszerint abszolút értékével és szögével adjuk meg:

$$\text{DI: } H(e^{j\mathcal{G}}) \cong K(\mathcal{G}) e^{j\varphi(\mathcal{G})}; \quad \text{FI: } H(j\omega) \cong K(\omega) e^{j\varphi(\omega)}. \quad (3.1-19)$$

Belátható, hogy a $K(\mathcal{G}) = |H(e^{j\mathcal{G}})|$ illetve a $K(\omega) = |H(j\omega)|$ amplitúdó-karakterisztika páros függvénye, míg a $\varphi(\mathcal{G}) = \arg H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ fázis-karakterisztika páratlan függvénye a \mathcal{G} illetve az ω körfrekvenciának.

A $K(\mathcal{G})$ és a $\varphi(\mathcal{G})$ periodikus 2π periódussal. Ezeket ezért elegendő a $[0, \pi)$ intervallumban ismerni. A $K(\omega)$ és a $\varphi(\omega)$ függvények nem periodikusak, ezeket elegendő a $[0, \infty)$ intervallumban ismerni. Ez vonatkozik e függvények ábrázolására is (3.1-1.6. pont).

A negatív körfrekvencia fizikailag értelmetlen, de használata - mint látni fogjuk - egyes esetekben mégis célszerű. A fent említett paritásokat felhasználva szorítkozhatunk a frekvencia pozitív értékeire is, hiszen ebből a negatív frekvenciákra vonatkozó értékek már következnek.

A $H(e^{j\mathcal{G}})$ illetve a $H(j\omega)$ jelölés feleslegesen bonyolultnak tűnhet. Egy előnye például az, hogy mivel az argumentum már utal a mennyiség komplex jellegére, ezért a felülhúzást elhagyhatjuk. További előnyét később látni fogjuk.

Az irodalomban más jelölések is előfordulnak az átviteli karakterisztikára mint például $H(\mathcal{G})$ illetve $H(\omega)$, $H(f)$. A H mellett más jelek (például W , G) is használatosak. Az átviteli karakterisztikát nevezik frekvencia-átviteli függvénynek is.

A fázis-karakterisztika helyett gyakran a τ futási idő karakterisztikát (csoport futási idő karakterisztikát) szokás megadni, amely páros függvény:

$$\tau(\mathcal{G}) = -\frac{d\varphi(\mathcal{G})}{d\mathcal{G}}, \quad \tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}. \quad (3.1-20)$$

Az átviteli karakterisztika megadható a valós és képzetes részével is. A valós rész páros, a képzetes rész páratlan függvénye a körfrekvenciának. Ezeknek a függvényeknek vagy egy körfrekvencián felvett értéküknek egyes esetekben fizikai jelentése is van.

A következő pontokban megmutatjuk, miként számítható az átviteli karakterisztika akár rendszeregyenlet, akár az állapotváltozós leírás ismeretében. A 3.2-2. szakaszra halasztnak az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz kapcsolatának tisztázását.

Sok gyakorlati esetben a rendszer átviteli karakterisztikája az adott. Ez például a modellezendő objektumon végzett mérés eredménye lehet. Ilyenkor természetesen nem függvényt ismerünk, hanem annak bizonyos számú pontját. Ebből valamilyen eljárással előállíthatunk közelítő függvényt is, ha erre szükségünk van.

Egyes esetekben egy kívánt átviteli karakterisztika teljesen vagy részlegesen adott. Azt kívánjuk például, hogy a rendszer bizonyos frekvenciák környezetébe eső jeleket akadálytalanul átengedjen, másokat viszont ne engedjen át. Egy tipikus példa DI esetben:

$$0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1; \quad 0 \leq K(\vartheta) \leq 0,1; \quad \vartheta_1 < \vartheta_3 \leq \vartheta < \vartheta_4 \leq \pi; \quad 0,9 \leq K(\vartheta) \leq 1.$$

A FI esetben ϑ helyére ω is írható, csak ekkor $\omega_3 \leq \omega \leq \omega_4 \leq \infty$ lesz az utolsó feltétel. A fázis-karakterisztika lehet tetszőleges vagy arra is vonatkozhat valamilyen előírás (például gyakran kívánatos lineáris fázis-karakterisztika, azaz állandó futási idő karakterisztika).

Előfordulhat, hogy az átviteli karakterisztika bizonyos frekvenciákon nulla. Nem lehet azonban az átviteli karakterisztika sehol sem végtelen, mert ez azt jelentené, hogy vagy végtelen nagy amplitúdójú szinuszos válasz lép fel, vagy nulla gerjesztéshez véges szinuszos válasz tartozik (amelynek frekvenciáját a nem létező gerjesztés szabja meg). Mindkét lehetőség ellentmond a feltételezett GV stabilitásnak. Ha csak GV stabilis rendszerre értelmezzük az átviteli karakterisztikát, akkor elkerülhetjük az ilyen ellentmondásos eredményeket.

Ennek ellenére előfordulhat, hogy mégis elfogadjuk az egyes frekvenciákon végtelenné váló átviteli karakterisztikát. Ez a helyzet, ha elhanyagoljuk az objektumban fellépő veszteségeket. Ilyen esetekben meg kell győződnünk arról, hogy a stabilitás határhelyzetében lévő rendszer egy stabilis objektum közelítő modellje. Ha ugyanis egy nem stabilis objektum modelljéről van szó, akkor a kapott átviteli karakterisztikából félrevezető következtetéseket vonhatunk le.

Ebben a fejezetben arra az esetre szorítkozunk, amikor a rendszer GV stabilis és ennek következtében amplitúdó-karakterisztikája korlátos.

3.1-1.4. Átviteli karakterisztika és rendszeregyenlet

Tekintsük adottnak a lineáris, invariáns, kauzális (és FI esetben differenciális) rendszer rendszeregyenletét, amelynek szokásos alakja (2.2-1. szakasz):

$$\text{DI: } y + \sum_{i=1}^n a_i y^{(i)} = \sum_{i=0}^m b_i u^{(i)};$$

$$\text{FI: } y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} y^{(i)} = \sum_{i=0}^n b_{n-i} u^{(i)},$$

ahol $y^{(i)}[k] \equiv y[k-i]$ illetve $y^{(i)}(t)$ az $y(t)$ jel i -edik deriváltja (1.1-3.3. pont). Feltételezzük, hogy a rendszer GV *stabilis*. Ez teljesül, ha az a_i együtthatók kielégítenek

bizonyos feltételeket (2.2-3.2. pont). Célunk a rendszeregyenlet ismeretében a rendszer átviteli karakterisztikájának, vagy átviteli együtthatójának meghatározása.

Akit csak az eredmények érdekelnek, az a következő néhány sorban leírt gondolatmenetet átgorghatja.

Az adott szinuszos gerjesztés és a keresett szinuszos válasz kifejezését (16) és (17) adja. A rendszeregyenletbe helyettesítve, a (14) illetve a (15) ismételt felhasználásával:

$$DI: \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{j\vartheta k} \right\} + \sum_{i=1}^n a_i \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y} e^{-ji\vartheta} e^{j\vartheta k} \right\} = \sum_{i=0}^m b_i \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U} e^{-ji\vartheta} e^{j\vartheta k} \right\},$$

$$FI: \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y}(j\omega)^n e^{j\omega t} \right\} + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} \mathcal{R}_e \left\{ \bar{Y}(j\omega)^i e^{j\omega t} \right\} = \sum_{i=0}^m b_{n-i} \mathcal{R}_e \left\{ \bar{U}(j\omega)^i e^{j\omega t} \right\}.$$

A valós rész képzése tagonként elvégezhető és a valós állandóval végzett szorzással felcserélhető. A komplex amplitúdó és az időfüggő komplex exponenciális kiemelhető:

$$DI: \mathcal{R}_e \left\{ \left[1 + \sum_{i=1}^n a_i e^{-ji\vartheta} \right] \bar{Y} e^{j\vartheta k} \right\} = \mathcal{R}_e \left\{ \left[\sum_{i=0}^m b_i e^{-ji\vartheta} \right] \bar{U} e^{j\vartheta k} \right\},$$

$$FI: \mathcal{R}_e \left\{ \left[(j\omega)^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{n-i} (j\omega)^i \right] \bar{Y} e^{j\omega t} \right\} = \mathcal{R}_e \left\{ \left[\sum_{i=0}^m b_{n-i} (j\omega)^i \right] \bar{U} e^{j\omega t} \right\}.$$

Az időtől függő komplex mennyiségek valós része csak akkor lehet minden időpontban egyenlő, ha maguk a komplex mennyiségek is egyenlők. A \mathcal{R}_e művelet ezért elhagyható. Ezután az exponenciális függvényt egyszerűsíthetünk (hiszen ez nem lehet nulla értékű). Az így adódó egyenletből a keresett $H = Y/U$ kifejezhető. A formailag kissé különböző eredményeket külön adjuk meg a DI és a FI esetre.

A diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája

Egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, diszkrét idejű rendszer *rendszeregyenlete*

$$y[k] + a_1 y[k-1] + \dots + a_n y[k-n] = b_0 u[k] + b_1 u[k-1] + \dots + b_m u[k-m]. \quad (3.1-21)$$

E rendszer *átviteli karakterisztikája* (ha az a_i együtthatók által meghatározott sajátértékek biztosítják a rendszer GV stabilis jellegét: minden $|\lambda_i| < 1$)

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta} + a_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + a_n e^{-jn\vartheta}}. \quad (3.1-22)$$

Ha $\vartheta = \vartheta$ rögzített körfrekvencia, akkor ennek a behelyettesítéssel adódó $\bar{H} = H(e^{j\vartheta})$ komplex érték a rendszer *átviteli együtthatója* a rögzített frekvencián.

A számlálót és a nevezőt alkalmas $e^{j\vartheta}$ tényezővel szorozva elérhetjük, hogy csak $e^{j\vartheta}$ nem-negatív hatványai forduljanak elő. Ennek azonban nincs különösebb előnye.

Amint látjuk, a DI rendszer átviteli karakterisztikája az $e^{-j\vartheta}$ változónak valós együtthatós *racionális függvénye*, míg a ϑ változónak bonyolult, transzcendens függvénye. Ez egy indokát adja a $H(e^{j\vartheta})$ jelölésnek is. Az is látható, hogy $H(e^{j\vartheta})$

periodikus függvény 2π periódushosszal. A FIR típusú (véges impulzusválaszú) rendszer átviteli karakterisztikája az $e^{-j\vartheta}$ polinomja:

$$\text{FIR: } H(e^{j\vartheta}) = b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta} + \dots + b_m e^{-jm\vartheta}. \quad (3.1-23)$$

Ebben az esetben különösen nem célszerű áttérni az $e^{j\vartheta}$ pozitív hatványait tartalmazó alakra.

A $K(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|$ amplitúdó-karakterisztika és a $\varphi(\vartheta) = \arg H(e^{j\vartheta})$ fázis-karakterisztika ábrázolásához ki kell számítnunk a $[0, \pi]$ intervallumban ezek kellő számú pontját. Az átviteli karakterisztika ábrázolásával a 3.1-1.6. pontban még foglalkozunk.

A folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája

Egy lineáris, invariáns, kauzális, gerjesztés-válasz stabilis, folytonos idejű, differenciális rendszer *rendszer egyenlete*

$$y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 u^{(n)}(t) + b_1 u^{(n-1)}(t) + \dots + b_n u(t). \quad (3.1-24)$$

E rendszer *átviteli karakterisztikája* (ha az a_i együtthatók által meghatározott λ_i sajátértékek biztosítják a rendszer GV stabilis jellegét, szükséges, hogy mindegyik a_i pozitív legyen):

$$H(j\omega) = \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + b_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}. \quad (3.1-25)$$

Ha $\omega = \Omega$ rögzített körfrekvencia, akkor ennek a behelyettesítéssel adódó $\bar{H} = H(j\Omega)$ komplex érték a rendszer *átviteli együtthatója* a rögzített frekvencián.

Amint látjuk, a FI rendszer átviteli karakterisztikája a $j\omega$ változó *racionális* függvénye valós együtthatókkal, ami indokolja az alkalmazott $H(j\omega)$ jelölést. Az átviteli karakterisztika az ω változónak is racionális függvénye váltakozva valós és képzetes együtthatókkal.

Könnyen képet kaphatunk a FI átviteli karakterisztika viselkedéséről nagyon kis és nagyon nagy frekvenciákon. Attól függően, hogy melyik a számláló első és utolsó nullától különböző tagja, elsőrendű közelítésben kapjuk, hogy (az a_n együttható biztosan nem nulla)

$$\begin{aligned} \omega \approx 0: \quad H(j\omega) &\approx \frac{b_n}{a_n}, \quad H(j\omega) \approx \frac{b_{n-1}}{a_n} (j\omega), \quad H(j\omega) \approx \frac{b_{n-2}}{a_n} (j\omega)^2, \dots; \\ \omega \approx \infty: \quad H(j\omega) &\approx b_0, \quad H(j\omega) \approx b_1 \frac{1}{j\omega}, \quad H(j\omega) \approx b_2 \frac{1}{(j\omega)^2}, \dots \end{aligned} \quad (3.1-26)$$

Jobb közelítéseket is kaphatunk, ha két vagy még több tagot veszünk figyelembe. Például a polinomosztás módszerével kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \omega \approx 0: \quad H(j\omega) &\approx \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n-1} a_n - b_n a_{n-1}}{a_n^2} (j\omega) + \dots, \\ \omega \approx \infty: \quad H(j\omega) &\approx b_0 + (b_1 - b_0 a_1) \frac{1}{j\omega} + \dots \end{aligned} \quad (3.1-27)$$

A komplex átviteli karakterisztika vagy a valós amplitúdó-karakterisztika és fázis-karakterisztika ábrázolásához meg kell határoznunk annak kellő számú pontját. Míg a DI esetben csak a $[0, \pi]$ véges intervallumot kell vizsgálnunk, az FI esetben elméletileg a $[0, \infty)$ végtelen intervallumot kellene vizsgálni, ezért többnyire el kell döntenünk, hogy milyen maximális frekvenciáig kívánjuk az ábrázolást elvégezni. Ennek eldöntését segíti elő a nagy frekvenciás viselkedés ismerete. Van azonban olyan ábrázolási módszer is, amelynél erre nincs szükség. Az ábrázolást megkönnyíti, hogy az amplitúdó-karakterisztika korlátos. Az átviteli karakterisztika ábrázolásával a 3.1-1.6. pontban még foglalkozunk.

A rendszeregyenlet előállítása

Mint már említettük, gyakran az átviteli karakterisztika adott akár az objektumon végzett mérés, akár előírás alapján. Ilyenkor a feladat lehet a rendszer rendszeregyenletének előállítása. Ehhez az átviteli karakterisztikát először megfelelő matematikai alakra kell hozni. Ez az approximációs feladat nem egyszerű (még a fokszámokat sem könnyű eldönteni, hát még az a_i, b_i együtthatókat), ezzel a továbbiakban nem foglalkozunk. A következő nyilvánvaló megállapításra szorítkozunk.

Ha a DI rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve az FI rendszer $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikája a (22) illetve a (25) alakban adott mint az $e^{-j\vartheta}$ illetve a $j\omega$ valós együtthatós racionális függvénye, akkor közvetlenül felírható a rendszeregyenlet a (21) illetve a (24) alakban, hiszen a gerjesztés illetve a válasz együtthatói a rendszeregyenletben megegyeznek a számláló illetve a nevező együtthatóival az átviteli karakterisztikában.

Emlékeztetünk arra, hogy ha a nevező együtthatói által meghatározott sajátértékek nem tesznek eleget a stabilitási feltételeknek, akkor a (22) illetve a (25) szerinti „átviteli karakterisztika” értelmetlen, noha formailag esetleg kifogástalannak tűnhet.

1. példa Határozzuk meg a diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikáját, ha a rendszeregyenlete

$$y - y^{(1)} + 0,24 y^{(2)} = u + 0,5 u^{(1)} - 0,2 u^{(3)}.$$

Korábbi vizsgálatainkból tudjuk (2.2-2. szakasz), hogy a rendszer GV stabilis. Átviteli karakterisztikája (22) értelmében

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5 e^{-j\vartheta} - 0,2 e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24 e^{-j2\vartheta}} = \frac{(1 + 0,5 \cos \vartheta - 0,2 \cos 3\vartheta) + j(-0,5 \sin \vartheta + 0,2 \sin 3\vartheta)}{(1 - \cos \vartheta + 0,24 \cos 2\vartheta) + j(\sin \vartheta - 0,24 \sin 2\vartheta)}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $H(e^{j0}) = 5,417$; $H(e^{j\pi/2}) = 0,972 e^{-j1,5317}$; $H(e^{j\pi}) = 0,313$. További pontok számításával belátható, hogy $K(\vartheta)$ monoton csökken, míg $\varphi(\vartheta)$ a $[0, \pi]$ intervallumban nulláról indul és egy negatív minimummal bír (3.1-1.6. pont). #

2. példa Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát, ha a folytonos idejű rendszer rendszeregyenlete

$$y^{(2)} + 4 y^{(1)} + 3 y = 5 u^{(1)} + u.$$

Ránézésre megállapítható, hogy a rendszer GV stabilis (a_1, a_2 pozitív). Átviteli karakterisztikája a (25) értelmében

$$H(j\omega) = \frac{5(j\omega)+1}{(j\omega)^2+4(j\omega)+3} = \frac{1+j5\omega}{3-\omega^2+j4\omega}.$$

Behelyettesítéssel kapjuk, hogy $H(j0)=1/3$; $H(j1)=1,14 e^{-j0,266}$; $H(j\infty)=0$. További pontok számításával beláthatjuk, hogy $K(\omega)$ monoton csökken, $\varphi(\omega)$ monoton növekszik, majd csökken az ω pozitív értékeire (3.1-1.6. pont). #

3.1-1.5. Átviteli karakterisztika és állapotváltozós leírás

Tekintsük adottnak egy lineáris, invariáns, kauzális egy-gerjesztésű és egy-válaszú DI illetve FI rendszer állapotváltozós leírását:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} u, \\ y &= \mathbf{C}^T \mathbf{x} + D u. \end{aligned} \quad (3.1-28)$$

A DI esetben $\mathbf{x}'[k] = \mathbf{x}[k+1]$, a FI esetben $\mathbf{x}'(t)$ az $\mathbf{x}(t)$ deriváltja. Feltételezzük, hogy a rendszer GV *stabilis*. Ez biztosan teljesül, ha a rendszer aszimptotikusan stabilis, ami az \mathbf{A} rendszermátrix sajátértékeinek vagy karakterisztikus egyenlete együtthatóinak vizsgálata alapján eldönthető (2.2-3. szakasz).

Tekintsük azt az esetet, amikor valamennyi gerjesztés szinuszos közös frekvenciával. Meg akarjuk határozni a válaszokat, amelyek ugyancsak szinuszosak a gerjesztés által meghatározott frekvenciával:

$$\begin{aligned} \text{DI: } u[k] &= \mathcal{R}_e \{ \bar{U} e^{j\vartheta k} \}, & y[k] &= \mathcal{R}_e \{ \bar{Y} e^{j\vartheta k} \}, \\ \text{FI: } u(t) &= \mathcal{R}_e \{ \bar{U} e^{j\omega t} \}, & y(t) &= \mathcal{R}_e \{ \bar{Y}_p e^{j\omega t} \}. \end{aligned} \quad (3.1-29)$$

Az $x_r[k]$ illetve az $x_r(t)$ állapotváltozók ugyanilyen alakúak. Meg akarjuk határozni a \bar{H} *átviteli együtthatót*, amelyek értelmezése:

$$\bar{H} = \frac{\bar{Y}}{\bar{U}}. \quad (3.1-30)$$

Helyettesítsük a komplex alakokat az állapotváltozós leírásba. Mint az előző pontban láttuk: elhagyhatjuk a \mathcal{R}_e operációt és egyszerűsíthetünk az időfüggő exponenciális tényezővel. A komplex amplitúdókra adódó mátrixegyenleteket:

$$\begin{aligned} \text{DI: } e^{j\vartheta} \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \bar{U}, & \bar{Y} &= \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}; \\ \text{FI: } j\omega \bar{\mathbf{X}} &= \mathbf{A} \bar{\mathbf{X}} + \mathbf{B} \bar{U}, & \bar{Y} &= \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}. \end{aligned}$$

Ebből következik, hogy $\bar{\mathbf{X}}$ a következő mátrixegyenlet megoldása:

$$\text{DI: } [e^{j\vartheta} \mathbf{I} - \mathbf{A}] \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \bar{U}; \quad \text{FI: } [j\omega \mathbf{I} - \mathbf{A}] \bar{\mathbf{X}} = \mathbf{B} \bar{U}.$$

Az $\bar{\mathbf{X}}$ ismeretében a válasz komplex amplitúdója kifejezhető:

$$\bar{Y} = \mathbf{C}^T \bar{\mathbf{X}} + D \bar{U}$$

Behelyettesítve az $\bar{\mathbf{X}}$ előzőleg kapott kifejezését a következő alakhoz jutunk:

$$\bar{Y} = \bar{H} \bar{U}. \quad (3.1-31)$$

Itt \bar{H} az átviteli együttható az adott frekvencián, ha azonban a frekvenciát változóként kezeljük, akkor $\bar{H} = H(e^{j\vartheta})$ illetve $\bar{H} = H(j\omega)$ az *átviteli karakterisztika*.

Az átviteli karakterisztikára képletet is adhatunk. Az \bar{X} -re vonatkozó mátrixegyenlet megoldása felírható mátrixinverzióval:

$$\bar{X} = [e^{j\vartheta} I - A]^{-1} B \bar{U}; \quad \bar{X} = [j\omega I - A]^{-1} B \bar{U}.$$

Itt I az N -dimenziós egységmátrix. Ezt \bar{Y} kifejezésébe helyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} DI: H(e^{j\vartheta}) &= C^T [e^{j\vartheta} I - A]^{-1} B + D; \\ FI: H(j\omega) &= C^T [j\omega I - A]^{-1} B + D \end{aligned} \quad (3.1-32)$$

Eredményünk kétféleképpen használható.

Az egyik lehetőség az, hogy számítjuk az átviteli karakterisztika kellő számú és megfelelő eloszlású pontját. Ehhez felvesszünk $\vartheta_0 = 0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_n = \pi$ diszkrét idejű illetve $\omega_0 = 0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n = \infty$ folytonos idejű körfrekvenciákat, mindegyiken számítjuk $H(e^{j\vartheta_i})$ illetve $H(j\omega_i)$ értékét ($i = 1, 2, \dots, N$) akár a lineáris egyenletrendszer megoldásával, akár a komplex elemű mátrix invertálásával. Az alkalmas ϑ_i értékek megválasztása nem jelent különösebb nehézséget, egyenletes eloszlás választása célszerű. Az alkalmas ω_i értékek megválasztása nehezebb feladat. Ezzel a kérdéssel a 3.2-2.5. pontban még foglalkozunk.

A másik lehetőség az átviteli karakterisztika (22) illetve (25) szerinti alakjában szereplő valós együtthatók meghatározása, vagyis az átviteli karakterisztika mint racionális függvény előállítás.

Példa Határozzuk meg annak a diszkrét idejű rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek állapotváltozós leírása

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0,24 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \quad y = [-0,2 \quad -0,24 \quad 1,5] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + u.$$

Megállapíthatjuk, hogy a rendszer GV stabilis (2.3-1.F-3. feladat). A (32) értelmében az átviteli karakterisztika kifejezése

$$H(e^{j\vartheta}) = [-0,2 \quad -0,24 \quad 1,5] \begin{bmatrix} e^{j\vartheta} & -1 & 0 \\ 0 & e^{j\vartheta} & -1 \\ 0 & -0,24 & e^{j\vartheta} - 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1.$$

Ebben az egyszerű esetben a számítás papír-ceruza módszerrel is elvégezhető. Az eredmény

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{j3\vartheta} + 0,5e^{j2\vartheta} - 0,2}{e^{j3\vartheta} - e^{j2\vartheta} + 0,24e^{j\vartheta}} \equiv \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}.$$

Ez megegyezik az előző pont 1. példájában kapottal. Ez nem meglepő, hiszen ugyanannak a rendszernek az állapotváltozós leírásáról és rendszeregyenletéről van szó (2.3-1.F-3.). #

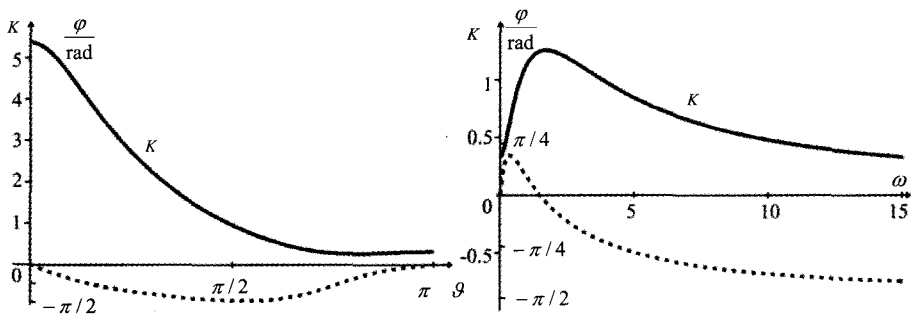
3.1-1.6. Az átviteli karakterisztika ábrázolása

Ebben a pontban az átviteli karakterisztika ábrázolásának néhány módszerét tárgyaljuk. Példaként azt a DI illetve FI rendszert vizsgáljuk, amelynek az átviteli karakterisztikáját a 3.1-1.4. pont 1. és 2. példájában számítottuk:

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j3\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}; \quad \text{FI: } H(j\omega) = \frac{5(j\omega) + 1}{(j\omega)^2 + 4(j\omega) + 3}.$$

Az amplitúdó és a fázis lineáris ábrázolása

Egy kézenfekvő ábrázolási lehetőség a $K(\vartheta) \equiv |H(e^{j\vartheta})|$ és a $\varphi(\vartheta) = \arg H(e^{j\vartheta})$ illetve a $K(\omega) \equiv |H(j\omega)|$ és a $\varphi(\omega) = \arg H(j\omega)$ amplitúdó-karakterisztika és fázis-karakterisztika görbéjének megadása a szokásos derékszögű koordináta-rendszerben. A DI esetben csak a $0 \leq \vartheta < \pi$ intervallummal kell foglalkoznunk. A FI esetben azonban kénytelenek vagyunk a $0 \leq \omega < \omega_{\max}$ vagy egy $\omega_{\min} < \omega < \omega_{\max}$ intervallumra szorítkozni. A vizsgált átviteli karakterisztika ilyen ábrázolása látható a 6. ábrán. A fázis-karakterisztika ábrázolásánál rendszerint a $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ intervallumba eső értékeket ábrázoljuk (a 2π vagy a 360° egész többszöröseinek hozzáadásával vagy levonásával), de néha más választások előnyösebbek lehetnek, például a fázis-karakterisztika folytonosságának megtartása. A fázis-karakterisztika esetleges ugrása $\pm\pi = \pm 180^\circ$.



3.1-6. ábra Az amplitúdó-karakterisztika és a fázis-karakterisztika ábrázolása a derékszögű Descartes-koordináta-rendszerben. Más ábrázolások a 7. és 8. ábrán láthatók

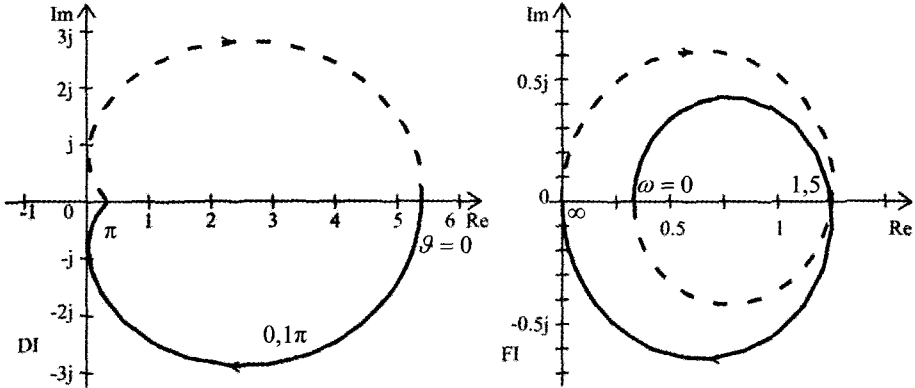
Hasonló módon ábrázolható az átviteli karakterisztika valós és képzetes része a körfrekvencia függvényében. Ez azonban csak akkor célszerű, ha e mennyiségeknek fizikai jelentésük van.

A Nyquist-diagram

Az átviteli karakterisztika *Nyquist-diagramja* egy olyan görbe a H komplex számsíkon, amelynek pontjai a $H(e^{j\vartheta})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztika értékei egy-egy rögzített ϑ illetve ω körfrekvencián.

A 7. ábrán láthatók a megadott átviteli karakterisztikák Nyquist-diagramja. A szaggatott vonalú görberész a negatív frekvenciákhoz tartozik. Ez a másik görberésznek a tükörképe a valós tengelyre, mivel a ϑ illetve az ω előjelváltása az átviteli karakterisztika

konjugálását eredményezi. Ez a görberész el is hagyható. A görbén három frekvenciához tartozó pontot megjelöltünk.



3.1-7. ábra A vizsgált DI illetve FI átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja. Ezeknek az átviteli karakterisztikának más ábrázolása látható a 6. és a 8. ábrán

A Nyquist-diagram jellegzetessége, hogy együtt ábrázolja az abszolút értéket és a szöveget. Ennek van előnye is és hátránya is.

Mivel az esetek többségében a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika még $\omega = \infty$ esetén is korlátos, ezért - a lineáris ábrázolással ellentétben - többnyire nincs szükség egy maximális FI körfrekvencia megválasztására.

A Nyquist-diagramot a fenti tulajdonságai miatt csak speciális esetekben és főként tájékoztató jelleggel használják.

A Nyquist-diagram alkalmazható olyan komplex mennyiség ábrázolására is, amely egy valós változótól függ. A komplex mennyiség lehet egy szinuszos mennyiség fázorja is, a valós változó nem feltétlenül a frekvencia.

Használatos a Nyquist-diagramra a helygörbe elnevezés is.

A Bode-diagram

A tárgyalt két ábrázolási módszer közös hátrányos tulajdonsága, hogy az ábrázolás nehezen használható, ha K_{\max} / K_{\min} nagyon nagy (például 100 vagy még nagyobb), hiszen ekkor a kis értékek leolvashatatlanok. A FI esetben hasonló nehézséget okoz, ha az ábrázolandó frekvencia-intervallum nagyon széles. Ezeket a nehézségeket kiküszöböli az átviteli karakterisztika *Bode-diagramja* (logaritmikus amplitúdó- és fázis-görbéje). Ennek során nem az amplitúdót, hanem annak logaritmusát, pontosabban a

$$k \equiv (20 \log K) \text{ dB} \quad \text{vagy} \quad k \equiv (\ln K) \text{ Np} \quad (3.1-33)$$

mennyiséget ábrázoljuk, ahol dB a decibel, Np a neper logaritmikus mértékegység jele (néha db, illetve N is előfordul). Ha például $K = 100$, akkor $k = 40 \text{ dB} = 4,605 \text{ Np}$. A visszatérés a számértékre

$$K = 10^{(k/20 \text{ dB})} \quad \text{vagy} \quad K = e^{k/\text{Np}}. \quad (3.1-34)$$

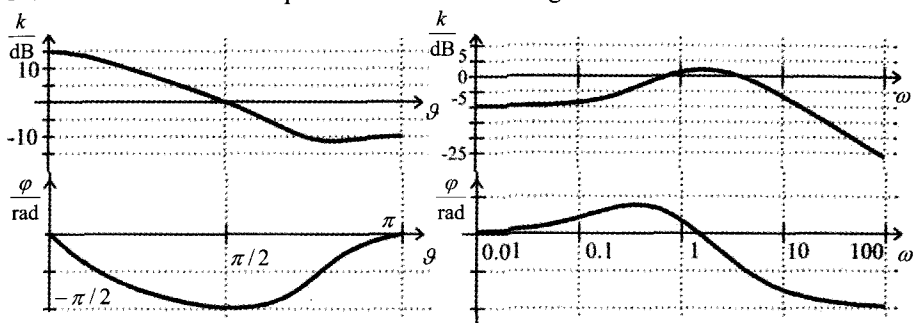
A k logaritmikus amplitúdó helyett az $a = -k$ csillapítás (vagyis $1/K$ logaritmusa), a fázis-karakterisztika helyett a $b = -\varphi$ forgatás vagy a $\tau = -\varphi'$ futási idő karakterisztika is használatos.

Az FI esetben a frekvenciatengely skálázása *logaritmikus*; az $\omega_2 / \omega_1 = 10$ arány neve 1 dekád, az $\omega_2 / \omega_1 = 2$ arány neve 1 oktáv. Ezek az ábrán állandó távolságok (például 1 dekádnak megfelel 20 mm). Ezzel a skálázással széles frekvenciatartomány is átfogható (viszont az $\omega = 0$ pont nem ábrázolható, csak például $\omega = 0,01$ rad/s). A FI esetben a gyakorlatban az abszcissa változója többnyire nem a körfrekvencia, hanem a frekvencia (Hz, kHz, stb. egységben).

A lineáris skálázás alkalmazásánál az abszolút hiba, a logaritmikus ábrázolásnál vagy logaritmikus egységben történő ábrázolásnál a relatív hiba tekinthető az ábrázolás bizonytalansága (például vonalvastagság) által meghatározottnak.

A vizsgált átviteli karakterisztika Bode-diagramja a 8. ábrán látható.

A lineáris ábrázoláshoz hasonlóan a logaritmikus ábrázolás során is szorítkozhatunk csak az amplitúdó-karakterisztika megadására.



3.1-8. ábra Az átviteli karakterisztika Bode-diagramja (logaritmikus amplitúdó- és fázis-karakterisztikája). Más ábrázolások a 6. és 7. ábrán láthatók

A FI racionális átviteli karakterisztika Bode-diagramjának közelítése egyes esetekben kényelmesen megszerkeszthető, de ennek technikájával nem foglalkozunk.

3.1-1.F. Feladatok

F-1. Váolja fel az $x[k] = 2 \cos \vartheta k$ diszkrét idejű jelet a $-2 \leq k \leq 12$ ütemekre, ha a diszkrét idejű körfrekvencia

- | | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| (a) $\vartheta = 0,2 \pi$; | (b) $\vartheta = 0,4 \pi$; | (c) $\vartheta = 0,6 \pi$; | (d) $\vartheta = 0,8 \pi$; |
| (e) $\vartheta = 1,0 \pi$; | (f) $\vartheta = 1,2 \pi$; | (g) $\vartheta = 1,4 \pi$; | (h) $\vartheta = 1,6 \pi$; |
| (i) $\vartheta = 1,8 \pi$; | (j) $\vartheta = 2,0 \pi$; | (k) $\vartheta = 2,2 \pi$; | (l) $\vartheta = 2,4 \pi$. |

Ha a jel periodikus, határozza meg a periódus hosszát (a diszkrét periódusidőt)! Mely körfrekvenciájú jelek azonosak?

F-2. Váolja fel az $x[k] = 4 \sin(0,8 k)$ diszkrét idejű jelet a $-2 \leq k \leq 12$ ütemekre! Ha a jel periodikus, határozza meg a periódus hosszát (a diszkrét periódusidőt)!

F-3. Váolja fel az alábbi diszkrét idejű jelek egy periódusát:

- (a) $x[k] = 2 \cos(0,2 \pi k - 0,1 \pi) \equiv 2 \cos 0,1 \pi (2k - 1)$.
 (b) $x[k] = 2 \sin(0,2 \pi k + 0,4 \pi) \equiv 2 \sin 0,2 \pi (k + 2)$.
 (c) $x[k] = 2 \cos(0,2 \pi k - 18^\circ)$.

$$(d) x[k] = 2 \cos(36^\circ k - 0,1 \pi).$$

$$(e) x[k] = 2 \cos(36^\circ k - 18^\circ) \equiv 2 \cos 18^\circ (2k - 1).$$

F-4. Adja meg egyszerűbb alakban a következő DI jelet:

$$x[k] = 3 \cos(\vartheta k - 0,4) + 4 \cos(\vartheta k + 0,6), \quad \vartheta = \frac{4\pi}{3}.$$

Periodikus ez a jel?

F-5. Határozza meg az

$$x[k] = 5 \sin \vartheta k; \quad y_1[k] = x[k - 1]; \quad y_2[k] = x[k - 2]; \quad y_3[k] = x[k - 3]$$

diszkrét idejű jelek komplex amplitúdóját, ha a körfrekvencia (a) $\vartheta = 2\pi/3$. (b) $\vartheta = 2$.

Mi a lényeges különbség a két eset között?

F-6. Határozza meg a következő szinuszos FI jelek komplex amplitúdóját:

$$x(t) = -2 \cos 5t; \quad y_1(t) = x^{(1)}(t); \quad y_2(t) = x^{(2)}(t); \\ u(t) = x(t - 1,2); \quad v(t) = x(t - 0,4\pi); \quad w(t) = x(t + 0,2\pi).$$

F-7. Egy gerjesztés-válasz stabilis DI illetve FI rendszer gerjesztése

$$(a) \text{ DI: } u[k] = 5 \cos(\vartheta k + 0,2). \quad (b) \text{ FI: } u(t) = 5 \cos(\omega t + 0,2).$$

A rendszer átviteli együtthatója a gerjesztés frekvenciáján $\bar{H} = 0,4 e^{j0,3}$.

Határozza meg a válasz időfüggvényét!

F-8. Egy diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = 1 + b_1 e^{-j\vartheta} + b_2 e^{-j2\vartheta}.$$

Határozza meg a b_1 és b_2 együtthatókat úgy, hogy egy előírt $\vartheta = \vartheta$ körfrekvencián az átviteli karakterisztika értéke nulla legyen!

Gerjesztés-válasz stabilis a rendszer?

Vázolja fel az amplitúdó- és a fáziskarakterisztikát, továbbá az átviteli karakterisztika Nyquist-diagramját!

F-9. Egy stabilis folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(j\omega) = \frac{1}{a_0 + a_1(j\omega) + (j\omega)^2}; \quad a_1 > 0, \quad a_0 > 0.$$

Az ω körfrekvencia mely Ω értékénél lesz maximális az amplitúdó-karakterisztika? Fejeze ki ezt a maximális értéket! Megállapítható-e az átviteli karakterisztikából, hogy a rendszer GV stabilis? Vázolja fel az amplitúdó- és a fázis-karakterisztikát, továbbá az átviteli karakterisztika Nyquist-diagramját, ha a paraméterek értéke $a_0 = 0,4$, $a_1 = 0,2$.

***F-10.** Igazolja, hogy az alább megadott DI, illetve FI átviteli karakterisztika Nyquist-diagramja kör, amelynek középpontja C , sugara R . (Az igazolás elemi módszerekkel is elvégezhető. A komplex függvénytan ismeretében egy közismert tétel alkalmazásáról van szó.)

$$(a) H(e^{j\vartheta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta}}{1 + a_1 e^{-j\vartheta}}, \quad |a_1| < 1; \quad C = \frac{b_0 - a_1 b_1}{1 - a_1^2}, \quad R = \frac{|b_1 - a_1 b_0|}{1 - a_1^2}.$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega)}{a_0 + (j\omega)}, \quad a_0 > 0; \quad C = \frac{b_0}{2a_0} + \frac{b_1}{2}, \quad R = \left| \frac{b_0}{2a_0} - \frac{b_1}{2} \right|.$$

(c) Mint a (b) esetben, de ω helyett tetszőleges valós $f(\omega)$ írható.

3.1-1.M. Megoldások

M-1. Mindegyik jel periodikus $L = 10$ periódusidővel; a (b), (d), (f), (h), (l) jeleknek $L_1 = 5$, az (e) jelnek $L_2 = 2$, a (j) jelnek $L_3 = 1$ is periódusideje (az utolsó jel állandó). Az $\{(a), (i), (k)\}$, a $\{(b), (h), (l)\}$, a $\{(c), (g)\}$ és a $\{(d), (f)\}$ jelek azonosak.

M-2. A DI körfrekvencia $\vartheta = 0,8$; e szinuszos jel nem periodikus.

M-3. A jelek azonosak, mindegyik periodikus, $\vartheta = \pi/5$, $L = 10$.

M-4. A két összeadandó szinuszos jel fázorja $\bar{X}_1 = 3e^{-j0,4} = 2,76 - j1,17$, illetve $\bar{X}_2 = 4e^{j0,6} = 3,30 + j2,26$. A frekvencia közös, ezért

$$\bar{X} = \bar{X}_1 + \bar{X}_2 = 6,06 + j1,09 = 6,16e^{j0,18} \Rightarrow x[k] = 6,16 \cos(\vartheta k + 0,18).$$

A jelek periodikusak, a periódusidő $L = 3$.

M-5. Mivel $\bar{X} = -j5 = 5e^{-j\pi/2}$ és $\bar{Y}_p = e^{-j p \vartheta} \bar{X}$, ezért

$$(a) Y_1 = 5e^{-j7\pi/6} = 5e^{j5\pi/6}; \quad Y_2 = 5e^{j\pi/6}; \quad Y_3 = 5e^{-j3\pi/6} = 5e^{-j\pi/2}.$$

$$(b) \bar{Y}_1 = 5e^{-j(\pi/2-2)} \approx 5e^{-j3,57} = 5e^{j2,71}; \quad \bar{Y}_2 \approx 5e^{j0,71}; \quad \bar{Y}_3 \approx 5e^{-j1,29}.$$

Az (a) esetben $\bar{Y}_3 = \bar{X}$, a (b) esetben nincs olyan p , amelyre $\bar{Y}_p = \bar{X}$ érvényes lenne.

M-6. Mivel $\bar{X} = -2 = 2e^{j\pi}$, ezért $\bar{Y}_1 = (j5)(2e^{j\pi}) = 10e^{-j\pi/2}$, $\bar{Y}_2 = (j5)(10e^{-j\pi/2}) = 50$, továbbá

$$u(t) = -2 \cos(5t - 6); \quad \bar{U} = 2e^{-j(6-\pi)} \approx 2e^{-j2,86}.$$

$$v(t) = -2 \cos 5(t - 0,4\pi) = -2 \cos(5t - 2\pi) = -2 \cos 5t; \quad \bar{V} = 2e^{j\pi}.$$

$$w(t) = -2 \cos 5(t + 0,2\pi) = -2 \cos(5t - \pi); \quad \bar{W} = 2.$$

M-7. A válasz komplex amplitúdója $\bar{Y} = \bar{H}\bar{U} = 2e^{j0,5}$. Az időfüggvények

$$(a) y[k] = \Re\{e^{j\vartheta k}\} = 2 \cos(\vartheta k + 0,5). \quad (b) y(t) = \Re\{\bar{Y}e^{j\omega t}\} = 2 \cos(\omega t + 0,5).$$

A ϑ illetve az ω számértékét nem kell ismernünk.

M-8. $K^2(\vartheta) = [1 + b_1 \cos \vartheta + b_2 \cos 2\vartheta]^2 + [b_1 \sin \vartheta + b_2 \sin 2\vartheta]^2$. A második tag nulla, ha $b_1 = -2b_2 \cos \vartheta$, az első tag is nulla, ha $b_2 = 1/(2 \cos \vartheta - \cos 2\vartheta)$.

Ehhez az átviteli karakterisztikához egy nemrekurzív rendszer egyenlet és véges impulzusválasz tartozik, azaz egy FIR típusú, tehát GV stabilis rendszer.

M-9. $K^2(\omega) = 1 / \left\{ [a_0 - \omega^2]^2 + [a_1 \omega]^2 \right\}$. A nevező minimális, vagyis $K(\omega)$ maximális, ha

$$(a) \ a_0 < \frac{a_1^2}{2} \text{ esetén } \Omega = 0, \quad K(\Omega) = \frac{1}{a_0};$$

$$(b) \ a_0 > \frac{a_1^2}{2} \text{ esetén } \Omega = \sqrt{a_0 - a_1^2/2}, \quad K(\Omega) = \frac{1}{a_1 \sqrt{a_0 - a_1^2/4}}.$$

Ehhez az átviteli karakterisztikához egy olyan rendszeregyenlet tartozik, amelynek sajátértékei a bal félsíkon vannak (a_1 és a_2 pozitív), ezért a rendszer biztosan GV stabilis.

***M-10.** Fejezze ki a $|H(\cdot) - C|$ függvényt és mutassa meg, hogy értéke R , vagyis független a \mathcal{G} illetve az ω változótól.

Ha kiszámítjuk a kör három pontját (célszerűen $\mathcal{G} = 0$ és a $\mathcal{G} = \pi$ illetve az $\omega = 0$ és az $\omega = \infty$ átmérős pontok és egy közbülső frekvenciához tartozó pont), akkor a kör megrajzolható. A szerkesztés szempontjából ez az eljárás egyszerűbb lehet, mint C és R meghatározása.

3.1-2. Periodikus válasz

3.1-2.1. Általános megfontolások

Legyen egy lineáris, invariáns, GV stabilis rendszer *gerjesztése periodikus*, a DI illetve a FI periódusidő L illetve T , az (alap)körfrekvencia $\Theta = 2\pi/L$, illetve $\Omega = 2\pi/T$. A periodikus gerjesztés alapvető tulajdonsága

$$\text{DI: } u[k+L] = u[k], \quad L \in \mathbf{N}; \quad \text{FI: } u(t+T) = u(t), \quad T \in \mathbf{R}_+ \quad (3.1-35)$$

A rendszer (gerjesztett) *válasza* ugyancsak *periodikus* lesz ugyanazzal a periódusidővel:

$$\text{DI: } y[k+L] = y[k]; \quad \text{FI: } y(t+T) = y(t). \quad (3.1-36)$$

Az általános periodikus válasz számítása sokkal bonyolultabb, mint a szinuszos válaszé. Az utóbbi esetben ugyanis ismerjük a jel alakját, csak az amplitúdót és a kezdőfázist kell számítanunk. Az általános esetben azonban a gerjesztés alakjából nem tudunk következtetni a válasz alakjára, két valós állandó nem elegendő annak leírására.

A vázolt feladat akkor egyszerű, ha a periodikus gerjesztés olyan szinuszos jelek összegeként adott, amelyek periódusideje egy L illetve T alap-periódusidő, annak fele, harmada, negyede, stb. és ennek megfelelően a körfrekvenciák egy $\Theta = 2\pi/L$ illetve egy $\Omega = 2\pi/T$ alap-körfrekvencia egész számú többszörösei. A szinuszos jelekhez egy állandó még hozzáadható. Ennek megfelelően a gerjesztés kifejezése

$$u[k] = U_0 + U_1 \cos(\Theta k + \rho_{u1}) + U_2 \cos(2\Theta k + \rho_{u2}) + \dots + U_N \cos(N\Theta k + \rho_{uN}), \quad (3.1-37)$$

$$u(t) = U_0 + U_1 \cos(\Omega t + \rho_{u1}) + U_2 \cos(2\Omega t + \rho_{u2}) + \dots + U_N \cos(N\Omega t + \rho_{uN}).$$

A periodikus gerjesztéshez tartozó válasz ugyancsak periodikus lesz és a szuperpozíció elve értelmében ugyanilyen alakban fejezhető ki:

$$y[k] = Y_0 + Y_1 \cos(\Theta k + \rho_{y1}) + Y_2 \cos(2\Theta k + \rho_{y2}) + \dots + Y_N \cos(N\Theta k + \rho_{yN}), \quad (3.1-38a)$$

$$y(t) = Y_0 + Y_1 \cos(\Omega t + \rho_{y1}) + Y_2 \cos(2\Omega t + \rho_{y2}) + \dots + Y_N \cos(N\Omega t + \rho_{yN}). \quad (3.1-38b)$$

Az ismeretlenek az Y_k amplitúdók, a ρ_{yk} kezdőfázisok és az Y_0 állandó összetevő.

A válasz minden szinuszos összetevője számítható az előző szakaszban bemutatott módszerrel, ha ismerjük a rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját és számítjuk értékeit a $\vartheta = 0, \Theta, 2\Theta, \dots, N\Theta$ illetve az $\omega = 0, \Omega, 2\Omega, \dots, N\Omega$ körfrekvenciákon. Természetesen az is elegendő, ha csak ezeket az értékeket ismerjük, vagyis a rendszer átviteli együtthatóját ezeken a körfrekvenciákon.

A számítás gyakorlati menete a következő.

(1) A gerjesztést az $\bar{U}_p = U_p e^{j\rho_p}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, N$) komplex amplitúdókkal jellemezzük. Természetesen előfordulhat, hogy egyesek zérus értékűek vagy például minden páros indexű zérus. Ezek a p értékek a továbbiakban figyelmen kívül hagyhatók.

(2) Meghatározzuk a $\bar{H}_p = H(e^{j\rho_p})$ illetve a $\bar{H}_p = H(jp\Omega)$ komplex értékű $\bar{H}_p = K_p e^{j\varphi_p}$ átviteli együtthatókat a figyelembe veendő p értékekre. Adott lehet a rendszer átviteli karakterisztikája, a rendszeregyenlete vagy az állapotváltozós leírása.

(3) Meghatározzuk a válasz $\bar{Y}_p = \bar{H}_p \bar{U}_p$ komplex amplitúdóit és ezekből vagy akár közvetlenül az $Y_p = K_p U_p$ és a $\rho_{yp} = \varphi_p + \rho_{up}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, N$) értékeket.

(4) Ezek után kifejezhető a válasz a (38) szerinti alakban.

Megjegyezzük, hogy a komplex vagy a valós amplitúdók összegének nincs fizikai tartalma, hiszen mindegyik más frekvenciájú szinuszos jelet jellemez.

Ha a választ ábrázolni akarjuk, akkor kiszámítjuk $y[k]$, $k = 0, 1, 2, \dots, L-1$ értékeit illetve kellő számú $y(t_i)$, $0 \leq t_i < T$ értéket. Célszerű lehet például a $t_i = i \cdot (T/M)$ választás, ahol $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$ és $M > 4N$.

A periodikus válasz jelalakja lényegesen eltérhet a periodikus gerjesztés jelalakjától, de periódusidejük közös.

Vizsgáljuk például azt az esetet, amikor a gerjesztés állandó összetevőt, továbbá Θ és 3Θ illetve Ω és 3Ω körfrekvenciájú szinuszos összetevőt tartalmaz. A 9. ábra bal oldalán láthatjuk a három FI szinuszos jelet (x_0, x_1, x_3), jobb oldalán pedig három olyan jelet, amelyek ezek szuperpozíciójával adódnak (u_a, u_b, u_c). Az eltérés csak a harmadik komponens kezdőfázisában van, a jelek mégis erősen különböznek egymástól.

Példa Legyen két folytonos idejű szinuszos jel kifejezése

$$u(t) = U \cos \Omega t, \quad v(t) = V_0 + V_1 \cos \omega t; \quad 0 < \omega < \Omega.$$

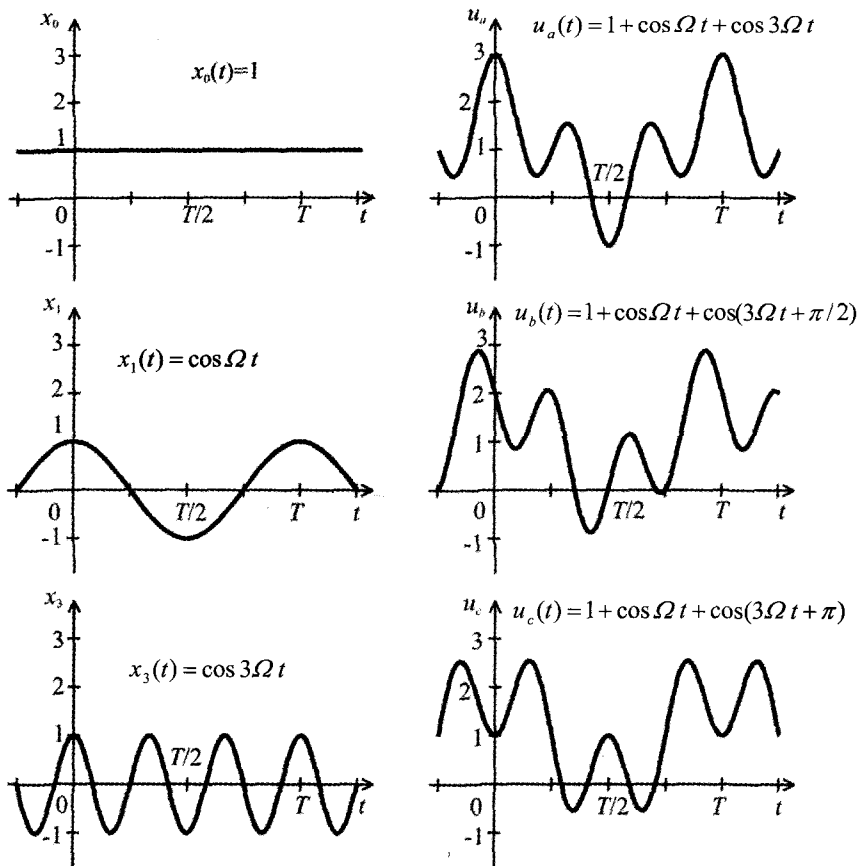
Alkossunk ezekből egy új jelet (a szorzás nem lineáris művelet!):

$$y(t) = u(t)v(t).$$

Egyszerű átalakítással kapjuk az $Y = UV_0$, $m = V_1/V_0$ jelölések bevezetésével:

$$y(t) = Y [1 + m \cos \omega t] \cos \Omega t = Y \left[\frac{m}{2} \cos(\Omega - \omega)t + \cos \Omega t + \frac{m}{2} \cos(\Omega + \omega)t \right].$$

Az $y(t)$ első alakjából az látható, hogy $y(t)$ egy gyorsan változó (és pedig Ω körfrekvenciájú) szinuszos jelnek tekinthető, amelynek amplitúdója azonban nem állandó, hanem lassan (ω körfrekvenciával) változik. Az $u(t)$ ekkor a gyorsan változó vivőjel, amelyet a lassan változó $v(t)$ jel amplitúdójában modulál.



3.1-9. ábra Három folytonos idejű szinuszos jel és ezek szuperpozíciójával előállított három periodikus jel. Az előbbieket lehetnek az utóbbiakhoz tartozó válaszok

Az $y(t)$ második alakjából az látható, hogy az három olyan szinuszos jel összege, amelyek körfrekvenciája $\Omega - \omega, \Omega, \Omega + \omega$. A jel csak akkor periodikus, ha Ω/ω racionális. A gyakorlati esetek többségében $\Omega \gg \omega$, ekkor a körfrekvenciák az Ω körfrekvencia körüli keskeny sávba esnek. Érdekes az $\Omega \approx \omega$ eset is, mivel ily módon lehet $\Omega - \omega$ körfrekvenciájú, tehát nagyon kis körfrekvenciájú jelet előállítani. #

Az előzőkből következik, hogy szinuszos jelek szuperpozíciójával nagyon különböző alakú periodikus jelek állíthatók elő.

Felmerül a kérdés: megválaszthatók-e szinuszos jelek úgy, hogy összegük előírt periodikus jelet szolgáltatson? A válasz erre a kérdésre diszkrét idejű jelek esetén igenlő, és pedig véges tagszámú (mintegy $L/2$ számú) szinuszos jelle van csak szükség. Folytonos idejű jel esetén azonban általában ez többnyire csak közelítőleg lehetséges, a szinuszos jelek összege még akkor sem konvergál minden időpontban feltétlenül az eredeti jelhez, ha a tagok számát minden határon túl növeljük. A DI és a FI periodikus jelek szinuszos jelekre történő felbontása ebből is láthatóan különböző, ezért a következő pontokban a felbontást és alkalmazását külön tárgyaljuk a két esetre.

3.1-2.2. Diszkrét idejű jel Fourier-sora

Komplex értékű jel Fourier-sora

A periodikus DI jel Fourier-soros alakját először komplex értékű jelre mutatjuk be, majd ennek speciális eseteként kapjuk a valós értékű periodikus DI jel Fourier-soros alakját.

Legyen $\bar{x} = \bar{x}[k]$ egy diszkrét idejű, komplex értékű, periodikus jel L periódusidővel:

$$\bar{x}[k+L] = \bar{x}[k]; \quad k \in \mathbf{Z}, \quad L \in \mathbf{N}. \quad (3.1-39)$$

A jel L számú komplex adattal jellemezhető, mint például $\bar{x}[0], \bar{x}[1], \bar{x}[2], \dots, \bar{x}[L-1]$.

Különösen fontosak a diszkrét idejű periodikus jelhez rendelt X_p^C komplex Fourier-együtthatók, amelyek a jelet előállítják L -tagú Fourier-sor (DFS) alakjában:

$$\bar{x}[k] = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C e^{j p \Theta k}; \quad k \in \mathbf{Z}, \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}. \quad (3.1-40)$$

Itt és a továbbiakban $p = \langle L \rangle$ a p egymást követő L számú egész értékét jelenti, például $p = 0, 1, 2, \dots, L-1$. Ez azt jelenti, hogy a komplex értékű jelet L számú, komplex értékű, különböző frekvenciájú szinuszos jel összegeként állítjuk elő. Az egymást követő L értéket a következőképpen célszerű választani:

$$p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \begin{cases} \pm(L-1)/2, & \text{ha } L = 1, 3, 5, \dots, \\ \pm(L/2-1), +L/2, & \text{ha } L = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (3.1-41)$$

Ebből az alakból látszik, hogy a Fourier-sorban a legnagyobb ténylegesen előforduló körfrekvencia $\Theta \cdot (L-1)/2 \approx \pi$ vagy $\Theta \cdot L/2 \equiv \pi$. Alább megmutatjuk, hogy a komplex Fourier-együtthatók a következő összefüggéssel számíthatók:

$$X_p^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} \bar{x}[k] e^{-j p \Theta k}; \quad p \in \mathbf{Z}, \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}. \quad (3.1-42)$$

Az \bar{X}_0 együttható az $\bar{x}[k]$ értékek számtani közepe.

Könnyen belátható, hogy ha ismerünk L számú ilyen X_p^C értéket, akkor a többi ebből számítható, mivel $X_{L+p}^C = X_p^C$, $X_{L-p}^C = X_{-p}^C$. Mint a (40)-ből következik, csak L számú együtthatóra van szükségünk, célszerűen a (41) szerintiekre.

A (42) igazolásához szorozzuk meg a (40) előállítás mindkét oldalát $e^{-j r \Theta k}$ tényezővel, majd összegezzünk k szerint 0 és $L-1$ között:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-j r k \Theta} = \sum_{k=0}^{L-1} \left\{ \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C e^{j p k \Theta} \right\} e^{-j r k \Theta} = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C \left\{ \sum_{k=0}^{L-1} e^{j(p-r)k \Theta} \right\}.$$

A mértani sorozat összege $p-r=0$ esetén L , egyébként

$$\sum_{k=0}^{L-1} (e^{-j m \Theta})^k = \frac{1 - e^{-j m L \Theta}}{1 - e^{-j m \Theta}} = \frac{1 - e^{-j m (2\pi)}}{1 - e^{-j m (2\pi/L)}} = 0.$$

Ezek szerint a p szerinti összegezés során csak a $p = r$ tag nem nulla:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-jrk\theta} = L X_r^C, \quad r \in \mathbf{Z}.$$

Ebből a (42) már következik.

A korlátos periodikus jel egy fontos jellemzője a *négyzetes középértéke* vagy röviden a *teljesítménye*, amelynek definíciója

$$P_x \equiv \frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} |\bar{x}[k]|^2. \quad (3.1-43)$$

Az összeg (vagyis $P_x \cdot L$) a jel *energiája* egy periódusra. Igazolni fogjuk, hogy a teljesítmény kifejezhető a Fourier-együtthatók ismeretében:

$$P_x = \sum_{p=\langle L \rangle} |X_p^C|^2. \quad (3.1-44)$$

A (44) speciális alakja *Parseval tételének*, amely szerint két komplex értékű periodikus jelle (a * a komplex szám konjugáltját jelöli)

$$\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \cdot \bar{y}^*[k] = \sum_{p=\langle L \rangle} X_p^C \cdot (Y_p^C)^*. \quad (3.1-45)$$

Ha $\bar{y} = \bar{x}$, akkor $\bar{x} \bar{x}^* = |\bar{x}|^2$ és $X_p^C (X_p^C)^* = |X_p^C|^2$, tehát a (43) és (44) egyenlősége adódik.

Az igazoláshoz használjuk fel a jelek (40) Fourier-soros előállítását:

$$\frac{1}{L} \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \bar{y}^*[k] = \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] \left\{ \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} (Y_p^C e^{jp\theta k})^* \right\} = \frac{1}{L} \sum_{p=0}^{L-1} (Y_p^C)^* \sum_{k=0}^{L-1} \bar{x}[k] e^{-jp\theta k}.$$

Az utolsó szumma a (42) értelmében X_p^C amivel Parseval tételét igazoltuk.

Valós értékű jel Fourier-sora

Tekintsük most azt a speciális, de gyakorlatilag fontos esetet, amikor a periodikus jel *valós értékű* vagyis amikor $x = \bar{x} = \bar{x}^*$. Az X_p^C konjugáltja ekkor

$$(X_p^C)^* = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] e^{jp\theta k} = X_{-p}^C = X_{L-p}^C.$$

Ebből következik, hogy L periódusidejű *valós* x esetén

$$x = \mathcal{R}_e\{x\} \Rightarrow X_{-p}^C = (X_p^C)^*, \quad X_{L-p}^C = (X_p^C)^*. \quad (3.1-46)$$

Elegendő tehát ekkor az $X_0^C, X_1^C, \dots, X_{(L-1)/2}^C$ vagy $X_{L/2}^C$ komplex Fourier-együtthatókat számítani. A p és a $-p$ indexekhez tartozó összetevő összege a (40) előállításban

$$X_p^C e^{jp\theta k} + X_{-p}^C e^{-jp\theta k} = X_p^C e^{jp\theta k} + (X_p^C e^{jp\theta k})^* = 2 \mathcal{R}_e\{X_p^C e^{jp\theta k}\}.$$

Foglaljuk össze eredményeinket.

Egy diszkrét idejű, L periódusidejű, valós értékű jel Fourier-sorának egy valós alakja

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M X_p \cos(p\Theta k + \xi_p) + X_{L/2}(-1)^k; \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L}, \quad (3.1-47)$$

L páratlan: $M=(L-1)/2$, $X_{L/2}=0$; L páros: $M=(L/2)-1$.

Az itt szereplő amplitúdók és szögek kifejezése az \bar{X}_p^C komplex Fourier-együtthatókkal:

$$X_0 = X_0^C; \quad X_p = 2|X_p^C|, \quad \xi_p = \arg X_p^C, \quad p=1, 2, \dots, M; \quad X_{L/2} = X_{L/2}^C. \quad (3.1-48)$$

A komplex Fourier-együtthatók kifejezése a jel ismeretében:

$$X_p^C \equiv \frac{1}{2} X_p e^{j\xi_p} = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] e^{-j p \Theta k}; \quad p=1, 2, \dots, M; \quad \Theta \equiv \frac{2\pi}{L};$$

$$X_0^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k]; \quad X_{L/2}^C = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] (-1)^k, \quad (L \text{ páros}). \quad (3.1-49)$$

A Θ körfrekvenciájú összetevő a jel *alapharmonikusa*, a $2\Theta, 3\Theta, \dots$ körfrekvenciájú összetevők a jel *felharmonikusai*. A periodikus jel Fourier-soros alakját nevezik a *spektrális előállításának* is.

A valós értékű jel *teljesítményének* (44) szerinti kifejezése az X_p valós együtthatókkal

$$P_x = X_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^M X_p^2 + X_{L/2}^2. \quad (3.1-50)$$

Egyesek előnyben részesítik az eltolt koszinusz függvény helyett koszinusz és szinusz függvény összegét alkalmazni. A Fourier-sor ennek megfelelő másik valós alakja páratlan és páros L esetre

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M (X_p^A \cos p\Theta k + X_p^B \sin p\Theta k), \quad M = \frac{L-1}{2}; \quad (3.1-51)$$

$$x[k] = X_0 + \sum_{p=1}^M (X_p^A \cos p\Theta k + X_p^B \sin p\Theta k) + X_{L/2}(-1)^k, \quad M = \frac{L}{2} - 1.$$

Az itt szereplő valós Fourier-együtthatók kifejezése a jel ismeretében

$$X_0 = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k]; \quad X_{L/2} = \frac{1}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] (-1)^k, \quad (L \text{ páros});$$

$$X_p^A = \frac{2}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] \cos p\Theta k, \quad X_p^B = \frac{2}{L} \sum_{k=\langle L \rangle} x[k] \sin p\Theta k; \quad p=1, 2, \dots, M. \quad (3.1-52)$$

Könnyen belátható, hogy $X_p^A = 2 \Re\{X_p^C\}$, $X_p^B = -2 \Im\{X_p^C\}$. Ennek alapján a valós X_p^A , X_p^B együtthatók ismeretében a komplex X_p^C együtthatók vagy az (47)-ben

szereplő X_p amplitúdók és ξ_p kezdőfázisok is számíthatók. Az összefüggések felírását az Olvasóra bizzuk.

1. példa Határozzuk meg $x[k]$ Fourier-sorát, ha periódusideje $L = 6$; továbbá a 10. ábrán láthatóan $x[0] = x[1] = 1$, $x[2] = x[3] = x[4] = x[5] = 0$.

Az alapharmónikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = \pi/3$. A szükséges komplex Fourier-együtthatók a (49) értelmében

$$X_0 = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] = \frac{1}{3},$$

$$X_1^C = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] e^{-jk\pi/3} = \frac{3 - j\sqrt{3}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} e^{-j\pi/6},$$

$$X_2^C = \frac{1}{6} \sum_{k=0}^5 x[k] e^{-jk2\pi/3} = \frac{1 - j\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{6} e^{-j\pi/3}.$$

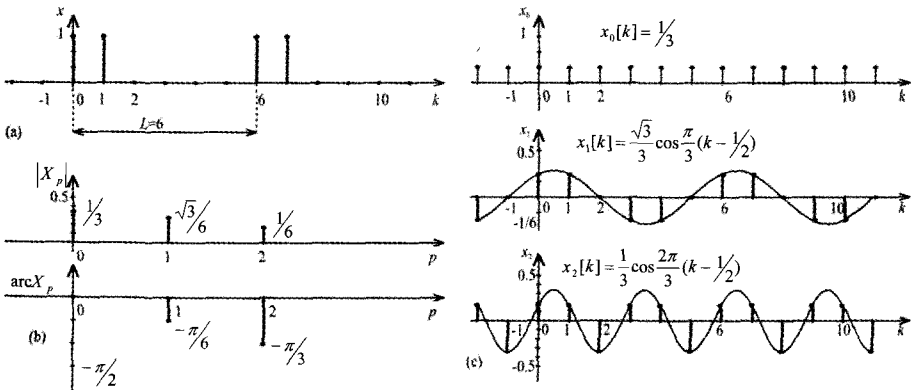
Az X_p amplitúdókat (48) alapján számítjuk. A Fourier-sor (47) értelmében (esetünkben $M = L/2 - 1 = 2$):

$$x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right).$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhetjük, hogy bármely k esetén az adott $x[k]$ érték helyesen kiadódik.

Az amplitúdókat és a kezdőfázisokat szemlélteti a 10b ábra.

A 10c ábrán megadtuk a jel három szinuszos összetevőjét.



3.10-10. ábra Periodikus diszkrét idejű jel Fourier-soros előállításáa.

(a) A periodikus jel. (b) A komplex Fourier-együtthatók abszolút értéke és szöge. (c) A szinuszos összetevők, amelyek körfrekvenciája $0, \pi/3$ és $2\pi/3$

Az Olvasó beláthatja, hogy a komplex értékű jelre is érvényes (40) alapján ugyanez a Fourier-sor adódik. #

2. példa Egy diszkrét idejű periodikus jel a következő alakban adott:

$$x[k] = 6 \cos(1,2 \pi k), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Határozzuk meg a jel Fourier-soros alakját!

E diszkrét idejű szinuszos jel körfrekvenciája $\vartheta_0 = 1,2 \pi = 3(2\pi/5)$, vagyis a periódusidő $L = 5$, az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/5 = 0,4\pi$. A jel Fourier-sora a 0 , a Θ és a 2Θ körfrekvenciájú összetevőket tartalmazza, a $\vartheta_0 = 3\Theta$ körfrekvenciáját azonban nem!

Elemi trigonometriai megfontolás alapján (vagyis a Fourier-együtthatók számítása nélkül) is belátható, hogy a megadott jelnek

$$x[k] = 6 \cos(0,8 \pi k), \quad k \in \mathbf{Z}$$

egy egyenértékű alakja és egyben Fourier-sora. Valójában tehát a jel Fourier-sora csak a 2Θ körfrekvenciájú összetevőt tartalmazza. A két jel egyenértékűsége a korábban megadott 2. ábra $L = 5$ eseteként ábrázolva van.

A példa azt illusztrálja, hogy a diszkrét idejű periodikus jelnek célszerű a periódusidejét és az abból következő alap-körfrekvenciáját meghatározni annak érdekében, hogy minél egyszerűbb (és a Fourier-soros előállításnak megfelelő) alakhoz juthassunk. Első ránézésre aligha gondolunk arra, hogy a példában megadott, látszólag különböző jelek összege bármelyiknek a kétszerese. #

3.1-2.3. A diszkrét idejű periodikus válasz

A lineáris, invariáns, DI rendszernek a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasza elvileg egyszerűen számítható a Fourier-soros felbontás alkalmazásával.

Ismert az $u[k]$ diszkrét idejű, L periódusidejű ($\Theta = 2\pi/L$ alap-körfrekvenciájú) periodikus gerjesztés. Állítsuk elő ennek (47) szerinti Fourier-soros alakját:

$$u[k] = U_0 + \sum_{p=1}^M U_p \cos(p \Theta k + \nu_p) + U_{L/2} (-1)^k. \quad (3.1-53)$$

Célunk a válasz meghatározása ugyanilyen alakban:

$$y[k] = Y_0 + \sum_{p=1}^M Y_p \cos(p \Theta k + \eta_p) + Y_{L/2} (-1)^k. \quad (3.1-54)$$

A válasz $\bar{Y}_p^C = \bar{H}_p \bar{U}_p^C$ komplex Fourier-együtthatóit a rendszernek a $p\Theta$ körfrekvenciához tartozó $\bar{H}_p = H(e^{j p \Theta}) = K_p e^{j \varphi_p}$ átviteli együtthatója ismeretében számíthatjuk, amiből következik a valós alakban szereplő amplitúdók és szögek alábbi kifejezése:

$$Y_0 = K_0 U_0; \quad Y_p = K_p U_p, \quad \eta_p = \varphi_p + \nu_p, \quad p = 1, 2, \dots, L/2. \quad (3.1-55)$$

Az összefüggések azt fejezik ki, hogy a választ az egyes frekvenciákhoz tartozó válaszok összegeként állítjuk elő.

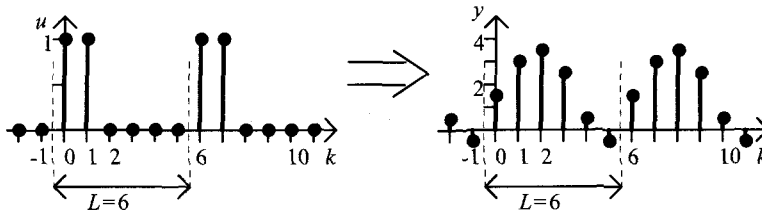
Példa A DI rendszer $u[k]$ gerjesztése periodikus, a periódus hossza $L=6$, az első periódusra $u[0]=u[1]=1, u[2]=u[3]=u[4]=u[5]=0$. A rendszer átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1 + 0,5e^{-j\vartheta} - 0,2e^{-j2\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta} + 0,24e^{-j2\vartheta}}.$$

(3.1-1.4. pont, 1. példa). Határozzuk meg a periodikus választ. Ez az állandósult válasz is jelenti, mivel e rendszer GV stabilis.

A gerjesztés Fourier-sora az előző pont 1. példája szerint (11. ábra)

$$u[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right).$$



3.1-11. ábra A példában szereplő periodikus gerjesztés és válasz

Az átviteli karakterisztika következő három értékére van szükségünk:

$$H(e^{j0}) = 5,417, \quad H(e^{j\pi/3}) = 1,991e^{-j1,337}, \quad H(e^{j2\pi/3}) = 0,400e^{-j1,328}.$$

A válasz Fourier-sora (55) értelmében nehézség nélkül számítható:

$$y[k] = 1,806 + 1,150 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - 1,861\right) + 0,133 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - 2,375\right).$$

Az eredményt a 11. ábra szemlélteti. A rendszer teljesen átalakítja a gerjesztést. #

3.1-2.4. Folytonos idejű jel Fourier-sora

Tekintsünk egy folytonos idejű T periódusidejű, tehát $\Omega = 2\pi/T$ alap-körfrekvenciájú, valós értékű, $x(t)$ jelet:

$$x(t+T) = x(t); \quad t \in \mathbf{R}, T \in \mathbf{R}_+, \quad \Omega \equiv \frac{2\pi}{T}. \quad (3.1-56)$$

Egy ilyen jel közelítőleg (esetleg pontosan) előállítható $0, \Omega, 2\Omega, \dots, N\Omega$ körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozíciójával. Minél nagyobb N értéket választunk, annál kisebbé tehető a közelítés hibája a hiba értelmezésétől függetlenül.

Jelölje $x_N = x_N(t)$ az $x(t)$ jel N -edrendű (általános esetben $2N+1$ tagú) közelítését, az $x(t)$ jel N -edrendű *Fourier-polinomját*

$$x_N(t) = X_0 + \sum_{p=1}^N [X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t]. \quad (3.1-57)$$

Tekintsük a közelítést annál jobbnak, minél kisebb a H négyzetes középhibája:

$$H = \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_N(t) - x(t)]^2 dt \right\}^{1/2}. \quad (3.1-58)$$

Más hibamértéket is lehetne választani. Ezt a választást az indokolja, hogy ekkor az együtthatókra egyszerű kifejezés adódik, amelyet alább igazolunk:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt, \\ X_p^A &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos p\Omega t dt, \\ X_p^B &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin p\Omega t dt; \quad p = 1, 2, \dots, N. \end{aligned} \quad (3.1-59)$$

Ezek az $x(t)$ periodikus jel *Fourier-együtthatói*. Lényeges, hogy ezek értéke független a választott N tagszámtól. A továbbiakban a (57)-től eltérő alakot fogunk használni.

Ha $N \rightarrow \infty$, akkor a H hibamérték nullához tart, vagyis $x_N(t)$ négyzetes közép értelemben konvergál az $x(t)$ jelhez. Ha $x(t)$ folytonos, akkor a konvergencia minden pontban is fennáll. Ha $x(t)$ korlátos és véges számú ugrása van egy perióduson belül, akkor $x_N(t)$ a szakadási helyen a jobb és bal oldali határérték számtani közephez konvergál (amely a helyettesítési érték a többi helyen):

$$x_N(t) \rightarrow \frac{x(t-0) + x(t+0)}{2}, \quad N \rightarrow \infty. \quad (3.1-60)$$

Véges tagszám esetén a $\max |x_N(t) - x(t)|$ hiba a szakadási hely környezetében nem szorítható egy korlát alá, amely az ugrás nagyságának mintegy 10%-a. Ez a *Gibbs-jelenség*. Ez rámutat arra, hogy a négyzetes középhiba minimalizálása nem minden szempontból jelent optimális közelítést.

A gyakorlatban rendszerint azt mondják, hogy a periodikus $x(t)$ jel megadható az (általában végtelen tagszámú) *Fourier-sorával*, amelyet egy részletösszegével közelítünk:

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} [X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t]. \quad (3.1-61)$$

Ezt a nem precíz jelölést a továbbiakban is alkalmazni fogjuk részletes magyarázat nélkül.

Lássuk be az (59) összefüggések érvényességét! A

$$H = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t\} - x(t) \right]^2 dt$$

hibamértéknek ott lehet minimuma, ahol az együtthatók szerinti minden deriváltja nulla:

$$\frac{\partial H}{\partial X_0} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p\Omega t + X_p^B \sin p\Omega t\} - x(t) \right] dt = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_k^A} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p \Omega t + X_p^B \sin p \Omega t\} - x(t) \right] \cos k \Omega t \, dt = 0,$$

$$\frac{\partial H}{\partial X_k^B} = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left[X_0 + \sum_{p=1}^N \{X_p^A \cos p \Omega t + X_p^B \sin p \Omega t\} - x(t) \right] \sin k \Omega t \, dt = 0.$$

Mivel a $\cos p \Omega t$ és $\sin p \Omega t$ függvények integrálja egy periódusra nulla és érvényesek a következő ortogonalitási összefüggések (az alábbi összefüggésben δ_{pk} a Kronecker-szimbólum, értéke: $\delta_{pp} = 1$ és $\delta_{pk} = 0$, $p \neq k$):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \cos p \Omega t \cos k \Omega t \, dt = \int_{-T/2}^{T/2} \sin p \Omega t \sin k \Omega t \, dt = \frac{T}{2} \delta_{pk}, \quad \int_{-T/2}^{T/2} \cos p \Omega t \sin k \Omega t \, dt = 0.$$

A parciális deriváltak akkor válnak nullává, amikor az (57) összefüggések teljesülnek. Nyilvánvaló, hogy a hibamérték valóban minimális.

A továbbiakban a (61) helyett *Fourier-sor* alábbi, szemléletesebb alakját fogjuk használni:

$$x(t) = X_0 + \sum_{p=1}^{\infty} X_p \cos(p \Omega t + \xi_p); \quad \Omega \equiv 2\pi / T. \quad (3.1-62)$$

Ebben X_0 a jel középértéke (ez negatív is lehet), X_1 az *alapharmonikus*, X_p a p -edik harmonikus (a $p \Omega$ körfrekvenciájú összetevő vagy felharmónikus) amplitúdója. A Fourier-soros alakot nevezik a periodikus jel *spektrális előállításának* is.

Ténylegesen a sort részletösszegével (rendszerint első $N+1$ tagjával) közelítjük. Az X_p amplitúdók és a ξ_p szögek célszerűen a komplex Fourier-együtthatók számításával határozhatók meg:

$$X_p^C = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jp \Omega t} \, dt; \quad p = 0, 1, 2, \dots \quad (3.1-63)$$

Az integrál bármely T hosszúságú intervallumra, például a $[0, T)$ intervallumra is számítható. A komplex Fourier-együtthatók ismeretében

$$X_0 = X_0^C; \quad X_p = 2 |X_p^C|, \quad \xi_p = \arccos X_p^C, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.1-64)$$

Az amplitúdók és a szögek meghatározhatók az (59) szerinti X_p^A, X_p^B együtthatók ismeretében is:

$$X_p = \sqrt{(X_p^A)^2 + (X_p^B)^2}, \quad \xi_p = -\arctg \frac{X_p^B}{X_p^A} = \arccos \frac{X_p^B}{X_p}, \quad p = 1, 2, \dots \quad (3.1-65)$$

A jel Fourier-sora közvetlenül is kifejezhető a komplex Fourier-együtthatókkal:

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp \Omega t}. \quad (3.1-66)$$

Valós x esetén X_{-p}^C az X_p^C konjugáltja.

A (66) akkor is használható, ha az x jel komplex értékű. Ekkor X_p^C a szükséges negatív p értékekre is számítandó és a végtelen összeget szimmetrikus határok közötti részletösszeggel kell közelíteni. A valós alakok ekkor nem érvényesek.

Könnyen belátható, hogy ha a jel páros, akkor a komplex együtthatók valós értékűek, a valós alakú sorban a kezdőfázis 0 vagy π , illetve csak koszinusz függvények szerepelnek; ha a jel páratlan, akkor a komplex együtthatók képzetes értékűek, a valós alakú sorban a kezdőfázis $\pi/2$ vagy $-\pi/2$, illetve csak szinusz függvények szerepelnek; ha $x(t+T/2)=-x(t)$, vagyis ha a két félperiódus egymás tükörképe az abszcisszára, akkor a $2n\Omega$ körfrekvenciájú tagok (páros harmonikusok) együtthatója nulla.

Igazolható, hogy ha $x(t)$ folytonos, akkor a Fourier-együtthatók $p \rightarrow \infty$ esetén legalább úgy tartanak nullához, mint $1/p^2$. Ha $x(t)$ legalább m -szer folytonosan differenciálható, akkor a Fourier-együtthatók $p \rightarrow \infty$ esetén legalább úgy tartanak nullához, mint $1/p^{2+m}$. Ez ad némi támpontot arra, hogy egy jelet legalább hány tagú sorral célszerű közelíteni.

Sokkal nehezebb annak megállapítása, hogy ha a jelnek csak véges tagszámú Fourier-polinomja ismert, akkor az milyen pontosságú közelítést jelent, hiszen még a hibamérték sem egyértelmű. Ha egy jelet adott tagszámú Fourier-polinommal akarunk közelíteni, akkor nem mindig a végtelen sor első tagjait célszerű figyelembe venni.

A valós értékű periodikus jel *teljesítményének* (matematikailag: négyzetes középértékének) definíciója

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt. \quad (3.1-67)$$

Ha a jel teljesítménye véges, akkor *Parseval tétele* értelmében meghatározható a

$$P_x = X_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} X_p^2 \quad (3.1-68)$$

összefüggéssel a Fourier-együtthatók ismeretében. A teljesítmény kifejezhető a X_p^A, X_p^B valós együtthatók vagy a komplex együtthatókkal is.

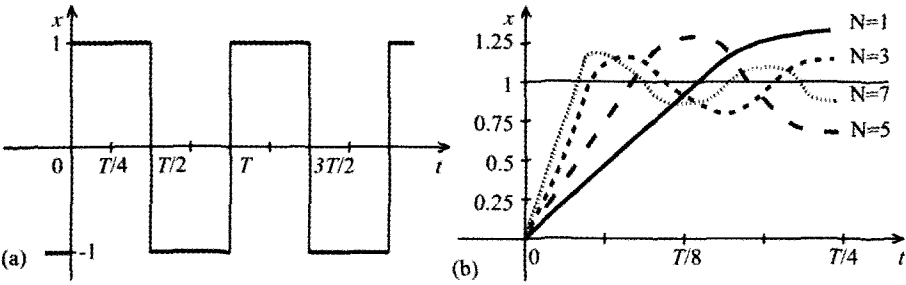
Példa Határozzuk meg a 12a ábrán látható jel Fourier-sorát:

$$x(t) = \begin{cases} -1, & -T/2 < t < 0, \\ +1, & 0 < t < T/2; \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

A jel komplex Fourier-együtthatói

$$X_p^C = \frac{1}{T} \left\{ \int_{-T/2}^0 (-1) e^{-jp\Omega t} dt + \int_0^{T/2} (+1) e^{-jp\Omega t} dt \right\} = \frac{1}{T} \left\{ \frac{1 - e^{jp\Omega T/2}}{+jp\Omega} + \frac{e^{-jp\Omega T/2} - 1}{-jp\Omega} \right\}.$$

Az Euler-reláció és $\Omega T = 2\pi$ felhasználásával kapjuk, hogy



3.1-12. ábra A folytonos idejű periodikus jel (a) grafikonja, (b) néhány Fourier-polinomjának grafikonja

$$X_p^c = \frac{1 - \cos p\pi}{j\pi p} = \begin{cases} 0, & p = 0, 2, 4, \dots, \\ \frac{2}{j\pi p}, & p = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

A jel szimmetriatulajdonságaiból is következik, hogy páros p esetén $X_p = 0$. Páratlan p esetén $X_p = 4/(\pi p)$, $\xi_p = -\pi/2$. A jel Fourier-soros alakja

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right\}.$$

Esetünkben kényelmesebb lehet az ezzel egyenértékű

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \Omega t + \frac{1}{3} \sin 3\Omega t + \frac{1}{5} \sin 5\Omega t + \dots \right\}$$

alakot használni, amelyből világosan kitűnik a jel páratlan tulajdonsága.

A 12b ábrán láthatjuk a jel egy negyed periódusának és annak néhány $x_N(t)$ Fourier-polinomjának grafikonja. A tagszám növelésével a közelítés láthatóan egyre jobb lesz, a maximum egyre jobbra tolódik és csökken, de nem szorítható a kb. 1,09 érték alá. Ez a *Gibbs-jelenség*. Mivel ez az $x(t)$ jel nem folytonos, ezért a sor konvergenciája meglehetősen lassú. #

3.1-2.5. A folytonos idejű periodikus válasz

A folytonos idejű, lineáris, invariáns rendszernek a periodikus gerjesztéshez tartozó periodikus válasza a Fourier-soros előállítás felhasználásával egyszerűen számítható. A válasz kifejezése rendszerint közelítő, mert Fourier-polinomjának annyi tagját tudjuk számítani, ahány tagja a gerjesztés Fourier-polinomjának ismert. A periodikus válasz csak GV stabilis rendszer esetén jelenti az állandósult választ.

Állítsuk elő az ismert $u(t)$ folytonos idejű, T periódusidejű ($\Omega = 2\pi/T$ alapkörfrekvenciájú) periodikus gerjesztés Fourier-soros alakját, pontosabban ennek (62) szerinti N -edrendű közelítését, vagyis N -edrendű *Fourier-polinomját*:

$$u(t) \approx U_0 + \sum_{p=1}^N U_p \cos(p\Omega t + \nu_p). \tag{3.1-69}$$

Minél nagyobb N értéket választunk, annál pontosabb lesz a válasz kifejezése, amelyet ugyanilyen alakban keresünk:

$$y(t) \approx Y_0 + \sum_{p=1}^N Y_p \cos(p \Omega t + \eta_p). \quad (3.1-70)$$

A válasz kifejezésében szereplő Y_p amplitúdókat és η_p kezdőfázisokat a rendszernek a $p\Omega$ körfrekvenciához tartozó $\bar{H}_p \approx H(e^{j p \Omega}) = K_p e^{j \varphi_p}$ átviteli együtthatója ismeretében számíthatjuk:

$$Y_0 = K_0 U_0; \quad Y_p = K_p U_p, \quad \eta_p = \varphi_p + \nu_p, \quad p = 1, 2, \dots, N. \quad (3.1-71)$$

A kielégítő pontossághoz szükséges N rendszám megválasztása nehéz feladat. Ehhez el kell döntenünk, hogy milyen p sorszámtól kezdődően hanyagolható el $Y_p = K_p U_p$. Ennek eldöntését segíti a $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztika ismerete. Ha a gerjesztésnek eleve csak az N -edrendű Fourier-polinomját ismerjük, ekkor a válasz ennél nagyobb rendű Fourier-polinomját nem is tudjuk meghatározni.

Példa Egy folytonos idejű rendszer periodikus gerjesztése

$$u(t) = \begin{cases} -1, & -1 < t < 0, \\ +1, & 0 < t < 1; \end{cases} \quad u(t+2) \approx u(t); \quad T = 2, \quad \Omega = \pi.$$

A GV stabilis rendszer átviteli karakterisztikája ($c > 0$)

$$H(j\omega) = \frac{100(25\pi)^2}{(25\pi)^2 + c(j\omega) + (j\omega)^2}; \quad (a) \ c = 100\pi, \quad (b) \ c = 0,25\pi.$$

Határozzuk meg a válasz Fourier-soros alakját!

A válasz Fourier-sora az előző pont példája értelmében

$$u(t) = \frac{4}{\pi} \left\{ \cos\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(3\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{5} \cos\left(5\pi t - \frac{\pi}{2}\right) + \dots \right\}.$$

A gerjesztést, az átviteli együtthatót és ennek alapján a választ meghatározó amplitúdók és szögek *nehézség nélkül számíthatók*.

Ha $c = 100\pi$, akkor az eredményeket az alábbi táblázat tartalmazza:

$p =$	1	3	5	7
$U_p =$	$4/\pi$	$4/3\pi$	$4/5\pi$	$4/7\pi$
$\nu_p =$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$	$-\pi/2$
$K_p =$	98,90	91,22	80,02	68,95
$\varphi_p =$	-0,16	-0,45	-0,69	-0,89
$Y_p =$	125,92	38,71	20,38	12,54
$\eta_p =$	-1,73	-2,02	-2,27	-2,45

Az U_p és a K_p értékei monoton csökkennek, ezért ez az Y_p értékekre is igaz. A válasz Fourier-sorának nyolcadrendű közelítése

$$y_a(t) \approx 125,9 \cos(\pi t - 1,73) + 38,7 \cos(3\pi t - 2,02) + \\ + 20,4 \cos(5\pi t - 2,27) + 12,5 \cos(7\pi t - 2,45).$$

További tagok figyelembe vételével javíthatunk a közelítés pontosságán.

Tekintsük most a $c = 0,25\pi$ esetet. A fentihez hasonló közelítés hibája ekkor nagyon nagy lenne, mert az amplitúdó-karakterisztikának a $p = 25$ értéknél éles maximuma van. Ez a legnagyobb amplitúdójú tag a válasz Fourier-sorában! Az előzőhöz hasonló számítással kapjuk, hogy a négy legnagyobb amplitúdójú tagot tartalmazó Fourier-polinom a $p = 1, 3, 23, 25$ sorszámokhoz tartozik:

$$y_b(t) \approx 127,5 \cos(\pi t - 1,57) + 43,1 \cos(3\pi t - 1,57) + \\ + 36,0 \cos(23\pi t - 1,63) + 509,3 \cos(25\pi t - 3,14).$$

A következő két figyelembe veendő tag a 27. és az 5. harmonikus.

Nyilvánvaló, hogy a két esetben a válasz jelalakja erősen különböző. #

3.1-2.F. Feladatok

F-1. Az $x[k]$ diszkrét idejű jel periodikus, a periódus hossza $L = 6$. A jel a $0 \leq k \leq L - 1$ intervallumban $x[k] = x_L[k]$.

Határozza meg a DI jel Fourier-soros alakját, ha

- (a) $x_L[k] = \delta[k]$.
- (b) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 1]$.
- (c) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 5]$.
- (d) $x_L[k] = \delta[k] - \delta[k - 5]$.
- (e) $x_L[k] = \delta[k - 1] + 2\delta[k - 2] + 3\delta[k - 3] + 2\delta[k - 4] + \delta[k - 5]$.
- (f) $x_L[k] = 3\delta[k] + 2\delta[k - 1] + \delta[k - 2] + \delta[k - 4] + 2\delta[k - 5]$.

Vázolja fel a jeleket és a szinuszos összetevőket! Ellenőrizze a sor összegét k néhány értékére (például a $k = 0$ helyen)!

F-2. Az $x[k]$ diszkrét idejű jel periodikus, a periódus hossza $L = 5$. A jel a $0 \leq k \leq L - 1$ intervallumban $x[k] = x_L[k]$.

Határozza meg a DI jel Fourier-soros alakját, ha

- (a) $x_L[k] = \delta[k]$.
- (b) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 1]$.
- (c) $x_L[k] = \delta[k] + \delta[k - 4]$.

Vázolja fel a jeleket és a szinuszos összetevőket! Ellenőrizze a sor összegét k néhány értékére (például a $k = 0$ helyen)!

F-3. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája a 3.1-2.3. pont példájában adott. A rendszer gerjesztését az F-1(c) szerinti periodikus jel írja le.

Határozza meg a periodikus válasz Fourier-sorát!

F-4. Egy lineáris, invariáns, GV stabilis, diszkrét idejű rendszer gerjesztése periodikus:

$$u[k] = \delta[k] + \delta[k-1] + \delta[k-8] + \delta[k-9], \quad 0 \leq k \leq 9; \quad u[k+10] = u[k].$$

A rendszer átviteli karakterisztikája

$$(a) \quad H(e^{j\theta}) = 1 - 2 \cos \theta_0 e^{-j\theta} + e^{-j2\theta}, \quad \theta_0 = 3\pi/5.$$

$$(b) \quad H(e^{j\theta}) = 1 - 1,8 \cos \theta_0 e^{-j\theta} + 0,81 e^{-j2\theta}, \quad \theta_0 = 3\pi/5.$$

Határozza meg a válasz Fourier-sorát, továbbá a válasz értékeit az első periódusban. Mi a jellegzetes különbség a két eset között?

F-5. Egy folytonos idejű periodikus jel

$$(a) \quad x(t) = \begin{cases} X \cos \frac{2\pi}{T} t, & 0 < |t| < T/4, \\ 0, & T/4 < |t| < T/2, \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

$$(b) \quad x(t) = X \left| \cos \frac{2\pi}{T} t \right|.$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is!

***F-6.** Egy folytonos idejű periodikus jel kifejezése

$$(a) \quad x(t) = X \tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \delta(t - iT).$$

$$(b) \quad x(t) = X \tau \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left\{ \delta(t - iT) - \delta\left(t - iT - \frac{T}{2}\right) \right\}.$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is, ha ez lehetséges!

F-7. Egy folytonos idejű periodikus jel kifejezése

$$x(t) = \begin{cases} X \frac{T+2t}{T}, & -\frac{T}{2} < t < 0, \\ X \frac{T-2t}{T}, & 0 < t < \frac{T}{2}; \end{cases} \quad x(t+T) = x(t).$$

Vázolja fel a jelet! Határozza meg a jel Fourier-sorát! Határozza meg a jel teljesítményét pontosan és Fourier-sorának első két tagja alapján közelítőleg is!

***F-8.** Egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája a 3.1-2.5. pont példájában adott, $c = 0,25\pi$. A rendszer gerjesztése

(a) az előző feladatban megadott jel.

(b) az F-6(a) feladat szerinti Dirac-impulzusok sorozata.

Határozza meg az $M_{25} = Y_{25}/Y_1$ viszonyszámot, ahol Y_{25} a válasz 25. harmónikusának amplitúdója ($p = 25$ esetén az amplitúdó-karakterisztika maximális), és Y_1 a válasz alap-harmónikusának amplitúdója.

*F-9. Egy folytonos idejű, periodikus jel (57) szerinti Fourier-polinómjának és (61) szerinti Fourier-sorának együtthatói az (59) szerinti összefüggésekkel számítva az (58) szerinti H négyzetes középhiba minimális, a (61) szerinti Fourier-sor négyzetes közép értelemben vagyis energia normában konvergál a periodikus jelhez.

(a) Adjon más hibamértéket vagy hibamértékeket, amelyek minimalizálása ugyancsak jó közelítésre vezetne.

(b) Milyen szempontokból előnyösebb illetve hátrányosabb a négyzetes hibamérték a többi hibamértékkel összehasonlítva?

3.1-2.M. Megoldások

M-1. Az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = \pi/3$. Elegendő négy \bar{X}_i^C számítása.

$$(a) X_0 = \bar{X}_1^C = \bar{X}_2^C = \bar{X}_3^C = 1/6;$$

$$x[k] = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k).$$

$$(b) x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right); \quad (3.1 - 2.2. \text{pont}).$$

$$(c) x[k] = \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$(d) x[k] = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{3} \cos(\pi k).$$

$$(e) x[k] = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k - \pi\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k + \pi).$$

$$(f) x[k] = \frac{3}{2} + \frac{4}{3} \cos\left(\frac{\pi}{3}k\right) + \frac{1}{6} \cos(\pi k).$$

M-2. Az alapharmonikus körfrekvenciája $\Theta = 2\pi/L = 0,4\pi$. Elegendő három \bar{X}_i^C számítása.

$$(a) x[k] = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{2\pi}{5}k\right) + \frac{2}{5} \cos\left(\frac{4\pi}{5}k\right).$$

$$(b) x[k] = 0,40 + 0,65 \cos(0,4\pi k - 0,63) + 0,25 \cos(0,8\pi k - 1,26).$$

$$(c) x[k] = 0,40 + 0,25 \cos(0,4\pi k + 1,26) + 0,65 \cos(0,8\pi k - 0,63).$$

M-3. Az átviteli együtthatók számítása után a válasz Fourier-sora

$$y[k] = 1,81 + 1,15 \cos\left(\frac{\pi}{3}k - 0,833\right) + 0,134 \cos\left(\frac{2\pi}{3}k - 0,281\right).$$

M-4. A válasz Fourier-sora ($\Theta = 2\pi/10 = 0,2\pi$) és első periódusának időfüggvénye

$$(a) y[k] = 1,047 + 1,376 \cos(\Theta k - 0,314) + 0,247 \cos(2\Theta k - 0,628) + 0,2 \cos(4\Theta k - 1,257);$$

$$y[k] = 2,617 \delta[k] + 2,617 \delta[k-1] + 1,617 \delta[k-2] + 1,713 \delta[k-3] + 1,000 \delta[k-4] + 1,000 \delta[k-8] + 1,618 \delta[k-9]; \quad 0 \leq k \leq 9.$$

A válasz nem tartalmaz 3θ körfrekvenciájú összetevőt.

$$(b) \quad y[k] = 1,893 + 1,246 \cos(\theta k - 0,259) + 0,226 \cos(2\theta k - 0,468) + 0,026 \cos(3\theta k - 2,470) + 0,183 \cos(4\theta k - 1,379);$$

A válaszban a 3θ körfrekvenciájú összetevő a most nem nulla.

M-5. Az alapharmonikusú komplex Fourier-együttható számítása figyelmet igényel!

$$(a) \quad x(t) = X \left\{ \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \cos \Omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \cos 2n \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T};$$

$$P_x = \frac{1}{4} X^2 = 0,25 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,226 X^2; \quad P_{x,2} = 0,905 P_x.$$

$$(b) \quad x(t) = X \left\{ \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)^2 - 1} \cos 2n \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{\pi}{T};$$

$$P_x = \frac{1}{2} X^2 = 0,5 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3\pi} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,495 X^2; \quad P_{x,2} = 0,991 P_x.$$

***M-6.** A komplex Fourier-együtthatók egyszerűen számíthatók.

$$(a) \quad x(t) = \frac{\tau}{T} X \left\{ 1 + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p \Omega t \right\}; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

$$(b) \quad x(t) = \frac{4\tau}{T} X \sum_{n=1}^{\infty} \cos(2n-1)\Omega t; \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

A jelek teljesítménye nem véges.

M-7. Az alap-körfrekvencia $\Omega = 2\pi/T$

$$x(t) = \frac{1}{2} X + \frac{4}{\pi^2} X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos(2n-1)\Omega t;$$

$$P_x = \frac{1}{3} X^2 \approx 0,3333 X^2, \quad P_{x,2} = \left\{ \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi^2} \right)^2 \right\} X^2 \approx 0,3321 X^2.$$

***M-8.** $K_{25}/K_1 = 99,84$; ezért (a) $M_{25} = 99,84/25^2 = 0,160$, míg (b) $M_{25} = 99,84$. A válaszban a 25. harmonikus az (a) esetben domináns, a (b) elhanyagolható.

***M-9.** (a) A hibamértékek egy családja a hiba függvény abszolút értéke n -edik hatványának középértéke egy periódusra. Az $n = 1$ választás a hibafüggvény abszolút értékének középértékét adja. Egy másik logikus hibamérték a hibafüggvény abszolút értékének maximuma, ekkor a legjobb közelítést azok az együtthatók jelentik, amelyekre a maximális hiba minimális (ez a „minimax” elv).

(b) A négyzetes hibamérték egyik nagy előnye, hogy az együtthatók számítására formula adható. További előnye, hogy az együtthatók értéke független a választott tagszámtól. A többi hibamértéket minimáló együtthatók számítása hosszadalmas, továbbá minden tagszámra újból el kell végezni valamennyi együttható kiszámítását. A négyzetes (és az annál nagyobb fokszámú) hibamértékek a viszonylag nagy lokális hibákat igyekeznek lecsökkenteni, a minimax eljárásra ez még inkább igaz. Talán a hibafüggvény abszolút értékének minimuma adja a legjobbnak tekinthető közelítést. Általánosan nem lehet legjobbnak nevezhető hibamértéket kijelölni, ezért szinte kizárólagos a legegyszerűbben minimalizálható négyzetes középhiba.

3.2. Jelek és rendszerek spektrális leírása

Az előző fejezetben láttuk, hogy periodikus jelek leírhatók szinuszos jelek szuperpozíciójaként. Az egyes szinuszos összetevők körfrekvenciája az alapharmonikusú körfrekvenciának egész számú többszöröse. Meghatározva a rendszer gerjesztésének Fourier-sorát és ismerve a rendszer átviteli karakterisztikáját nehézség nélkül számíthatjuk a válasz Fourier-soros alakját.

Ebben a fejezetben bemutatjuk, hogy a jelek széles osztálya leírható szinuszos jelek szuperpozíciójaként, ha nem csak bizonyos Ω , illetve ω , diszkrét körfrekvenciákat veszünk figyelembe, hanem valamennyi körfrekvenciát.

Ismerve a gerjesztés eme spektrális alakját. (Fourier-transzformáltját, Fourier-reprezentációját, Fourier-integrálos alakját) és a rendszer átviteli karakterisztikáját, nehézség nélkül meghatározható a válasz spektrális alakja. Ennek ismeretében a válasz időfüggvénye is számítható.

Az utóbbi művelet (vagyis az inverz Fourier-transzformáció) rendszerint csak numerikusan végezhető el valamilyen (célszerűen adaptív) integrálási eljárással vagy egy FFT („Fast Fourier Transform”) algoritmujjal. Sok feladat megoldása során azonban nincs is szükség az időfüggvényre, mert már a spektrális alakból, vagyis a frekvenciatartománybeli leírásból is fontos megállapításokat tudunk tenni. Gyakran az adott időfüggvény Fourier-transzformáltjának számítását is numerikusan számítjuk.

A 3.2-1. szakaszban bemutatjuk a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek spektrális leírását (Fourier-integrálos alakját). Látni fogjuk, hogy ha a jel a végtelenben elég gyorsan nullához tart (ami véges energiájú jelre teljesül), akkor spektrumának meghatározása nem jelent elvi nehézséget. Ebben a szakaszban lesz szó a sávkorlátozott és időkorlátozott jelek tulajdonságairól is.

A 3.2-2. szakaszban tárgyaljuk a lineáris, invariáns rendszer adott gerjesztéshez tartozó válaszának spektrális leírásának és ennek ismeretében a válasz időfüggvényének a számítását. Ebben a szakaszban tárgyaljuk a jelátvitel néhány, a jel és a rendszer spektrális leírásával kapcsolatos fogalmát, mint a rendszer sávszélessége, a jel sávszélessége, a torzításmentes jelátvitel feltételei. Ezzel illusztráljuk, hogy az időtartományba történő visszatérés nélkül is fontos megállapítások tehetők.

3.2-1. A Fourier-transzformáció

3.2-1.1. A Fourier-transzformáció definíciója

A diszkrét idejű és a folytonos idejű Fourier-transzformáció alap gondolata közös, definíciójuk és alapvető tulajdonságaik hasonlóak. A két transzformációt ezért együtt tárgyaljuk, néhány speciális tulajdonságukra kitérünk.

A valós vagy komplex értékű $x[k]$ diszkrét idejű, illetve $x(t)$ folytonos idejű jel

$$\text{DI: } X(e^{j\theta}) = \mathcal{F} \{x[k]\}; \quad \text{FI: } X(j\omega) = \mathcal{F} \{x(t)\} \quad (3.2-1)$$

komplex *spektruma* vagy *Fourier-transzformáltja* egy olyan valós változós (esetleg általánosított) függvény, amelynek alapvető tulajdonsága, hogy ismeretében a jel előállítható a következő alakban:

$$\begin{aligned} \text{DI: } x[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \\ \text{FI: } x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega. \end{aligned} \quad (3.2-2)$$

E művelet neve *inverz Fourier-transzformáció*, szimbolikus alakja

$$\text{DI: } x[k] = \mathcal{F}^{-1} \{X(e^{j\vartheta})\}; \quad \text{FI: } x(t) = \mathcal{F}^{-1} \{X(j\omega)\}. \quad (3.2-3)$$

Az integrálok ϑ illetve ω körfrekvenciájú szinuszos jelek szuperpozícióját jelentik. Az $X(e^{j\vartheta})d\vartheta/2\pi$, illetve az $X(j\omega)d\omega/2\pi$ mennyiség úgy tekinthető, mint egy ϑ illetve ω körfrekvenciájú szinuszos jel komplex amplitúdója.

Ha $x[k]$ abszolút összegezhető, illetve ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor spektruma a következő összefüggéssel számítható:

$$\begin{aligned} \text{DI: } X(e^{j\vartheta}) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\vartheta k}, \quad \Leftarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]| < \infty; \\ \text{FI: } X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \Leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \end{aligned} \quad (3.2-4)$$

Ha $x(t)$ abszolút integrálható, de nem folytonos, akkor a (4) alapján számított $X(j\omega)$ a (2) szerinti inverz transzformáltja az $[x(t-0) + x(t+0)]/2$ értéket állítja elő, azaz a folytonossági helyeken az $x(t)$ értéket, a szakadási helyeken a bal és a jobb oldali határérték számtani közepét. Az ennél általánosabb eseteknek kicsi a gyakorlati jelentősége, ezekkel nem is foglalkozunk.

A következő pontban néhány példával illusztrálni fogjuk, hogy bizonyos nem abszolút összegezhető DI jelnek illetve nem abszolút integrálható FI jelnek is előállítható a spektruma.

Az $X(e^{j\vartheta})$, illetve az $X(j\omega)$ jelölés talán feleslegesen bonyolultnak tűnik az egyszerűbb $X(\vartheta)$, illetve $X(\omega)$ helyett. Az utóbbi is elterjedt az irodalomban, sokan az ω körfrekvencia helyett az f frekvenciát használják független változóként. Az általunk használt jelölés előnyeinek egy részét már láttuk, további előnyöket ebben a fejezetben és a következő részben fogunk látni. A jelölés jól kifejezi, hogy a DI spektrum *periodikus* függvénye a ϑ változónak, ezért elegendő a $0 \leq \vartheta < \pi$ értékekre ismerni.

A *véges hosszúságú* korlátos jelek mindig abszolút összegezhetőek, illetve abszolút integrálhatóak. Ezekre tehát a (4) alkalmazható. Egyszerű példaként tekintsük az egységnyi amplitúdójú, L hosszúságú DI, illetve T hosszúságú FI négyszögimpulzus spektrumát:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} = \sum_{k=0}^{L-1} 1 \cdot e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{L-1} (e^{-j\vartheta})^k,$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} = \int_0^T 1 \cdot e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{1}{-j\omega} e^{-j\omega t} \right]_0^T.$$

A mértani sor összegének számítása, illetve a határok behelyettesítése után

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} = \frac{1 - e^{-j\vartheta L}}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad \mathcal{F}\{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (3.2-5)$$

Egy másik fontos abszolút összegehető illetve abszolút integrálható jelosztályt alkotnak az olyan *korlátos* jelek, amelyek nullához tartó exponenciális függvényvel majorálhatók:

$$\begin{aligned} |x[k]| \leq M \quad \text{és} \quad |x[k]| \leq a^{|k|}, \quad |k| > k_0, \quad 0 < a < 1, \\ |x(t)| \leq M \quad \text{és} \quad |x(t)| \leq e^{-\alpha t}, \quad |t| > t_0, \quad \alpha > 0. \end{aligned} \quad (3.2-6)$$

Fontos példa ilyen típusú jelekre a belépő *DI* illetve *FI* exponenciális jel:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\vartheta k} = \sum_{k=0}^{\infty} (a e^{-j\vartheta})^k,$$

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-j\omega t} dt = \left[\frac{-1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \right]_0^{\infty}.$$

Nehézség nélkül kapjuk a belépő exponenciális jel spektrumát:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\vartheta}}, \quad |a| < 1; \quad \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega}, \quad \alpha > 0. \quad (3.2-7)$$

Ha $|a| \geq 1$, akkor a sor nem konvergál, illetve ha $\alpha \leq 0$, akkor az integrál nem konvergál. A kikötést figyelembe kell vennünk, mert az eredményből nehéz kikövetkeztetni, hogy az csak a megadott feltételek mellett érvényes.

Mielőtt további részletekbe mennénk, adjunk közelítő összefüggést a (2) szerinti spektrális előállításra. Közelítsük az integrált véges tagszámú összeggel, amelyben $\Delta\vartheta = 2\pi/L$, illetve $\Delta\omega = 2\pi/T$, ahol L kellően nagy pozitív páros szám, illetve T kellően nagy pozitív érték:

$$x[k] \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(e^{jp2\pi/L}) e^{jp(2\pi/L)k} \frac{2\pi}{L} = \frac{1}{L} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(e^{jp\vartheta}) e^{jp\vartheta k}, \quad \vartheta = \frac{2\pi}{L};$$

$$x(t) \approx \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X\left(jp \frac{2\pi}{T}\right) e^{jp(2\pi/T)t} \frac{2\pi}{T} = \frac{1}{T} \sum_{p=-L/2}^{L/2} X(jp\Omega) e^{jp\Omega t}, \quad \Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Hasonlítsuk ezt össze a (3.1-40), illetve a (3.1-60) összefüggéssel, akkor láthatjuk, hogy egy periodikus jel Fourier-sorát kaptuk, amelyben

$$X(e^{jp\vartheta}) = L X_p^C, \quad X(jp\Omega) = T X_p^C.$$

Hasonló módon látható be, hogy (4) a Fourier-együtthatókat adja $\vartheta = p\Theta$, illetve $\omega = p\Omega$ értelmezéssel. Ez azt jelenti, hogy L és T megválasztása után egy olyan periodikus jel Fourier-soros előállítását kapjuk, amely a $-L/2 \leq k \leq L/2$, illetve a $-T/2 \leq t < T/2$ intervallumban közelíti a vizsgált (nem periodikus) jelet. Minél nagyobbra választjuk L illetve T értékét, annál kisebb lesz $\Delta\vartheta$ illetve $\Delta\omega$, vagyis az integrál összeggel történő közelítése egyre kisebb hibát okoz, a jel közelítése periodikus jellel egyre hosszabb intervallumban elfogadható. Ezek a megfontolások nem bizonyítják a Fourier-transzformációs összefüggések helyességét, de némi bepillantást engednek annak lényegébe, továbbá lehetőséget adnak a transzformációnak és inverzének numerikus elvégzésére. Mint látható, a Fourier-integrál numerikus közelítése megegyezik a Fourier-sor numerikus eljárásával, amelyre a már említett FFT algoritmusok állnak rendelkezésre.

A diszkrét idejű Fourier-transzformáció igazolásához helyettesítsük a spektrum (4) szerinti kifejezését az időfüggvény (2) szerinti alakjába:

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] e^{-j\vartheta p} e^{j\vartheta k} d\vartheta.$$

A végtelen sor tagonként integrálható, ha egyenletesen konvergens. Ez teljesül, ha $|x[k]|$ összegezhető. Erre az esetre szorítkozva, kapjuk hogy

$$\mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\} = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} x[p] \int_{-\pi}^{\pi} e^{j(k-p)\vartheta} d\vartheta.$$

Az integrál eredménye $p=k$ esetén 2π , egyébként nulla. Ezek szerint az inverz transzformáció (2) képlete valóban az eredeti jelet adja k minden egész értékére.

A folytonos idejű jelle vonatkozó igazolás körülményesebb, ezért nem is tárgyaljuk. A Fourier-sorhoz hasonlóan igazolhatjuk, hogy a Fourier-integrálos előállítás akkor adja a legkisebb négyzetes eltérést, ha a spektrumot a megadott alakúnak választjuk. Az igazoláshoz célszerű áttérni a később megadandó valós alakra.

3.2-1.2. Néhány jel spektruma

A Fourier-transzformáció néhány fontos tételének bemutatása előtt meghatározzuk néhány fontos DI illetve FI jel spektrumát.

Abszolút összegezhető diszkrét idejű jelek

A véges hosszúságú négyszögimpulzus és a belépő exponenciálisan csökkenő jel spektrumát már meghatároztuk. Az *egységimpulzus* spektruma a (4)-ből közvetlenül adódik:

$$\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1; \quad \mathcal{F}\{\delta[k-i]\} = e^{-ji\vartheta}, \quad i \in \mathbf{Z}. \quad (3.2-8)$$

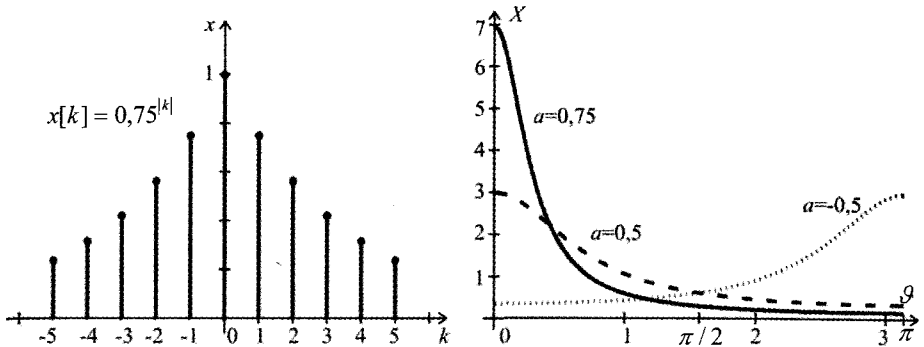
Az exponenciálisan csökkenő páros függvény spektruma a (4) alapján számítható:

$$\mathcal{F}\{a^{|k|}\} = \sum_{k=-\infty}^{-1} a^{-k} e^{-j\vartheta k} + \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{-j\vartheta k} = \frac{1}{1-a e^{j\vartheta}} - 1 + \frac{1}{1-a e^{-j\vartheta}}, \quad |a| < 1.$$

Elemi átalakítások után kapjuk, hogy valós a esetén

$$\mathcal{F}\{a^{|k|}\} = \frac{1-a^2}{1+a^2-2a\cos\vartheta}, \quad -1 < a < 1. \quad (3.2-9)$$

E valós értékű spektrum grafikonját az a paraméter néhány értékére az 1. ábra mutatja.



3.2-1. ábra A diskret idejű, páros, nullához tartó DI exponenciális jel és valós értékű spektruma

Legyen egy DI jel spektruma a következő alakban adott:

$$X(e^{j\vartheta}) = 1 + 4 \cos 3\vartheta + j 6 \sin 2\vartheta \equiv 2e^{j3\vartheta} + 3e^{j2\vartheta} + 1 - 3e^{-j2\vartheta} + 2e^{-j3\vartheta}.$$

Az időfüggvény a (2) felhasználásával bármelyik alakból számítható. A spektrum (4) szerinti kifejezése alapján a jel komplex alakjából

$$x[k] = 2\delta[k+3] + 3\delta[k+2] + \delta[k] - 3\delta[k-2] + 2\delta[k-3]$$

ránézésre is felismerhető. A példa mintájára bármely, Fourier-polinom alakjában megadott spektrumhoz tartozó DI jel időfüggvénye meghatározható.

Abszolút integrálható folytonos idejű jelek

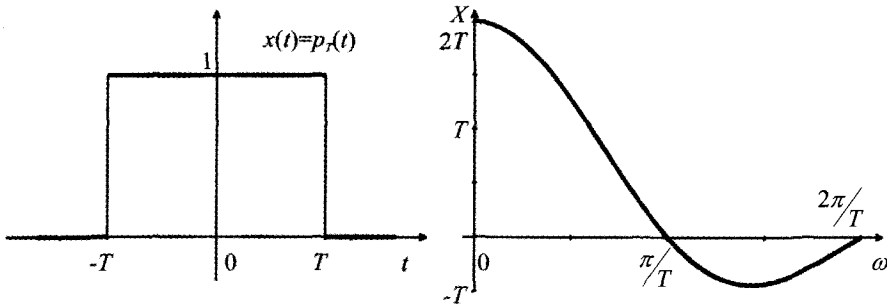
A belépő négyszögletes impulzus és a belépő, exponenciálisan csökkenő jel spektrumát már meghatároztuk. Egyszerűen számítható a szimmetrikus *négyszögletes impulzus* spektruma is. A részletszámításokat az Olvasóra bízunk, csak az eredményt adjuk meg:

$$p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad \mathcal{F}\{p_T(t)\} = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \quad (3.2-10)$$

A 2. ábrából láthatjuk, hogy e jel spektrális előállításában a kisfrekvenciás komponensek játszanak meghatározó szerepet. Első becslésként azt mondhatjuk, hogy az $\omega_0 = \pi/T$ helyen fellépő első nullahely utáni frekvenciakomponensek már elhanyagolhatók. Ennek a körfrekvenciának $f_0 = \omega_0 / 2\pi = 1/2T$ frekvencia (az impulzus hosszának reciproka) felel meg. Ez más alakú impulzusra (például háromszögimpulzusra) is használható becslés, csak az impulzus hosszát kell megfelelően értelmezni.

A *Dirac-impulzus* abszolút integrálható jel, ezért spektruma a (4) alapján számítható:

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt.$$



3.2-2. ábra A folytonos idejű, szimmetrikus négyzetes impulzus és spektruma

Ebből és hasonló megfontolással az eltoltt Dirac-impulzusra azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1, \quad \mathcal{F}\{\delta(t - \tau)\} = e^{-j\omega\tau}. \quad (3.2-11)$$

A Dirac-impulzus spektrumában minden frekvencia egyforma súllyal szerepel. A (11) inverz alakja, vagyis a Dirac-impulzus spektrális kifejezése

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = \delta(t). \quad (3.2-12)$$

Megjegyezzük, hogy a bal oldalon álló integrál nem konvergens klasszikus értelemben és valóban nem is reprezentál (közönséges) függvényt.

Nem abszolút összegezhető diszkrét idejű jelek

Legyen egy diszkrét idejű jel spektruma Dirac-impulzusok végtelen sorozata:

$$X(e^{j\vartheta}) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi).$$

A spektrumhoz tartozó diszkrét idejű jel a (2) definíció értelmében

$$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} 1,$$

mivel a $[-\pi, \pi)$ intervallumban csak a $p = 0$ sorszámú tag nem nulla. Ezzel előállítottuk a mindenütt *állandó* DI jel spektrumát:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) \Rightarrow \mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\vartheta), \quad -\pi \leq \vartheta < \pi. \quad (3.2-13)$$

Az állandó jel spektrális előállításában csak a $\vartheta = 0$ körfrekvenciájú összetevő (és periodikus ismétlődése) szerepel, ami nem meglepő eredmény. Ezt az eredményt (4) alapján nem tudjuk előállítani, mivel az előálló sor nem konvergens.

Nem egyszerű annak igazolása (ezért mellőzzük is), hogy

$$\mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi \sum_{p=-\infty}^{\infty} \delta(\vartheta - p 2\pi) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}} \Rightarrow \mathcal{F}\{\varepsilon[k]\} = \pi \delta(\vartheta) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad |\vartheta| \leq \pi. \quad (3.2-14)$$

Az utolsó tag a (7) értelmében az $\mathcal{F}\{\varepsilon[k]a^k\}$ kifejezése $a=1$ esetén, amikor azonban a (7) nem érvényes, amint azt (14) járulékos tagja mutatja. A (13) és a (14) alapján határozhatjuk meg a következő két, nem abszolút összegezhető jel spektrumát is:

$$\mathcal{F}\{2\varepsilon[k]-1\} = \frac{2}{1-e^{-j\vartheta}}, \quad (3.2-15)$$

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} k\} = \frac{1+e^{-j\vartheta}}{1-e^{-j\vartheta}} \equiv \frac{1}{j \operatorname{tg}(\vartheta/2)}, \quad \operatorname{sgn} k \equiv \begin{cases} -1, & k \in \mathbf{Z}_-, \\ 0, & k = 0, \\ +1, & k \in \mathbf{Z}_+. \end{cases} \quad (3.2-16)$$

Noha e két jel nem abszolút összegezhető, egyikük spektruma sem tartalmaz Dirac-impulzus összetevőt.

Nem korlátos jelek spektrumának előállítására további matematikai bonyodalmakkal jár, ezért az ilyeneket a továbbiakban nem tekintjük Fourier-transzformálhatónak.

Nem abszolút integrálható folytonos idejű jelek

Az *állandó* (az időtől független) jel spektruma a Dirac-impulzus:

$$\mathcal{F}\{1\} = 2\pi \delta(\omega), \quad (3.2-17)$$

mivel $X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$ esetén a (2) alapján valóban $x(t) = 1$ adódik. Az állandó jel spektruma csak $\omega = 0$ körfrekvenciájú összetevőt tartalmaz, amint az várható is.

Alább igazolni fogjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} t\} = \frac{2}{j\omega}, \quad \operatorname{sgn} t \equiv \begin{cases} -1, & t \in \mathbf{R}_-, \\ 0, & t = 0, \\ +1, & t \in \mathbf{R}_+. \end{cases} \quad (3.2-18)$$

Az $1 + \operatorname{sgn} t = 2\varepsilon(t)$, továbbá (17) és (18) felhasználásával:

$$\mathcal{F}\{\varepsilon(t)\} = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}; \quad (3.2-19)$$

$$\mathcal{F}\left\{\frac{\sin \Omega t}{\Omega t}\right\} = \frac{\pi}{\Omega} p_\Omega(\omega), \quad p_\Omega(\omega) \equiv \begin{cases} 1, & |\omega| < \Omega, \\ 0, & |\omega| > \Omega. \end{cases} \quad (3.2-20)$$

A $\sin \Omega t / \Omega t$ függvény nem abszolút integrálható, amint arról némi fáradsággal meggyőződhetünk.

A transzformáció vagy az inverz transzformáció számításakor az integrál Cauchy-főértékét kell figyelembe venni azokban az esetekben, amikor a jel vagy a spektruma valahol (például a nulla helyen) nem véges.

További jelek spektrumát a következő pontban még ki fogjuk számítani a Fourier-transzformáció tételeinek ismertetése után, azok felhasználásával.

A (18) igazolásához írjuk fel (10) inverz alakját:

$$p_r(t) = \mathcal{F}^{-1}\left\{2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}\right\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

A $t = 0$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $(\cos \omega T / \omega)$ páratlan függvény)

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \omega T}{\omega} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{j\omega} e^{j\omega T} d\omega, \quad T > 0.$$

Ha $T < 0$, akkor az integrál értéke -1 . Ez éppen a (18) szerinti állítás.

A (20) igazolásához végezzük el $p_T(t)$ fenti kifejezésében a változók következő cseréjét: $t = \omega'$, $\omega = t'$, $T = \Omega$, akkor

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin t' \Omega}{t'} e^{j t' \omega'} dt' = p_{\Omega}(\omega').$$

Ez a $\sin \Omega t / \pi t$ jel Fourier-integrálos alakja, ami a (20) szerinti összefüggés.

A jel csonkítása

Az előzőekben tárgyalt példák mutatják, hogy a nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelek spektrális előállításuk körülményes. Ezek a nehézségek megkerülhetők a következő megfontolással.

Egy valódi folyamatot leíró jel mindig egy $k = k_0$ illetve $t = t_0$ időpontban kezdődik és egy véges L illetve T időpont után vagy végződik vagy érdektelenné válik. A szokásos kezdeti időpont választás $k_0 = 0$ illetve $t_0 = 0$ (esetleg $k_0 = -L$ illetve $t_0 = -T$). Az esetleg nem abszolút összegezhető illetve nem abszolút integrálható jelek helyett vizsgáljuk azok csonkított és belépő megfelelőjét:

$$x[k, L] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\} x[k]; \quad x(t, T) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} x(t). \quad (3.2-21)$$

A csonkított jel megegyezik az eredeti jellel a $0 \leq k \leq L-1$ illetve a $0 \leq t < T$ intervallumban és nulla az intervallumomon kívül. Ha x korlátos az intervallumban (mint szinte mindig), akkor a csonkított jel abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható, ezért spektruma elvileg nehézség nélkül számítható.

A kényes feladat a csonkítási intervallum helyes megválasztása és annak szem előtt tartása, hogy bármilyen következtetés az intervallumon kívüli tartományra alapos megfontolást igényel.

Példa Legyenek az eredeti DI illetve FI jelek belépő exponenciális függvények:

$$x[k] = \varepsilon[k] a^k, \quad x(t) = \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Az ezekhez rendelt csonkított jelek

$$x[k, L] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k - L]\} a^k, \quad x(t, T) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} e^{-\alpha t}.$$

A csonkított jelek spektruma az (5)-höz hasonlóan számítható. Az eredmény

$$\mathcal{F}\{x[k, L]\} = \frac{1 - a^L e^{-jL\vartheta}}{1 - a e^{-j\vartheta}}; \quad \mathcal{F}\{x(t, T)\} = \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-jT\omega}}{\alpha + j\omega}.$$

Három esetet célszerű megkülönböztetnünk.

Ha $|a| < 1$ illetve $\alpha > 0$, akkor $|a^L|$ illetve $e^{-\alpha T}$ tetszőlegesen kicsivé tehető az L vagy T megfelelő választásával. Ezt a tényezőt tartalmazó tagot elhanyagolva megkapjuk az eredeti, exponenciálisan csökkenő jel (7) szerinti spektrumát.

Ha viszont $a=1$ illetve $\alpha=0$, akkor az eredeti jel az egységugrás, spektrumát (14) illetve (17) adja, amely Dirac-impulzust és a nulla helyen nem véges függvényt tartalmaz. A csonkított jel spektruma viszont L illetve T értékű a $k=0$ illetve a $t=0$ helyen. Ízlés kérdése, hogy melyik leírást tekintjük megfelelőbbnek.

A harmadik esetben $|a|>1$ illetve $\alpha<0$. Az eredeti, exponenciálisan növekvő jel spektrumát nem vizsgáltuk, mert az bonyolultabb matematikai apparátust igényelne. A csonkított jel spektruma egy komplex értékű „közönséges” függvény. Előfordulhat azonban hogy az $|a^t|$ illetve az $e^{-\alpha t}$ tényező olyan nagy, hogy az numerikus problémát okoz. Ismét ízlés kérdése, hogy ebben az esetben azt mondjuk, hogy a jelhez még csonkítással sem rendelhető spektrum vagy elfogadjuk a csonkítással kapott eredményt. #

3.2-1.3. A Fourier-transzformáció néhány tétele

Ebben a pontban x valós értékű DI illetve FI jel, noha a tételek többsége komplex értékű jelekre is érvényes. A tételek bizonyítását többnyire mellőzzük, mivel azok formális igazolása a (2) definíció vagy a (4) inverz összefüggés alapján igen egyszerű, a szigorú igazolás hosszadalmas, gyakran magasabb szintű matematikai ismereteket igényel.

Linearitás

Mind a Fourier-transzformáció, mind az inverze lineáris operáció, ezért érvényes a szuperpozíció elve DI illetve FI jelekre egyaránt:

$$\mathcal{F}\{C_1 x_1 + C_2 x_2\} = C_1 \mathcal{F}\{x_1\} + C_2 \mathcal{F}\{x_2\}, \quad (3.2-22)$$

$$\mathcal{F}^{-1}\{C_1 X_1 + C_2 X_2\} = C_1 \mathcal{F}^{-1}\{X_1\} + C_2 \mathcal{F}^{-1}\{X_2\}, \quad (3.2-23)$$

bármely C_1, C_2 állandó esetén. Az általánosítás véges számú tag összegére kézenfekvő, végtelen sok tagra csak megfelelő konvergencia feltételek teljesülése esetén.

A valós spektrumok

Az X komplex spektrum két valós spektrummal írható le. Ez lehet az $A_x = |X|$ amplitúdó-spektrum és a $\varphi_x = \arg X$ fázis-spektrum, vagyis

$$X(e^{j\vartheta}) \equiv A_x(\vartheta) e^{j\varphi_x(\vartheta)}, \quad X(j\omega) = A_x(\omega) e^{j\varphi_x(\omega)}. \quad (3.2-24)$$

Használható azonban a P_x valós rész és a Q_x képzetes rész is:

$$X(e^{j\vartheta}) = P_x(\vartheta) + jQ_x(\vartheta), \quad X(j\omega) = P_x(\omega) + jQ_x(\omega). \quad (3.2-25)$$

A (4)-ből következik, hogy valós értékű x esetén A_x és P_x változójának páros függvénye, φ_x és Q_x változójának páratlan függvénye. Vizsgálatainkat vagy az ábrázolást ezért a $0 \leq \vartheta < \pi$ illetve a $0 \leq \omega < \infty$ intervallumra korlátozhatjuk. Javasoljuk az Olvasónak a már vizsgált jelekre e tulajdonságok ellenőrzését. A valós spektrumok paritási tulajdonságai a komplex spektrummal is kifejezhetők. Ha x valós értékű, akkor

$$X(e^{-j\vartheta}) = X^*(e^{j\vartheta}), \quad X(-j\omega) = X^*(j\omega), \quad (3.2-26)$$

ahol a csillag a konjugált komplexet jelöli.

A (2) szerinti integrálok átírhatók a változó pozitív értékeire vonatkozó integrálókká. Szokásos a Fourier-transzformációt és inverzét koszinusz és szinusz függvényekkel kifejezni.

Eltolás az időtartományban

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor az *eltolási tétel* értelmében

$$\mathcal{F}\{x[k-r]\} = e^{-jr\vartheta} X(e^{j\vartheta}), \quad r \in \mathbf{Z}; \quad \mathcal{F}\{x(t-\tau)\} = e^{-j\tau\omega} X(j\omega), \quad \tau \in \mathbf{R}. \quad (3.2-27)$$

Az időbeli eltolás megfelel a frekvenciatartományban komplex exponenciális függvényvel végzett szorzásnak. Az A_x amplitúdó-spektrumot az időbeli eltolás nem befolyásolja.

Az igazolás a (2) alapján egyszerűen elvégezhető.

Moduláció az időtartományban

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor a *modulációs tétel* értelmében

$$\mathcal{F}\{x[k]e^{j\vartheta_0 k}\} = X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}), \quad \mathcal{F}\{x(t)e^{j\omega_0 t}\} = X(j(\omega-\omega_0)). \quad (3.2-28)$$

A ϑ_0 illetve az ω_0 körfrekvenciájú szinuszos vivőjel modulációja az x jellel az x jel spektrumának eltolását jelenti ϑ_0 illetve ω_0 körfrekvenciával.

Az igazolás a (2) alapján egyszerűen elvégezhető.

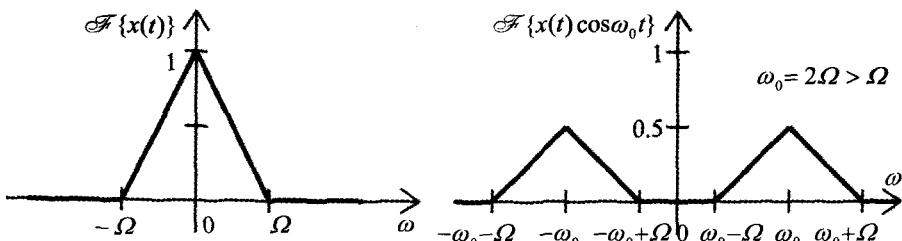
A (28)-ból egyszerűen következnek a modulációs tételek alábbi alakjai:

$$\mathcal{F}\{x[k] \cos \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2} [X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}) + X(e^{j(\vartheta+\vartheta_0)})], \quad (3.2-29a)$$

$$\mathcal{F}\{x[k] \sin \vartheta_0 k\} = \frac{1}{2j} [X(e^{j(\vartheta-\vartheta_0)}) - X(e^{j(\vartheta+\vartheta_0)})];$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \cos \omega_0 t\} = \frac{1}{2} [X(j(\omega-\omega_0)) + X(j(\omega+\omega_0))], \quad (3.2-29b)$$

$$\mathcal{F}\{x(t) \sin \omega_0 t\} = \frac{1}{2j} [X(j(\omega-\omega_0)) - X(j(\omega+\omega_0))].$$



3.2-3. ábra Sávkorlátozott folytonos idejű jel spektruma és azon szinuszos jel spektruma, amelyet a sávkorlátozott jel modulál

Az utolsó előtti összefüggést szemlélteti a 3. ábra egy olyan FI jelre, amelynek spektruma $|\omega| > \Omega$ esetén nulla (vagy elhanyagolhatóan kicsi, ún. sávkorlátozott jel). Az ábra az $\omega_0 > \Omega$ esetre vonatkozik.

Az ábra érzékelteti az amplitúdó-moduláció lényegét: a kisfrekvenciás x jel átvihető a nagyfrekvenciás vivőjel felhasználásával. Különböző vivőfrekvenciák felhasználásával sok kisfrekvenciás jel közös csatormán átvihető egymás zavarása nélkül.

Ha a $v(t) = x(t) \cos \omega_0 t$ modulált jellel ismét moduláljuk a $2 \cos \omega_0 t$ vivőjelet, akkor az $y(t) = x(t) 2 \cos^2 \omega_0 t = x(t) [1 + \cos 2 \omega_0 t]$ jel adódik. Egy olyan aluláteresztő szűrő felhasználásával, amely átérteszti az $|\omega| < \Omega$ körfrekvenciájú jeleket, de nem ereszti át az $|\omega| > 2\omega_0 - \Omega$ körfrekvenciájú jeleket, vissza tudjuk állítani az eredeti x jelet (demoduláció). Ha $x(t)$ nem sávkorlátozott, vagy ha $\omega_0 > \Omega$ nem teljesül, vagy ha a szűrés nem tökéletes, akkor a moduláció és a demoduláció során „idegen” frekvenciák is fellépnek és ezért a jel visszaállítása nem lesz tökéletes.

1. példa Határozzuk meg a következő diszkrét idejű jel spektrumát:

$$x[k] = \varepsilon[k] a^k \cos \vartheta_0 k; \quad -1 < a < 1.$$

A (7) értelmében $\mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = 1/(1 - a e^{-j\vartheta})$. A modulációs tétel értelmében

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1 - a e^{-j(\vartheta - \vartheta_0)}} + \frac{1}{1 - a e^{-j(\vartheta + \vartheta_0)}} \right] = \frac{1 - a \cos \vartheta_0 e^{-j\vartheta}}{1 - 2a \cos \vartheta_0 e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}.$$

Ha $a = \pm 1$, akkor a jel nem abszolút összegezhető, ezért ha ezt helyettesítjük a fenti kifejezésbe, akkor nem kapjuk meg a belépő szinuszos jel spektrumát. #

Az $x[k] = 1$ illetve az $x(t) = 1$ jel spektrumát (13) vagy (15) adja. A (28) modulációs tétel alkalmazásával kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{e^{j\vartheta_0 k}\} &= 2\pi \delta(\vartheta - \vartheta_0), \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad -\pi < \vartheta_0 < \pi; \\ \mathcal{F}\{e^{j\omega_0 t}\} &= 2\pi \delta(\omega - \omega_0). \end{aligned} \quad (3.2-30)$$

A $\cos \vartheta_0 k$, $\sin \vartheta_0 k$ illetve a $\cos \omega_0 t$, $\sin \omega_0 t$ jelek spektruma ebből az Euler-reláció felhasználásával meghatározható. Az összefüggések előállítását az Olvasóra bizzuk. Az eredmények azt a nyilvánvaló tényt fejezik ki, hogy a ϑ_0 illetve az ω_0 körfrekvenciájú szinuszos jel spektruma mindenütt nulla, kivéve a $\pm \vartheta_0$ (és a $\vartheta_0 \pm n2\pi$) illetve a $\pm \omega_0$ körfrekvenciákat. A Fourier-sor felhasználásával előállíthatjuk bármely periodikus jel spektrumát is összeg alakjában.

Hasonló módon kapjuk a (14) vagy a (17) és a (28) felhasználásával, hogy

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] e^{j\vartheta_0 k}\} &= \pi \delta(\vartheta - \vartheta_0) + \frac{1}{1 - e^{-j(\vartheta - \vartheta_0)}}, \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad -\pi < \vartheta_0 < \pi; \\ \mathcal{F}\{\varepsilon(t) e^{j\omega_0 t}\} &= \pi \delta(\omega - \omega_0) + \frac{1}{j(\omega - \omega_0)}. \end{aligned} \quad (3.2-31)$$

Az $\varepsilon[k] \cos \vartheta_0 k$, $\varepsilon[k] \sin \vartheta_0 k$ illetve az $\varepsilon(t) \cos \omega_0 t$, $\varepsilon(t) \sin \omega_0 t$ belépő jelek spektruma ebből az Euler-reláció felhasználásával egyszerűen előállítható.

A belépő szinuszos jelek spektruma a $\pm \vartheta_0$ (és a $\vartheta_0 \pm n2\pi$) illetve a $\pm \omega_0$ körfrekvencián végtelenné válik, és véges értékű a többi körfrekvencián. Ha figyelmen kívül hagyjuk a spektrum Dirac-impulzus összetevőjét, akkor az inverz transzformáció nem az eredeti jelet adja, hanem a (30) felhasználásával számítható más jelet. A spektrum jellegét tekintve viszont a spektrum Dirac-impulzus típusú összetevője nem jelent lényeges információt, hiszen a másik tag is végtelenné válik ott, ahol a Dirac-impulzus nem nulla.

Szorzás hatványfüggvénnyel

Ha $x[k]$ illetve $x(t)$ véges hosszúságú, korlátos jel és $\mathcal{F}\{x[k]\}=X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$, akkor

$$\mathcal{F}\{k x[k]\}=j \frac{dX(e^{j\vartheta})}{d\vartheta}, \quad \mathcal{F}\{t x(t)\}=j \frac{dX(j\omega)}{d\omega}. \quad (3.2-32)$$

A tétel ismételten alkalmazható. Ennek alapján megállapítható, hogy a jel szorzása az időtartományban a k^n illetve a t^n ($n \in \mathbf{N}$) tényezővel megfelel a frekvenciatartományban n -szeri differenciálásnak és j^n tényezővel végzett szorzásnak. A tétel alkalmazható nem véges hosszúságú jelekre is, ha nem csak $x[k]$, hanem $k^n x[k]$ is abszolút összegezzhető illetve ha nem csak $x(t)$, hanem $t^n x(t)$ is abszolút integrálható. Ez a helyzet például, ha $x[k]=\varepsilon[k]a^k$, $|a|<1$, vagy ha $x(t)=e^{-\alpha|t|}$, $\alpha>0$.

A tétel formálisan könnyen igazolható a spektrum (4) kifejezése alapján.

2. példa A (32) felhasználásával kapjuk, hogy

$$\mathcal{F}\{(\varepsilon[k]-\varepsilon[k-L])k\}=j \frac{d}{d\vartheta} \frac{1-e^{-jL\vartheta}}{1-e^{-j\vartheta}} = \frac{e^{-j\vartheta} - L e^{-jL\vartheta} + (L-1)e^{-j(L+1)\vartheta}}{(1-e^{-j\vartheta})^2}.$$

Az $L \rightarrow \infty$ határátmenet nem értelmezett, ami megfelel annak, hogy az $\varepsilon[k]k$ jelet nem tekintjük Fourier-transzformálhatónak. #

Folytonos idejű jelek deriváltja és integrálja

Ha $\mathcal{F}\{x(t)\}=X(j\omega)$, akkor a folytonos idejű jel általánosított deriváltjának spektruma

$$\mathcal{F}\{x'(t)\}=j\omega X(j\omega). \quad (3.2-33)$$

A tétel ismételten is alkalmazható. Ennek alapján az mondható, hogy a jel n -szeres differenciálása megfelel a $(j\omega)^n$ tényezővel végzett szorzásnak. A tétel nem meglepő, hiszen az inverz Fourier-transzformáció a jelet $e^{j\omega t}$ alakú jelek szuperpozíciójaként állítja elő. Feltételeztük, hogy ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor ez deriváltjaira is igaz. Ez csak kellően sima függvényekre teljesül.

A tétel a (2) mindkét oldalának t szerinti differenciálásával formálisan könnyen igazolható.

Példaként tekintsük az egységugrást és deriváltját (a Dirac-impulzust): valamint ezek már ismert spektrumát:

$$x(t) = \varepsilon(t), \quad X(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}; \quad x'(t) = \delta(t), \quad \mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1;$$

$$\mathcal{F}\{x'(t)\} = j\omega \left\{ \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega} \right\} = 1,$$

mivel $\delta(\omega) = 0$, ha $\omega \neq 0$, míg az $\omega = 0$ helyen a $j\omega$ tényező nulla.

Ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, továbbá ha $x(t)$ integrálja és $X(j0)$ létezik, akkor

$$\mathcal{F} \left\{ \int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} X(j\omega) + \pi X(j0) \delta(\omega). \quad (3.2-34)$$

Ha $x(t)$ abszolút integrálható, akkor (4)-ből következik, hogy

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt.$$

Az időtartománybeli integrálás nem egyszerűen osztásnak felel meg a frekvenciatartományban, hanem még egy additív tag is megjelenik. Ez azért nincs ellentmondásban a (33)-mal, mivel $j\omega \delta(\omega) = 0$.

A (34) igazolása körülményes. Ez nem is meglepő, mert az integrálás gyakran elrontja az eredeti jel abszolút integrálhatóságát.

A (34) ellenőrizhető például $x(t) = \delta(t)$ esetére, amelynek integrálja $\varepsilon(t)$. Ha azonban $x(t) = 1$, $X(j\omega) = 2\pi \delta(\omega)$, akkor (34) nem alkalmazható. E tételt nem fogjuk alkalmazni.

A skálázás megváltoztatása

Ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\theta})$ és $M \in \mathbf{N}$, illetve ha $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$, akkor

$$f[k] = \begin{cases} x\left(\frac{k}{M}\right), & \frac{k}{M} \in \mathbf{Z}, \\ 0, & \text{egyébként;} \end{cases} \quad \mathcal{F}\{f[k]\} = X(e^{jM\theta}) \quad (3.2-35a)$$

$$g[k] = x[Mk], \quad \mathcal{F}\{g[k]\} = \frac{1}{M} \sum_{l=0}^{M-1} X(e^{j(\theta - l2\pi/M)})$$

$$g(t) = x(at), \quad \mathcal{F}\{g(t)\} = \frac{1}{|a|} X\left(j\frac{\omega}{a}\right). \quad (3.2-35b)$$

Az $f[k]$ jel „szélesebb”, a $g[k]$ jel „keskenyebb” mint az $x[k]$ jel. A $g(t)$ jel $|a| < 1$ esetén „szélesebb”, $|a| > 1$ esetén „keskenyebb” mint az $x(t)$ jel. Ezt legegyszerűbben egy véges hosszúságú jellel szemléltethetjük. A szélesebb jelhez keskenyebb spektrum tartozik és viszont. Az $f[k]$ jel spektruma nem csak 2π , hanem $2\pi/M$ szerint is periodikus.

Az $x[k] \rightarrow f[k]$ jelátalakítást szokás *interpolálásnak* is nevezni (az f két, egymást követő, az x -ből származó értéke közé $M-1$ számú 0 értéket iktatunk), az $x[k] \rightarrow g[k]$ jelátalakítást pedig *decimálásnak* (a g csak az x minden M -edik értékét veszi figyelembe, „megtizedeli” az x jelet).

A tétel igazolása a (2) felhasználásával igen egyszerű.

Parseval tétele

Egy valós vagy komplex értékű DI illetve FI jel *energiája* az (1.1-38) definíció szerint

$$E_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2, \quad E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt. \quad (3.2-36)$$

Ha a jel energiája véges (a DI jel négyzetesen összegezhető, illetve a FI jel négyzetesen integrálható) továbbá ha $\mathcal{F}\{x[k]\} = X(e^{j\vartheta})$ illetve $\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega)$ létezik, akkor *Parseval tétele* értelmében

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta, \quad E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \quad (3.2-37)$$

Az $|X(e^{j\vartheta})|^2$ az $x[k]$ DI jel, illetve az $|X(j\omega)|^2$ az $x(t)$ FI jel *energiaspektruma*, hiszen a (37) úgy értelmezhető, hogy a jel energiája el van osztva a frekvenciák mentén, az $|X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta = A_x^2(\vartheta) d\vartheta$ illetve az $|X(j\omega)|^2 d\omega = A_x^2(\omega) d\omega$ arányos a $(\vartheta, \vartheta + d\vartheta)$ illetve az $(\omega, \omega + d\omega)$ frekvenciasávban tárolt energiával. Spektruma páros, az energia a fél intervallumra vett integrál kétszerese.

Parseval tételének általánosabb alakja két, komplex értékű jelre

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] y^*[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) Y^*(e^{j\vartheta}) d\vartheta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) Y^*(j\omega) d\omega. \quad (3.2-38)$$

Feltételeztük, hogy az összeg és az integrálok véges értékűek.

Igazoljuk a (38) összefüggést a folytonos idejű esetre:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}^* dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} Y^*(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \right\} d\omega,$$

ami éppen a (38)-at adja. A DI eset igazolása hasonlóan végezhető el.

Konvolúció

Mint már láttuk, a h és u DI, illetve FI jel konvolúciója definíció szerint

$$h[k] * u[k] \equiv \sum_{i=-\infty}^{\infty} h[k-i] u[i], \quad h(t) * u(t) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) u(\tau) d\tau. \quad (3.2-39)$$

Ha $\mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\vartheta})$, $\mathcal{F}\{u[k]\} = U(e^{j\vartheta})$ illetve ha $\mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega)$, $\mathcal{F}\{u(t)\} = U(j\omega)$ egyaránt létezik, akkor *konvolúciójuk spektruma* a spektrumuk szorzata:

$$\mathcal{F}\{h[k] * u[k]\} = H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}), \quad \mathcal{F}\{h(t) * u(t)\} = H(j\omega) U(j\omega). \quad (3.2-40)$$

Ez a tétel nagyon fontos elvi szempontból, alkalmazása már a választott jelölésekből is sejtethető. Számítástechnikai célokra ritkán használjuk.

A tétel formális igazolása a FI esetben:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)U(j\omega)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \right\} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) h(t-\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Feltételeztük, hogy az integrálások sorrendje felcserélhető, ami biztosan jogos, ha $h(t)$ és $u(t)$ abszolút integrálható. Hasonló a DI eset igazolása is.

Az időtartománybeli szorzásnak frekvenciatartománybeli konvolúció felel meg:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{f[k]g[k]\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(e^{j\lambda})G(e^{j(\vartheta-\lambda)})d\lambda \equiv F(e^{j\vartheta}) * G(e^{j\vartheta}), \\ \mathcal{F}\{g(t)g(t)\} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\lambda)GV(j(\omega-\lambda))d\lambda \equiv F(j\omega) * G(j\omega).\end{aligned}\tag{3.2-41}$$

Ezt a tételt ritkán használjuk. Formális igazolása az előzőhöz hasonló. A frekvenciatartománybeli konvolúciót szokás úgy is értelmezni, hogy $F * G$ előtt egy 2π osztó szerepel.

Folytonos idejű jelek szimmetria tulajdonsága

Legyen $\mathcal{F}\{u(t)\}=U(j\omega)$ és $\mathcal{F}\{v(t)\}=V(j\omega)$. Ha $u(t)$ úgy tekinthető, mint a $V(j\omega)$, ha abban ω helyére a t változót írjuk, akkor $u(t)$ spektruma a $v(t)$ ismeretében a következő módon állítható elő:

$$\text{ha } u(t)=V(j\omega)\Big|_{\omega=t}, \text{ akkor } U(j\omega)=2\pi v(t)\Big|_{t=-\omega}.\tag{3.2-42}$$

A tétel a transzformáció és inverzének szimmetriájából következik. A részletszámításokat az Olvasóra bizzuk. A tétel felhasználásával ismert $u(t), U(j\omega)$ párból esetleg újabb párokat állíthatunk elő. A tétel akkor használható, ha a jelek párosak, ezért spektrumuk valós értékű.

Láttuk például, hogy ha $v(t)=\delta(t)$, akkor $V(j\omega)=1$. A (42) értelmében ezért $\mathcal{F}\{1\}=2\pi\delta(-\omega)\equiv 2\pi\delta(\omega)$, amint azt ugyancsak tudjuk.

A tétel egy alkalmazásaként igazoljuk, hogy a Gauss-jel (amely páros) spektruma maga is Gauss függvény:

$$\mathcal{F}\left\{e^{-(\alpha t)^2}\right\} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{-(\omega/2\alpha)^2}.\tag{3.2-43}$$

Legyen ugyanis $u(t)=e^{-(\alpha t)^2}$, akkor $V(j\omega)=e^{-(\alpha\omega)^2}$. Ha a (43) helyes, akkor a $V(j\omega)$ inverz transzformáltja $2\alpha \rightarrow \alpha^{-1}$ helyettesítéssel

$$v(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-(t/2\alpha)^2}, \quad U(j\omega) = 2\pi \frac{1}{2\sqrt{\pi}\alpha} e^{-(\omega/2\alpha)^2},$$

vagyis a feltételezett (43) kiadódik.

Pozitív frekvenciák tartománya

Mint már említettük, valós x esetén a spektrumnak a negatív frekvencián felvett értéke a pozitív frekvencián felvett értékének konjugáltja. Ezért például DI jel esetén

$$\begin{aligned} x[k] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_{-\pi}^0 X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta + \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^{\pi} X(e^{-j\lambda}) e^{-j\lambda k} d\lambda + \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}. \end{aligned}$$

Az első integrál a második konjugáltja, összegük a valós rész kétszerese. Hasonló módon adódik a FI jelre vonatkozó összefüggés. Végeredményben *valós értékű* jel esetén

$$x[k] = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \left\{ \int_0^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}; \quad x(t) = \frac{1}{\pi} \mathcal{R}_e \left\{ \int_0^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}. \quad (3.2-44)$$

Ez az összefüggés számítástechnikai egyszerűsítést jelenthet. Fogalmi előnye, hogy nem tartalmazza a fizikailag értelmetlen negatív frekvenciákat.

3.2-1.4. Speciális jelek spektruma

Vannak olyan speciális jelek, amelyek spektruma ugyancsak speciális tulajdonságú. Ezek közül néhányat ebben a pontban, két további a következő pontban tárgyalunk.

Páros és páratlan jelek

Ha x egy valós értékű *páros jel*, akkor spektruma *valós értékű*, ha x egy valós értékű *páratlan jel*, akkor spektruma *képzetes értékű*. Formálisan megfogalmazva:

$$x \text{ páros} \Leftrightarrow X = X^*, \quad x \text{ páratlan} \Leftrightarrow X = -X^*. \quad (3.2-45)$$

A csillag a konjugáltat jelöli. A (2) értelmében ugyanis például DI jelre

$$x[-k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) e^{-j\vartheta k} d\vartheta = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X^*(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta \right\}^*.$$

Az utolsó "csillag" elhagyható, mivel x valós értékű. Hasonló az igazolás FI jelekre.

Ajánljuk az Olvasónak az összefüggések ellenőrzését korábban tárgyalt páros és páratlan jelekre. Például a Dirac-impulzus páros jelnek tekinthető, spektruma, mint láttuk, $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ amely valóban valós értékű.

Belépő jelek

Egy v *belépő jel* nulla értékű a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpont előtt:

$$v[k] = 0, \quad t \in \mathbf{Z}; \quad v(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_-. \quad (3.2-46)$$

Mint már láttuk, a valódi folyamatot többnyire belépő jellel célszerű leírni, ezért érdekes a spektrumára vonatkozó alábbi, főként elvi szempontból lényeges tétel.

Egy valós értékű v belépő jel spektrumának valós részét jelölje P_v , képzetes részét jelölje Q_v , vagyis

$$\mathcal{F}\{v\} = P_v + jQ_v \quad (3.2-47)$$

Ezek kölcsönösen meghatározzák egymást, más szóval *Hilbert-transzformációs párt* alkotnak (szokás az összefüggésekre *Bode-tételként* is hivatkozni):

$$Q_v(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{P_v(\lambda)}{\operatorname{tg}([\lambda - \vartheta]/2)} d\lambda, \quad P_v(\vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\vartheta) d\vartheta - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{Q_v(\lambda)}{\operatorname{tg}([\lambda - \vartheta]/2)} d\lambda; \quad (3.2-48)$$

$$Q_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P_v(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda - \omega} d\lambda.$$

Az integrálokat Cauchy-főértékként kell értelmezni (lásd a példát), tényleges számításuk rendszerint csak közelítőleg lehetséges.

Ha felhasználjuk, hogy P_v páros és Q_v páratlan függvény, akkor az integrálok átírhatók a pozitív féltengelyre vonatkozó integrálokká. Ez különösen FI jelek esetén lehet hasznos, ezért az erre vonatkozó összefüggések megadására szorítkozunk:

$$Q_v(\omega) = \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P_v(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) - \frac{2\omega}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q_v(\lambda)}{\lambda^2 - \omega^2} d\lambda. \quad (3.2-49)$$

Ha még feltételezzük, hogy a P illetve a Q függvény differenciálható, akkor az összefüggés átalakítható:

$$Q_v(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P'_v(\lambda) \ln \left| \frac{\lambda - \omega}{\lambda + \omega} \right| d\lambda, \quad P_v(\omega) = P_v(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q'_v(\lambda) \ln |\lambda^2 - \omega^2| d\lambda. \quad (3.2-50)$$

Ez az alak akkor lehet hasznos, ha $P_v(\omega)$, illetve $Q_v(\omega)$ jól közelíthető intervallumonként lineáris függvénnyel, tehát deriváltja intervallumonként állandó értékkel.

A tételek további alakjai is ismertek.

Mivel a belépő jel spektrumának akár a valós, akár a képzetes része meghatározza a másikat, ezért bármelyik meghatározza a belépő jelet. Igazolhatók a következő összefüggések a $v[k]$ illetve $v(t)$ belépő jellel:

$$\begin{aligned} v[k] &= v[0] \delta[k] + \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} P_v(\vartheta) \cos \vartheta k d\vartheta, \\ v[0] &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_v(\vartheta) d\vartheta; \quad (3.2-51a) \\ v[k] &= v[0] \delta[k] - \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} Q_v(\vartheta) \sin \vartheta k d\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= P_v(\infty) \delta(t) + \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} P_v(\omega) \cos \omega t d\omega, \\ v(t) &= P_v(\infty) \delta(t) - \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} Q_v(\omega) \sin \omega t d\omega. \end{aligned} \quad (3.2-51b)$$

A spektrum valós része teljesen, képzetes része egy additív állandó erejéig határozza meg a belépő jelet.

Példa Legyen $P_v(\omega) = 1, |\omega| < \Omega$ és $P_v(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$.

Határozzunk meg egy $Q_v(\omega)$ függvényt úgy, hogy $V(j\omega) = P_v(\omega) + jQ_v(\omega)$ egy folytonos idejű, belépő jel spektruma legyen.

A (48) értelmében $0 < \omega < \Omega$ esetén

$$\begin{aligned} Q_v(\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\omega - \varepsilon} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} + \frac{1}{\pi} \int_{\omega + \varepsilon}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} \right\} = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\pi} \ln \frac{-\varepsilon}{-\Omega - \omega} + \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\varepsilon} \right\} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}. \end{aligned}$$

Ha $\omega > \Omega$, akkor

$$Q_v(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{d\lambda}{\lambda - \omega} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{-\Omega - \omega} = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\omega - \Omega}{\Omega + \omega}.$$

Ezek szerint a $v(t) = \mathcal{F}^{-1}\{V(j\omega)\}$ jel akkor belépő, ha

$$V(j\omega) = 1 + \frac{j}{\pi} \ln \frac{\Omega - \omega}{\Omega + \omega}, \quad 0 \leq \omega < \Omega; \quad V(j\omega) = \frac{j}{\pi} \ln \frac{\omega - \Omega}{\Omega + \omega}, \quad \Omega < \omega < \infty.$$

Nem könnyű belátni, hogy e spektrumhoz a

$$v(t) = \varepsilon(t) \frac{\Omega \sin \Omega t}{\pi \Omega t}$$

belépő jel tartozik. Ez nullához tart, de nem abszolút integrálható. #

3.2-1.5. Sávkorlátozott folytonos idejű jelek

Egy folytonos idejű és véges energiájú jel spektruma - Parseval tételéből következően - nullához tart a frekvencia növekedésével. Ilyen jelekre ezért mindig választható egy olyan frekvencia, amely fölött az amplitúdó-spektruma elhanyagolhatóan kicsi.

Egy $x(t)$ sávkorlátozott folytonos idejű jel $X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ spektruma azonosan nulla egy Ω sávkorlát fölött:

$$X(j\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega. \quad (3.2-52)$$

Többnyire Ω a legkisebb lehetséges értékét jelenti. Szokásos a sávkorlátot az Ω körfrekvencia helyett az $f_B = \Omega / 2\pi$ frekvenciával vagy az $f_N = 2f_B = \Omega / \pi$ Nyquist-frekvenciával jellemezni. Az Ω vagy az f_B helyett a B ("bandwidth") jel is használatos.

Megmutatjuk, hogy a véges energiájú sávkorlátozott jel egyértelműen meghatározott $x(pT)$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintái által, ahol T olyan időköz, amelyre $T \leq \pi / \Omega$ vagyis $T \leq T_N \equiv 1 / f_N$ teljesül.

A sávkorlátozott jel spektruma a $-\Omega < \omega < \Omega$ intervallumban leírható a Fourier-sorával. Az ω -beli periódus hossza 2Ω az ennek megfelelő ω -beli "alap körfrekvencia" $2\pi / 2\Omega = \pi / \Omega$. A Fourier-sor és a Fourier-együtthatók kifejezése (3.1-2.4. pont)

$$X(j\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega\pi/\Omega}, \quad -\Omega < \omega < \Omega; \quad X_p^C = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{-jp\omega\pi/\Omega} d\omega, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Fejazzük ki az időfüggvényt inverz Fourier-transzformációval:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} \left\{ \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C e^{jp\omega\pi/\Omega} \right\} e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{j\omega(t+p\pi/\Omega)} d\omega.$$

A tagonkénti integrálás a jel véges energiátartalma miatt jogos. Az integrál nehézség nélkül számítható. A jel kifejezése

$$x(t) = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \frac{e^{j\Omega(t+p\pi/\Omega)} - e^{-j\Omega(t+p\pi/\Omega)}}{j(t+p\pi/\Omega)} = \frac{1}{T} \sum_{p=-\infty}^{\infty} X_p^C \frac{\sin \pi(t/T + p)}{\pi(t/T + p)}, \quad T \equiv \frac{\pi}{\Omega}.$$

Hasonlítsuk össze X_p^C és az $x(t)$ inverz Fourier-transzformált alakját:

$$X_p^C = \frac{T}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{-jp\omega T} d\omega, \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

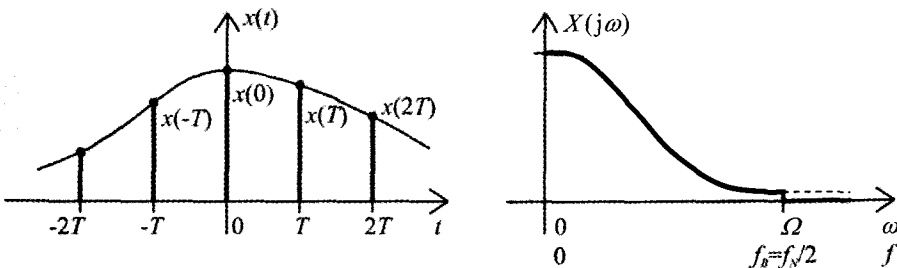
Látható, hogy $X_p^C = T x(-pT)$. Helyettesítsük ezt az $x(t)$ előállított kifejezésébe, akkor megkapjuk az előzetesen már elmondott tétel konkrét alakját.

A folytonos idejű, véges energiájú, Ω sávkorlátú sávkorlátozott $x(t)$ jel rekonstruálható $x(pT)$ mintái ismeretében (T a mintavételi periódusidő):

$$x(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(pT) \frac{\sin \pi \left(\frac{t}{T} - p \right)}{\pi \left(\frac{t}{T} - p \right)}, \quad T \equiv \frac{\pi}{\Omega}. \quad (3.2-53)$$

Ez a sávkorlátozott jelekre vonatkozó *mintavételi tétel* vagy *Nyquist-tétel*.

A jelet, mintáit és a spektrumot szemlélteti a 4. ábra. A sávkorlátozott jel folytonos, nem lehet időkorlátozott.



3.2-4. ábra Sávkorlátozott jel időfüggvénye, mintái és amplitúdó-spektruma

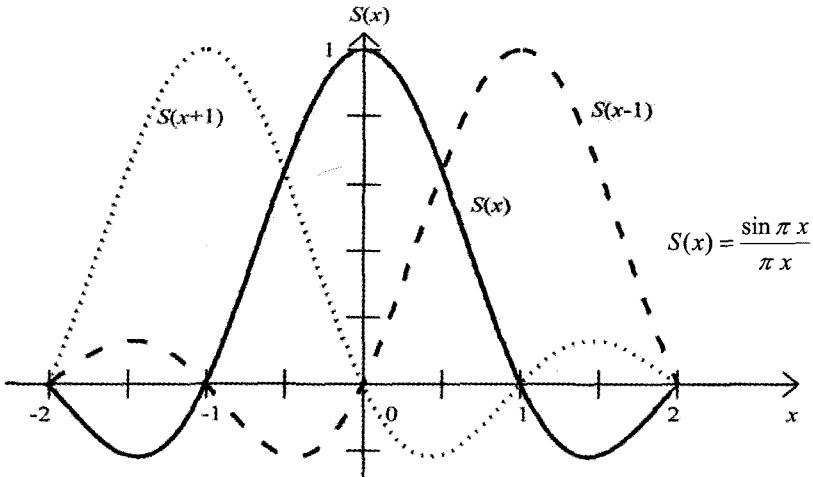
A gyakorlatban csak véges számú mintát vehetünk figyelembe, továbbá egy valódi jel ritkán sávkorlátozott a definíció szigorú értelmében. A mintavételi tétel következő megfogalmazása ezért gyakran hasznosabb az eredetinél.

Egy $x(t)$ jel $x(pT)$; $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintái ismeretében előállíthatjuk a jel egy $\Omega = \pi/T$ sávkorlátú $x_\Omega(t)$ sávkorlátozott közelítését:

$$x_\Omega(t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} x(pT) S\left(\frac{t}{T} - p\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}. \quad (3.2-54)$$

A közelítés a mintavételi időpontokban hibátlan, azaz $x_\Omega(pT) = x(pT)$, $p \in \mathbf{Z}$. Az $S(\xi)$ függvényre a sinc(ξ) jel is használatos.

Az (54) közelítő alkalmazása során az összegezés határait szimmetrikusan kell választani, azaz $p_{\min} = -N$, $p_{\max} = +N$. Az N választását a pontossági igény határozza meg. A közelítés természetesen annál jobb, minél kisebb T mintavételi periódusidőt választunk, hiszen annál nagyobb a közelítő jel Ω sávkorlátja.



3.2-5. ábra A mintavételi tételben szereplő $S(x)$ függvény és két eltolt változata

Ha a sávkorlátozott $x(t)$ jelnek nem csak az $x(pT)$ mintái ismertek, hanem $x'(t)$ deriváltjának $x'(pT)$ mintái is, akkor a jel rekonstruálható $T_1 = 2\pi / \Omega = 2T$ mintavételi periódusidővel is. Az $x(t)$ kifejezése ekkor is az (53)-ra hasonlít, de annál bonyolultabb.

A mintavételi tételnek gyakorlati jelentőségét az adja, hogy a tétel értelmében egy FI jel feldolgozható egy DI jelként (rendszerint digitális jelként). A "felülmintavételezés" azt jelenti, hogy a feltétlenül szükségesnél kisebb mintavételi periódusidőt, vagyis nagyobb mintavételi frekvenciát választunk, tehát pontosabb sávkorlátozott közelítést tudunk előállítani.

Példa Legyen a jel egy négyszögimpulzus (2. ábra). A (10) értelmében

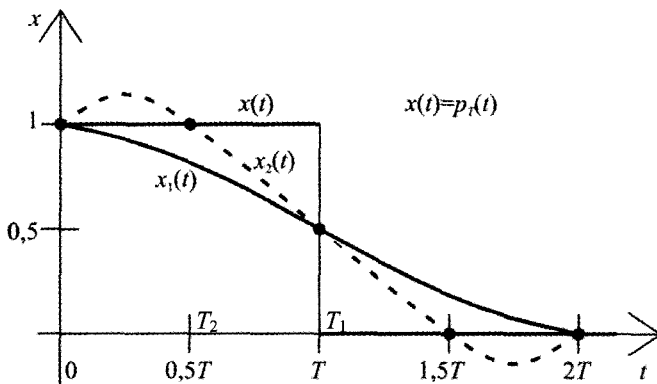
$$x(t) = p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T); \quad X(j\omega) = 2T S\left(\frac{\omega T}{\pi}\right) \equiv 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}.$$

Ez a jel nem sávkorlátozott, de mivel $|X(j\omega)| \rightarrow 0$, $|\omega| \rightarrow \infty$ teljesül rá, ezért közelítőleg sávkorlátozottnak tekinthetjük.

Első közelítésben tekintsük sávkorlátnak a spektrum első nullahelyét, azaz legyen $\Omega_1 = \pi/T$. A mintavételi periódusidő ekkor $T_1 = T$, vagyis az impulzus hosszának fele.

A jel mintái $x(0) = 1, x(\pm T_1) = 0,5$ (a számtani közép a szakadási helyen) és minden más $x(pT_1) = 0$. A sávkorlátozott közelítés ekkor

$$x_1(t) = S\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{1}{2} S\left(2\frac{t}{T} - 1\right) + \frac{1}{2} S\left(2\frac{t}{T} + 1\right).$$



3.2-6. ábra A négyszögimpulzus fele és két sávkorlátozott közelítése

Második közelítésként legyen $\Omega_2 = 2\pi/T, T_2 = T/2$. A minták ekkor $x(0) = x(\pm T_2) = 1, x(\pm 2T_2) = 0,5$, minden további $x(pT_2) = 0$. A sávkorlátozott közelítés ekkor

$$x_2(t) = S\left(2\frac{t}{T}\right) + S\left(2\frac{t}{T} - 1\right) + S\left(2\frac{t}{T} + 1\right) + \frac{1}{2} S\left(4\frac{t}{T} - 2\right) + \frac{1}{2} S\left(4\frac{t}{T} + 2\right).$$

A 6. ábra mutatja a jelet és két fenti sávkorlátozott közelítését. A mintavételi időpontokban a közelítés hibamentes. Nagyobb sávkorlátot (kisebb mintavételi periódusidőt) választva a közelítés hibája csökkenthető. Hibamentes közelítés nem biztosítható ilyen módon, mert a jel nem sávkorlátozott. #

Egy folytonos idejű jel sávkorlátozott közelítése értelmezhető az (54)-től eltérő módon is, hiszen nem magától értetődő, hogy az a közelítés optimális, amely bizonyos időpontokban megegyezik a pontos értékkel.

Egy folytonos idejű, valós értékű $x(t)$ jel *négyszetes közép értelemben optimális sávkorlátozott közelítésének* nevezzük azt az $\hat{x}_\Omega(t)$ sávkorlátozott jelet, amelyre a

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{x}_\Omega(t) - x(t)]^2 dt \quad (3.2-55)$$

hibamérték minimális. Igazolni fogjuk, hogy ennek spektruma az $x(t)$ jel spektrumának a csonkítottja:

$$\hat{X}_\Omega(j\omega) = p_\Omega(\omega) X(j\omega). \quad (3.2-56)$$

Itt a (10) értelmében a frekvenciatománybeli négyszögimpulzus és időfüggvénye

$$p_\Omega(\omega) = \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega); \quad \mathcal{F}^{-1}\{p_\Omega(\omega)\} = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}. \quad (3.2-57)$$

A választott hibamérték ugyanis Parseval tétele értelemben kifejezhető a jelek spektrumával:

$$\begin{aligned} 2\pi J &= \int_{-\infty}^{\infty} |X_{\Omega}(j\omega) - X(j\omega)|^2 d\omega = \\ &= \int_{-\infty}^{-\Omega} |X(j\omega)|^2 d\omega + \int_{-\Omega}^{\Omega} |X_{\Omega}(j\omega) - X(j\omega)|^2 d\omega + \int_{\Omega}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega. \end{aligned}$$

Csak a középső integrál függ $X_{\Omega}(j\omega)$ megválasztásától. Mivel ennek integrandusza nem-negatív, ezért nyilván akkor minimális, ha nullának választható, ami a megadott spektrum csonkítását jelenti.

Az ilyen értelemben sávkorlátozott közelítés időfüggvénye a Fourier-transzformáció konvolúció tétele értelmében

$$\hat{x}_{\Omega}(t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} * x(t) \equiv \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} x(t - \tau) d\tau. \quad (3.2-58)$$

Nyilvánvaló, hogy általában nincs olyan T időköz, amelynek egész számú sokszorosainál a közelítő jel megegyezik az eredetivel.

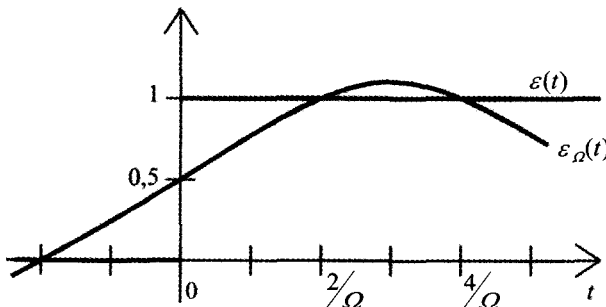
Az egységugrás négyzetes közép értelemben optimális sávkorlátozott közelítése

$$\hat{\varepsilon}_{\Omega}(t) = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} \varepsilon(t - \tau) d\tau = \frac{\Omega}{\pi} \int_{-\infty}^t \frac{\sin \Omega \tau}{\Omega \tau} d\tau \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\Omega t} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda.$$

Az úgynevezett integrálszínusz (jele: Si) függvény bevezetésével:

$$\hat{\varepsilon}_{\Omega}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}(\Omega t); \quad \text{Si}(\xi) \equiv \int_0^{\xi} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda. \quad (3.2-59)$$

Az egységugrás és sávkorlátozott közelítésének grafikonja a 7. ábrán látható. Minél nagyobb sávkorlátot választunk, annál kisebb a négyzetes hiba. Az első maximum helye egyre közelebb kerül a $t = 0$ helyhez (ahol a közelítő függvény értéke $1/2$), de a maximum a sávkorlát növelésekor nem csökken egy korlát alá, amely kb. 1,09 értékű. Ez a *Gibbs-jelenség*. (Ennek megfelelőjét a periodikus jel véges tagszámú közelítő Fourier-soros előállításánál már említettük.) A belépő egységugrás csonkításos sávkorlátozott közelítése nem belépő jel. Általában is igaz, hogy egy belépő jel sávkorlátozott közelítése nem belépő jel. A 7. ábrából az is látható, hogy az egységugrás csonkításos sávkorlátozott



3.2-7. ábra Az egységugrás és csonkításos (négyzetes közép értelemben optimális) sávkorlátozott közelítése; megfigyelhető a Gibbs-jelenség

közelítése körülbelül a $2/\Omega$ idő egész többszöröseinél pontos.

A csonkításos sávkorlátozott közelítő jel és az eredeti jel értékei bizonyos időpontokban megegyezhetnek, de ezek az időpontok nem mutatnak szabályosságot. A csonkításból fakadó túllendülést is figyelembe véve nyilvánvaló, hogy a csonkításos sávkorlátozás sem minden szempontból optimális. Ezzel a problémával a duális feladat (időkorlátozott jelek) tárgyalása során még foglalkozunk a 3.2-1.7. pontban.

Megemlítjük, hogy ha a túllendülést valamilyen módon lecsökkentjük vagy kiküszöböljük, akkor az ugrás helyén a felfutás kevésbé lesz meredek. Ez ismét rámutat arra, hogy nem lehet egyértelműen optimális sávkorlátozott közelítést értelmezni.

*3.2-1.6. Időkorlátozott folytonos idejű jelek

Egy valódi jel mindig időkorlátozott, vagyis nulla egy adott időpont előtt és egy másik időpont után. Az egyszerűsítés érdekében azonban gyakran feltételezzük, hogy a jel örökké tart (például az egységugrás) vagy végtelenül régen kezdődött (például a szinuszos jel). Figyelembe véve a FI Fourier-transzformáció és inverze közötti hasonlóságot, az előző pont eredményei alapján a következő tétel nem igényel részletes magyarázatot.

Egy $x(t)$ időkorlátozott jel azonosan nulla $t = -T$ előtt és $t = +T$ után:

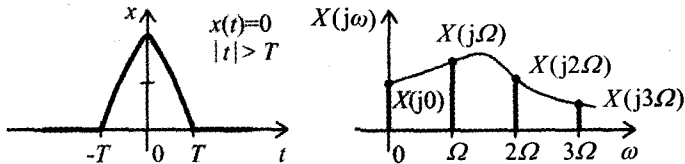
$$x(t) = 0, \quad |t| > T. \quad (3.2-60)$$

A $2T$ hosszúságú időkorlátozott, véges energiájú jel $X(j\omega)$ spektruma meghatározható $X(jn\Omega)$ mintái ismeretében a következő alakban:

$$X(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\Omega) S\left(\frac{\omega}{\Omega} - n\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \quad \Omega = \frac{\pi}{T}. \quad (3.2-61)$$

Többnyire T a legkisebb lehetséges értéket jelenti. Az időkorlátozott jelre a szimmetrikus határokat csak kényelmi okokból választottuk, az időtengely eltolásával ez mindig elérhető.

Ha a jel valós értékű és páros, akkor spektruma is valós értékű, tehát annak mintái is valós értékűek.



3.2-8. ábra Időkorlátozott jel, spektruma és a spektrum mintái

A jel, a spektruma és annak mintái a 8. ábrán láthatók. Egy időkorlátozott jel sohasem sávkorlátozott, de ha energiataralma véges, akkor spektruma a frekvencia növekedésével nullához tart, tehát értelmezhető rá közelítőleg egy sávkorlát. Az állításban az időkorlát és a sávkorlát szerepe meg is fordítható.

Az időkorlátozott jel spektrumára vonatkozó mintavételi tételt is átfogalmazhatjuk közelítő összefüggést kifejező alábbi alakra.

Ismerve egy tetszőleges jel $X(j\omega)$ spektrumának $X(jn\Omega)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ mintáit, képezhetjük az

$$X_T(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(jn\Omega) S\left(\frac{\omega}{\Omega} - n\right); \quad S(\xi) \equiv \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi}, \quad T = \frac{\pi}{\Omega} \quad (3.2-62)$$

spektrumot. Ennek inverz Fourier-transzformáltja egy $x_T(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X_T(j\omega)\}$ időkorlátozott jel. Az $X(j\omega)$ és az $X_T(j\omega)$ spektrum értékei az $\omega = n\Omega$, $n \in \mathbf{Z}$ körfrekvenciákon megegyeznek.

A spektrumot a mintái alapján a fentiek szerint egy olyan spektrummal helyettesítjük, amely egy időkorlátozott jelet állít elő. Ténylegesen természetesen csak véges számú tag összegét képezzük szimmetrikus határok között (tehát valamilyen $-N$ és $+N$ között).

Az időkorlátozott jel időkorlátai nem mindig a jel kezdetét és végét jelentik, hanem gyakran a jel *megfigyelésének* időtartamát, amely természetesen mindig véges.

A megfigyelt jelhez nem feltétlenül időkorlátozott (csonkított) jelet rendelünk. Egyes esetekben ugyanis a megfigyelt jelet egyik vagy mindkét irányban extrapolálhatjuk. Ha például a megfigyelés során a jel egy időpont után már gyakorlatilag állandó, akkor olyan jellel írhatjuk le, amely ezt az állandó értéket megőrzi. Gyakran azt tudjuk, hogy a jel belépő, ekkor értékei egy időpont előtt nullának tekintendők.

A következő pontban részletesebben foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy egy tetszőleges DI vagy FI jelhez miként célszerű egy előírt hosszúságú, vagyis időkorlátozott jelet rendelni. Mint látni fogjuk, nem feltétlenül az a kézenfekvő megoldás az optimális, amely szerint tekintjük a jelet a megfigyelési időközben az eredetivel egyezőnek, hanem célszerűbb lehet a jelet a megfigyelési időn belül súlyozni.

Egy másik lehetőség abban áll, hogy a jelet nem időkorlátozott jellel közelítjük, hanem olyan módon súlyozzuk, hogy eredményül balra és jobbra egyaránt eltűnő jel adódjék. Tipikus megoldás erre az, hogy eredeti jelet egy harang-alakú, a végtelenben mindkét irányban nullához tartó jellel szorozzuk, a szorzó jel alakját valamilyen szempont alapján megválasztjuk. Ez a jel az időkorlátozott jel egy közelítésének tekinthető, illetve megfordítva: az időkorlátozott jelet a végtelenben nullához tartó jellel közelítjük. Ezt a módszert nem részletezzük.

*3.2-1.7. Ablakozott jelek spektruma

Legyen $x[k]$ egy DI jel illetve $x(t)$ egy FI jel. Defináljunk egy új $x_L[k]$ illetve $x_T(t)$ jelet, amely nulla $|k| > L$ illetve $|t| > T$ esetén és "hasonló" az eredeti jelhez $|k| \leq L$ illetve $|t| < T$ esetén. Az ilyen jelet az eredeti jel *ablakozott jelének* nevezzük. Az elnevezés azt érzékelteti, hogy az x jelet egy $2L + 1$ vagy $2T$ szélességű "ablakon" keresztül látjuk. A nem látható részhez zérus értéket rendelünk. A legegyszerűbb ablak mindenütt egyformán átlátszó. A gyakorlatban használt ablakok többnyire középen maximálisan átlátszók, átláthatóságuk szimmetrikus. Az ablak lehet ettől eltérő tulajdonságú is.

Egy ablakozó jel vagy röviden egy *ablak* egy olyan időkorlátozott jel, amely a

$$\begin{aligned} \text{DI: } w_L[k] &= 0, \quad |k| > L; \quad w_L[k] \geq 0, \quad |k| \leq L; \quad w_L[-k] = w_L[k]; \quad w_L[0] = 1; \\ \text{FI: } w_T(t) &= 0, \quad |t| > T; \quad w_T(t) \geq 0, \quad |t| \leq T; \quad w_T(-t) = w_T(t); \quad w_T(0) = 1 \end{aligned} \quad (3.2-63)$$

tulajdonságokkal rendelkezik. Az ablak hossza $2L + 1$, illetve $2T$.

Egy nagyon egyszerű ablakozó jel a négyszögletes (derékszögű, állandó) ablak:

$$w_L[k] = p_L[k] \equiv \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1], \quad w_T(t) = p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T). \quad (3.2-64)$$

Az $x[k]$ illetve az $x(t)$ jelhez a $w_L[k]$ illetve $w_T(t)$ ablakozó jellel rendelt $x_L[k]$ illetve $x_T(t)$ *ablakozott jel* értelmezése

$$\text{DI: } x_L[k] = w_L[k]x[k]; \quad \text{FI: } x_T(t) = w_T(t)x(t). \quad (3.2-65)$$

Az ablakozott jel hossza $2L+1$, illetve $2T$. Az ablak értelmezéséből következik, hogy $x_L[k] = 0, |k| > L$ illetve $x_T(t) = 0, |t| > T$.

Az ablakozással okozott torzítás annál kisebb, minél szélesebb az ablak vagy másként fogalmazva: minél jobban hasonlít az ablak a végtelen szélességű négyzetleges ablakra:

$$\text{DI: } w_\infty[k] = 1, k \in \mathbf{Z}; \quad \text{FI: } w_\infty(t) = 1, t \in \mathbf{R}. \quad (3.2-66)$$

A frekvenciatartományban ez a következőképpen fogalmazható meg. Az ablakozással okozott torzítás annál kisebb, minél jobban hasonlít az ablak $W_L(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{w_L[k]\}$ illetve $W_T(j\omega) = \mathcal{F}\{w_T(t)\}$ spektruma a végtelen szélességű ablak W_∞ spektrumához, amely a (13) vagy a (14) értelmében

$$\begin{aligned} \text{DI: } W_\infty(e^{j\vartheta}) &= 2\pi \delta(\vartheta), |\vartheta| \leq \pi; \\ \text{FI: } W_\infty(j\omega) &= 2\pi \delta(\omega). \end{aligned} \quad (2.3-67)$$

Az ablakozott jel spektruma (41) értelmében kifejezhető az ablak spektrumának és a jel spektrumának frekvenciatartománybeli konvolúciójaként:

$$\begin{aligned} X_L(e^{j\vartheta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} W_L(e^{j(\vartheta-\lambda)}) X(e^{j\lambda}) d\lambda; \\ X_T(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_T(j(\omega-\lambda)) X(j\lambda) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.3-68)$$

Ha $W_L = W_\infty$ illetve ha $W_T = W_\infty$, akkor természetesen $X_L = X$ illetve $X_T = X$ adódik. Általános ablak esetén annak spektruma nem a Dirac-impulzus, hanem egy "elkenődött" Dirac-impulzus. A torzítás annál kisebb, minél élesebb maximummal bír az ablak spektruma. Ezen elv alapján választhatjuk ki az optimálisnak tekinthető ablakot vagy ablakokat, amint ezt néhány ablak bemutatásával érzékeltetni fogjuk.

A *négyzetleges ablak* és spektruma

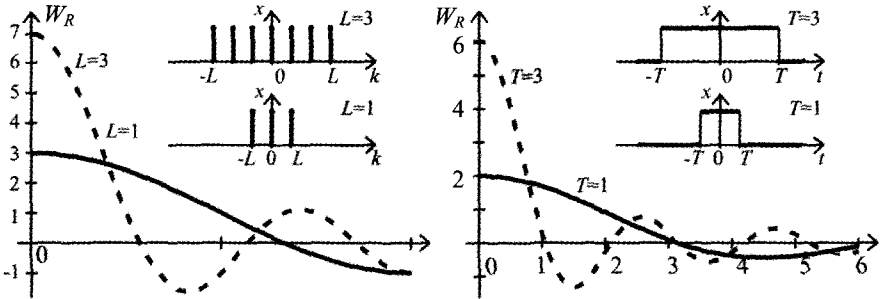
$$\begin{aligned} w_{L,R}[k] &= p_L[k] \equiv \varepsilon[k+L] - \varepsilon[k-L-1], \quad W_{L,R}(e^{j\vartheta}) = \frac{\sin([2L+1]\vartheta/2)}{\sin(\vartheta/2)}; \\ w_{T,R}(t) &= p_T(t) \equiv \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T), \quad W_{T,R}(j\omega) = 2T \frac{\sin \omega T}{\omega T}. \end{aligned} \quad (3.2-69)$$

A valós értékű spektrumok grafikonja a 9. ábrán látható. A spektrum maximuma a $\vartheta = 0$ illetve az $\omega = 0$ helyen lép fel.

Az ablak spektruma élességének egyik jellemzője az a ϑ_B illetve ω_B körfrekvencia, ahol az amplitúdó-karakterisztika aránya maximális értékéhez $(1/\sqrt{2}) \approx 0,7$. Minél kisebb ϑ_B illetve ω_B , annál jobban hasonlít az ablak spektruma a Dirac-impulzusra, tehát annál jobbnak tekinthető az ablak. Látható, hogy minél nagyobb L

vagy T , annál kisebb \mathcal{G}_B illetve ω_B , amint annak lennie kell. A spektrum jóságát a szélessége mellett szokás második maximumának és első (legnagyobb) maximumának arányával is jellemezni. Minél kisebb ez, annál jobb az ablak. Látható, hogy minél nagyobb L vagy T , annál kisebb ez az arány, ami szintén megfelel várakozásainknak.

Nyilván további jellemzőket is lehetne találni az ablak amplitúdó-karakterisztikájának és a Dirac-impulzus "hasonlóságának" jellemzésére. Nem lehet egyértelműen optimális ablakot választani, mert az ablak alakjának változtatásával rendszerint az egyik jellemzőt javítjuk, a másikat pedig elrontjuk.



3.2-9. ábra A négyszögletes ablak és amplitúdó-karakterisztikája két ablak szélesség esetére

A háromszögletes vagy *Bartlett*-ablak és spektruma

$$w_{L,B}[k] = p_L[k] \left\{ 1 - \frac{|k|}{L} \right\}, \quad W_{L,B}(e^{j\vartheta}) = \left(\frac{\sin[(2L+1]\vartheta/4]}{\sin(\vartheta/2)} \right)^2; \quad (3.2-70)$$

$$w_{T,B}(t) = p_T(t) \left\{ 1 - \frac{|t|}{T} \right\}, \quad W_{T,B}(j\omega) = T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

A folytonos idejű Bartlett-ablak és spektruma a 10. ábrán látható.

A *Hamming*-ablak és spektruma

$$w_{L,H}[k] = p_L[k] \left\{ 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi k}{L} \right\},$$

$$W_{L,H}(e^{j\vartheta}) = 0,54 W_{L,R}(e^{j\vartheta}) + 0,23 W_{L,R}(e^{j(\vartheta-\pi/L)}) + 0,23 W_{L,R}(e^{j(\vartheta+\pi/L)}); \quad (3.2-71)$$

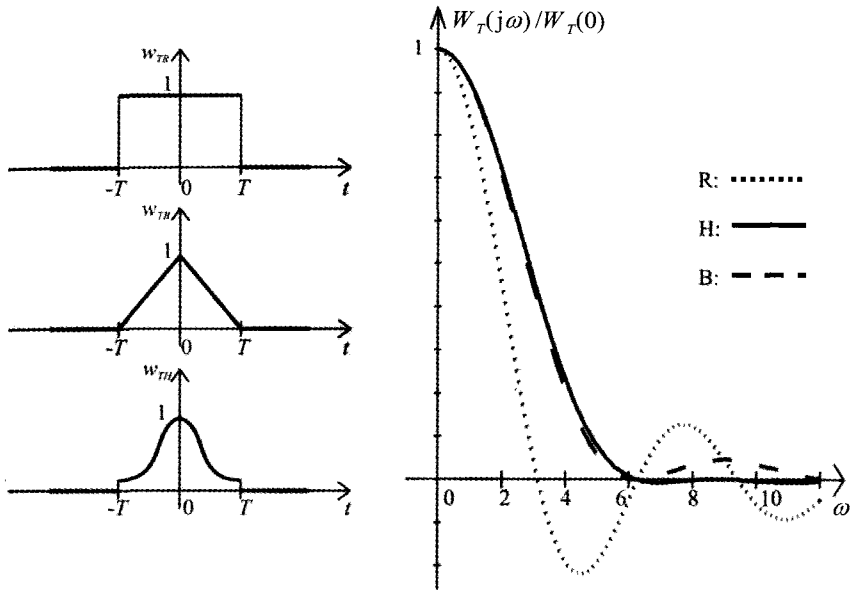
$$w_{T,H}(t) = p_T(t) \left\{ 0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi t}{T} \right\},$$

$$W_{T,H}(j\omega) = 0,54 W_{T,R}(j\omega) + 0,23 W_{T,R}(j(\omega T - \pi)) + 0,23 W_{T,R}(j(\omega T + \pi)).$$

Itt $W_{L,R}$ illetve $W_{T,R}$ a (69) szerinti négyszögletes ablak spektrumát jelöli.

A folytonos idejű Hamming-ablak és spektruma is látható a 10. ábrán. A 0,54 és 0,46 helyett néha más pozitív számok is használatosak, összegük mindig 1 értékű.

A 10. ábrából látható, hogy a négyszögletes ablaknál kisebb, a spektrum első hullámának szélessége, viszont a második maximum relatív maximuma nagyobb, mint a Bartlett-ablaknál. A Hamming-ablak szélessége hasonló a Bartlett-ablakéhoz, a relatív maximuma még kisebb.



3.2-10. ábra A folytonos idejű négyszögletes, Bartlett- és Hamming-ablak, valamint ezek spektruma

Számos további ablakozó jel is használatos, ezek között kicsi az eltérés. A lényeges az, hogy a spektrum alapján összehasonlítván az ablakokat az derül ki, hogy nem feltétlenül a jel véges hosszúságúra történő csonkítása a legelőnyösebb ablakozás. Ha ugyanis a folytonos idejű ablak nem folytonos függvénye az időnek (mint a négyszögletes ablak), akkor az ablakozás az eredetileg többnyire folytonos jelet ugrásos jellé alakítja át, míg a Bartlett-ablak megtartja a jel folytonosságát. A Hamming-ablak ugyan nem folytonos, de kisebb az ugrása. A Hamming-ablaknak más változatai is használatosak. A 0,54 és a 0,46 helyett más olyan pozitív számok szerepelnek, amelyek összege 1 és az első nagyobb a másodiknál, de a megadottakat tekintik optimálisnak.

3.2-1.F. Feladatok

F-1. Határozza meg a következő véges hosszúságú DI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját):

- $x[k] = 2\delta[k] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.
- $x[k] = 2\delta[k-1] - \delta[k-2] + 0,5\delta[k-3]$.
- $x[k] = 0,5\delta[k+2] - \delta[k+1] + 2\delta[k] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.
- $x[k] = -0,5\delta[k+2] + \delta[k+1] - \delta[k-1] + 0,5\delta[k-2]$.

F-2. Határozza meg a következő véges, $L \in \mathbf{N}$ hosszúságú DI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját):

- $x[k] = \varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]$.
- $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} e^{j\theta k}$.
- $x[k] = \{\varepsilon[k] - \varepsilon[k-L]\} \cos \theta k$.

F-3. Határozza meg az $x[k] = \varepsilon[k] 0,9^k \cos \Theta k$ DI jel spektrumát! Vázolja fel az amplitúdó-spektrumot $\Theta = \pi/4$, $\Theta = \pi/2$ és $\Theta = \pi$ esetére!

F-4. Határozza meg a DI jelet, ha spektruma

$$(a) X(e^{j\vartheta}) = 2 \cos \vartheta + j2 \sin 2\vartheta.$$

$$(b) X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-j\vartheta}}{4 - e^{-j\vartheta}}.$$

$$(c) X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - 0,25 e^{-j2\vartheta}}{1 + 0,5 e^{-j\vartheta}}.$$

***F-5.** Határozza meg az alábbi, nem abszolút összegezhető DI jel spektrumát:

$$x[k] = A \cos \Theta k + B \sin \Theta k, \quad 0 \leq |\Theta| < \pi.$$

***F-6.** Igazolja, hogy ha $X(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{x[k]\}$ és $|x[k]|$ összegezhető, akkor

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = X(e^{j\vartheta}) \Big|_{\vartheta=0}.$$

E tételt alkalmazva határozza meg a következő összegeket $-1 < a < 1$ esetén:

$$(a) S = \sum_{k=0}^{\infty} a^k. \quad (b) S = \sum_{k=0}^{\infty} k a^k. \quad (c) S = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 a^k.$$

***F-7.** (a) Legyen $x[k]$ olyan DI jel, amelynek értéke nulla a $[0, L]$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a (35) szerinti $M \in \mathbf{N}$ pontos interpolációval előállított $f[k]$ jel, illetve az $M \in \mathbf{N}$ pontos decimálással előállított $g[k]$ jel?

(b) Legyen $x[k]$ olyan DI jel, amelynek spektruma nulla a $0 < \Theta < |\vartheta| < \pi$ intervallumban és természetesen periodikus 2π periódussal. Milyen tulajdonságú az $M \in \mathbf{N}$ pontos interpolációval előállított $f[k]$ jel spektruma, illetve az $M \in \mathbf{N}$ pontos decimálással előállított $g[k]$ jel spektruma?

(c) Legyen $x(t)$ olyan FI jel, amelynek értéke nulla a $(0, T)$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a $g(t) = x(at)$ jel?

(d) Legyen $x(t)$ olyan FI jel, amelynek spektruma nulla a $(-\Omega, \Omega)$ intervallumon kívül. Milyen tulajdonságú a $g(t) = x(at)$ jel spektruma?

F-8. Határozza meg a következő véges $T > 0$ hosszúságú, FI jelek spektrumát (Fourier-transzformáltját)! Vázolja fel a jelet és az amplitúdó-karakterisztikát is!

$$(a) x(t) = \varepsilon(t - T_0) - \varepsilon(t - T_0 - T).$$

$$(b) x(t) = \varepsilon(t + T) - 2\varepsilon(t) + \varepsilon(t - T).$$

$$(c) x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} \frac{t}{T}.$$

$$(d) x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t - T)\} \{1 - e^{-\alpha t}\}, \quad \alpha > 0$$

$$(e) x(t) = \{\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)\} \frac{T+t}{T} + \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \frac{T-t}{T}.$$

$$(f) x(t) = \{\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t+T_0)\} \frac{T+t}{T-T_0} + \{\varepsilon(t+T_0) - \varepsilon(t-T_0)\} + \\ + \{\varepsilon(t-T_0) - \varepsilon(t-T)\} \frac{T-t}{T-T_0}, \quad T > T_0 > 0.$$

Ellenőrizze az utolsó eredményt, ha $T_0 \rightarrow T$ és ha $T_0 \rightarrow 0$. Ekkor korábban már vizsgált jelek adódnak.

F-9. Határozza meg a következő FI jelek spektrumát!

$$(a) x(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} e^{\alpha t} \equiv \varepsilon(-t) e^{\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (b) x(t) = \varepsilon(t) \alpha t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

$$(c) x(t) = \{1 - \varepsilon(t)\} e^{\alpha t} + \varepsilon(t), \quad \alpha > 0.$$

$$*(d) x(t) = \frac{2}{\pi \Omega t^2} \sin^2 \frac{\Omega t}{2}.$$

$$*(e) x(t) = \frac{1}{\pi T} \frac{1}{1 + (t/T)^2}.$$

(Útmutatás. A két utolsó feladatnál használja fel a Fourier-transzformáció szimmetriatulajdonságát!)

F-10. Határozza meg a következő FI jel spektrumát:

$$x(t) = \{\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)\} \cos \Omega t, \quad \Omega = 2\pi / T_0.$$

Vázolja fel az amplitúdó-spektrumot $n = 1, 2, 3$ és 4 esetére, ha $T = nT_0/4$.

***F-11.** Határozza meg a következő, nem abszolút integrálható jelek spektrumát:

$$(a) x(t) = \cos^2 \Omega t. \quad (b) x(t) = |\cos \Omega t|.$$

(Útmutatás. Állítsa elő a jel Fourier-sorát!)

F-12. Határozza meg a Dirac-impulzusok véges tagszámú sorából álló FI jel spektrumát:

$$x(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \delta(t - kT) \equiv \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots + \delta(t - (N-1)T).$$

***F-13.** Igazolja a következő tételt: $\mathcal{F} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \right\} = \frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{T}\right)$.

(Útmutatás. Alkalmazza a Fourier-transzformáció szimmetria-tulajdonságát!)

F-14. A $g(t)$ egy Ω sávkorlátú FI jel. Képezzünk ezzel egy $x(t) = g(t) \cos \omega_0 t$ modulált jelet; $0 < \Omega \leq \omega_0$.

Milyen T mellett rekonstruálható a $g(t)$ jel az $x(iT)$, $i \in \mathbf{Z}$ mintákból? Szükséges-e az $\omega_0 \geq \Omega$ kikötés?

***F-15.** Igazolja a $\mathcal{F} \{1/t^2\} = -\pi |\omega|$ összefüggést! Ennek felhasználásával igazolja az $|\omega| X(j\omega) = \mathcal{F} \{[1/\pi t] * x'(t)\}$ összefüggést!

F-16. Egy véges hosszúságú DI jel kifejezése $x[k] = 2\delta[k] + 3\delta[k-2] - 5\delta[k-3]$.

Határozza meg az $X(e^{j\vartheta})$ függvény kiszámítása nélkül a spektrum értékét a $\vartheta = 0$ és a $\vartheta = \pi$ helyen, továbbá $X(e^{j\vartheta})$ és $|X(e^{j\vartheta})|^2$ integrálját a $(-\pi, \pi)$ intervallumra!

***F-17.** Egy $x = a + jb$ DI vagy FI jel spektruma $X = P + jQ$. Az a, b, P, Q valós értékű függvények felbonthatók páros és páratlan összetevőjükre, például $a = a^{(e)} + a^{(o)}$.

Igazolja, hogy akár diszkrét idejű, akár folytonos idejű jelekre

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{a^{(e)}\} &= P^{(e)}, & \mathcal{F}\{a^{(o)}\} &= jQ^{(o)}, \\ \mathcal{F}\{b^{(e)}\} &= Q^{(e)}, & \mathcal{F}\{b^{(o)}\} &= -jP^{(o)}. \end{aligned}$$

Valós értékű jelekre ebből az következik, hogy páros függvény spektruma valós értékű, páratlan függvény spektruma képzetes értékű, amint azt tudjuk.

F-18. Egy FI jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{2\pi}{\Omega} \{\varepsilon(\omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\}, \quad \Omega > 0.$$

Milyen típusú ez a jel? Határozza meg a jel időfüggvényét!

F-19. Egy FI, valós értékű $x(t)$ jel $X(j\omega)$ spektruma sávkorlátozott Ω sávkorlattal. Képezzünk ebből egy olyan $y(t)$ jelet, amelynek spektruma $Y(j\omega) = X(j(\omega - \Omega))$.

Milyen típusú az $y(t)$ jel? Határozza meg az időfüggvényét!

3.2-1.M. Megoldások

M-1. Az eltolási tétel és $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$ felhasználásával

$$(a) X(e^{j\vartheta}) = 2 - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = (2 - \cos \vartheta + 0,5 \cos 2\vartheta) + j(\sin \vartheta - 0,5 \sin 2\vartheta).$$

$$(b) X(e^{j\vartheta}) = 2 e^{-j\vartheta} - e^{-j2\vartheta} + 0,5 e^{-j3\vartheta}. \text{ Az (a) -ből is adódik.}$$

$$(c) X(e^{j\vartheta}) = 0,5 e^{j2\vartheta} - e^{j\vartheta} + 2 - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = 2 - \cos \vartheta + \cos 2\vartheta. \text{ Páros } x, \text{ valós } X.$$

$$(d) X(e^{j\vartheta}) = -0,5 e^{j2\vartheta} + e^{j\vartheta} - e^{-j\vartheta} + 0,5 e^{-j2\vartheta} = j 2 \sin \vartheta - j \sin 2\vartheta. \text{ Páratlan } x, \text{ képzetes } X.$$

M-2. (a) A mértani sor összegképlete alapján $X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-jL\vartheta}}{1 - e^{-j\vartheta}}$.

$$(b) \text{ Hasonlóan vagy a modulációs tétellel } X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - e^{-jL(\vartheta - \vartheta)}}{1 - e^{-j(\vartheta - \vartheta)}}.$$

(c) Az Euler-formulát és az előző eredményt felhasználva

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - \cos \vartheta e^{-j\vartheta} - \cos L \vartheta e^{-jL\vartheta} + \cos(L+1)\vartheta e^{-j(L+1)\vartheta}}{1 - 2 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}}.$$

Ez egyszerűsödik, ha ϑ a $\pi/2$ egész többszöröse.

M-3. Alkalmazható a modulációs tétel.

$$X(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - 0,9 e^{-j(\vartheta - \alpha)}} + \frac{1}{1 - 0,9 e^{-j(\vartheta + \alpha)}} \right) = \frac{1 - 1,8 \cos \Theta e^{-j\vartheta}}{1 - 1,8 \cos \Theta e^{-j\vartheta} + 0,81 e^{-j2\vartheta}}$$

Az $|X(e^{j\vartheta})|$ függvénynek maximuma van $\vartheta = \alpha$ környezetében. Ez nagyobb és élesebb $\alpha = \pi/4$ és $\alpha = 3\pi/4$ esetén, kisebb és laposabb $\alpha = \pi/2$ esetén. A minimum a $\vartheta = 0$ és $\vartheta = \pi$ helyen lép fel.

M-4. (a) $x[k] = \delta[k+2] + \delta[k+1] + \delta[k-1] - \delta[k-2]$.

$$(b) x[k] = \frac{1}{4} \varepsilon[k] \left(\frac{1}{4} \right)^k - \frac{1}{4} \varepsilon[k-1] \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1} = \frac{1}{4} \delta[k] - \frac{3}{16} \varepsilon[k-1] \left(\frac{1}{4} \right)^{k-1}$$

$$(c) x[k] = \delta[k] - 0,5 \delta[k-1]$$

***M-5.** A spektrum csak $\vartheta = \pm(\Theta + n2\pi)$ körfrekvenciájú összetevőket tartalmazhat:

$$X(e^{j\vartheta}) = \pi [A - jB] \delta(\vartheta - \Theta) + \pi [A + jB] \delta(\vartheta + \Theta), \quad \pi < \vartheta < \pi.$$

***M-6.** A tétel a (4) következménye $\vartheta = 0$ helyettesítéssel.

$$(a) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{1}{1 - a e^{-j\vartheta}}, \quad S = \frac{1}{1 - a}.$$

$$(b) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k a^k\} = j \frac{d}{d\vartheta} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] a^k\} = \frac{a e^{-j\vartheta}}{(1 - a e^{-j\vartheta})^2}, \quad S = \frac{a}{(1 - a)^2}.$$

$$(c) \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k^2 a^k\} = j \frac{d}{d\vartheta} \mathcal{F}\{\varepsilon[k] k a^k\} = \frac{a e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}{(1 - a e^{-j\vartheta})^3}, \quad S = \frac{a(1 + a)}{(1 - a)^3}.$$

***M-7.** (a) Az interpolált $f[k]$ nulla a $[0, ML]$ intervallumon kívül. A decimált $g[k]$ nulla a $[0, L/M]$ intervallumon kívül, ahol L/M csak egész szám lehet.

(b) Az interpolált jel $F(e^{j\vartheta}) = X(e^{jM\vartheta})$ spektruma nulla a $(-\Theta/M, \Theta/M)$ intervallumon kívül. A decimált jel $G(e^{j\vartheta})$ spektrumának nincs egyszerű jellegzetessége.

(c) A $g(t) = x(at)$ jel nulla $a > 0$ esetén a $(0, T/a)$ intervallumon kívül, míg $a < 0$ esetén nulla a $(T/a, 0)$ intervallumon kívül.

(d) A $\mathcal{F}\{x(at)\}$ spektrum nulla a $(-\Omega/|a|, \Omega/|a|)$ intervallumon kívül.

$$\mathbf{M-8.} \quad (a) X(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_0} - e^{-j\omega(T_0+T)}}{j\omega} \equiv T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega(T_0+T/2)}.$$

$$(b) X(j\omega) = j\omega T^2 \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

$$(c) X(j\omega) = T \frac{1 - (1 + j\omega T) e^{-j\omega T}}{(j\omega T)^2}.$$

$$(d) X(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega} - \frac{1 - e^{-\alpha T} e^{-j\omega T}}{\alpha + j\omega}.$$

$$(e) X(j\omega) = T \left(\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} \right)^2.$$

$$(f) X(j\omega) = (T + T_0) \frac{\sin \frac{\omega(T+T_0)}{2}}{\frac{\omega T + T_0}{2}} \frac{\sin \frac{\omega(T-T_0)}{2}}{\frac{\omega T - T_0}{2}}.$$

Ha $T_0 \rightarrow T$, akkor a négyszög-impulzus, ha $T_0 \rightarrow 0$, akkor a háromszög-impulzus ismert spektruma adódik.

M-9. (a) $X(j\omega) = \frac{1}{\alpha - j\omega}.$

(b) $X(j\omega) = \frac{\alpha}{(\alpha + j\omega)^2}.$

(c) $X(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{\alpha - j\omega} + \frac{1}{j\omega}.$

(d) $X(j\omega) = [\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega)] \frac{\omega + \Omega}{\Omega} + [\varepsilon(\omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)] \frac{\Omega - \omega}{\Omega}.$

(e) $X(j\omega) = e^{-T|\omega|}.$

M-10. Például az integrál számításával

$$X(j\omega) = T \left\{ \frac{\sin(\omega + \Omega)T}{(\omega + \Omega)T} + \frac{\sin(\omega - \Omega)T}{(\omega - \Omega)T} \right\}.$$

Az n és a T növelésével a maximum az $|\omega| \approx \Omega$ körfrekvencia környezetében egyre nagyobb értékű lesz.

***M-11.** (a) $X(j\omega) = \frac{\pi}{2} [\delta(\omega + 2\Omega) + 2\delta(\omega) + \delta(\omega - 2\Omega)].$

(b) $x(t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\Omega t}{(2k)^2 - 1},$

$$X(j\omega) = 4\delta(\omega) + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\delta(\omega - 2k\Omega) + \delta(\omega + 2k\Omega)}{(2k)^2 - 1}.$$

M-12. $X(j\omega) = \frac{1 - e^{-jN\omega T}}{1 - e^{-j\omega T}} = \frac{\sin(N\omega T/2)}{\sin(\omega T/2)} e^{-j(N-1)\omega T/2}.$

***M-13.** $x(t) = G(j\omega)|_{\omega=t}$, ahol $G(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - kT)$. A tétel alkalmazásával kifejezhető $g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{G(j\omega)\}$, majd $X(j\omega) = 2\pi g(t)|_{t=-\omega}$ felhasználásával adódik a megadott összefüggés.

M-14. Az $x(t)$ jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{1}{2} \{G(j(\omega + \omega_0)) + G(j(\omega - \omega_0))\}.$$

Ebből következik, hogy $x(t)$ sávkorlátozott $\Omega + \omega_0$ sávkorláttal, tehát $T \leq \pi / (\Omega + \omega_0)$ a feltétel. Ez független ω_0 és Ω arányától. Ha azonban $\omega_0 < \Omega$, akkor az $X(j\omega)$ spektrumából nehezebb a $G(j\omega)$ spektrumot szűréssel előállítani, mert $\omega = 0$ környezetében a két eltolts spektrum átlapolódik.

***M-15.** Mivel $\mathcal{F}\{\operatorname{sgn} t\} = 2/j\omega$, ezért $\mathcal{F}\{2jt\} = -2\pi \operatorname{sgn} \omega$, az idő szerinti deriváltat képezve $\mathcal{F}\{2jt^2\} = -2\pi j\omega \operatorname{sgn} \omega = -2\pi j|\omega|$. Ebből adódik $\mathcal{F}^{-1}\{|\omega|\} = -1/\pi t^2$. A $(-j\operatorname{sgn} \omega)j\omega = |\omega|$ azonosság felhasználásával kapjuk a második összefüggést.

M-16. Könnyen belátható, hogy

$$X(e^{j0}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] = 0; \quad X(e^{j\pi}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k x[k] = 10;$$

továbbá

$$\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\vartheta}) d\vartheta = 2\pi x[0] = 8\pi; \quad \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = 76\pi.$$

***M-17.** Az értelmezés szerint $X = A^{(e)} + A^{(o)} + jB^{(e)} + jB^{(o)}$, továbbá például FI esetben $X^*(j\omega) = X(-j\omega)$ felhasználásával

$$P(j\omega) = \frac{X(j\omega) + X(-j\omega)}{2}, \quad P^{(e)}(j\omega) = \frac{P(j\omega) + P(-j\omega)}{2},$$

és így tovább. Figyelembe véve a függvények páros, illetve páratlan tulajdonságát például $P = A^{(e)} + jB^{(o)}$ adódik, majd ezekből a megadott összefüggések.

M-18. Az amplitúdó-spektrum nem páros, ezért a jel komplex értékű. Inverz Fourier-transzformációval

$$x(t) = \frac{e^{j\Omega t} - 1}{j\Omega t} = \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} + j \frac{1 - \cos \Omega t}{\Omega t}.$$

M-19. Mivel az Y amplitúdó-spektrum nem páros, ezért az y jel komplex értékű. A modulációs tétel értelmében

$$y(t) = x(t)e^{j\Omega t} = x(t)\cos \Omega t + jx(t)\sin \Omega t.$$

Az olyan komplex értékű FI jelet, amelynek spektruma nulla $\omega < 0$ esetén (l. a 18. és a 19. feladatot) szokás analitikus jelnek nevezni, a jel valós és képzetes része ekkor Hilbert-párt alkot.

3.2-2. A válasz spektrális előállítása

3.2-2.1. A válasz spektruma és időfüggvénye

Tételezzük fel, hogy ismerjük egy lineáris, invariáns, DI illetve FI rendszer $H(e^{j\vartheta})$ illetve $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikáját. Tételezzük fel továbbá, hogy ismerjük a DI illetve a FI gerjesztésnek az $U(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{u[k]\}$ illetve az $U(j\omega) = \mathcal{F}\{u(t)\}$ spektrumát, amellyel a gerjesztés

$$\text{DI: } u[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \quad (3.2-72)$$

$$\text{FI: } u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

alakban előállítható. Az $U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k}$ illetve az $U(j\omega) e^{j\omega t}$ gerjesztéshez tartozó válasz bármely frekvencián ismeretesen $H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k}$ illetve $H(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t}$. A szuperpozíció elvének értelmében a válasz a következő alakban fejezhető ki:

$$\text{DI: } y[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}) e^{j\vartheta k} d\vartheta; \quad (3.2-73)$$

$$\text{FI: } y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Ebből kiolvasható a válasz spektruma.

A $H(e^{j\vartheta})$ illetve a $H(j\omega)$ átviteli karakterisztikájú lineáris, invariáns DI illetve FI rendszer válaszának spektruma, vagyis $Y(e^{j\vartheta})$ illetve $Y(j\omega)$ kifejezhető gerjesztése spektrumának ismeretében:

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = H(e^{j\vartheta}) U(e^{j\vartheta}); \quad \text{FI: } Y(j\omega) = H(j\omega) U(j\omega). \quad (3.2-74)$$

Ismerve a válasz spektrumát meghatározhatjuk a válasz időfüggvényét is inverz Fourier-transzformációval:

$$\text{DI: } y[k] = \mathcal{F}^{-1}\{Y(e^{j\vartheta})\}; \quad \text{FI: } y(t) = \mathcal{F}^{-1}\{Y(j\omega)\}. \quad (3.2-75)$$

Gyakran csak a válasz spektrumára van szükségünk. Az időfüggvényt rendszerint numerikusan számítjuk egy FFT algoritmussal.

A gerjesztés E_u , illetve a válasz E_y energiáját Parseval tétele értelmében meghatározza az $|U|^2$, illetve az $|Y|^2$ energiaspektrum. Ezek kapcsolatát $|Y|^2 = K^2 |U|^2$ alakban megadja a rendszer $K^2(\vartheta) = |H(e^{j\vartheta})|^2$ illetve $K^2(\omega) = |H(j\omega)|^2$ energiaátviteli karakterisztikája, amely az amplitúdó-karakterisztika négyzete. A FI energiaátviteli karakterisztika többnyire az ω racionális függvénye.

A rendszeregyenletből vagy az állapotváltozós leírásból közvetlenül csak akkor számítható az átviteli karakterisztika, ha a rendszer GV stabilis. Általánosan azonban a GV stabilitás csak elegendő feltétele az átviteli karakterisztika létezésének, amire a következő pontban példát is fogunk látni.

3.2-2.2. Az átviteli karakterisztika és az impulzusválasz

Korábban már láttuk, hogy miként állítható elő a GV stabilis rendszer átviteli karakterisztikája a rendszeregyenlet vagy az állapotváltozós leírás ismeretében (3.1-1.4. és 5. pont). Most vizsgáljuk meg kapcsolatát az impulzusválasszal.

Legyen a vizsgált DI illetve FI rendszer gerjesztése $u[k] = \delta[k]$, $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$ illetve $u(t) = \delta(t)$, $\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$. Ekkor a rendszer válasza definíció szerint a $h[k]$ vagy a $h(t)$ impulzusválasz. Helyettesítsük ezt (74)-be, akkor

$$\text{DI: } \mathcal{F}\{h[k]\} = H(e^{j\theta}); \quad \text{FI: } \mathcal{F}\{h(t)\} = H(j\omega) \quad (3.2-76)$$

adódik. Szavakban: az impulzusválasz spektruma (ha létezik) az átviteli karakterisztika. Ez tekinthető az átviteli karakterisztika legáltalánosabb *definíciójának* is, mert ez nem feltételezi a rendszer GV stabilitását. Az összefüggést az átviteli karakterisztika számítására is használhatjuk, ha az impulzusválasz (például mérési eredményként) ismert.

Az átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformáltja az *impulzusválasz*:

$$\text{DI: } h[k] = \mathcal{F}^{-1}\{H(e^{j\theta})\}; \quad \text{FI: } h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(j\omega)\}. \quad (3.2-77)$$

Az impulzusválaszra illetve az átviteli karakterisztikára alkalmazott jelölések következtében ezek az összefüggések azonosságnak tűnnek.

Ha a rendszer impulzusválasza a következő, tipikus alakban adott (vagy abba átirható), akkor az átviteli karakterisztika kifejezése

$$\begin{aligned} h[k] &= \varepsilon[k] \sum_{i=1}^n A_i q_i^k, \quad |q_i| < 1 \Rightarrow H(e^{j\theta}) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{1 - q_i e^{-j\theta}}; \\ h(t) &= \varepsilon(t) \sum_{i=1}^n A_i e^{p_i t}, \quad \Re\{p_i\} < 0 \Rightarrow H(j\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{j\omega - p_i}. \end{aligned} \quad (3.2-78)$$

Mivel az impulzusválasz valós értékű, ezért a konjugált komplex q_i, q_{i+1} illetve p_i, p_{i+1} pároknak megfelelő A_i, A_{i+1} párok egymás konjugáltjai. Mivel $h[k]$ tartalmazhat $A_0 \delta[k]$ illetve $h(t)$ tartalmazhat $A_0 \delta(t)$ tagot, ezért az átviteli karakterisztika nevezője n -edfokú, a számlálója legfeljebb n -edfokú polinomja az $e^{-j\theta}$ illetve a $j\omega$ változónak, az együtthatók valósak:

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= \frac{b_0 + b_1 e^{-j\theta} + b_2 e^{-j2\theta} + \dots + b_n e^{-jn\theta}}{1 + a_1 e^{-j\theta} + a_2 e^{-j2\theta} + \dots + a_n e^{-jn\theta}}; \\ H(j\omega) &= \frac{b_0 (j\omega)^n + b_1 (j\omega)^{n-1} + b_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + b_{n-1} (j\omega) + b_n}{(j\omega)^n + a_1 (j\omega)^{n-1} + a_2 (j\omega)^{n-2} + \dots + a_{n-1} (j\omega) + a_n}. \end{aligned} \quad (3.2-79)$$

Az impulzusválasz tartalmazhat $\varepsilon[k] A_{i,r} k^r q_i^k$ illetve $\varepsilon(t) A_{i,r} t^r e^{p_i t}$ alakú tagokat is. Ezek az átviteli karakterisztika nevezőjében a Fourier-transzformáció értelmében $(1 - q_i e^{-j\theta})^r$ illetve $(j\omega - p_i)^r$ tagokat jelentenek a (78) alakban, míg a (79) alak nem változik.

Ha ismerjük az átviteli karakterisztikát a (78) szerinti alakban, akkor szinte „ránézésre” előállíthatjuk a rendszeregyenletet, majd abból az állapotváltozós leírás egy Frobenius-alakját is (3.1-4. és 5. pont).

1. példa Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát, ha a DI, illetve a FI rendszer impulzusválasza

$$h[k] = A \varepsilon[k] a^k; \quad h(t) = A \varepsilon(t) e^{-\alpha t}.$$

Ha $-1 < a < 1$ illetve ha $\alpha > 0$, akkor

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{A}{1 - a e^{-j\vartheta}}, \quad H(j\omega) = \frac{A}{\alpha + j\omega}.$$

A nevező semmilyen körfrekvencián sem válik nullává, az átviteli karakterisztika nem válik végtelenné. Ez a megállapítás minden GV stabilis rendszerre érvényes.

Ha $a = 1$ illetve ha $\alpha = 0$ és $A = 1$, azaz ha $h[k] = \varepsilon[k]$ illetve ha $h(t) = \varepsilon(t)$, akkor (14) vagy (19) értelmében az átviteli karakterisztika kifejezése

$$H(e^{j\vartheta}) = \pi \delta(\vartheta) + \frac{1}{1 - e^{-j\vartheta}}, \quad -\pi < \vartheta < \pi; \quad H(j\omega) = \pi \delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}.$$

Ez nem az előző eredmény határértéke $A = 1$ esetén!

Ha $|a| > 1$ illetve ha $\alpha < 0$, akkor az átviteli karakterisztika értelmezése bonyolultabb matematikai megfontolást igényel, amit nem tárgyalunk. Úgy tekintjük, hogy ekkor a rendszer átviteli karakterisztikája nem értelmezett. #

2. példa A lineáris fázisú DI illetve FI *ideális aluláteresztő* egy olyan rendszer, amelynek átviteli karakterisztikája

$$H(e^{j\vartheta}) = \{\varepsilon(\vartheta + \Theta) - \varepsilon(\vartheta - \Theta)\} e^{-jn\vartheta}, \quad -\pi < \vartheta < \pi, \quad 0 < \Theta < \pi, \quad n \in \mathbf{N};$$

$$H(j\omega) = \{\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\} e^{-j\tau\omega}, \quad -\infty < \Omega < \infty, \quad \tau \geq 0.$$

A gerjesztés „kisfrekvenciás” összetevői változtatás nélkül megjelennek a válaszban, míg a „nagyfrekvenciás” összetevők tökéletesen el vannak nyomva. Ez magyarázza az „aluláteresztő” elnevezést.

A lineáris fázisú ideális aluláteresztő impulzusválasza

$$h[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Theta}^{\Theta} e^{-jn\vartheta} e^{j\vartheta k} d\vartheta, \quad h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{-j\tau\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

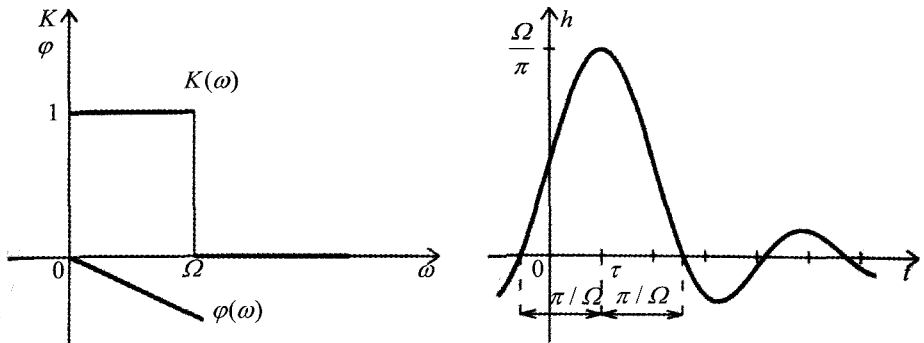
Az **integrálok** nehézség nélkül számíthatók:

$$h[k] = \frac{\Theta}{\pi} \frac{\sin \Theta(k-n)}{\Theta(k-n)}; \quad h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \frac{\sin \Omega(t-\tau)}{\Omega(t-\tau)}.$$

A grafikonok a 11. ábrán láthatók a FI esetre, ha $\tau > 0$. Hasonlók a DI esetre vonatkozó ábrák is.

Az ideális aluláteresztő még lineáris fázis esetén is eltorzítja a rá ható a $\delta[k]$ illetve $\delta(t)$ gerjesztést. Az impulzusválasz $h_{\max} = h[n] = \Theta/\pi$ illetve $h_{\max} = h(\tau) = \Omega/\pi$ maximális értéke annál nagyobb, minél szélesebb az áteresztősáv, azaz minél nagyobb Θ illetve az Ω körfrekvencia. Természetesen más jel is torzul a lineáris fázisú, ideális aluláteresztő hatására. A válasz inverz Fourier-transzformációval számítható, többnyire csak numerikus módszerrel.

A példában számított $h[k]$ illetve $h(t)$ úgy tekinthető, mint $\delta[k]$ illetve $\delta(t)$ „elkent” és n illetve τ idővel késleltetett változata.



3.2-11. ábra A lineáris fázisú ideális FI aluláteresztő amplitúdó-karakterisztikája, fázis-karakterisztikája illetve impulzusválasza

A rendszer ideális abban az értelemben, hogy amplitúdó-karakterisztikája ugrásszerűen változik, szakaszonként állandó, fázis-karakterisztikája lineáris. Ez pontosan nyilván nem valósítható meg. Mivel a rendszer impulzusválasza nem belépő, a rendszer nem kauzális. Ebből következően a vizsgált rendszer elvileg sem megvalósítható. Feltételezhetjük, hogy a $h_1[k] = \varepsilon[k]h[k]$ illetve a $h_1(t) = \varepsilon(t)h(t)$ belépő impulzusválasz az ideális aluláteresztő egy - valamilyen értelemben optimális - kauzális közelítése. Az aluláteresztő gyakorlati tervezése azonban rendszerint más megközelítéssel történik.

Az ideális aluláteresztő nem GV stabilis, a h és a h_1 egyike sem abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható. A FI esetben például

$$\int_0^{\infty} \frac{|\sin u|}{u} du = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin u|}{u} du \geq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{k\pi}^{k\pi+\pi} \frac{|\sin u|}{k\pi + \pi} du = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}.$$

Az utolsó sor ismeretesen nem konvergens, tehát az integrál nem véges. A DI eset valamivel több megfontolást igényel ezzel nem foglalkozunk.

A vizsgált rendszernek nincs a megszokott alakú rendszeregyenlete vagy állapotváltozós leírása, hiszen átviteli karakterisztikája nem racionális. #

*3.2-2.3. Kauzális rendszerek átviteli karakterisztikája

A valódi objektumok kauzálisak. A kauzális rendszerek átviteli karakterisztikájának speciális tulajdonságai vannak.

Ha a rendszer *kauzális*, azaz ha a h impulzusválasz nulla a $k = 0$ illetve a $t = 0$ időpont előtt, akkor H átviteli karakterisztika valós része is, képzetes része is elegendő az impulzusválasz meghatározására, vagyis a rendszer jellemzésére. Vezessük be a

$$H(e^{j\vartheta}) = P(\vartheta) + jQ(\vartheta), \quad H(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) \quad (3.2-80)$$

jelölést, ahol P és Q valós értékű. Az (59) értelmében a (77) helyett a következő is írható:

$$h[k] = 0, \quad k \in \mathbf{Z}_- \Rightarrow$$

$$h[k] = h[0] \delta[k] + \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} P(\vartheta) \cos \vartheta k \, d\vartheta, \quad (3.2-81a)$$

$$h[k] = h[0] \delta[k] - \frac{2}{\pi} \varepsilon[k-1] \int_0^{\pi} Q(\vartheta) \sin \vartheta k \, d\vartheta; \quad h[0] = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} P(\vartheta) \, d\vartheta.$$

$$h(t) = 0, \quad t \in \mathbf{R}_- \Rightarrow$$

$$h(t) = A \delta(t) + \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t \, d\omega, \quad (3.2-81b)$$

$$h(t) = A \delta(t) - \frac{2}{\pi} \varepsilon(t) \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t \, d\omega; \quad A = \lim_{\omega \rightarrow \infty} P(\omega).$$

A K amplitúdó-karakterisztika ismeretében elegendő feltétel adható a rendszer kauzalitására (az impulzusválasz számítása nélkül). eldönésére az átviteli karakterisztika ismeretében (tehát az impulzusválasz számítása nélkül). Az erre vonatkozó *Paley–Wiener*-kritériumot igazolás nélkül közöljük. Vezessük be az eddig is alkalmazott

$$H(e^{j\vartheta}) = K(\vartheta) e^{j\varphi(\vartheta)}, \quad H(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} \quad (3.2-82)$$

jelölést. Ha a $K = |H|$ amplitúdó-karakterisztika kielégíti a következő feltételt (Ω tetszőleges)

$$\text{DI: } \int_0^{\pi} |\ln K(\vartheta)| \, d\vartheta < \infty; \quad \text{FI: } \int_0^{\infty} \frac{|\ln K(\omega)|}{\omega^2 + \Omega^2} \, d\omega < \infty, \quad \int_0^{\infty} K^2(\omega) \, d\omega < \infty, \quad (3.2-83)$$

akkor a rendszer biztosan *kauzális*. Ha K adott amplitúdó-karakterisztika, akkor található olyan φ fázis-karakterisztika, hogy a (82) szerinti H átviteli karakterisztika inverz Fourier-transzformáltja belépő jelet eredményez. A megfelelő fázis-karakterisztika tényleges előállítására nehéz feladat. A tételből következik, hogy ha K nulla egy véges frekvencia-intervallumban, akkor a rendszer biztosan nem kauzális (példa erre az ideális aluláteresztő). Egyes frekvenciákon K lehet nulla.

Például a Gauss-típusú, folytonos idejű aluláteresztő amplitúdó-karakterisztikája $K(\omega) = \exp(-T^2 \omega^2)$. Ez nem kauzális rendszert ír le, mert $|\ln K(\omega)| = T^2 \omega^2$ és $\omega^2 / (\omega^2 + \Omega^2) = 1 - \Omega^2 / (\omega^2 + \Omega^2)$ integrálja nem véges.

Ha $K^2(\omega)$ integrálja (vagyis az impulzusválasz energiája) nem véges, akkor a feltétel sem nem szükséges, sem nem elegendő. Például a $H(j\omega) = e^{-j\omega T}$ átviteli karakterisztikájú rendszer impulzusválasza $h(t) = \delta(t - T)$. A rendszer kauzális, ha $T \geq 0$ és nem kauzális, ha $T < 0$. Mivel ekkor $K(\omega) = 1$, ezért a *Paley–Wiener*-kritérium ki van elégítve T bármely értékére. Ez azonban nem jelent ellentmondást, hiszen $K(\omega)$ nem négyzetesen integrálható, ezért a kritérium nem alkalmazható.

Ha az átviteli karakterisztika valós értékű, akkor az impulzusválasz páros jel, ezért a rendszer a $H = C$ (állandó) átviteli karakterisztika kivételével nem lehet kauzális.

3.2-2.4. Torzításmentes jelátvitel

Egy gyakorlatilag fontos feladat vizsgálatával megmutatjuk, hogy miként lehet egy problémát megfogalmazni és megoldani a frekvenciatartományban. Ennek mintájára más feladatok is megoldhatók. Természetesen nem minden időtartománybeli feladat fogalmazható át egyszerűen frekvenciatartománybeli feladattá.

El akarjuk dönteni, hogy egy lineáris, invariáns rendszer alkalmas-e bizonyos osztályba tartozó jelek *torzításmentes átvitelére*. Ez azt jelenti, hogy az y válasz csak kevésbé különbözik az u gerjesztéstől. Megengedünk egy C állandó szorzót (ezt a továbbiakban pozitívnak tekintjük) és egy L illetve T késleltetést.

Az *ideális* torzításmentes átvitelt biztosító rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata ebből következően

$$\begin{aligned} y_0[k] &= C u[k-L], \quad C > 0, \quad L \in \mathbf{N}; \\ y_0(t) &= C u(t-T), \quad C > 0, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-84)$$

Ebből következik, hogy az ideálisan torzításmentes rendszer impulzusválasza

$$\begin{aligned} h_0[k] &= C \delta[k-L], \quad C > 0, \quad L \in \mathbf{N}; \\ h_0(t) &= C \delta(t-T), \quad C > 0, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-85)$$

Az ideális rendszer válasza és gerjesztése spektrumának kapcsolata a (27) értelmében

$$Y_0(e^{j\vartheta}) = C e^{-j\vartheta L} U(e^{j\vartheta}); \quad Y_0(j\omega) = C e^{-j\omega T} U(j\omega). \quad (3.2-86)$$

Ezek szerint az ideális rendszer átviteli karakterisztikája

$$\begin{aligned} H_0(e^{j\vartheta}) = C e^{-j\vartheta L} &\Rightarrow K_0(\vartheta) = C, \quad \varphi_0(\vartheta) = -L\vartheta; \quad C \in \mathbf{R}_+, \quad L \in \mathbf{N}; \\ H_0(j\omega) = C e^{-j\omega T} &\Rightarrow K_0(\omega) = C, \quad \varphi_0(\omega) = -T\omega; \quad C \in \mathbf{R}_+, \quad T \in \mathbf{R}_+. \end{aligned} \quad (3.2-87)$$

A jelátvitel akkor *torzításmentes*, ha az *amplitúdó-karakterisztika* állandó, a *fázis-karakterisztika* nulláról lineárisan csökken (tehát a futási idő karakterisztika állandó).

Valamely rendszer annál kisebb hibával biztosítja a torzításmentes átvitelt, minél jobban közelíti impulzusválasza vagy átviteli karakterisztikája az ideálíst. A következőkben a második megközelítést tárgyaljuk.

Szorítkozzunk olyan gerjesztésekre, amelyek spektruma nullának tekinthető vagy legalábbis elhanyagolható egy frekvenciasávon kívül (ez a feltételezés FI jelekre teljesen indokolt, hiszen egyébként a jel nem lenne véges energiájú):

$$\begin{aligned} U(e^{j\vartheta}) &\approx 0, \quad 0 \leq |\vartheta| < \vartheta_{u1}, \quad \vartheta_{u2} < |\vartheta| < \pi; \\ U(j\omega) &\approx 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_{u1}, \quad \omega_{u2} < |\omega| < \infty. \end{aligned} \quad (3.2-88)$$

A $(\vartheta_{u1}, \vartheta_{u2})$ illetve az $(\omega_{u1}, \omega_{u2})$ körfrekvencia-intervallum az u jel *sávszélessége*. Néha nem az intervallumot, hanem az intervallum $\Delta\vartheta_u = \vartheta_{u2} - \vartheta_{u1}$ illetve a $\Delta\omega_u = \omega_{u2} - \omega_{u1}$ hosszát nevezik sávszélességnek, mert például a sáv közepét adottnak lehet tekinteni. Sok gyakorlati esetben ϑ_{u1} illetve ω_{u1} nulla, ekkor $\Delta\vartheta_u = \vartheta_{u2}$ illetve $\Delta\omega_u = \omega_{u2}$. Ha a jel sávkorlátozott Θ illetve Ω sávkorláttal, akkor $\vartheta_{u2} \leq \Theta$ illetve $\omega_{u2} \leq \Omega$. A véges energiájú FI jelekre mindig értelmezhető sávszélesség. A gyakorlatban a FI sávszélességet a frekvenciára (nem a körfrekvenciára) adják meg.

A torzításmentes jelátvitelt közelítőleg olyan rendszer biztosítja, amelynek amplitúdó-karakterisztikája állandó, fáziskarakterisztikája lineárisan csökken (futási idő karakterisztikája állandó) a gerjesztés sáv szélességén belül. Megelégedhetünk azzal is, ha a két feltétel csak közelítőleg van kielégítve.

Nevezzük a rendszer sáv szélességének azt a $(\mathcal{G}_{H1}, \mathcal{G}_{H2})$ diszkrét idejű illetve $(\omega_{H1}, \omega_{H2})$ folytonos idejű körfrekvencia-intervallumot, amelyen belül a rendszer $K = |H|$ amplitúdó-karakterisztikája csak kevésbé (rendszerint egy megengedett arányban) tér el maximális értékétől:

$$\begin{aligned} \text{DI: } K(\mathcal{G}) &\approx K_{\max}, \quad \mathcal{G}_{H1} \leq |\mathcal{G}| \leq \mathcal{G}_{H2}; \\ \text{FI: } K(\omega) &\approx K_{\max}, \quad \omega_{H1} \leq |\omega| \leq \omega_{H2}. \end{aligned} \quad (3.2-89)$$

A rendszer sáv szélessége nem egyezik meg impulzusválaszának (mint jelnek) a sáv szélességével. Utóbbi ritkán használatos a rendszer jellemzésére.

A torzításmentes átvitelhez biztosítani kell, hogy a rendszer sáv szélessége magába foglalja a gerjesztés sáv szélességét, azaz

$$\text{DI: } \mathcal{G}_{H1} \leq \mathcal{G}_{u1}, \quad \mathcal{G}_{u2} \leq \mathcal{G}_{H1}; \quad \text{FI: } \omega_{H1} \leq \omega_{u1}, \quad \omega_{u2} \leq \omega_{H2}. \quad (3.2-90)$$

teljesüljön. Ennek $\Delta \mathcal{G}_u \leq \Delta \mathcal{G}_H$ illetve $\Delta \omega_u \leq \Delta \omega_H$ egy szükséges feltétele, ahol $\Delta \mathcal{G}_u \equiv \mathcal{G}_{u2} - \mathcal{G}_{u1}$, $\Delta \mathcal{G}_H \equiv \mathcal{G}_{H2} - \mathcal{G}_{H1}$ illetve $\Delta \omega_u \equiv \omega_{u2} - \omega_{u1}$, $\Delta \omega_H \equiv \omega_{H2} - \omega_{H1}$. Ez a feltétel azért nem elegendő, mert H sáv szélességének frekvencia-intervallumának magába kell foglalnia u sáv szélességének frekvencia-intervallumát.

A (90) csak egyik feltétele a torzításmentes átvitelnek, hiszen (87) értelmében teljesülnie kell még a fáziskarakterisztikára vonatkozó alábbi feltételnek is:

$$\varphi(\mathcal{G}) \approx -L \mathcal{G}, \quad \mathcal{G}_{u1} \leq |\mathcal{G}| \leq \mathcal{G}_{u2}; \quad \varphi(\omega) \approx -T \omega, \quad \omega_{u1} \leq |\omega| \leq \omega_{u2}. \quad (3.2-91)$$

A következő két pontban részletesebben tárgyaljuk a rendszer és a jel sáv szélességét, hiszen ezeket eddig csak kvalitatíven értelmeztük. Az alábbi példa előkészíti az általános értelmezést.

A torzításmentes jelátvitel biztosítására vonatkozó előző megfontolásunk egy illusztrációja annak, hogy miként lehet a rendszerrel szemben támasztott követelményt a frekvenciatartományban megfogalmazni.

Példa Torzításmentesen át akarjuk vinni a FI négyszögimpulzust (12a ábra):

$$u(t) = U_m \{ \varepsilon(t) - \varepsilon(t - T) \}, \quad T > 0$$

egy olyan rendszeren, amelynek átviteli karakterisztikája (12c ábra)

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad \varphi(\omega) = -\arctg \omega\tau; \quad \tau > 0.$$

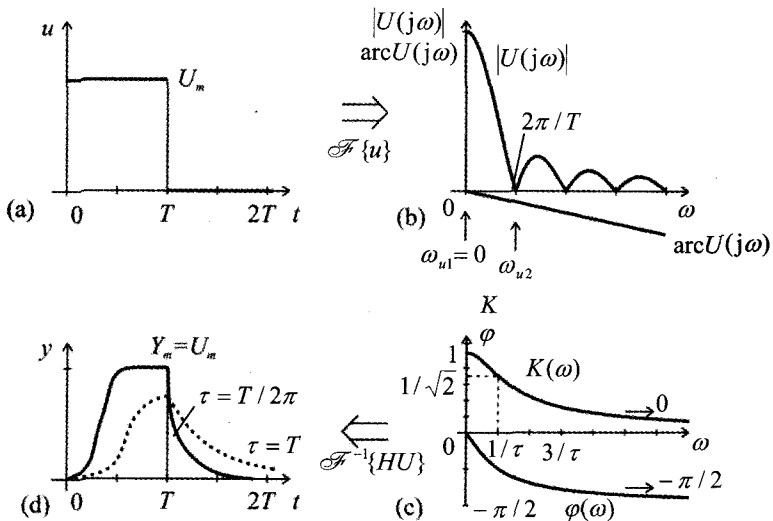
Határozzuk meg a T és τ kapcsolatára vonatkozó feltételt!

A gerjesztőjel spektruma (5) értelmében

$$U(j\omega) = U_m T \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}.$$

Amint a 12b ábrából is látható $|U(j\omega)|_{\max} = U_m T$ és $\omega_{u1} = 0$. Válasszuk meg ω_{u2} körfrekvenciát az $|U(j\omega)|$ első nullahelyénél. (Ilyen nullahely nem minden spektrumnál létezik, ezért ez nem lehet egy általánosan követhető eljárás.) Ezzel a választással $\omega_{u2} = 2\pi/T$ adódik, vagyis $\Delta\omega_u = 2\pi/T$ és $\Delta f_u \equiv \Delta\omega_u / 2\pi = 1/T$, utóbbi az impulzus T szélességének reciproka. A $\Delta f_u = 1/T$ összefüggés más alakú impulzus sávzélességének becslésére is használható. Az $|U(j\omega)|$ maximuma a sávzélességen kívül $0,21|U(j\omega)|_{\max}$, ami nem „nagyon kicsi”, ezért a gerjesztés sávzélességét indokolt a fenténél nagyobbak választani, de első becslésként az előző választás elfogadható.

A rendszer amplitúdó-karakteristikája monoton csökkenő (12c ábra). Látható, hogy $K_{\max} = 1$, $\omega_{H1} = 0$. Válasszuk meg ω_{H2} értékét annak alapján, hogy ott az energiaátvitel a maximálisnak fele legyen: $K^2(\omega_{H2}) = K_{\max}^2 / 2$, $K(\omega_{H2}) = K_{\max} / \sqrt{2}$. Ebből $\omega_{H2} = \Delta\omega_H = 1/\tau$ adódik a rendszer sávzélességére. A fázis értéke a sávhatárokon $\varphi(\omega_{H1}) = 0$, $\varphi(\omega_{H2}) = -\pi/4 = -0,785$. A $\varphi(\omega)$ kezdeti meredeksége $-1/\tau$, tehát a lineáris extrapoláció a sávhatáron $(-1/\tau) \cdot \omega_{H2} = -1$ értéket ad. Ebből az következik, hogy a fázis lineáris menete gyenge közelítésként elfogadható.



3.2-12. ábra A négyzetjellel torzításmentes átvitelének közelítő biztosítása. (a) A gerjesztés időfüggvénye. (b) Az átvendő jel spektruma. (c) A rendszer amplitúdó- és fázis-karakteristikája. (d) A válasz időfüggvénye

A torzításmentes átvitel (89) feltétele a $\Delta\omega_u \leq \Delta\omega_H$ alakra egyszerűsödik. Előző eredményeink alapján ebből a $2\pi/T \leq 1/\tau$, vagyis a $\tau \leq T/2\pi \approx 0,16T$ feltétel következik.

A 12d ábrán a folytonos vonal mutatja a válasz menetet $\tau = T/2\pi$ esetén. Ez a négyzetgimpulzus egy elfogadható közelítésének tekinthető. A 11d ábra szaggatott vonalú görbéje azt szemlélteti, hogy ha a sávzélességek nincsenek megfelelően választva (az ábrán a $\tau = T$ eset, akkor a válasz jelalakja nem is hasonlít a gerjesztés jelalakjára. #

3.2-2.5. A rendszer sáv szélességei

A rendszer sáv szélességének alap gondolatát az előző pontban már megadtuk. Most pontosabb definíciót tárgyalunk. A témára a 4.2-3.6. pontban még visszatérünk.

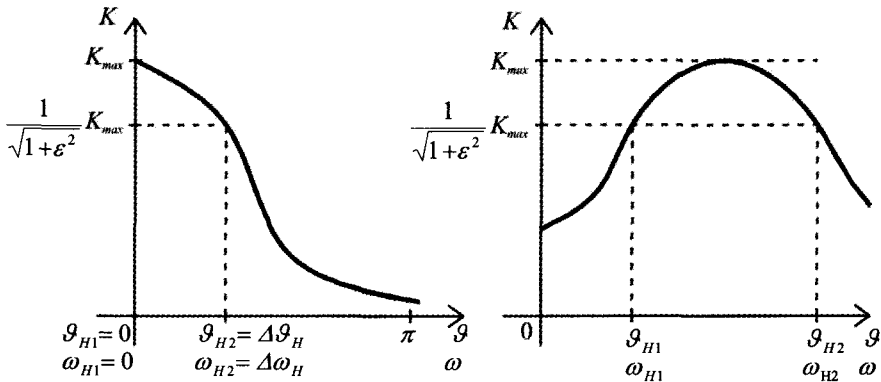
A $K(\vartheta)$ illetve $K(\omega)$ amplitúdó-karakterisztikájú DI illetve FI rendszer sáv szélessége az a frekvencia-intervallum, amelyben közelítőleg állandónak tekinthető, vagyis értéke nem tér el nagyon maximumától. A pontosabb megfogalmazás érdekében válasszunk egy $0 < \varepsilon \leq 1$ értéket. A rendszer sáv szélességének azt a frekvencia-intervallumot tekintjük, amelyben (13. ábra)

$$\begin{aligned} \text{DI: } & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \leq K(\vartheta) \leq K_{\max}, \quad \vartheta_{H1} \leq \vartheta \leq \vartheta_{H2}; \\ \text{FI: } & \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} K_{\max} \leq K(\omega) \leq K_{\max}, \quad \omega_{H1} \leq \omega \leq \omega_{H2} \end{aligned} \quad (3.2-92)$$

teljesül. Néha a $\Delta\vartheta_H \equiv \vartheta_{H2} - \vartheta_{H1}$ illetve a $\Delta\omega_H \equiv \omega_{H2} - \omega_{H1}$ értéket, vagyis az intervallum hosszát nevezik a rendszer sáv szélességének.

A FI esetben gyakran a $\Delta f_H = \Delta\omega_H / 2\pi$ értéket adják meg, amelyre a B jel („bandwidth”) is használatos. A frekvencia-intervallum helyett megadható annak szélessége és középértéke is.

Az előző pontban önkényesen az $\varepsilon = 1$ választással éltünk. Ha ε értéke nincs explicite megadva, akkor rendszerint erről az értékről van szó. Ez megfelel a sáv szélességen belül legfeljebb $1 - 1/\sqrt{2} \approx 0,3 = 30\%$ vagyis 3 dB ingadozásnak. Sok gyakorlati esetben ennél kisebb ingadozás engedhető csak meg, vagyis kisebb ε értéket kell választanunk.



3.2-13. ábra A rendszer sáv szélességének értelmezése

Könnyen belátható (lásd a 4.2-3.6. pontot is), hogy például

$$K(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\omega / \Omega)^{2n}}}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

egy ilyen FI rendszer amplitúdó-karakterisztikája, amelynek sáv szélességét $\omega_{H1} = 0$, $\omega_{H2} = \Delta\omega \equiv \Omega$ jellemzi

Az amplitúdó-karakterisztika első, második, ..., $(n-1)$ -edik deriváltja nulla az $\omega = 0$ helyen. A karakterisztikát vagy a rendszert ezért szokás maximális laposságúnak (vagy

Butterworth-típusúnak) nevezni. Igazolható, hogy az átviteli karakterisztika racionális, általános alakja (figyeljük meg, hogy $a_i = a_{n-i}$):

$$H(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^n + a_1\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n-1} + a_2\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^{n-2} + \dots + a_2\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + a_1\left(j\frac{\omega}{\Omega}\right) + 1}$$

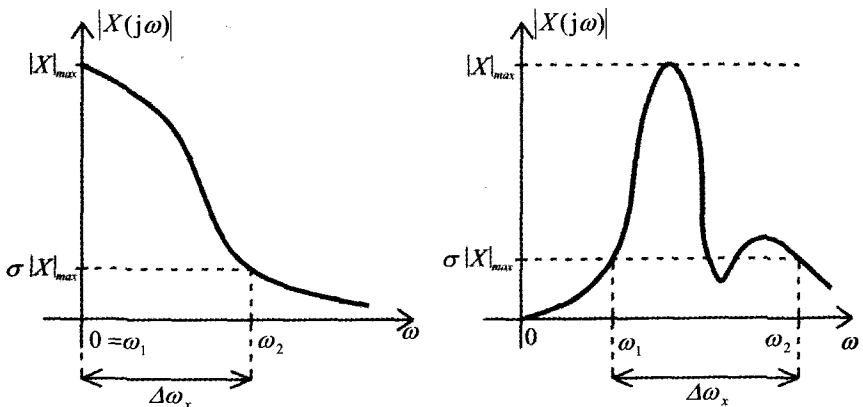
Ha $n = 2$, akkor $a_1 = \sqrt{2}$, ha $n = 3$, akkor $a_1 = 2$, ha $n = 4$, akkor $a_1 \approx 2,613$, $a_2 \approx 3,414$. Tetszőleges fokszámokra vonatkozó összefüggést később adunk meg. Minél nagyobb n értéket választunk, annál laposabb az amplitúdó-karakterisztika a sáv szélességen belül és annál kisebb a sáv szélességen kívül. Az n értékét például annak alapján választjuk, hogy egy bizonyos frekvencia fölött az amplitúdó-karakterisztika egy előírt értéknél kisebb legyen.

3.2-2.6. A jel sáv szélességei

Egy $x[k]$ illetve $x(t)$ jel *sáv szélessége* az a $(\vartheta_{x1}, \vartheta_{x2})$ illetve $(\omega_{x1}, \omega_{x2})$ körfrekvencia-intervallum, amelyen kívül a jel $X(e^{j\vartheta})$ illetve $X(j\omega)$ spektruma elhanyagolható. A sáv szélesség fenti, kissé laza értelmezése néha egyértelmű eredményre vezet. Ha például egy ω_0 körfrekvenciájú szinuszos FI jel amplitúdóját egy ω_m körfrekvenciájú másik szinuszos jel modulálja, akkor az $x(t)$ modulált jel spektruma mindenütt nulla, kivéve a $\pm \omega_0, \pm(\omega_0 - \omega_m), \pm(\omega_0 + \omega_m)$ körfrekvenciákat (a 3.1-2.1. pont példája). Ekkor $\omega_{x1} = \omega_0 - \omega_m, \omega_{x2} = \omega_0 + \omega_m$ és $\Delta\omega_x = 2\omega_m$. Sok gyakorlati feladatnál a jel egy olyan rendszer válasza, amely csak egy frekvenciasávban enged át jeleket (például egy sáváteresztő szűrő).

Nincs azonban általánosan elfogadott definíció a jel sáv szélességére. Egy lehetséges értelmezés a következő (14. ábra).

Egy $x[k] = \mathcal{F}^{-1}\{X(e^{j\vartheta})\}$ illetve egy $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}$ jel *sáv szélessége* az a $(\vartheta_{x1}, \vartheta_{x2})$ illetve $(\omega_{x1}, \omega_{x2})$ körfrekvencia-intervallum, amelyen kívül



3.2-14. ábra A jel sáv szélességének értelmezése az amplitúdó-karakterisztika alapján

$$\begin{aligned} \text{DI: } & |X(e^{j\theta})| < \sigma |X(e^{j\theta})|_{\max}, \quad 0 \leq |\theta| < \vartheta_{x1}, \quad \vartheta_{x2} < |\theta| < \pi; \\ \text{FI: } & |X(j\omega)| < \sigma |X(j\omega)|_{\max}, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_{x1}, \quad \omega_{x2} < |\omega| < \infty \end{aligned} \quad (3.2-93)$$

ki van elégítve, ahol $0 < \sigma < 1$ egy előírt szám (például $\sigma = 0,1$). A $\Delta\vartheta_x = \vartheta_{x2} - \vartheta_{x1}$ illetve a $\Delta\omega_x = \omega_{x2} - \omega_{x1}$ mennyiséget (vagyis a frekvencia-intervallum hosszát) is szokták a jel sáv szélességének nevezni.

Ha az amplitúdó-karakterisztika erősen ingadozik, akkor célszerű helyette a burkolóját tekinteni (lásd a példát).

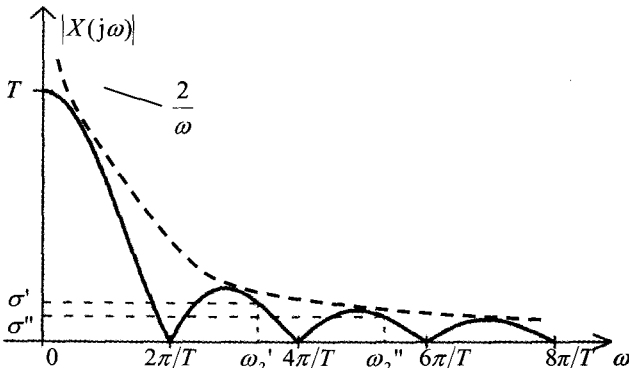
Az előző definíció értelmében a jel energiaspektrumára a sáv szélességen kívüli tartományban $|X|^2 < \sigma^2 |X|_{\max}^2$ érvényes. A DI esetben ez egy biztosítéka annak, hogy a jel energiájának döntő része a sáv szélességen belülré esik. Ez nem mindig igaz a FI esetben, mert a sáv szélességen kívüli frekvenciatartomány nem véges. Célszerű lehet ezért úgy definiálni a sáv szélességet, hogy a jel energiájának (azaz FI esetben $|X(j\omega)|^2/2\pi$ integráljának) egy előírt nagy hányada (például 90 %-a) essék a sáv szélességen belülré. Ez a definíció azonban nem ad egyértelmű megoldást, ezért valamilyen további megkötésre is szükség van. Másféle definíciók is használatosak, de sajnos mindegyikükkel kapcsolatban felléphetnek értelmezési nehézségek.

Példa Határozzuk meg a folytonos idejű, T hosszúságú, négyszögletes impulzus sáv szélességét! A jel amplitúdó-spektruma, mint már láttuk

$$|X(j\omega)| = \left| \frac{2}{\omega} \sin \frac{\omega T}{2} \right|, \quad |X(j\omega)|_{\max} = |X(j0)| = T.$$

A (93) értelmében $\omega_{x1} = 0$.

Az ω_{x2} értékét annak alapján kell meghatározni, hogy ha $\omega > \omega_{x2}$, akkor $|X(j\omega)| < \sigma T$ teljesüljön. A 15. ábrából azonban látható, hogy ekkor ω_{x2} nem lesz σ folytonos függvénye, ami nem logikus. Elfogadhatóbb eredményt kapunk, ha az amplitúdó-spektrumot burkolójával, a $|2/\omega|$ függvénnyel közelítjük (szaggatott vonalú görbe a 15. ábrán). Ekkor ω_{x2} a $2/\omega_{x2} = \sigma T$ összefüggésből számítható és $\omega_{x2} = \Delta\omega_x = 2/\sigma T$ adódik.



3.2-15. ábra A négyszögletes impulzus sáv szélességének meghatározása

A $\sigma = 0,02$ választással $\Delta\omega_x = 100/T$, $\Delta f_x \approx 16/T$ adódik. A 3.2-2.4. pont példájában önkényesen $\Delta\omega_x = 2\pi/T$ választással éltünk, amihez $\sigma = 1/\pi \approx 0,318$ tartozik. #

*3.2-2.7. A sávszélesség és a jelszélesség kapcsolata

Egy $x(t)$ folytonos idejű, valós értékű, véges energiátartalmú jel Δt jelszélességének egy lehetséges értelmezése a következő. Tekintsük az $x^2(t)$ függvényt egy vonalmenti tömegsűrűségnek és határozzuk meg ennek t_1 „tömegközéppontját” és Δt „inerciasugarát”. Matematikai értelmezésben:

$$t_1 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} t x^2(t) dt,$$

$$(\Delta t)^2 \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} (t - t_1)^2 x^2(t) dt \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (t^2 - 2t t_1 + t_1^2) x^2(t) dt.$$

Ebből adódik a Δt jelszélesség következő kifejezése:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{J_2}{J_0} - \left(\frac{J_1}{J_0}\right)^2}; \quad t_1 = \frac{J_1}{J_0}; \quad J_n \equiv \int_{-\infty}^{\infty} t^n x^2(t) dt, \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.2-94)$$

A jelszélességet úgy tekinthetjük, hogy a jel a t_1 időpont körüli $2\Delta t$ szélességű intervallumban, például a $(t_1 - \Delta t, t_1 + \Delta t)$ intervallumban koncentrálódik, azon kívül esetleg el is hanyagolható.

Látható, hogy $J_0 = E_x$ az $x(t)$ jel energiátartalma, J_2 pedig a $t x(t)$ jel energiátartalma. Eredményünk csak akkor értelmes, ha ezek végesek. Tipikusan ez a helyzet, ha a jel korlátos és időkorlátozott. Ha $x(t)$ páros függvénnyel leírható, akkor $J_1 = 0$ és ekkor $t_1 = 0$. A $t = 0$ időpont mindig megválasztható úgy, hogy $t_1 = 0$ legyen.

Analóg módon értelmezhetjük egy valós értékű FI jel $\Delta\omega$ sávszélességét spektrumának abszolút értékére támaszkodva és pozitív frekvenciákra szorítkozva:

$$\Delta\omega_1 = \sqrt{\frac{I_2}{I_0} - \left(\frac{I_1}{I_0}\right)^2}; \quad \omega_1 = \frac{I_1}{I_0}; \quad I_n = \int_0^{\infty} \omega^n |X(j\omega)|^2 d\omega, \quad n = 0, 1, 2. \quad (3.2-95)$$

Az ω_1 körüli $\Delta\omega_1$ hosszúságú intervallumot úgy kell megválasztani, hogy alsó határa pozitív legyen. Ez az értelmezés akkor célszerű, ha a jel spektruma egy, viszonylag nagy frekvencia környezetére koncentrálódik (például modulált jel). Ha viszont a jel spektrumában a kisfrekvenciás komponensek dominálnak, akkor célszerűbb lehet a sávszélességet a következőképpen értelmezni:

$$\Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{I_2}{I_0}}; \quad I_n = \int_0^{\infty} \omega^n |X(j\omega)|^2 d\omega; \quad n = 0, 2. \quad (3.2-96)$$

Ilyenkor a $(0, \Delta\omega_0)$ intervallumon kívül tekintjük a jel spektrumát elhanyagolhatónak.

A feladat természetétől függően a most értelmezett jelszélesség és sávzélesség egy többszörösét célszerű azon intervallum szélességének tekinteni, amelyen kívül a jel, illetve a spektruma elhanyagolható.

Mindkét most definiált sávzélesség létezésének feltétele az, hogy $\omega^2 |X(j\omega)|^2$ integrálható, vagyis még a jel deriváltja is véges energiátartalmú legyen. Ennek szükséges feltétele az, hogy $\omega X(j\omega)$ nullához tartson, ha $\omega \rightarrow \infty$, illetve hogy $x(t)$ folytonos legyen. Az utóbbi kikötés miatt sok fontos jelre ezek a sávzélességek nem értelmezhetők (például négyszögimpulzus). Ebből az is következik, hogy folytonos, de nagyon gyors változású jelekre az így értelmezett sávzélesség félrevezető értékű lehet.

Szorítkozzunk most arra az esetre, amikor Δt és $\Delta\omega_0$ egyaránt értelmezett, továbbá $t = 0$ alkalmas választásával $t_1 = 0$ is biztosított. Igazolni fogjuk, hogy ekkor

$$(\Delta t) \cdot (\Delta\omega_0) \geq \frac{1}{2}; \quad \Delta t = \sqrt{\frac{J_2}{J_0}}, \quad \Delta\omega_0 = \sqrt{\frac{I_2}{I_0}}. \quad (3.2-97)$$

Ez azt fejezi ki, hogy minél keskenyebb egy jel, annál szélesebb a spektruma. Ez összhangban van az előző pontban a négyszögimpulzusra vonatkozó eredményünkkel.

Az igazoláshoz használjuk fel a következő (Bunyakovszkij-, Cauchy-, Schwartz-) egyenlőtlenséget:

$$\left| \int_a^b f(t) g^*(t) dt \right|^2 \leq \left\{ \int_a^b |f(t)|^2 dt \right\} \left\{ \int_a^b |g(t)|^2 dt \right\}.$$

Legyen $f = t x$, $g = x'$ (feltételezzük, hogy ez is függvény, tehát x folytonos), akkor

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} t x(t) x'(t) dt \right|^2 \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} t^2 x^2(t) dt \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [x'(t)]^2 dt \right\}.$$

A bal oldal (parciális integrálás után és $t x(t)$ feltételezett viselkedését figyelembe véve) értéke $J_0^2 / 4$. A jobb oldal első tényezője $(\Delta t)^2 J_0$. A jobb oldal második tényezője (Parseval tételét felhasználva a deriváltra) pedig $(\Delta\omega_0)^2 J_0$. Ezekkel valóban (97) adódik.

Az egyenlőtlenség akkor élesedik egyenlőséggé, ha a benne szereplő f és g függvények arányosak. Esetünkben ennek feltétele x' és $t x$ arányossága, vagyis $x' = -2\alpha^2 t x$ teljesülése. Ennek az $x(0) = A$ feltételt kielégítő megoldása könnyen beláthatóan a Gauss-függvény, amelynek spektruma is Gauss-függvény:

$$x(t) = A e^{-(\alpha t)^2}, \quad X(j\omega) = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} A e^{-(\omega/2\alpha)^2}. \quad (3.2-98)$$

Belátható, hogy erre $\Delta t = 1/2\alpha$, $\Delta\omega_0 = \alpha$, tehát szorzatuk éppen $1/2$.

Példa Határozzuk meg az

$$x(t) = A e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0$$

jel most értelmezett jelszélességét és sávzélességeit!

A szimmetria következtében $J_1 = 0$, továbbá beláthatóan

$$J_0 = 2 \int_0^{\infty} A^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{\alpha}, \quad J_2 = 2 \int_0^{\infty} A^2 t^2 e^{-2\alpha t} dt = \frac{A^2}{2\alpha^3}.$$

Ebből a (94) szerinti jelszélesség $\Delta t = 1/(\sqrt{2}\alpha) \approx 0,707/\alpha$. Mivel $x(\Delta t) \approx 0,49 x(0)$ viszonylag nagy érték, ezért Δt -nél nagyobb (például $5\Delta t$) értéket célszerű jelszélességnek tekinteni.

A jel spektruma integrálással nehézség nélkül számítható:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A e^{-\alpha|t|} e^{-j\omega t} dt = A \int_{-\infty}^0 e^{(\alpha-j\omega)t} dt + A \int_0^{\infty} e^{(-\alpha-j\omega)t} dt = \frac{A}{\alpha-j\omega} + \frac{A}{\alpha+j\omega} = \frac{2A\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}.$$

Belátható, hogy (az érdektelen $2A\alpha$ szorzótól eltekintve)

$$I_n = \int_0^{\infty} \omega^n \frac{1}{(\alpha^2 + \omega^2)^2} d\omega = \begin{cases} \pi/\alpha, & n=0; \\ 2, & n=1; \\ \pi\alpha, & n=2. \end{cases}$$

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy $\omega_1 = 2\alpha/\pi \approx 0,637\alpha$, továbbá

$$\Delta\omega_1 = \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \alpha \approx 0,784\alpha, \quad X(j2\Delta\omega_1) \approx 0,296X(j0);$$

$$\Delta\omega_0 = \alpha, \quad X(j\Delta\omega_0) = 0,5X(j0).$$

A kétféle sávzélesség meglehetősen eltérő, továbbá egyik sem tekinthető elég nagyoknak, hiszen a sávzélességen kívül a spektrum nem elhanyagolható. Ebből is az következik, hogy a sávzélességre és a jelszélességre az ebben a pontban megadott definíció inkább elméletileg érdekes, gyakorlatilag kevésbé hasznos.

A példában vizsgált jelre $(\Delta t)(\Delta\omega_0) \approx 0,707$, tehát a (97) egyenlőtlenség az itt definiált jelszélesség és sávzélesség szorzatára valóban teljesül. #

3.2-2.8. Moduláció

Tekintsünk egy $x(t)$ folytonos idejű jelet, amely sávkorlátozottnak tekinthető Ω sávkorláttal, vagyis a jel $X(j\omega)$ spektruma a $0 \leq \omega \leq \Omega$ körfrekvencia-intervallumon kívül elhanyagolható. (A negatív frekvenciákkal nem kell foglalkozunk.) Ezt a jelet kívánjuk egy csatornán (például egy kábelben) átvinni.

A *moduláció* célja az $x(t)$ jelből egy olyan $y(t)$ jel előállítása, amelynek $Y(j\omega)$ spektruma az $(\omega_c - \Omega, \omega_c + \Omega)$ körfrekvencia-intervallumon belüli része hordozza az $x(t)$ jelre vonatkozó információt, ahol ω_c a vivő-körfrekvencia („carrier”). Ha különböző x_1, x_2, \dots, x_n jeleink vannak és ezekkel úgy moduláljuk az $\omega_{c1}, \omega_{c2}, \dots, \omega_{cn}$ vivő-körfrekvenciájú jeleket, hogy az $(\omega_{ci} - \Omega_i, \omega_{ci} + \Omega_i)$ intervallumok ne lapolódjanak át, akkor ugyanazon a csatornán egyidejűleg vihetjük át e jeleket anélkül, hogy egymást zavarnák. Mint látni fogjuk, az átlapolásra vonatkozó feltételek még enyhíthetők is.

Ebben a pontban azzal az esettel foglalkozunk, amikor a modulált jelet

$$y(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \rho(t)) \quad (3.2-99)$$

írja le. Ennek pillanatnyi amplitúdója $a(t)$, pillanatnyi körfrekvenciája

$$\omega(t) = \omega_c + \rho'(t). \quad (3.2-100)$$

Ennek a modulációnak három alapvető típusa az amplitúdó-moduláció (AM), a fázis-moduláció (PM, „phase”) és a frekvencia-moduláció (FM). Léteznek másféle modulációk is, de ezekkel nem foglalkozunk.

Az egyszerűsítés érdekében azt az esetet részletezzük, amikor az átvendő $x(t)$ szinuszos jel, noha ez önmagában gyakorlatilag érdektelen feladat. Az általános eset azonban a Fourier-transzformáció felhasználásával erre visszavezethető.

Az átvitt $y(t)$ modulált jelet demodulációval még vissza kell alakítani az eredeti $x(t)$ jellé. A demodulációval azonban nem foglalkozunk.

Amplitúdó-moduláció

Az amplitúdó-moduláció során a modulált jel $a(t)$ amplitúdója hordozza az átvendő $x(t)$ jelet. Ekkor $\rho(t) = \rho_0$ állandó, amelyet a továbbiakban nullának választunk.

Az amplitúdó-modulált jel tipikusan

$$y_{AM}(t) = [A + m x(t)] \cos \omega_c t \quad (3.2-101)$$

alakú, ahol A nulla is lehet, de többnyire $A > m > 0$.

Tekintsünk szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos \omega_x t, \quad \omega_x \ll \omega_c; \\ y_{AM}(t) &= [A + m X \cos \omega_x t] \cos \omega_c t = \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m X \{ \cos (\omega_c - \omega_x) t + \cos (\omega_c + \omega_x) t \}. \end{aligned} \quad (3.2-102)$$

Az amplitúdó-modulált jel az ω_c vivőfrekvenciás összetevőn kívül két oldalsávú összetevőt tartalmaz, amelyek körfrekvenciája $\omega_c - \omega_x$ és $\omega_c + \omega_x$.

Elegendő az egyik oldalsávot átvinni, hiszen az is hordozza az átvendő jelre vonatkozó információt. Az oldalsáv leválasztása a jel szűrésével oldható meg.

Általános esetben az $X(j\omega)$ spektrumú jellel amplitúdó-modulált szinuszos jel időfüggvénye és spektruma (vö. 3.2-3. ábra a 240. oldalon)

$$y_{AM}(t) = m x(t) \cos \omega_c t, \quad Y_{AM}(j\omega) = \frac{1}{2} m \{ X(j(\omega + \omega_c)) + X(j(\omega - \omega_c)) \}. \quad (3.2-103)$$

Egyszerűsödik a helyzet, ha $x(t)$ sávkorlátozott és Ω sávkorlátja sokkal kisebb mint ω_c .

Fázis-moduláció

A fázis-moduláció során a modulált jel $\rho(t)$ kezdőfázisa hordozza az átvendő $x(t)$ jelet. Ekkor az amplitúdó $a(t) = A$ állandó.

A fázis-modulált jel tipikusan

$$y_{PM}(t) = A \cos (\omega_c t + m x(t)) \quad (3.2-104)$$

alakú. Ennek pillanatnyi körfrekvenciája a fázis deriváltja:

$$\omega(t) = \omega_c + m x'(t), \quad |m x'(t)| < \omega_c. \quad (3.2-105)$$

A kikötés biztosítja, hogy $\omega(t)$ pozitív legyen.

Tekintsünk szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \sin \omega_x t, \\ y_{\text{PM}}(t) &= A \cos(\omega_c t + m X \sin \omega_x t), \\ \omega_{\text{PM}}(t) &= \omega_c + m X \omega_x \cos \omega_x t; \quad |m| X \omega_x < \omega_c. \end{aligned} \quad (3.2-106)$$

Még a legegyszerűbb szinuszos átvendő (fázis-moduláló) jel esetén sem könnyű áttekinteni a modulált jel frekvenciatartománybeli tulajdonságait. Ezért először egy egyszerűsített esetet vizsgálunk.

Tételezzük fel, hogy $|m X| \ll 1$. Ekkor a (106) közelítőleg egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} y_{\text{PM}}(t) &= A \{ \cos \omega_c t \cos(m X \sin \omega_x t) - \sin \omega_c t \sin(m X \sin \omega_x t) \} \\ &\approx A \{ \cos \omega_c t - m X \sin \omega_x t \sin \omega_c t \} = \\ &= A \cos \omega_c t + \frac{1}{2} m X A \{ \cos(\omega_c + \omega_x) t - \cos(\omega_c - \omega_x) t \}. \end{aligned} \quad (3.2-107)$$

Mint látjuk: ebben a közelítésben ugyanazok a frekvencia-komponensek lépnek fel, mint amplitúdó-moduláció esetén. Az átvendő jelre vonatkozó információt továbbra is bármelyik oldalsáv hordozza.

Ha az $|m X| \ll 1$ egyszerűsítő feltétel nem teljesül, akkor a (107)-ben szereplő $\cos(m X \sin \omega_x t)$ és $\sin(m X \sin \omega_x t)$ periodikus függvények Fourier-sorba fejthetők, az alap-körfrekvencia ω_x . Igazolható, hogy a Fourier-együtthatók kifejezhetők Bessel-függvényekkel. A fázis-modulált jel spektrumában az ω_c vivőfrekvencia mellett elvileg végtelen sok további frekvencia is fellép. Ebben az általános esetben a moduláló és a modulált jel spektrumának kapcsolata is bonyolult. Nem vizsgáljuk tovább a fázis-moduláció általános esetét.

Frekvencia-moduláció

A frekvencia-moduláció során a modulált jel $\omega(t)$ pillanatnyi körfrekvenciája függ az $x(t)$ átvendő jeltől, a vivőjel amplitúdója állandó. Tipikus választás

$$\omega_{\text{FM}}(t) = \omega_c + \mu x(t), \quad |\mu x(t)| < \omega_c. \quad (3.2-108)$$

Tekintsünk ismét szinuszos átvendő jelet:

$$\begin{aligned} x(t) &= X \cos \omega_x t, \quad |\mu X| < \omega_c; \quad \omega_{\text{FM}}(t) = \omega_c + \mu X \cos \omega_x t; \\ y_{\text{FM}}(t) &= A \cos \left(\omega_c t + \frac{\mu X}{\omega_x} \sin \omega_x t \right). \end{aligned} \quad (3.2-109)$$

Amint látjuk, $m = \mu / \omega_x$ megfeleltetéssel a frekvencia-moduláció és a fázis-moduláció között ebben az egyszerű esetben nincs érdemi különbség. Annyi azonban látható, hogy a pillanatnyi frekvencia változó összetevőjének amplitúdója fázis-moduláció esetén arányos az átvendő szinuszosnak tekintett jel ω_x körfrekvenciájával.

3.2-2.F. Feladatok

F-1. Egy DI illetve egy FI rendszer impulzusválasza és gerjesztése adott:

$$\text{DI: } h[k] = A \delta[k] + B \varepsilon[k-1] b^{k-1}, \quad |b| < 1; \quad u[k] = C \varepsilon[k] c^k, \quad |c| < 1.$$

$$\text{FI: } h(t) = A \delta(t) + B \varepsilon(t) e^{-\beta t}, \quad \beta > 0; \quad u(t) = C \varepsilon(t) e^{-\gamma t}, \quad \gamma > 0.$$

Határozza meg a válasz Y spektrumát egyszer y számításával majd annak Fourier-transzformálásával, másodsor $\mathcal{F}\{y\} = \mathcal{F}\{h\} \cdot \mathcal{F}\{u\}$ felhasználásával! Melyik módszer egyszerűbb? Miért szükségesek az egyenlőtlenségek által kifejezett feltételek?

***F-2.** Oldja meg az előző feladatot, ha

(a) a feltételek egyike nem teljesül.

(b) egyik feltétel sem teljesül. (Útmutatás. Ez alapos megfontolást igényel!)

F-3. Ismeretes, hogy ha az impulzusválasz λ^k illetve $e^{\lambda t}$ alakú összetevőt tartalmaz (λ a DI illetve a FI rendszer egy sajátértéke), és a gerjesztés is tartalmaz ilyen összetevőt, akkor speciális eset áll elő.

Hogyan jelentkezik ez a frekvenciatartománybeli analízisnél?

F-4. Határozza meg annak a DI illetve FI rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek impulzusválasza

$$\text{DI: } h[k] = A \varepsilon[k] a^k \cos(\Theta k + \rho), \quad |a| < 1.$$

$$\text{FI: } h(t) = A \varepsilon(t) e^{-\alpha t} \cos(\Omega t + \rho), \quad \alpha > 0.$$

***F-5.** Egy DI illetve FI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1 - 2e^{-j\vartheta}}; \quad \text{FI: } H(j\omega) = \frac{1}{j\omega - 0,5}.$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! (Útmutatás. Alkalmazható a 3.2-2.2. pont 1. példájának eredménye $a = 2$ illetve $\alpha = -0,5$ helyettesítéssel?)

F-6. Egy diszkrét idejű illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája valós értékű. Lehet-e kauzális egy ilyen rendszer?

F-7. Egy DI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$(a) H(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{(1 - 0,9 e^{-j\vartheta} e^{-j\vartheta})(1 - 0,9 e^{+j\vartheta} e^{-j\vartheta})} \equiv \frac{1}{1 - 1,8 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + 0,81 e^{-j2\vartheta}}.$$

$$(b) H(e^{j\vartheta}) = (1 - e^{-j\vartheta} e^{-j\vartheta})(1 - e^{+j\vartheta} e^{-j\vartheta}) \equiv 1 - 2 \cos \vartheta e^{-j\vartheta} + e^{-j2\vartheta}.$$

Határozza meg az $u[k] = \varepsilon[k] 0,9^k \cos \Theta k$ gerjesztéshez tartozó válasz spektrumát!

Adja meg az $\eta_u = |U(e^{j\vartheta})|/|U(e^{j0})|$ és az $\eta_v = |Y(e^{j\vartheta})|/|Y(e^{j0})|$ arányokat, ha $\Theta = \pi/2$.

F-8. A DI illetve FI lineáris fázisú, ideális felüláteresztő átviteli karakterisztikája

$$\text{DI: } H(e^{j\vartheta}) = 0, \quad 0 \leq |\vartheta| < \vartheta_c, \quad H(e^{j\vartheta}) = e^{-jn\vartheta}, \quad \vartheta_c < |\vartheta| < \pi, \quad n \in \mathbf{N}.$$

$$\text{FI: } H(j\omega) = 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_c, \quad H(j\omega) = e^{-j\tau\omega}, \quad \omega_c < |\omega| < \infty, \quad \tau \in \mathbf{R}_+.$$

Határozza meg a rendszer impulzusválaszát! Kauzális-e ez a rendszer?

F-9. Egy FI rendszer átviteli karakterisztikája adott:

$$H(j\omega) = 0, \quad 0 \leq |\omega| < \omega_1; \quad H(j\omega) = \frac{\omega_2 - |\omega|}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \omega_1 < |\omega| < \omega_2; \quad H(j\omega) = 0, \quad \omega_2 < |\omega| < \infty.$$

Határozza meg e sáváteresztő rendszer impulzusválasztát! Ellenőrizze az eredményt a $t = 0$ helyen!

F-10. Határozza meg a következő FI jeleknek a (93) definíció szerinti sávészélességét tetszőleges σ esetére, ha

$$(a) \quad x(t) = e^{-\alpha|t|}, \quad \alpha > 0. \quad (b) \quad x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (c) \quad x(t) = \varepsilon(t)\alpha t e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0.$$

$$(d) \quad x(t) = [\varepsilon(t) - 1]e^{\alpha t} + \varepsilon(t)e^{-\alpha t}, \quad \alpha > 0. \quad (e) \quad x(t) = e^{-(\alpha t)^2}.$$

Adjon közelítő összefüggést σ kis értékére és numerikus eredményt, ha $\sigma = 0,1$.

F-11. Adja meg a az előző feladat (a) és (b) szerinti jeleinek a sávészélességen belüli frekvenciatartományba eső relatív energiatartalmát!

F-12. Oldja meg a 10. feladatot az $x(t) = \varepsilon(t)e^{-\alpha t} \sin \Omega t$, $\alpha > 0$ folytonos idejű jelre, ha

$$(a) \quad \alpha = 2\Omega. \quad (b) \quad \alpha = \Omega. \quad (c) \quad \alpha = 0,1\Omega. \quad (d) \quad \alpha = 0,01\Omega.$$

F-13. Oldja meg a 10. feladatot a következő véges idejű FI jelekre:

$$(a) \quad x(t) = \varepsilon(t+T) - \varepsilon(t-T).$$

$$(b) \quad x(t) = \varepsilon(t+T-T_0) - \varepsilon(t-T-T_0).$$

$$(c) \quad x(t) = [\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)] \frac{T+t}{T} + [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)] \frac{T-t}{T}.$$

$$(d) \quad x(t) = [\varepsilon(t+T) - \varepsilon(t)] - [\varepsilon(t) - \varepsilon(t-T)].$$

F-14. Legyen $x(t)$ egy valós értékű FI jel, amelynek energiatartalma (Parseval tétele)

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt \Rightarrow E_x = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

Értelmezzük a jel $\Delta\omega_E = \omega_2 - \omega_1$ sávészélességét a következő egyenlettel:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\omega_1}^{\omega_2} |X(j\omega)|^2 d\omega = (1 - \eta) E_x, \quad 0 < \eta < 1,$$

ahol η egy választható paraméter. Az egyértelműség biztosítására valamilyen ésszerű feltételezést kell tennünk az $\omega_1, (\omega_1 + \omega_2)/2, \sqrt{\omega_1\omega_2}$, stb. paraméterek egyikére.

Határozza meg ezt a sávészélességet a 10. feladat (a) és (b) szerinti jeleire.

Mutassa meg, ebben az esetben mindkét sávészélesség ugyanúgy függ az α paramétertől, ha $\sigma = 0,1$ és $\eta = 0,1$.

***F-15.** Legyen $x(t)$ egy valós értékű, páros FI jel, amelyre $x(0) \geq x(t)$ és $X(j0) \geq X(j\omega)$ érvényes. Defináljunk egy Δt_0 jelszélességet és egy $\Delta\omega_0$ sávészélességet a következő módon (feltételezzük, hogy az integrálok léteznek):

$$\Delta t_0 = \frac{1}{x(0)} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt, \quad \Delta \omega_0 = \frac{1}{X(j\omega)} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega.$$

Igazolja, hogy $\Delta t_0 \cdot \Delta \omega_0 = 2\pi$, vagyis minél nagyobb a jelszélesség, annál kisebb a sávzélesség és viszont. Más értelmezéssel már jutottunk hasonló eredményre.

F-16. A folytonos idejű, lineáris fázisú aluláteresztő átviteli karakterisztikájának egy közelítése (vö. 3.2-2.2. pont, 2. példa)

$$H(j\omega) = K(\omega) e^{-j\omega\tau}; \quad K(\omega) = 0, \quad |\omega| > \Omega; \quad \tau > 0.$$

(a) Mutassa meg, hogy a $h(t)$ impulzusválasz szimmetrikus a $t = \tau$ egyenesre. Milyen következtetés vonható le ebből?

*(b) Mutassa meg, hogy a rendszer helyettesíthető különböző késleltetési idejű, lineáris fázisú, ideális aluláteresztők párhuzamos kapcsolásával! (Útmutatás. Állítsa elő az amplitúdó-karakterisztikát Fourier-sor alakjában!)

F-17. Egy FI, lineáris fázisú ideális aluláteresztő (3.2-2.1. pont, 2. példa) jellemzői Ω és τ , gerjesztése $u(t) = A \sin \omega_1 t / \omega_1 t$, $\omega_1 > 0$.

Határozza meg a válasz $y(t)$ időfüggvényét!

F-18. Egy FI rendszer gerjesztés-válasz kapcsolata (csúszó átlagot képező rendszer)

$$y(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t u(t) dt, \quad T > 0.$$

Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!

F-19. Egy FI kauzális rendszer átviteli karakterisztikájának adott (a) a valós része, illetve (b) a képzetes része:

$$(a) \Re\{H(j\omega)\} = \frac{5\omega^2 + 75}{\omega^2 + 9}; \quad (b) \Im\{H(j\omega)\} = \frac{-10\omega}{\omega^2 + 9}.$$

Határozza meg elemi megfontolással a rendszer impulzusválaszát! Szükséges-e kikötni, hogy a rendszer kauzális vagy gerjesztés-válasz stabilis legyen?

F-20. A folytonos idejű $u(t)$ gerjesztő jel sávkorlátozott Ω sávkorláttal. A rendszer átviteli karakterisztikáját az $|\omega| < \Omega$ intervallumban Fourier-sorával írjuk le:

$$H(j\omega) = \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_q^C e^{jq\pi\omega/\Omega}.$$

Fejezze ki a rendszer $y(t)$ válaszában $y(p\pi/\Omega)$, $p \in \mathbf{Z}$ mintáit!

***F-21.** A Paley–Wiener-kritérium felhasználásával igazolja a következő két állítást.

(a) Egy véges energiájú FI jel nem lehet sávkorlátozott is és időkorlátozott is.

(b) Egy aluláteresztő típusú, négyzetesen integrálható amplitúdó-karakterisztikájú

FI rendszerre igaz, hogy $K(\omega) \rightarrow C e^{-(\omega/\Omega)^n}$, $\omega \rightarrow \infty$. Egy ilyen rendszer csak $n \leq 1$ esetén lehet kauzális. (Ezért nem kauzális a Gauss-szűrő, amelyre $n = 2$.)

F-22. Egy $u_c(t)$ FI jel sávkorlátozott Ω sávkorláttal. E jel $T = \pi / \Omega$ időközönként vett mintái által meghatározott $u_D[k] = u_c(kT)$ DI jel egy $H_D(e^{j\vartheta})$ átviteli karakterisztikájú DI rendszer gerjesztése.

Fejezze ki a DI rendszer $y_D[k]$ válaszáának kifejezését az $U_C(j\omega)$ spektrum ismeretében!

***F-23.** Jelölje a lineáris fázisú ideális FI aluláteresztő átviteli karakterisztikáját

$$H_a(j\omega) = \{\varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)\} e^{-j\omega\tau}, \tau \geq 0$$

és jelölje impulzusválaszát $h_a(t)$.

Rendeljünk ehhez egy $h(t) = \varepsilon(t) h_a(t)$ impulzusválaszt!

Kauzális-e és gerjesztés-válasz stabilis-e a $h(t)$ impulzusválaszú rendszer?

***F-24.** Oldja meg az előző feladatot, ha

$$H_a(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, |\omega| < \Omega_1; \quad H_a(j\omega) = \frac{\Omega_2 - |\omega|}{\Omega_2 - \Omega_1} e^{-j\omega\tau}, \Omega_1 < |\omega| < \Omega_2;$$

és $H_a(j\omega) = 0, \Omega_2 < |\omega| < \infty$. Ez a lineáris fázisú ideális aluláteresztő egy folytonos függvénnyel történő közelítése.

***F-25.** A sávkorlátozott FI differenciátor átviteli karakterisztikája

$$H(j\omega) = j\omega, |\omega| < \Omega; \quad H(j\omega) = 0, |\omega| > \Omega.$$

Határozza meg e rendszer impulzusválaszát! Kauzális-e és gerjesztés-válasz stabilis-e ez a rendszer?

3.2-2.M. Megoldások

M-1. Mindkét módszerrel azt kapjuk, hogy

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = C \frac{A + (B - Ab)e^{-j\vartheta}}{(1 - be^{-j\vartheta})(1 - ce^{-j\vartheta})}; \quad |b| < 1, |c| < 1.$$

$$\text{FI: } Y(j\omega) = C \frac{(B + A\beta) + jA\omega}{(\beta + j\omega)(\gamma + j\omega)}; \quad \beta > 0, \gamma > 0.$$

Ha az egyenlőtlenségek nincsenek kielégítve, akkor az eredmény nem érvényes, mivel ekkor vagy a rendszer nem GV stabilis, vagy a gerjesztés nem abszolút összegezhető illetve abszolút integrálható.

***M-2.** (a) Ha például $|b| < 1, c = 1$ illetve ha $\beta < 0, \gamma = 0$, akkor mindkét módon

$$\text{DI: } Y(e^{j\vartheta}) = C \left\{ \pi \frac{A + B - Ab}{1 - b} \delta(\vartheta) + \frac{A + (B - Ab)e^{-j\vartheta}}{(1 - e^{-j\vartheta})(1 - be^{-j\vartheta})} \right\}, \quad -\pi < \vartheta < \pi.$$

$$\text{FI: } Y(j\omega) = C \left\{ \pi \frac{B + A\beta}{\beta} \delta(\omega) + \frac{(B + A\beta) + jB\omega}{j\omega(\beta + j\omega)} \right\}.$$

(b) Ha az impulzválasz és a gerjesztés egyaránt tartalmaz állandó összetevőt, akkor a feladatot nem tudjuk megoldani, mert az y egy Mk illetve Mt összetevőt tartalmaz, amelynek Fourier-transzformáltját nem értelmeztük. A frekvenciatartományban formálisan $[\delta(\vartheta)]^2$ illetve $[\delta(\omega)]^2$ összetevő adódik, amelynek jelentése tisztázásra szorul.

M-3. Az $Y(e^{j\vartheta})$ nevezője $(1 - \lambda e^{-j\vartheta})^2$, $|\lambda| < 1$ tényezőt, illetve az $Y(j\omega)$ nevezője $(j\omega - \lambda)^2$, $\Re\{\lambda\} < 0$ tényezőt tartalmaz.

M-4. A $H = \mathcal{F}\{h\}$ számításával

$$H(e^{j\vartheta}) = A \frac{\cos \rho - a \cos(\rho - \Theta) e^{-j\vartheta}}{1 - 2a \cos \Theta e^{-j\vartheta} + a^2 e^{-j2\vartheta}}.$$

$$H(j\omega) = A \frac{(\alpha \cos \rho + \Omega \sin \rho) + \cos \rho (j\omega)}{\alpha^2 + \Omega^2 + 2\alpha(j\omega) + (j\omega)^2}.$$

***M-5.** A 3.2-1.F.9(a) felhasználásával belátható, hogy

$$h[k] = \{\varepsilon[k] - 1\} 2^k = -2^{-1} \delta[k+1] - 2^{-2} \delta[k+2] - \dots; \quad h(t) = \{\varepsilon(t) - 1\} e^{0,5t}.$$

Ezek a rendszerek nem kauzálisak, nevezik antikauzálisnak is őket. A javasolt eljárás nem helyes.

M-6. Ha $\mathcal{M}\{H\} = 0$, akkor h páros jel (3.2-1.4. pont), ezért a „nem” válasz látszik helyesnek. Az $\mathcal{F}\{A \delta[k]\} = A$ illetve az $\mathcal{F}\{A \delta(t)\} = A$ összefüggések mutatják, hogy az $y = Au$ explicit gerjesztés-válasz kapcsolatú, tehát memóriamentes rendszer kauzális és mégis valós átviteli karakterisztikájú.

M-7. Ismert összefüggések felhasználásával adódik, hogy

$$(a) Y(e^{j\vartheta}) = \frac{1 - p e^{-j\vartheta}}{(1 - 2p e^{-j\vartheta} + 0,81 e^{-j2\vartheta})^2}, \quad p \equiv 0,9 \cos \Theta.$$

Ha $\Theta = \pi/2$, akkor $\sigma_U = 9,53$ és $\sigma_Y = \sigma_U^2 = 90,75 > \sigma_U$.

$$(b) Y(e^{j\vartheta}) = 1 - p e^{-j\vartheta}, \quad p = 0,9 \cos \Theta \Rightarrow y[k] = \delta[k] - p \delta[k-1].$$

Ha $\Theta = \pi/2$, akkor $\sigma_U = 9,53$ és $\sigma_Y = 1 < \sigma_U$.

M-8. Használja fel, hogy $H_{\text{felülát}} = 1 - H_{\text{alulát}}$ és $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta[k]$ illetve $\mathcal{F}^{-1}\{1\} = \delta(t)$.

$$h[k] = \delta[k] - \frac{\varrho_c}{\pi} \frac{\sin \varrho_c(k-n)}{\varrho_c(k-n)}; \quad h(t) = \delta(t) - \frac{\omega_c}{\pi} \frac{\sin \omega_c(t-\tau)}{\omega_c(t-\tau)}.$$

Sem a DI, sem a FI rendszer nem kauzális és nem GV stabilis.

M-9. Használja fel, hogy $\int x \cos x \, dx = (\cos ax - ax \sin ax)/a^2$. Ezzel

$$h(t) = \frac{\sin \omega_1 t}{\pi t} - \frac{\cos \omega_2 t - \cos \omega_1 t}{\pi(\omega_2 - \omega_1)t^2}.$$

A rendszer nem kauzális. $h(0) = (\omega_2 - \omega_1)/2\pi$ véges érték.

M-10. A spektrumokat korábban már meghatároztuk.

$$(a) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \alpha \sqrt{\frac{1}{\sigma} - 1} \approx \alpha \frac{1}{\sqrt{\sigma}}; \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 3\alpha.$$

$$(b) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \alpha \sqrt{\frac{1}{\sigma^2} - 1} \approx \alpha \frac{1}{\sigma}; \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 9,95\alpha.$$

Ez a jel nem folytonos, sávszélessége nagyobb az előző jel sávszélességénél.

(c) Az eredmények megegyeznek az (a) szerinti eredményekkel.

(d) Maximum van az $\omega = \alpha$ helyen. Rövid számolással: $\omega_{1,2} = \left\{1 \pm \sqrt{1 - \sigma^2}\right\} \alpha / \sigma$;

$$\Delta\omega = 2\alpha \sqrt{1 - \sigma^2} / \sigma \approx 2\alpha / \sigma, \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 19,9\alpha.$$

$$(e) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 2\alpha \sqrt{\ln(1/\sigma)}, \quad \Delta\omega|_{\sigma=0,1} = 3,03\alpha.$$

M-11. Parseval tétele értelmében

$$E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega, \quad \Delta E_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} |X(j\omega)|^2 d\omega.$$

$$(a) \frac{\Delta E}{E} = \frac{2}{\pi} \left\{ \arctg \sqrt{\frac{1-\sigma}{\sigma}} + \sqrt{\sigma(1-\sigma)} \right\} \approx \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1}{\sigma}} = 0,986.$$

$$(b) \frac{\Delta E}{E} = \arctg \sqrt{\frac{1-\sigma^2}{\sigma}} \approx \frac{2}{\pi} \arctg \frac{1}{\sigma} = 0,936.$$

A (a) esetben az energia valamivel nagyobb része esik a sávszélességbe.

M-12. A jel spektruma

$$X(j\omega) = \frac{\Omega}{(\alpha + j\omega)^2 + \Omega^2} = \frac{\Omega}{(\alpha^2 + \Omega^2 - \omega^2) + j2\alpha\omega}.$$

Az $|X(j\omega)|$ maximuma $\alpha > \Omega$ esetén az $\omega = 0$ helyen, egyébként az $\omega = \sqrt{\Omega^2 - \alpha^2}$ helyen van.

$$(a) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 6,48\Omega. \quad (b) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 4,46\Omega.$$

$$(c) \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = 1,73\Omega. \quad (d) \omega_1 = 0,89\Omega, \quad \omega_2 = 1,09\Omega, \quad \Delta\omega = 0,20\Omega.$$

Minél kisebb α/Ω , annál jobban hasonlít $x(t)$ egy belépő szinuszos jelre, amelynek sávszélessége nulla. Ez fejeződik ki az egyre csökkenő sávszélességekben.

M-13. Helyettesítse a spektrumot a burkolójával! Alább $\text{sinc } \xi \equiv \sin \xi / \xi$.

$$(a) X(j\omega) = 2T \text{sinc } \omega T; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{1}{\sigma T}.$$

$$(b) X(j\omega) = 2T \text{sinc } \omega T e^{-j\omega T_0}; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{1}{\sigma T}.$$

$$(c) X(j\omega) = T \left(\text{sinc } \frac{\omega T}{2} \right)^2; \quad \omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \Delta\omega = \frac{2}{\sqrt{\sigma} T}.$$

$$(d) X(j\omega) = j\omega T^2 \left(\text{sinc } \frac{\omega T}{2} \right)^2; \quad \omega_1 \approx \frac{1,45}{\sigma T}, \quad \omega_2 = \frac{2,76}{\sigma T}, \quad \Delta\omega = \frac{1,31}{\sigma T}.$$

Az utolsó eredmény numerikus számítást igényel.

M-14. Az integrálok számítása nem okoz nehézséget. Mindkét jel spektrumára $\omega_1 = 0$ a logikus választás.

(a) Az $u = \Delta\omega_E / \alpha$ mennyiségre a következő transzcendens egyenlet adódik:

$$\frac{u}{1+u^2} + \text{arctg } u = (1-\eta) \frac{\pi}{2}.$$

Ha $\eta = 0,1$, akkor az egyenlet megoldásával $\Delta\omega_E = 1,36 \alpha$, vagy az F-10. szerinti $\Delta\omega$ sáv szélességgel kifejezve $\Delta\omega_E = 0,45 \Delta\omega$ adódik.

(b) $\Delta\omega_E = \alpha \text{tg} (1-\eta) \frac{\pi}{2}$. Ha $\eta = 0,1$, akkor $\Delta\omega_E = 6,31 \alpha$, vagy az F-10. szerinti $\Delta\omega$ sáv szélességgel kifejezve $\Delta\omega_E = 0,63 \Delta\omega$ adódik.

***M-15.** A jel spektruma valós. Az $\omega = 0$, illetve a $t = 0$ helyettesítést elvégezve

$$X(j0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) dt, \quad x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega.$$

Ezek szorzata a megadott eredményre vezet.

M-16. (a) Az impulzusválasz kifejezése

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} K(\omega) e^{j\omega(t-\tau)} d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\Omega} K(\omega) \cos \omega(t-\tau) d\omega.$$

Ebből látható, hogy ez $t-\tau$ páros függvénye, ami igazolandó volt. Ez azt jelenti, hogy a rendszer biztosan nem kauzális!

(b) Az $|\omega| < \Omega$ tartományban értelmezett $K(\omega)$ függvényt tekintsük periodikusnak 2Ω periódushosszal. A Fourier-sor (komplex) együtthatói

$$C_p = \frac{1}{2\Omega} \int_{-\Omega}^{\Omega} K(\omega) e^{-jp\omega(2\pi/2\Omega)} d\omega = \frac{1}{\Omega} \int_0^{\Omega} K(\omega) \cos \left(p \frac{\pi}{\Omega} \omega \right) d\omega.$$

Ezek ismeretében és a $p_{\Omega}(\omega) \equiv \varepsilon(\omega + \Omega) - \varepsilon(\omega - \Omega)$ jelölést használva

$$H(j\omega) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p p_{\Omega}(\omega) e^{-j\omega(\tau - p\pi/\Omega)}.$$

A sor egyes tagjai ideális aluláteresztőket jellemeznek $\varphi_p(\omega) = -\omega(\tau - p\pi/\Omega)$ lineáris fázis-karakterisztikával vagyis $\tau_p(\omega) = \tau - p\pi/\omega_c$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ állandó futási idő karakterisztikával.

M-17. A gerjesztés ω_1 sávkorlátú, a válasz $\min(\omega_1, \Omega)$ sávkorlátú. Ennek alapján:

$$\begin{aligned} \omega_1 < \Omega: \quad y(t) &= A \frac{\sin \omega_1(t - \tau)}{\omega_1(t - \tau)}; \\ \Omega < \omega_1: \quad y(t) &= A \frac{\Omega \sin \Omega(t - \tau)}{\omega_1 \Omega(t - \tau)}. \end{aligned}$$

M-18. A gerjesztés-válasz kapcsolat deriváltja $T y'(t) = u(t) - u(t - T)$. Ebből már következik, hogy $H(j\omega) = \{1 - e^{-j\omega T}\} / j\omega T = \sin(\omega T/2) e^{-j\omega T/2}$.

M-19. Az impulzusválasz páros, illetve páratlan összetevőjének kifejezése

$$\begin{aligned} (a) \quad h^{(e)}(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{R}e \{ H(j\omega) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ 5 + 5 \frac{6}{\omega^2 + 9} \right\} = 5 \delta(t) + 5 e^{-3|t|}, \\ (b) \quad h^{(o)}(t) &= \mathcal{F}^{-1} \{ j \mathcal{I}m \{ H(j\omega) \} \} = \mathcal{F}^{-1} \left\{ -\frac{5}{3} j \omega \frac{6}{\omega^2 + 9} \right\} = \left\{ -\frac{5}{3} e^{-3|t|} \right\}'. \end{aligned}$$

Mivel a rendszer kauzális, ezért (a Dirac-impulzus összetevőt nem kell 2-vel szorozni!)

$$\begin{aligned} (a) \quad h(t) &= 5\delta(t) + 10 \varepsilon(t) e^{-3t}, \\ (b) \quad h(t) &= A \delta(t) + 10 \varepsilon(t) e^{-3t}, \end{aligned}$$

ahol az A tényező tetszőleges (nem határozható meg). A kauzalitás kikötése nélkül a feladat nem oldható meg. A GV stabilitást nem kell kikötnünk, de racionális átviteli karakterisztika esetén a kauzális rendszer GV stabilis.

M-20. A sávkorlátozott gerjesztőjel időfüggvénye, illetve spektruma

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) \frac{\sin \Omega(t - k\pi/\Omega)}{\Omega(t - k\pi/\Omega)}, \\ U(j\omega) &= \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jk\pi\omega/\Omega}. \end{aligned}$$

A sávkorlátozott válasz spektruma $Y(j\omega) = H(j\omega)U(j\omega)$, vagyis

$$\begin{aligned} Y(j\omega) &= \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{r=-\infty}^{\infty} y \left(r \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jr\pi\omega/\Omega} = \\ &= \left\{ \sum_{q=-\infty}^{\infty} H_q^C e^{jq\pi\omega/\Omega} \right\} \left\{ \frac{\pi}{\Omega} p_{\Omega}(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} u \left(k \frac{\pi}{\Omega} \right) e^{-jk\pi\omega/\Omega} \right\}. \end{aligned}$$

A jobb oldalon csak az $r = k - q$, vagyis a $q = k - r$ sorszámúak veendőek figyelembe, így

$$y\left(r \frac{\pi}{\Omega}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} H_{k-r}^C u\left(k \frac{\pi}{\Omega}\right), \quad r \in \mathbf{Z}.$$

E konvolúciós típusú összeg számításához csak a gerjesztés mintáit kell ismernünk.

***M-21.** (a) Tételezzük fel, hogy létezik egy véges energiájú sávkorlátozott és időkorlátozott jel. Az időkorlátozott jelleg miatt erre a jelre és késeltetett megfelelőjére is alkalmazható a Paley–Wiener-kritérium. A két jel amplitúdó-spektruma megegyezik, de fázis-spektruma különböző, ami ellentmond a kritériumnak.

(b) Ha $\omega \rightarrow \infty$, akkor $|\ln K(\omega)| \rightarrow (\omega/\Omega)^n$, $|\ln K(\omega)|/\omega^2 \rightarrow \omega^{n-2}/\Omega^n$. Ennek integrálja $n > 1$ esetén nem konvergens.

M-22. A DI jel spektrális alakja

$$u_D[k] = u_C(kT) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} U_C(j\omega) e^{jk\omega T} d\omega = \frac{1}{2\pi T} \int_{-\pi}^{\pi} U_C\left(j\frac{\vartheta}{T}\right) e^{jk\vartheta} d\vartheta.$$

Ebből látható, hogy $T U_D(e^{j\vartheta}) = U_C(j\vartheta/T)$. Ebből következően

$$y_D[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_D(e^{j\vartheta}) \frac{1}{T} U_C\left(j\frac{\vartheta}{T}\right) e^{j\vartheta k} d\vartheta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{\Omega} H_D(e^{j\omega T}) U_C(j\omega) e^{j\omega T} d\omega.$$

***M-23.** A 3.2-2.2. pont 2. példájából következően $h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \varepsilon(t) \frac{\sin \Omega(t-\tau)}{\Omega(t-\tau)}$. A rendszer kauzális, de nem GV stabilis, noha $\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$.

***M-24.** Az impulzusválasz

$$\begin{aligned} h_a(t) &= \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_0^{\Omega_2} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega + \int_{\Omega_1}^{\Omega_2} \frac{\Omega_2 - \omega}{\Omega_2 - \Omega_1} e^{j\omega(t-\tau)} d\omega \right\} = \\ &= \frac{\cos \Omega_1 t - \cos \Omega_2 t}{\pi(\Omega_2 - \Omega_1)t^2} \equiv \frac{\Omega_2 + \Omega_1}{2\pi} \frac{\sin((\Omega_2 + \Omega_1)t/2)}{(\Omega_2 + \Omega_1)t/2} \frac{\sin((\Omega_2 - \Omega_1)t/2)}{(\Omega_2 - \Omega_1)t/2}. \end{aligned}$$

Ha $\Omega_2 \rightarrow \Omega_1$, akkor $h_a(t)$ az előző feladatbeli $h_a(t)$ impulzusválaszhoz tart, amint lennie is kell. A $h(t) = \varepsilon(t) h_a(t)$ impulzusválaszú rendszer kauzális és GV stabilis, mivel $h(t) \sim 1/t^2$, ha $t \rightarrow \infty$.

***M-25.** Akár inverz Fourier-transzformációval, akár a lineáris fázisú ideális aluláteresztő impulzusválaszának differenciálásával

$$h(t) = \frac{\Omega t \cos \Omega t - \sin \Omega t}{\pi t^2} = \frac{\Omega}{\pi} \left\{ \frac{\sin \Omega t}{\Omega t} \right\}'.$$

Az impulzusválasz természetesen páratlan függvény. A rendszer nem kauzális és nem GV stabilis.

3.3. Hálózatanalízis a frekvenciatartományban

Egy rendszer reprezentálható hálózattal is (1.3. fejezet). Ebben a fejezetben lineáris, invariáns jelfolyam hálózatokra szorítkozunk, amelyek lineáris, invariáns, kauzális (és folytonos idejű esetben: differenciális) rendszereket reprezentálnak. Célunk a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának meghatározása vagy ennek rögzített frekvencián felvett értékének (vagyis az átviteli együtthatónak) a számítása.

A feladat megoldásának három különböző módszerét fogjuk tárgyalni.

Az első módszer szerint meghatározzuk a hálózat által reprezentált rendszer valamilyen időtartománybeli leírását (impulzusválasz, rendszeregyenlet, állapotváltozós leírás), amint a 2.4. fejezetben láttuk. Ebből az átviteli karakterisztika a 3.1. és 3.2. fejezetben (3.1-1.4., 3.1-1.5. és 3.2-2.2. pont) tárgyalt módon már meghatározható.

A második módszer alkalmazása során a hálózatanalízist a komplex frekvenciatartományban végezzük el, majd (a stabilitás ellenőrzése után) változócserevel kapjuk az átviteli karakterisztikát. Ezt a nagyon hatékony módszert a 4.3 fejezetben fogjuk tárgyalni. Ott foglalkozunk az inverz feladattal, vagyis olyan jelfolyam hálózat előállításával, amelynek adott az átviteli karakterisztikája vagy az átviteli függvénye. Ezt a feladatot már most is tárgyalhatnánk, de az ismétlés elkerülése érdekében későbbre halasztjuk. Aki a 4. részt is át kívánja tanulmányozni, az a 3.3. fejezetet ki is hagyhatja.

A harmadik módszer alkalmazásakor a hálózati egyenleteket közvetlenül a frekvenciatartományban írjuk fel. Megoldásuk szolgáltatja az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót. Ezt a módszert részletezzük ebben a fejezetben. Ez a módszer elsősorban akkor lehet célszerű, ha az átviteli együtthatót akarjuk meghatározni egy vagy néhány frekvencián. Az így adódó eredmény azonban csak akkor szolgáltatja az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót, ha a rendszer GV stabilis, ami előzetes stabilitásvizsgálatot igényel. A következő fejezetben látni fogjuk, hogy a stabilitásvizsgálat az átviteli karakterisztika alapján is elvégezhető, de az átviteli együttható (egy komplex érték) ismeretében nem tudjuk eldönteni, hogy az értelmes eredményt jelent-e.

A 3.3-1. szakaszban a jelfolyam hálózatok frekvenciatartománybeli általános törvényeit tárgyaljuk. Itt értelmezzük az elemi komponensek karakterisztikájának és az összekapcsolási kényszereket kifejező egyenletek frekvenciatartománybeli alakját.

A 3.3-2. szakaszban a hálózat egyenletek megoldásával, konkrétan a hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának vagy átviteli együtthatójának számításával foglalkozunk.

3.3-1. Általános törvények

3.3-1.1. Elemi komponensek

A lineáris, invariáns, kauzális jelfolyam hálózatok elemi komponenseit a 2.4-1.1. pontban már értelmeztük. Az időtartománybeli karakterisztikákból már következnek a *frekvenciatartománybeli karakterisztikák*. Ezeket két módon is előállíthatjuk: vagy a szinuszos gerjesztéshez tartozó szinuszos válasz meghatározásával, vagy pedig az időtartománybeli karakterisztika Fourier-transzformáltjának képzésével. Az első módszerrel vagy az átviteli együtthatót kapjuk meg (ekkor a frekvenciát adotttnak tekintjük), vagy az átviteli karakterisztikát (ekkor a frekvenciát paraméterként kezeljük).

Négy *elemi komponens*t értelmeztünk. A bemeneti változó jele p , a kimeneti változó jele q . A (2.4-1) értelmében az elemi komponensek időtartománybeli karakterisztikája:

	DI komponens:	FI komponens:
forrás	$q[k] = u[k]$	$q(t) = u(t)$
nyelő	$p[k] = y[k]$	$p(t) = y(t)$
erősítő	$q[k] = K p[k]$	$q(t) = K p(t)$
DI késleltető	$q[k] = p[k-1]$	—
FI integrátor	—	$q(t) = \int_{-\infty}^t p(\tau) d\tau$

(3.3-1)

Mint eddig is: u jelöli az adott gerjesztést, y jelöli a keresett választ.

Jelölje az i -edik *forrás* frekvenciatartománybeli változóját U_i . Ennek jelentése a **rögzített** frekvencián vagy a frekvenciát változóként kezelve

$$\begin{aligned} \text{DI: } u_i[k] &= \Re\{ \bar{U}_i e^{i\omega k} \} \quad \text{vagy} \quad u_i[k] = \mathcal{F}^{-1} \{ U_i(e^{j\omega}) \}, \\ \text{FI: } u_i(t) &= \Re\{ \bar{U}_i e^{j\omega t} \} \quad \text{vagy} \quad u_i(t) = \mathcal{F}^{-1} \{ U_i(j\omega) \}. \end{aligned} \quad (3.3-2)$$

Az i -edik *nyelő* frekvenciatartománybeli változóját jelölje Y_i . Ez a keresett mennyiség. Értelmezése a (2) szerintivel analóg.

Az i -edik *erősítő* erősítését jelölje K_i ; frekvenciatartománybeli bemeneti változóját jelölje P_i , kimeneti változóját jelölje Q_i , ezek ismeretlenek. Kapcsolatuk az időtartománybeli karakterisztika értelmében

$$\text{erősítő: } Q_i = K_i P_i. \quad (3.3-3)$$

Részletesebben: rögzített frekvencián $\bar{Q}_i = K_i \bar{P}_i$, míg a frekvencia függvényében DI illetve FI esetben $Q_i(e^{j\omega}) = K_i P_i(e^{j\omega})$ illetve $Q_i(j\omega) = K_i P_i(j\omega)$. Ugyanígy értelmezhetők a további egyenletek is, de azoknak csak a (3) rövid alakját adjuk meg.

Az i -edik DI *késleltető* frekvenciatartománybeli bemeneti, illetve kimeneti változóját jelölje egyelőre P_i illetve Q_i . Ezek ismeretlenek, kapcsolatuk az időtartománybeli karakterisztika értelmében

$$\text{DI késleltető: } Q_i = e^{-j\omega} P_i \Rightarrow P_i = e^{j\omega} Q_i. \quad (3.3-4)$$

A FI integrátor karakterisztikájának meghatározása mindkét felfogásban körülményes. Ezt megkerülhetjük, ha az időtartománybeli karakterisztika idő szerinti deriváltját képezzük. Ekkor az időfüggvények és transzformáltjuk kapcsolata

$$\text{FI integrátor: } q_i' = p_i, \quad j\omega Q_i = P_i. \quad (3.3-5)$$

Ez az eljárás jogosult, ha az integrátort tartalmazó hálózat stabilis.

Az egyszerűség és az egyöntetűség érdekében járjunk el a következőképpen.

Jelölje az i -edik DI *késleltető* illetve FI *integrátor* frekvenciatartománybeli *kimeneti változóját* X_i , akkor az ismeretlen bemeneti változó frekvenciatartománybeli kifejezése DI késleltető esetén $e^{j\vartheta} X_i$, míg FI integrátor esetén $j\omega X_i$:

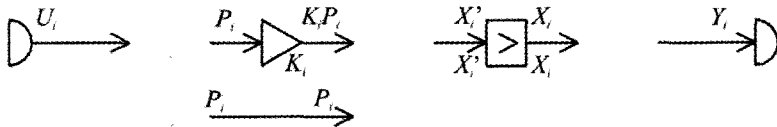
$$\text{DI késleltető: } e^{j\vartheta} X_i \Rightarrow X_i; \quad \text{FI integrátor: } j\omega X_i \Rightarrow X_i. \quad (3.3-6)$$

A DI késleltető frekvenciatartománybeli karakterisztikáját úgy is felírhatjuk, hogy bemeneti változójára például a V_i jelet alkalmazzuk, ekkor kimeneti változója $e^{-j\vartheta} V_i$, vagyis (6) helyére $V_i \Rightarrow e^{-j\vartheta} V_i$ írandó. Az első módszer alkalmazásakor az átviteli karakterisztika $e^{j\vartheta}$ hatványait, a második módszer alkalmazásakor $e^{-j\vartheta}$ hatványait fogja tartalmazni.

Forrással és nyelővel kiegészítve az erősítő és a DI késleltető stabilis rendszernek, a FI integrátor nem stabilis rendszernek tekinthető.

A továbbiakban P_i többnyire az i -edik erősítő frekvenciatartománybeli bemeneti változóját jelöli, esetleg valamilyen nem elemi komponens frekvenciatartománybeli bemeneti változóját.

A hálózategyenletek felírása során az 1. ábrán látható módon csak a következő változókat alkalmazzuk: U_i, P_i, X_i, Y_i . Mivel többnyire csak egy-gerjesztésű, egy-válaszú rendszert reprezentáló hálózatot vizsgálunk, ezért az U és Y jelölés elegendő. A P_i változóknak csak egy részét (esetleg egyet sem) vezetünk be, tehát többnyire elegendő az U, Y és X_i változók alkalmazása, amint a példák során látni fogjuk.



3.3-1. ábra A lineáris jelfolyam hálózat elemi komponensei és frekvenciatartománybeli karakterisztikájuk: forrás, erősítő (erősítő 1 erősítéssel), DI késleltető vagy FI integrátor és nyelő

A rögzített frekvencián értelmezett komplex amplitúdókra vonatkozó karakterisztikák és a frekvencia függvényeként értelmezett spektrumokra vonatkozó karakterisztikák formailag megegyeznek. A tényleges számítás során természetesen más a helyzet attól függően, hogy ϑ illetve ω adott valós értéket (és ennek megfelelően $e^{j\vartheta}$ komplex illetve $j\omega$ képzetes *számot*) jelent, vagy ϑ illetve ω valós változót jelent és ennek megfelelően a frekvenciatartománybeli változók e valós változó komplex értékű függvényei.

3.3-1.2. Összekapcsolási szabályok és kényszerek

Az összekapcsolási szabályokat, valamint az összekapcsolásból a változókra adódó kényszereket az időtartományban már megfogalmaztuk (2.4-1.2. pont). Ezek a frekvenciatartományban formálisan változatlanok maradnak: minden időfüggvényt a megfelelő komplex amplitúdóval vagy spektrummal kell helyettesítenünk. Emlékeztetőül:

összegező csomópont: az egyetlen $Y_i, P_i, e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_i$ jelű, a csomópontból kilépő változó megegyezik az U_r, K_r, P_r, X_r jelű, a csomópontba belépő változók összegével;

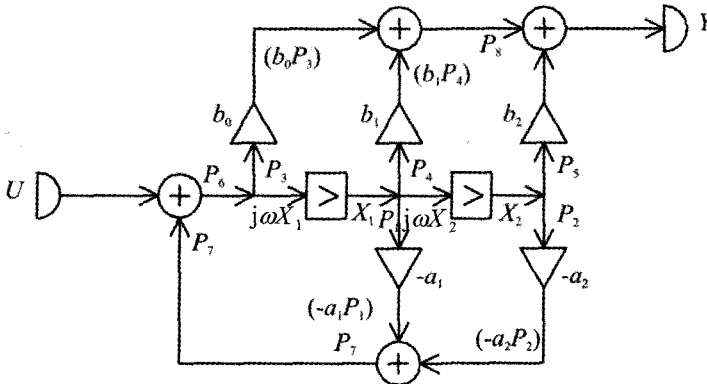
szétágazó csomópont: valamennyi $Y_i, P_i, e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_r$ jelű, a csomópontból kilépő (kimeneti típusú) változó megegyezik az egyetlen U_r, K_r, P_r, X_r jelű, a csomópontba belépő (bemeneti típusú) változóval.

Példa A 2. ábrán látható FI hálózatra vonatkozó összekapcsolási kényszerek: szétágazó csomópontok:

$$P_1 = X_1, \quad P_2 = X_2, \quad P_3 = P_6, \quad P_4 = X_1, \quad P_5 = X_2, \quad j\omega X_1 = P_6, \quad j\omega X_2 = X_1;$$

összegező csomópontok:

$$P_6 = P_7 + U, \quad P_7 = -a_1 P_1 - a_2 P_2, \quad P_8 = b_0 P_3 + b_1 P_4, \quad Y = b_2 P_5 + P_8.$$



3.3-2. ábra Egyszerű FI jelfolyam hálózat frekvenciatartománybeli változói

A gyakorlatban nem vezetünk be ennyi ismeretlent és ennek megfelelően nincs szükség ennyi egyenletre sem. Itt csak azt akartuk illusztrálni, hogy a 11 bevezetett ismeretlenre (az $5 + 3 = 8$ erősítő bemeneti változója, a két integrátor kimeneti változója és 1 válasz) éppen 11 lineáris algebrai egyenletet tudunk felírni. Ami a konkrét hálózatot illeti: a két felső összegező csomópontot is és a két alsó összegező csomópontot is összevonhatjuk egyetlen összegező csomópontba (a P_8 és a P_7 változó feleslegessé válik). A következő szakaszban látni fogjuk, hogy a számítás többnyire még egyszerűbbé tehető.

A példa FI hálózatra vonatkozott. Ha DI hálózatról lenne szó, akkor $j\omega$ helyére $e^{j\omega}$ írandó, egyébként az egyenletek azonosak. Kicsit bonyolultabb lenne a helyzet, ha a DI esetben a késleltetőeknek nem a kimeneti, hanem a bemeneti változóját alkalmaztuk volna. #

*3.3-1.3. Általánosabb komponensek

Az előző pontban olyan hálózatokról volt szó, amelyek legfeljebb egy bemeneti és legfeljebb egy kimeneti változóval bíró elemi komponensek összekapcsolásából állnak. Az általánosítás két irányban lehetséges.

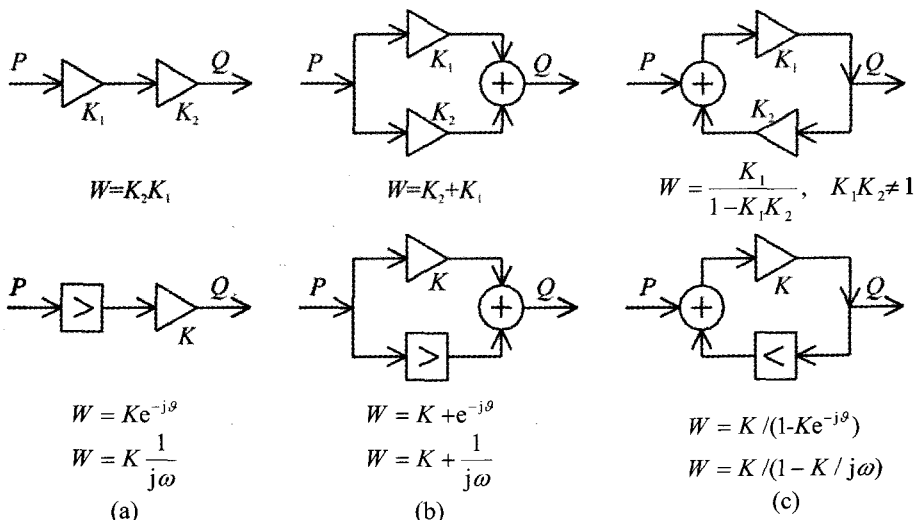
Valamely P_i bemeneti és Q_i kimeneti változóval bíró *összetett* (azaz nem elemi) lineáris, invariáns *komponens* a frekvenciatartományban

$$Q_i = W_i P_i \quad (3.3-7)$$

karakterisztikával jellemezhető. Rögzített frekvencia esetén W_i egy komplex mennyiség, ekkor az elemi komponens megkülönböztetés csak fogalmi és nem számítástechnikai. Általánosan $W_i(e^{j\theta})$ illetve $W_i(j\omega)$ a körfrekvencia egy komplex értékű függvénye. Az elemi komponensek karakterisztikája ennek speciális esete, például az erősítőre $W_i = K_i$.

A W_i értéket (a W_i függvényt) vagy az objektum alapján határozzuk meg akár fizikai megfontolások akár mérési eredmények alapján (ez nem tárgyá vizsgáldásainknak) vagy elemi komponensek összekapcsolásából álló részhálózattal modellezzük. Az utóbbi esetben W_i számítása ugyanúgy történhet, mint a rendszer átviteli karakterisztikájának vagy együtthatójának számítása (l. a következő szakaszt). Néhány egyszerű példa látható a 3. ábrán. Az ott megadott összefüggések ellenőrzését az Olvasóra bizzuk, ezek a hálózategyenletek felírása és megoldása alapján akár fejben is elvégezhető. Előfordulhat, hogy az ábrán megadott szabályok ismételt alkalmazásával sikerül a hálózatot annyira egyszerűsíteni, hogy csak a gerjesztés (a forrás) és a válasz (a nyelő) marad, a komponens pedig a vizsgált rendszer.

Az általánosított komponens fogalma mutatja, hogy a rendszer és a hálózat közötti különbség nem igazán jelentős, mint azt eddig is láttuk



3.3-3. ábra Két elemi komponens helyettesítése egyetlen általánosított vagy elemi komponenssel: (a) kaszkád (más néven: soros) kapcsolás; (b) párhuzamos kapcsolás; (c) visszacsatolt struktúra

Az általánosítás második lehetőségét a 2.4-3.1. pontban már tárgyaltuk. Egy n_p számú bemeneti és n_q számú kimeneti változós lineáris, invariáns komponens

helyettesíthető $n_p \times n_Q$ számú, egy bemeneti és egy kimeneti változós komponens összekapcsolásával. A frekvenciatartománybeli karakterisztika

$$Q_i = \sum_{r=1}^{n_p} W_{ir} P_r; i = 1, 2, \dots, n_Q. \quad (3.3-8)$$

A W_{ir} mennyiségek lehetnek állandó komplex értékek vagy a frekvencia függvényei. Utóbbi esetben W_{ir} rendszerint $e^{j\omega}$ illetve $j\omega$ racionális függvénye.

A továbbiakban ezért csak egy bemeneti és egy kimeneti változós lineáris komponensekkel foglalkozunk.

Érdeemes megemlíteni, hogy míg az időtartományban időben változó erősítések esetére sem jelent nehézséget az hálózategyenletek előállítását (a megoldás természetesen bonyolultabb), ez az általánosítás a frekvenciatartományban bonyodalmakra vezet.

3.3-1.F. Feladatok

F-1. Tekintsen egy K erősítésű DI illetve FI erősítőt.

Igaz-e, hogy a kimeneti változó spektruma kifejezhető a bemeneti változó spektrumának K -szorosaként?

F-2. Tekintsünk egy DI késleltetőt illetve egy FI integrátort. A bemeneti változó spektruma ismert.

Igaz-e, hogy a kimeneti változó spektruma kifejezhető mint a bemeneti változó spektrumának és $e^{-j\omega}$ illetve $1/j\omega$ szorzata?

F-3. Rajzolja fel a 2. ábrán látható hálózatot úgy, hogy csak két összegező csomópontot tartalmazzon! Írja fel a hálózati egyenleteket úgy, hogy azokban csak az erősítők bemeneti és a dinamikus komponensek kimeneti változói szerepeljenek!

***F-4.** Cserélje fel az erősítő és a dinamikus komponens szerepét a 3. ábra alsó sorában és határozza meg az összetett komponens átviteli karakterisztikáját!

***F-5.** Helyettesítse a 3. ábra felső sorában a két erősítőt két DI késleltetővel illetve két FI integrátorral. Határozza meg az összetett komponens átviteli karakterisztikáját!

***F-6.** Egy két bemeneti és két kimeneti változós összetett FI komponens (vagy rendszer) karakterisztikája

$$Q_1(j\omega) = K_{11} P_1(j\omega) + \frac{K_{12} j\omega}{j\omega - K_{12}} P_2(j\omega),$$

$$Q_2(j\omega) = \left(K_{21} + \frac{1}{j\omega} \right) P_1(j\omega) + K_{22} \frac{1}{j\omega} P_2(j\omega).$$

Állítson elő egy olyan kapcsolást, amely csak elemi komponenseket tartalmaz és a megadott karakterisztikával rendelkezik.

(Útmutatás. Használja fel a 3. ábrán megadott összefüggéseket!)

3.3-1.M. Megoldások

M-1. Igen, ha $\mathcal{F}\{p\}$ létezik. Ekkor $\mathcal{F}\{q\}$ is létezik. Hallgatólagosan feltételeztük, hogy K állandó. Ha az erősítés az időtől függ, akkor az állítás nem igaz.

M-2. A DI esetben a kimeneti változó spektruma biztosan kifejezhető így, a FI esetben azonban nem feltétlenül.

Ennek illusztrálásra legyen az integrátor bemeneti változója $p(t) = \delta(t)$, $P(j\omega) = 1$. A kimeneti változó ekkor $q(t) = \varepsilon(t)$ és ennek Fourier-transzformáltja – mint a 3.1-1.2. pontban láttuk – nem $P(j\omega)/j\omega = 1/j\omega$, hanem még egy $\delta(\omega)$ összetevőt is tartalmaz. Ennek az a magyarázata, hogy a DI késleltető egy stabilis rendszer, a FI integrátor azonban nem az.

M-3. A szétágazó csomópontokra vonatkozó hét változatlan egyenlet, továbbá a $P_6 = -a_1 P_1 - a_2 P_2 + U$, $Y = b_0 P_3 + b_1 P_4 + b_2 P_5$ egyenletek. Kilenc ismeretlen változó szerepel a kilenc egyenletben.

***M-4.** Cseréljük fel K és $e^{-j\vartheta}$ illetve $j\omega$ szerepét. A W változatlan a kaszkád és a párhuzamos kapcsolásra, míg a visszacsatolt struktúrára

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-j\vartheta}}{1 - K e^{-j\vartheta}} \equiv \frac{1}{e^{j\vartheta} - K}; \quad W(j\omega) = \frac{1/j\omega}{1 - K/j\omega} \equiv \frac{1}{j\omega - K}.$$

***M-5.** Kaszkád kapcsolás:

$$W(e^{j\vartheta}) = e^{-j2\vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2} \equiv -\frac{1}{\omega^2}.$$

Párhuzamos kapcsolás:

$$W(e^{j\vartheta}) = 2e^{-j\vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{2}{j\omega}.$$

Visszacsatolt struktúra:

$$W(e^{j\vartheta}) = \frac{e^{-j\vartheta}}{1 - e^{-j2\vartheta}} \equiv -j \frac{1}{2 \sin \vartheta}; \quad W(j\omega) = \frac{1/j\omega}{1 - (1/j\omega)^2} \equiv \frac{-j\omega}{\omega^2 + 1}.$$

***M-6.** A W_{11} egy erősítővel realizálható. A W_{12} egy visszacsatolt struktúrával realizálható: előrevezető erősítővel, visszavezető integrátorral. A W_{21} egy erősítő és egy integrátor párhuzamos kapcsolásával realizálható. A W_{22} egy erősítő és egy integrátor kaszkád kapcsolásával realizálható. E négy komponenszt a már látott módon úgy kell összekapcsolni, hogy W_{11} és a W_{21} átviteli karakterisztikájú komponens bemeneti változója a P_1 legyen, a W_{12} és a W_{22} átviteli karakterisztikájú komponens bemeneti változója a P_2 legyen, továbbá a Q_1 változó a W_{11} és a W_{12} átviteli karakterisztikájú komponens kimeneti változójának az összege, a Q_2 változó a W_{21} és a W_{22} átviteli karakterisztikájú komponens kimeneti változójának az összege legyen.

A 4., 5. és 6. feladattal kapcsolatban megjegyezzük, hogy egy hálózati komponens karakterisztikáját számítottuk. Eredményeink akkor alkalmazhatók, ha e komponensek egy stabilis hálózatba vannak ágyazva.

3.3-2. Az átviteli karakterisztika számítása

3.3-2.1. Elemi megfontolások

A hálózat kapcsolási rajzának ismeretében meg tudjuk határozni a hálózat által reprezentált rendszer H átviteli karakterisztikáját vagy átviteli együtthatóját. Egy gerjesztésű, egy válaszú rendszerre szorítkozunk, de az általánosítás kézenfekvő.

Fejezzük ki az összekapcsolási kényszereket a frekvenciatartományban úgy, hogy azokban szerepeljen az U gerjesztés, az Y válasz és szükség szerint egyes DI késleltetők illetve FI integrátorok X_i kimeneti változója (ezek bemeneti változója $e^{j\omega} X_i$ illetve $j\omega X_i$), egyes erősítők P_i bemeneti változója (ezek kimeneti változója $K_i P_i$). Utóbbiakra rendszerint egyáltalában nincs szükség. Ily módon annyi lineáris egyenletet kapunk, amennyi a bevezetett ismeretlen változók száma. A lineáris egyenletrendszer megoldása adja a $H=Y/U$ átviteli karakterisztikát vagy átviteli együtthatót. Egyszerű hálózatokra esetleg egyetlen egyenlet felírása és megoldása is elegendő lehet.

Ha a frekvenciatartománybeli változókat a frekvencia függvényeként kezeljük, akkor az *átviteli karakterisztikát* kapjuk. Ezt a következőkben egyszerű példákön illusztrálni fogjuk.

Ha a frekvenciát rögzítettnek tekintjük, akkor a változók ismeretlen komplex számok. Ekkor egy numerikus egyenletrendszert kell megoldanunk és eredményül az illető frekvenciára vonatkozó *átviteli együtthatót* kapjuk. Gyakran csak erre van szükségünk (például szinuszos gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasz számítása során). Más esetekben véges számú frekvenciára vonatkozó átviteli együttható számítására van szükségünk (például Fourier-sorával adott periodikus gerjesztéshez tartozó gerjesztett válasz számítása során). Ez a módszer felhasználható az *átviteli karakterisztika* közelítő számítására is, hiszen ha elég sok pontban ismerjük értékét, akkor gyakorlatilag minden pontban ismertnek tekinthető. A DI esetben egyszerűbb a helyzet, hiszen ekkor csak a $0 \leq \vartheta < \pi$ intervallumot kell vizsgálni. A FI esetben ki kell valahogyan jelölni azt a $0 \leq \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2$ intervallumot, amelybe eső frekvenciákra a számítást elvégezzük. Rendszerint az intervallumot egyenletesen célszerű beosztani, de lehet más (például logaritmikus) beosztás a célszerű.

Akármilyen módon végezzük el a számítást, ne feledkezzünk el arról, hogy annak eredménye csak akkor jelenti az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót, ha a hálózat GV stabilis rendszert reprezentál.

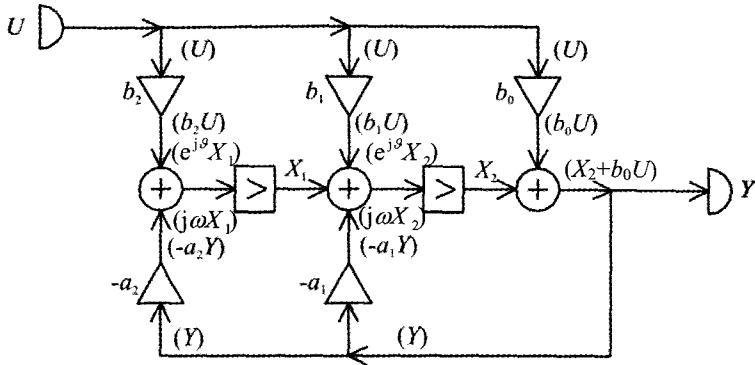
1. példa Határozzuk meg annak a rendszernek az átviteli karakterisztikáját, amelynek egy hálózati reprezentációja a 4. ábrán látható (vö. 2.4-6. ábra).

Az U és Y változón kívül bevezettük az X_1 és X_2 változót is. A többi változót kifejeztük a szétágazó csomópontok és az erősítések alapján. Figyeljük meg, hogy Y két erősítőnek bemeneti kimeneti változója. A három ismeretlen változóra vonatkozó egyenletrendszer az összegező csomópontok alapján a FI esetben

$$\begin{aligned} j\omega X_1 &= -a_2 Y + b_2 U, \\ j\omega X_2 &= X_1 - a_1 Y + b_1 U, \\ Y &= X_2 + b_0 U. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásával (például X_1 majd X_2 kiküszöbölésével) kapjuk, hogy

$$H(j\omega) \equiv \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{b_0 (j\omega)^2 + b_1 (j\omega) + b_2}{(j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_2}.$$



3.3-4. ábra Az átviteli karakterisztika számítása valamennyi X_i változó bevezetésével

A DI esetben $j\omega$ helyére $e^{j\omega}$ írandó.

Korábbi vizsgálataink szerint ez az eredmény helyes, de csak akkor tekinthető átviteli karakterisztikának, ha az a_1 és a_2 együtthatók eleget tesznek a stabilitási követelményeknek (például a FI esetben mindkettő pozitív).

Ha a_1 és a_2 numerikusan adott és az átviteli együtthatót egyetlen frekvencián akarjuk számítani, akkor a numerikus megoldás érdekében legyen $U = 1$ és ekkor $Y = H$, amivel a megoldandó lineáris egyenletrendszer mátrixos alakban

$$\begin{bmatrix} j\omega & 0 & a_2 \\ -1 & j\omega & a_1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix}.$$

Különböző ω értékeket választva megkapjuk H értékét az illető frekvencián. Értelem szerinti az eljárás a DI esetben. Ne felejtsük el, hogy numerikus eredményünk (például $\omega = 12$ esetén $\bar{H} = 3e^{j20^\circ}$) csak akkor fogadható el az átviteli együttható értékének, ha meggyőződünk a hálózat stabilitásáról, hiszen az eredményből ez nem következtethető ki.

Ebben a speciális esetben egyetlen egyenlet felírásával és megoldásával is megoldható a feladat. Némi figyelemmel belátható, hogy

$$Y = b_0 U + \frac{1}{j\omega} \left\{ b_1 U - a_1 Y + \frac{1}{j\omega} [b_2 U - a_2 Y] \right\}.$$

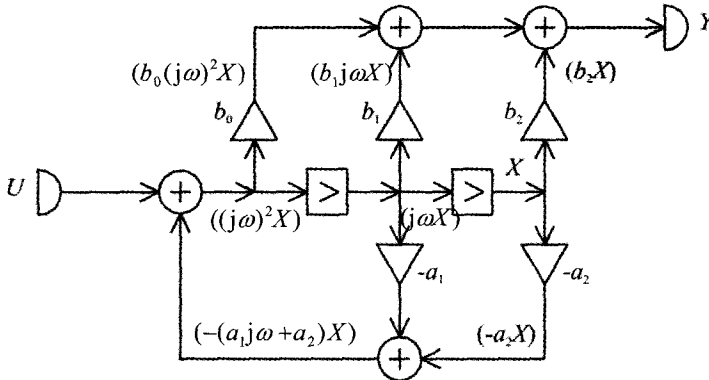
Rendezés után a már megadott kifejezés adódik az átviteli karakterisztikára. #

2. példa Határozzuk meg azon rendszer átviteli karakterisztikáját, amelynek egy hálózati reprezentációja az 5. ábrán látható (vö. 2.4-7. ábra).

Most csak egyetlen X segédváltozót vezetünk be. A bal oldali dinamikus komponens bemeneti változójának valamint a válasz kifejezése a FI esetben

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 X &= U - (a_1 j\omega + a_2) X, \\ Y &= [b_0 (j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_2] X. \end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldásával ugyanaz az átviteli karakterisztika adódik, mint az előző példában. Ebből következik, hogy a két hálózat ugyanazt a rendszert reprezentálja (vagy realizálja), mint azt korábban már megállapítottuk.



3.3-5. ábra Hálózat átviteli karakterisztikájának számítása csak egy X változó bevezetésével

Ebben az esetben csak nehezen lehetne a feladatot egyetlen egyenlet felírására redukálni. #

3.3-2.2. Regularitás és stabilitás

Ha a vizsgált hálózat reguláris és stabilis, akkor az általa reprezentált rendszer átviteli karakterisztikája értelmezett.

Az a célszerű, ha hálózat regularitásról és stabilitásáról meggyőződünk még az átviteli karakterisztika számítása előtt. A stabilitás eldöntésében segít, ha a következő részben tárgyalandó átviteli függvényből indulunk ki, de a regularitás csak az időtartománybeli számítás vagy a hálózat vizsgálata (van-e memóriamentes hurok, mekkora annak hurokerősítése) alapján dönthető el.

Ha a frekvenciatartományban felírt hálózat egyenletek nem oldhatók meg az Y/U változóra minden frekvencián, akkor a hálózat vagy nem reguláris vagy nem stabilis. Az Y/U szinguláris lehet azokon a frekvenciákon, amelyek $\lambda_i = e^{j\theta_i}$ alakban megadják a DI rendszer egyik egységsugarú körre eső sajátértékét vagy $\lambda_i = j\omega_i$ alakban a FI rendszer egyik képzetes tengelyre eső sajátértékét. (Emlékezzünk arra, hogy aszimptotikusan stabilis DI rendszer rendszer-mátrixának sajátértékei az egységsugarú körön belül, aszimptotikusan stabilis FI rendszer rendszer-mátrixának sajátértékei a képzetes tengelytől balra helyezkednek el.)

Ha a hálózati egyenletek megoldhatók az Y/U változóra, akkor ez még nem biztosítéka annak, hogy Y/U a rendszer átviteli karakterisztikáját adja. Legyen például a 4. vagy az 5. ábrán látható hálózatra $b_2 = 0, b_1 = 0, b_0 = 1, a_2 = 0$, továbbá a DI esetben $a_1 = -2$, a FI esetben $a_1 = -1$, akkor a formális számítás eredménye az előző példák értelmében

$$DI: \frac{Y(e^{j\theta})}{U(e^{j\theta})} = \frac{1}{e^{j\theta} - 2}, \quad FI: \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{1}{j\omega - 1}$$

Ezek a függvények értelmezettek \mathcal{S} illetve ω minden valós értékére, de nem tekinthetők átviteli karakterisztikának. Például inverz Fourier-transzformáltjuk nem belépő jel, vagyis e szerint a kauzális komponensekből álló hálózat nem kauzális rendszert reprezentál, ami nyilvánvaló képtelenség. Valójában a hálózat által reprezentált rendszer impulzusválasza nem korlátos, ennek Fourier-transzformáltja – ha egyáltalában létezik – semmiképpen sem a fent megadott.

A hálózat által reprezentált rendszer átviteli karakterisztikájának vagy átviteli együtthatójának számítása előtt meg kell győződnünk arról, hogy a hálózat stabilis vagy legalább az általa reprezentált rendszer gerjesztés-válasz stabilis.

Ellenkező esetben a formálisan kapott eredmény értelmetlen.

Egyes esetekben fizikai megfontolások alapján előre tudjuk, hogy a rendszer vagy a hálózat biztosan stabilis. Ez a helyzet például, ha a vizsgált problémára értelmezett az energia, és a rendszer a forrásokon kívül nem tartalmaz energia termelésére képes részt. Ilyenkor mellőzhetjük az előzetes stabilitásvizsgálatot (például az állapotváltozós leírás vagy a rendszeregyenlet karakterisztikus egyenletének vizsgálatát). Ezek a megfontolások azonban kívül esnek kereteinken.

A számított Y/U hányados nem reguláris hálózat esetén sem tekinthető átviteli karakterisztikának. A 2.4-2.2. pontban példával illusztráltuk, hogy formális számítással akkor is elő tudunk állítani egy explicit gerjesztés-válasz kapcsolatot, amikor a hálózat nem reguláris.

Noha ezek az elfajuló esetek ritkán fordulnak elő, az átviteli karakterisztika számításának biztonságos módja az, ha a hálózati reprezentáció alapján először előállítjuk a rendszer állapotváltozós leírását, ellenőrizzük az aszimptotikus stabilitást, majd a 4.2-1.3. pontban tárgyalt módon ebből állítjuk elő az átviteli karakterisztikát vagy az átviteli együtthatót.

3.3-2.F. Feladatok

F-1. Adott egy valós változós komplex függvény (az együtthatók valósak):

$$(a) H(e^{j\theta}) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\theta} + b_2 e^{-j2\theta}}{1 + a_1 e^{-j\theta}}.$$

$$(b) H(e^{j\theta}) = \frac{B_2 e^{j2\theta} + B_1 e^{j\theta} + B_0}{e^{j\theta} + A_0}.$$

Milyen feltételeket kell kielégíteni az a_1 és a b_i , illetve az A_0 és a B_i együtthatóknak ahhoz, hogy H egy DI rendszer átviteli karakterisztikája lehessen?

F-2. Adott egy valós változós komplex függvény (az együtthatók valósak):

$$(a) H(j\omega) = \frac{b_2 (j\omega)^2 + b_1 j\omega + b_0}{j\omega + a_0}.$$

$$(b) H(j\omega) = \frac{B_2 (j\omega)^{-2} + B_1 (j\omega)^{-1} + B_0}{1 + A_1 (j\omega)^{-1}}.$$

Milyen feltételeket kell kielégíteni az a_0 és a b_i , illetve az A_1 és a B_i együtthatóknak ahhoz, hogy H egy FI rendszer átviteli karakterisztikája lehessen?

F-3. Egészítse ki az 5. ábrán látható hálózatot a struktúra logikus továbbfejlesztésével egy harmadik késleltetővel illetve integrátorral és két további erősítővel.

Lássa be, hogy ebben az esetben (sőt a továbbfejlesztett hálózatokra is) elegendő egyetlen segédváltozó bevezetése és két egyenlet felírása.

F-4. Oldja meg a 3.3-2.1. pont 2. példáját úgy, hogy mindkét dinamikus komponens kimeneti változóját bevezeti.

***F-5.** Adott egy rendszer hálózati reprezentációja.

Állítsa elő a rendszeregyenletet a frekvenciatartománybeli analízis alapján.

Alkalmazható ez az eljárás akkor is, ha a rendszer nem GV stabilis?

3.3-2.M. Megoldások

M-1. A rendszer stabilitásának biztosítására $-1 < a_1 < 1$ illetve $-1 < A_0 < 1$. A b_i együtthatók tetszőlegesen, de $B_2 = 0$.

M-2. A rendszer stabilitásának biztosítására $a_0 > 0$ illetve $A_i > 0$ továbbá $b_2 = 0$ illetve $B_2 = 0$

M-3. Jelölje az „utolsó” kimeneti változót X , akkor a FI esetben

$$\begin{aligned}(j\omega)^3 X &= U - [a_1(j\omega)^2 + a_2 j\omega + a_3] X, \\ Y &= b_3 X + [b_0(j\omega)^3 + b_1(j\omega)^2 + b_2 j\omega] X.\end{aligned}$$

Egy másik lehetőség: a bal oldali összegező kimeneti változóját jelölje P , akkor

$$\begin{aligned}P &= U - [a_1(j\omega)^{-1} + a_2(j\omega)^{-2} + a_3(j\omega)^{-3}] P, \\ Y &= [b_0 + b_1(j\omega)^{-1} + b_2(j\omega)^{-2} + b_3(j\omega)^{-3}] P.\end{aligned}$$

Természetesen mindkét módon a kitalálható harmadfokú átviteli karakterisztika adódik.

Értelem szerinti az általánosított hálózat vizsgálata DI esetben, ezt nem részletezzük.

M-4. Az X_1, X_2 és Y változókra 2+1 lineáris egyenletet kapunk.

***M-5.** Határozzuk meg az átviteli karakterisztikát és használjuk fel a 3.1-1.4. pontbeli kapcsolatot a rendszeregyenlet és az átviteli karakterisztika között. Ez formálisan akkor is felhasználható, ha a rendszer nem stabilis, noha az előállított frekvenciafüggvény nem tekinthető átviteli karakterisztikának. Ennek okát a komplex frekvenciatartománybeli leírásnál látni fogjuk.