Bevezetés a számításelméletbe I.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2010. október 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Átmegy-e az origón az a sík, amely párhuzamos az $5x - 4y + 3z = 9$ egyenletű síkkal és amely tartalmazza a $P(1; 5; 5)$ pontot?

* * * * *

A megadott sík (egy) normálvektora $\underline{n}(5; -4; 3)$. (2 pont)
Mivel a két sík párhuzamos, $\underline{n}$ a keresett síknak is normálvektora. (3 pont)
P és $\underline{n}$ alapján a keresett sík egyenlete: $5x - 4y + 3z = 0$. (2 pont)
Az origó koordinátái ezt kielégítik, így az origó rajta van a síkon. (3 pont)

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok halmaza. Legyen V-n a $\oplus$ művelet a síkvektorok hagyományos összeadása; értelmezzük továbbá tetszőleges $\underline{v} \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén az $\odot$ szorzást az alábbiak szerint:

$$\lambda \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot y \\ \lambda \cdot x \end{pmatrix}.$$

Vektorteret alkot-e V az így definiált $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel?

* * * * *

Például a $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ választással $1 \odot \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. (5 pont)
Ez azt jelenti, hogy nem teljesül a vektortér definíciójában szereplő $1 \odot \underline{v} = \underline{v}$ axióma, így V **nem** vektortér az $\oplus$ és $\odot$ műveletekkel. (5 pont)
A vektortér definícójában szereplő axiómák közül még $\lambda \odot (\mu \odot \underline{v}) = (\lambda \cdot \mu) \odot \underline{v}$ sérül, a többi teljesül. Bár ezek ellenőrzése közvetlenül nem visz közelebb a feladat megoldásához, mégis, a maradék hat axióma helyes leellenőrzéséért legföljebb 3 pont adható. (Ez a pontszám tehát *nem* az axiómák felsorolásáért jár, ez önmagában az útmutató elején írtaknak megfelelően nem ér pontot.)

3. Legyenek $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ a (tetszőleges) V vektortér vektorai, amelyekre $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ teljesülnek. Döntsük el, hogy az alábbi állításokra melyik áll fenn a következő lehetőségek közül:

(i) az állítás biztosan igaz;

(ii) az állítás biztosan hamis;

(iii) az állítás lehet igaz is és hamis is (V és $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ választásától függően).

a) $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ b) $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ c) $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$

* * * * *

a) Az állítás biztosan hamis. Ugyanis ha $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{d} \rangle$ igaz volna, akkor $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesülne (hiszen ha $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d}$, akkor $\underline{c} = \alpha\underline{a} + \delta\underline{d} + 0 \cdot \underline{b}$). (2 pont)

b) Az állítás biztosan igaz. Ugyanis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ miatt tudjuk, hogy létezik a $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b} + \gamma\underline{c}$ lineáris kombináció. (1 pont)

Itt $\gamma = 0$ kell teljesüljön, ellenkező esetben átrendezéssel $\underline{c} = -\frac{\alpha}{\gamma}\underline{a} - \frac{\beta}{\gamma}\underline{b} + \frac{1}{\gamma}\underline{d}$ adódna, vagyis $\underline{c} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ következne. (2 pont)

Ezért $\underline{d} = \alpha\underline{a} + \beta\underline{b}$, vagyis $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b} \rangle$ valóban igaz. (1 pont)

c) Az állítás lehet igaz is és hamis is.

Legyen először V a szokásos (3 dimenziós) tér, legyen $\underline{a}$, $\underline{b}$ és $\underline{c}$ a három tengelyirányú egységvektor, valamint legyen $\underline{d} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ igaz (hiszen $\underline{d} = 1 \cdot \underline{a}$). Továbbá $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is teljesül (hiszen $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ által kifeszített sík vektorai). Ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás hamis (mert $\langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ elemei az $\underline{a}$ és $\underline{c}$ által kifeszített sík vektorai). (2 pont)

Másodszor legyen $\underline{a}$, $\underline{c}$ és $\underline{d}$ ugyanaz, mint a fenti példában, de legyen $\underline{b} = \underline{a}$. Ekkor $\underline{d} \in \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{c} \rangle$ változatlanul igaz és $\underline{c} \notin \langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ is megint teljesül (mert $\langle \underline{a}, \underline{b}, \underline{d} \rangle$ csak az $\underline{a}$ skalárszorosaiból áll). Ám ebben az esetben a $\underline{b} \in \langle \underline{a}, \underline{c}, \underline{d} \rangle$ állítás már igaz (hiszen $\underline{b} = 1 \cdot \underline{a}$). (2 pont)

4. A t paraméter minden értékére döntsük el, hogy létezik-e olyan $\underline{y}$ sorvektor, amelyre $\underline{y} \cdot A = \underline{c}$ teljesül, ahol az A mátrix és a $\underline{c}$ sorvektor az alábbiak. Ha létezik ilyen $\underline{y}$, adjuk meg az összeset!

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 10 & 8 & 7 \\ 25 & 19 & 16 \\ 5 & -3 & -7 \end{pmatrix}, \qquad \underline{c} = \begin{pmatrix} 20 & 16 & t \end{pmatrix}.$$

* * * * *

A mátrixszorzás definíciója miatt $\underline{y}$ csak 4 hosszú sorvektor lehet. (1 pont)

Az $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$ változókat bevezetve, ezekre az alábbi lineáris egyenletrendszer adódik:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 10 & 25 & 5 & 20 \\ 3 & 8 & 19 & -3 & 16 \\ 2 & 7 & 16 & -7 & t \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

A Gauss-eliminációt alkalmazva a következőket kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & -9 & t-8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 5 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & t-14 \end{array}\right) \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $t \neq 14$, akkor „tilos sort” kapunk, így nincs megoldás (és így a keresett $\underline{y}$ sem létezik). (2 pont)

Ha viszont $t = 14$, akkor a harmadik sor elhagyható és az elimináció folytatásával az alábbi redukált lépcsős alakot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right) \qquad \text{(1 pont)}$$

Így a $t = 14$ esetben végtelen sok megoldás van: $\underline{y} = (-\alpha - 7\beta; 2 - 2\alpha + 3\beta; \alpha; \beta)$, ahol $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméterek. (3 pont)

Ha valaki számolási hibát vét, de egyébként a megoldás elvileg jó, az számolási hibánként 1 pont levonást jelentsen. Ha a számolási hiba következtében a megoldás könnyebbé válik, akkor sajnos csak a fenti gondolatmenetnek lényegében megfeleltethető részekért adható pont. Ha egy megoldó (akár helyes) számolásokat végez (például egy ismeretlent kifejez, behelyettesít, stb.), de ezek a számítások nem célratörőek, nem mutatják egy helyes megoldás irányát, azért csak nagyon kevés pont (maximum 2-3) adható az elvégzett munka hasznosságától függően.

5. Legyen egy parallelepipedon egyik csúcsa az origó, az ezzel szomszédos három csúcsa pedig $A(0;1;-2)$, $B(1;1;5)$, illetve $C(1;3;-1)$. Határozzuk meg a parallelepipedon térfogatát!

* * * * *

A tanult tétel szerint az $\overrightarrow{OA}(0;1;-2)$, $\overrightarrow{OB}(1;1;5)$, $\overrightarrow{OC}(1;3;-1)$ vektorok által kifeszített parallelepipedon térfogata az alábbi determináns értéke (vagy annak abszolút értéke):

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \qquad \text{(3 pont)}$$

Gauss-eliminációval számolva a következőket kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2. \qquad \text{(6 pont)}$$

Így a parallelepipedon térfogata 2. (1 pont)

6. Legyen A egy 50×100-as (50 sorú és 100 oszlopú) mátrix. Tegyük fel, hogy bárhogyan is választjuk a $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ vektort, mindig található olyan $\underline{x} \in \mathbb{R}^{100}$ vektor, amelyre $A \cdot \underline{x} = \underline{b}$. Határozzuk meg A rangját!

* * * * *

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, (1 pont)
vagyis hogy $\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100} \rangle = \mathbb{R}^{50}$. (2 pont)
Az anyagban szereplő tétel szerint $\mathrm{r}(A) = \dim\langle \underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100} \rangle$. Így $\mathrm{r}(A) = \dim \mathbb{R}^{50}$. (3 pont)
Szintén ismert tény, hogy $\dim \mathbb{R}^n = n$, (2 pont)
amiből tehát $\mathrm{r}(A) = 50$. (2 pont)

Második megoldás.

Jelölje A oszlopait $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$. A feladat állítása nem más, mint hogy minden $\underline{b} \in \mathbb{R}^{50}$ kifejezhető az $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$ vektorokból lineáris kombinációval, (1 pont)
vagyis hogy $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$ generátorrendszer $\mathbb{R}^{50}$-ben. (2 pont)
$\mathbb{R}^{50}$-ben minden lineárisan független rendszer legföljebb 50 elemű, hiszen ismert, hogy $\dim \mathbb{R}^{50} = 50$ (tehát van $\mathbb{R}^{50}$-ben 50 elemű generátorrendszer (sőt:bázis)). (1 pont)
Ezért $\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_{100}$ lineárisan összefüggő, így valamelyik $\underline{a}_i$ kifejezhető a többiből lineáris kombinációval. Tehát ezt az $\underline{a}_i$-t elhagyva a maradék 99 vektor is generátorrendszer $\mathbb{R}^{50}$-ben. (1 pont)
A fenti lépés még 49-szer megismételhető: mindaddig, amig a vektorok száma 50-nél több, valamelyik elhagyható úgy, hogy továbbra is generátorrendszert kapjunk. (1 pont)
Végül kapunk egy, az A 50 oszlopából álló generátorrendszert. Ez viszont már biztosan lineárisan független: ellenkező esetben a fenti lépés még egyszer megismételhető volna, kapnánk $\mathbb{R}^{50}$-ben egy 49 elemű generátorrendszert, ami lehetetlen (ismét azért, mert minden generátorrendszer elemszáma legalább akkora, mint bármely lineárisan független rendszeré és $\mathbb{R}^{50}$-ben bármely bázis 50 elemű lineárisan független rendszer). (1 pont)
Az oszloprang definíciójából tehát $\mathrm{r}(A) \geq 50$. (1 pont)
Azonban $\mathrm{r}(A) \leq 50$ nyilvánvaló (hivatkozva vagy arra, hogy $\mathbb{R}^{50}$-ben nem lehet 50-nél több lineárisan független vektor, így az (oszlop)rang legföljebb 50, vagy pedig arra, hogy A 50 sorú, így a (sor)rangja legföljebb 50). (1 pont)
Tehát $\mathrm{r}(A) = 50$. (1 pont)