1. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$3^{2x^2+2x-12}=9^{\frac{x-2}{x+3}} \Leftrightarrow 9^{x^2+x-6}=9^{\frac{x-2}{x+3}} \Leftrightarrow x^2+x-6=\frac{x-2}{x+3} \Leftrightarrow (x-2)\cdot(x+3)=\frac{x-2}{x+3} \Rightarrow$$

I. $x-2=0 \Leftrightarrow \boxed{x=2}$ **II.** $(x+3)^2=1 \Leftrightarrow |x+3|=1$, melyből $\boxed{x=-2}$ vagy $\boxed{x=-4}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (13 pont)

$$(\sin 2x)\cdot(\cos 2x+1) + (\sin x)\cdot(2\cdot\cos 2x+2\cdot\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\cdot\sin x\cdot\cos x)\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x+1) + (\sin x)\cdot 2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x+\sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(2\cdot\sin x\cdot\cos x)\cdot 2\cdot\cos^2 x + 2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (2\cdot\sin x\cdot\cos^2 x)\cdot(2\cdot\cos x+1) = 0 \Rightarrow$$

I. $\sin x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$, **II.** $\cos x=0 \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$,

III. $\cos x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{x=\frac{2\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$ vagy $\boxed{x=\frac{4\pi}{3}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

3. Milyen $k\in\mathbf{R}$ esetén lesz két különböző valós megoldása az $x^2-(k+3)\cdot x+4=0$ egyenletnek ? (12 pont)

Két különböző megoldás pontosan akkor van, ha a diszkrimináns pozitív, azaz ha $(k+3)^2-4\cdot 4>0 \Leftrightarrow |k+3|>4$

$\Rightarrow$ **I.** $k+3>4 \Leftrightarrow \boxed{k>1}$, **II.** $k+3<-4 \Leftrightarrow \boxed{k<-7}$.

4. Három szám számtani sorozatot alkot, összegük 300 .
Ha a harmadikhoz 50 -et hozzáadunk, mértani sorozatot kapunk. Melyik ez a három szám ? (13 pont)

Legyen a sorozat második tagja a , a differencia d , a mértani sorozat hányadosa q .

$$(a-d)+a+(a+d)=300 \Rightarrow \boxed{a=100}\ , \qquad \frac{100}{q}+100+100\cdot q=300+50 \Leftrightarrow 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0$$

$$\Rightarrow q=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot 2\cdot 2}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow q_1=2,\quad q_2=\frac{1}{2}.$$

A mértani sorozat első három tagja tehát $\boxed{50,\ 100,\ 200}$ vagy $\boxed{200,\ 100,\ 50}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A három szám : } 50,\ 100,\ 150 \text{ vagy } 200,\ 100,\ 0}$.

1. A $p \in \mathbf{R}$ paraméter mely értékeire van a $(p-1)\cdot x^2 + 2p\cdot x + 3p-2=0$ egyenletnek valós megoldása ? (13 pont)

Ha $p \neq 1$, akkor valós megoldás pontosan akkor van, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz ha $(2p)^2 - 4\cdot(p-1)\cdot(3p-2) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 4p^2 - 4\cdot[\,p\cdot(3p-2)-(3p-2)\,] \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4p^2 - 4\cdot(3p^2-2p-3p+2) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -8p^2+20p-8 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2p^2-5p+2 \leq 0$. A bal oldal (másodfokú függvény) nullhelyei : $p_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2\cdot 2} = \dfrac{5\pm 3}{4} = \begin{cases} 2 \\ 1/2 \end{cases}$,

így figyelembevéve, hogy a $p=1$ lineáris esetben van valós megoldás (az egyenlet ekkor $2x+1=0$, ennek megoldása : -0.5),

valós megoldás pontosan akkor van, ha $\boxed{\dfrac{1}{2} \leq p \leq 2}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (13 pont)

$2^{x+4} + 2^{x+3} + 2^x = 5^{x+1} - 5^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x\cdot(2^4+2^3+1) = 5^x\cdot(5-1) \quad \Leftrightarrow \quad 2^x\cdot 25 = 5^x\cdot 4$

$\Leftrightarrow \quad \left(\dfrac{2}{5}\right)^x = \dfrac{4}{25} = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2$ (az exponenciális függvények injektívek) $\Leftrightarrow \quad \boxed{x=2}$.

3. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$\sin^2 x + 3\cdot\cos^2 x = 3-\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x + 3\cdot(1-\sin^2 x) = 3-\sin x \quad \Leftrightarrow \quad -2\cdot\sin^2 x = -\sin x \quad \Leftrightarrow$
$2\cdot\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\cdot(2\cdot\sin x - 1) = 0$

$\Rightarrow$ **I.** $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$,

II. $\sin x = \dfrac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \dfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$ vagy $\boxed{x = \dfrac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

4. Egy számtani sorozat második és negyedik elemének összege 16, ötödik és hetedik elemének összege 52.
Mennyi az első hét elem összege ? (12 pont)

Legyen a sorozat (a_n), a differencia d.

Ekkor $(a_3-d)+(a_3+d)=16 \quad \Rightarrow \quad a_3=8$, $\quad (a_6-d)+(a_6+d)=52 \quad \Rightarrow \quad a_6=26$.

$\Rightarrow \quad d = \dfrac{a_6-a_3}{3} = \dfrac{26-8}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = a_3-2d = -4}$, $\quad \boxed{a_7 = a_6+d = 32}$,

$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{7} a_k = \dfrac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \dfrac{-4+32}{2}\cdot 7 = 98}$.