1. feladat (5+12=17 pont)
a) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ definícióját! (Az x_0 a D_f torlódási pontja.)
b) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2-7x}{x^2+2x+1} = \infty$!

Mo. *a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty$ ha minden $P > 0$ számhoz létezik $\delta(P) > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta(P)$ esetén $f(x) > P$. **(5p)**
b) Legyen $P > 0$. Ekkor, ha $|x+1| < 1$ **(3p)**

$$\frac{2-7x}{x^2+2x+1} = \frac{2-7x}{|x+1|^2} > \frac{2}{|x+1|^2} > P \qquad \textbf{(5p)}$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$|x+1| < \sqrt{\frac{2}{P}}, \qquad \textbf{(2p)},$$

így $\delta(P) = \min\left(1, \sqrt{\frac{2}{P}}\right)$. **(2p)**

---

2. feladat (19 pont)
Osztályozza az $f(x) = \dfrac{|x+3|\sin(x^2+2x)}{x^3+2x^2-3x}$ függvény szakadási helyeit!

Mo. A függvény az $0, -3, 1$ pontok kivételével folytonos. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2+2x)}{x^2+2x} \cdot \frac{(x+2)|x+3|}{x^2+2x-3} = -2 \qquad \textbf{(3p)}$$

így a 0 pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to -3\pm} f(x) = \lim_{x\to -3\pm} \frac{|x+3|}{x+3} \cdot \frac{\sin(x^2+2x)}{x^2-x} = \pm\frac{\sin 3}{12} \qquad \textbf{(4p)}$$

így az -3 pontban a függvénynek véges ugrása van **(2p)**

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x+3|\sin(x^2+2x)}{x^2+3x} \cdot \frac{1}{x-1} = \pm\infty \qquad \textbf{(4p)}$$

így az 1 pontban a függvénynek lényeges szakadása van **(2p)**

---

3. feladat (18 pont)
Hol differenciálható az $f(x) = 2^{x^2-1} \arcsin \frac{x+3}{2}$ függvény? Határozza meg az érintőegyenesének egyenletét az $x = -2$ pontban!

Mo. $D_f = [-5,-1]$ **(2p)** . $f(-2) = \dfrac{4\pi}{3}$ **(2p)**

$$f'(x) = \ln 2 \cdot 2x \cdot 2^{x^2-1} \arcsin \frac{x+3}{2} + \frac{2^{x^2-1}}{\sqrt{4-(x+3)^2}} \qquad \textbf{(5p)}$$

$D_{f'} = (-5,-1)$ **(2p)** . $f'(-2) = \dfrac{-16\pi \ln 2}{3} + \dfrac{8}{\sqrt{3}}$ **(3p)** , így az érintőegyenes egyenlete $y = \left(\dfrac{-16\pi \ln 2}{3} + \dfrac{8}{\sqrt{3}}\right)(x+2) + \dfrac{4\pi}{3}$ **(4p)**

---

4. feladat (18 pont)
Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = e^{-2x^2-3x+4}$ függvény konvex, illetve konkáv! Hol vannak a függvény inflexiós pontjai?

Mo. $D_f = \mathbb{R}$, $f''(x) = \left(e^{-2x^2-3x+4}(-4x-3)\right)' = e^{-2x^2-3x+4}((-4x-3)^2-4)$ **(6p)** , és $f''(x) = 0$ ha $x = -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$ **(4p)** .

	$\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right)$	$-\frac{5}{4}$	$\left(-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4},\infty\right)$
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\cup$	infl. p.	$\cap$	infl. p.	$\cup$

(6p)

tehát a függvény konvex a $\left(-\infty,-\frac{5}{4}\right]$ és a $-\left[\frac{1}{4},\infty\right)$ intervallumon, konkáv a $\left[-\frac{5}{4},-\frac{1}{4}\right]$ intervallumon, és a $x = -\frac{5}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$ pontokban inflexiós pontja van **(2p)**

---

5. feladat (9+10+9=28 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket!

a) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{ctg}(3x^2)\operatorname{arctg}(4x^2)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2+} (x-2)^{x^2-4x+4}$ *c)* $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\operatorname{sh}(2x-3)}{\operatorname{ch}(2x+3)}$

Mo. a) $\infty \cdot 0$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{ctg}(3x^2)\operatorname{arctg}(4x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg}(4x^2)}{\operatorname{tg}(3x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{8x}{1+16x^4}}{\frac{6x}{\cos^2(3x^2)}} = \frac{4}{3} \qquad \textbf{(7p)}$$

b) 0^0 típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 2+} (x-2)^{x^2-4x+4} = \lim_{x\to 2+} \left(e^{\ln(x-2)}\right)^{x^2-4x+4} = e^{\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+4)\ln(x-2)} \qquad \textbf{(3p)}$$

és

$$\lim_{x\to 2+}(x^2-4x+4)\ln(x-2)=\lim_{x\to 2+}\frac{\ln(x-2)}{\frac{1}{(x-2)^2}}=\lim_{x\to 2+}\frac{\frac{1}{x-2}}{\frac{-2}{(x-2)^3}}=0 \qquad (\mathbf{4p})$$

tehát a keresett határérték $e^0=1$ **(1p)**

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\operatorname{sh}(2x-3)}{\operatorname{ch}(2x+3)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x-3}-e^{3-2x}}{e^{2x+3}+e^{-2x-3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}\cdot\dfrac{e^{-3}-e^{3-4x}}{e^{3}+e^{-4x-3}}=e^{-6}$ **(9p)**

IMSC feladat (8 IMSC pont)
Igazolja, hogy az $f(x)=\operatorname{arctg}\left(x^2\right)$ függvény egyenletesen folytonos az értelmezési tartományán!

Mo. $D_f=\mathbb{R}$. **(1p)** Ha egy függvény deriváltja (létezik és) korlátos (egy $K<\infty$ korláttal), akkor a függvény egyenletesen folytonos **(1p)** , hiszen a Lagrange-féle középérték-tétel szerint:

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|(x_2-x_1)f'(\xi)|\le|x_2-x_1|K,\qquad x_1,x_2\in D_f,\xi\in(x_1,x_2)$$

így bármely $\varepsilon>0$ esetén ha $|x_2-x_1|<\frac{\varepsilon}{K}=\delta(\varepsilon)$, akkor $|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon$. **(2p)**

Esetünkben $f'(x)=\dfrac{2x}{1+x^4}$ **(1p)** korlátos **(1p)** , hiszen folytonos, és $\lim_{x\to\pm\infty}f'(x)=0$ **(2p)** . (Egy alkalmas $[-\Omega,\Omega]$ intervallumon kívül $|f'(x)|<\varepsilon$, és az intervallumon belül Weierstrass I. tétele értelmében f' korlátos.)
