

Matematika A3

- 1. előadás** (2013.09.11.)
- 1. gyakorlat** (2013.09.12.)
- 2. előadás** (2013.09.18.)
- 2. gyakorlat** (2013.09.19.)
- 3. előadás** (2013.09.25.)
- 3. gyakorlat** (2013.09.26.)
- 4. előadás** (2013.10.02.)
- 4. gyakorlat** (2013.10.03.)
- 5. előadás** (2013.10.09.)
- 6. előadás** (2013.10.16.)
- 5. gyakorlat** (2013.10.17.)
- 6. gyakorlat** (2013.10.24.)
- 7. előadás** (2013.10.30.)
- 7. gyakorlat** (2013.10.31.)
- 8. előadás** (2013.11.06.)
- 8. gyakorlat** (2013.11.07.)
- 9. előadás** (2013.11.13.)
- 9. gyakorlat** (2013.11.14.)
- 10. előadás** (2013.11.20.)
- 10. gyakorlat** (2013.11.21.)
- 11. előadás** (2013.11.27.)
- 11. gyakorlat** (2013.11.28.)
- 12. előadás** (2013.12.04.)
- 12. gyakorlat** (2013.12.05.)
- 13. előadás** (2013.12.11.)
- 13. gyakorlat** (2013.12.12.)

Készítette: Seyler Lajos

1. előadás

Differenciálegyenletek

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y', y, x) = 0$$

Implicit megadás

$$y^{(n)} = F(y^{(n-1)}, \dots, y, x)$$

Explicit megadás (F folytonos)

$$y' = F(y, x)$$

Példa $y' = a \cdot y \quad (a > 0)$

$$\frac{y'}{y} = a$$

$$\int \frac{y'}{y} dt = \int a dt$$

$$\ln|y| = a \cdot t + c$$

$$|y| = e^{a \cdot t + c} = e^{a \cdot t} \cdot e^c = e^{a \cdot t} \cdot c_1 \quad (c_1 > 0)$$

Bolzano-tétel $\rightarrow y = e^{a \cdot t} + c_2 \quad (c_2 \neq 0)$

Ez az általános megoldás.

Szinguláris megoldás, ha $F(y_0, x) = 0 \quad y = y_0$

Ez az összes megoldás.

Tegyük fel, hogy: $u(t)$ is megoldás.

$$\frac{d}{dt} \cdot \frac{u(t)}{e^{a \cdot t}} = \frac{u'(t) \cdot e^{a \cdot t} - u(t) \cdot a \cdot e^{a \cdot t}}{e^{2 \cdot a \cdot t}} = 0$$

$y' = a \cdot y$ miatt a számlálóban lévő $u'(t) = u(t) \cdot a$. Ha ezt behelyettesítjük, akkor a számláló, ezért az egész tört is 0 lesz.

Példa

Mennyi idő alatt nő duplájára a népesség?

$$2 = \frac{y(t_2)}{y(t_1)} = \frac{C \cdot e^{a \cdot t_2}}{C \cdot e^{a \cdot t_1}} = e^{a \cdot (t_2 - t_1)}$$

$$\frac{\ln 2}{a} = t_2 - t_1$$

C rögzítése

$$y(t) = k \cdot e^{a \cdot t} \quad \text{Partikuláris megoldás}$$

$$y(t) = 3,032 \cdot 10^9 \cdot e^{0,02 \cdot (t - 1960)}$$

Nagy " t " esetén elszáll, nem ad a valósághoz közeli adatokat.

Korrigálás: $y' = a \cdot y \cdot \left(1 - \frac{y}{N}\right)$

Lineáris differenciálegyenletek

Általános lineáris egyenlet: $A \cdot x = b$, ahol " A " lineáris operátor

Kell: " A " n -szer folyamatosan differenciálható tere $\rightarrow$ folytonosak tere

Megoldások: $x_0 + \text{Ker} A$ és $A \cdot x_0 = b$

- Ha y megoldás $\rightarrow A \cdot y = b \rightarrow A \cdot (y - x_0) = A \cdot y - A \cdot x_0 = b - b = 0$

- Ha $y \in \text{Ker} A \rightarrow A(x_0 + y) = A \cdot x_0 + A \cdot y = b \quad (A \cdot y = 0)$

$y_{i\acute{a}} = y_{ip} + y_{h\acute{a}}$ (iá: inhomogén általános, ip: inhomogén partikuláris, há: homogén általános)

$$\text{pl.} \quad 1. A \cdot y = y' + f(x) \cdot y \quad [y' + f(x) \cdot y = b(x)]$$

$$2. A \cdot y = y'' + f(x) \cdot y' + g(x) \cdot y$$

Állandó együtthatós egy lineáris differenciálegyenlet, ha $f(x)$, $g(x)$, ... konstansok. Egyébként függvényegyetthatós.

Állandó együtthatós differenciálegyenlet

$$y'(t) + a \cdot y(t) = 0 \quad y\text{-t } e^{\lambda \cdot t} \text{ alakban keressük} \quad y' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = \lambda \cdot y$$

$$0 = \lambda \cdot y(t) + a \cdot y(t) = y(t) \cdot (\lambda + a) \quad \lambda'' = \lambda \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} = \lambda^2 \cdot y$$

$$\lambda = -a \text{ jó} \rightarrow e^{-a \cdot t}$$

$$y^{(n)} + a_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + \dots + a_1 \cdot y' + a_0 \cdot y = 0$$

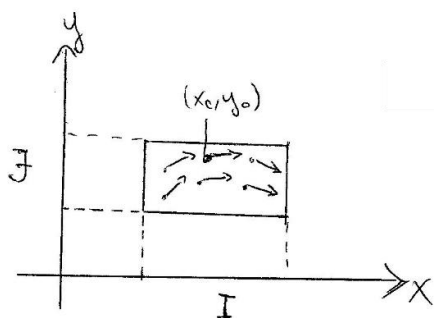
$$y = e^{\lambda \cdot x} \text{ alakban keressük} \quad y^{(k)} = \lambda^k \cdot y$$

$$y \cdot (\lambda^n + a_{n-1} \cdot \lambda^{n-1} + \dots + a_0) = 0 \quad \text{Karakterisztikus polinom (ami a zárójelben van)}$$

Tegyük fel, hogy: λ^k egy $m \cdot k$ -szoros gyök. Ekkor:

$$\{e^{\lambda_k \cdot x}, x \cdot e^{\lambda_k \cdot x}, \dots, x^{m_{k-1}} \cdot e^{\lambda_k \cdot x} | k = 1 \dots m\} \text{ alaprendszer}$$

1. gyakorlat



"Iránymező"

$$F: I \times J \rightarrow R$$

$$(x, y) \rightarrow F(x, y)$$

Az $y' = F(x, y)$ differenciálegyenlet (x_0, y_0) ponton áthaladó megoldása: az egy $y: K \rightarrow R$

$$1. K \subseteq I, x_0 \in \text{int}(K)$$

$$2. y \in \text{Diff}(K, R)$$

$$3. y(x_0) = y_0, \forall x \in K \quad y'(x) = F(x, y(x))$$

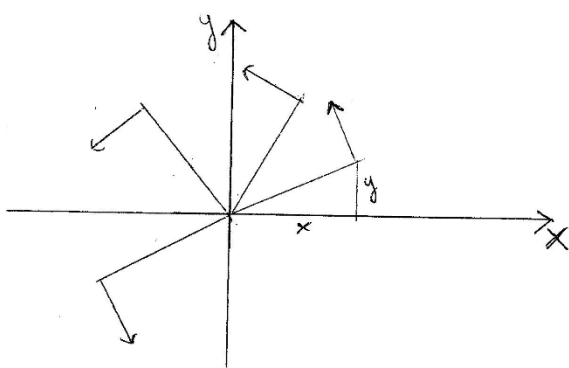
Ezt partikuláris megoldásnak nevezik.

Általános megoldás: $y(x, C)$ megadja az összes megoldást a "C" paramétertől függően

Nem biztos, hogy ez az összes megoldás. Lehet szinguláris megoldás is.

Példa

$$y' = -\frac{x}{y}$$



$\frac{y}{x}$: a meredekség

Tudjuk, hogy egy "m" meredekségű egyenesre merőleges egyenes meredeksége $-\frac{1}{m}$, ami $-\frac{x}{y}$. Ez áll az egyenlet jobb oldalán. A merőleges nyilak egy kört rajzolnak ki, ezért a sejtésün, hogy a megoldás alakja: $x^2 + y^2 = r^2$

Ez az implicit általános megoldás

Bizonyítás: 1. egyik irány: implicit deriválással

$$x^2 + (y(x))^2 = r^2$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y(x) \cdot y'(x) = 0$$

$$2 \cdot x + 2 \cdot y \cdot y' = 0$$

$$y' = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y}$$

2. másik irány:

$$g: x \rightarrow x^2 + (y(x))^2$$

$$g' = 0$$

$$g = C$$

$$x^2 + y^2 = C$$

Szeeparábilis differenciálegyenlet

$$y' = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{y^6}$$

$$\int y^6 dy = \int \sin x dx$$

$$\frac{y^7}{7} = -\cos x + C \quad \text{Implicit általános megoldás}$$

$$y = \sqrt[7]{-7 \cdot \cos x + 7 \cdot C} \quad \text{Explicit általános megoldás}$$

Tétel: Legyen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvények, g sehol sem 0

Az $y' = f(x) \cdot g(y)$ szeeparábilis differenciálegyenlet megoldása: $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$, ahol $G = \int \frac{1}{g}$; $F = \int f$

Példa

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y(x))} \cdot y'(x) dx = G(y(x))$$

$$G(y(x)) = F(x) + C$$

$$y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$$

Darboux-tétel miatt biztosan létezik G^{-1} .

Példa

$$y' = a \cdot y$$

1. az $y = 0$ egy jó megoldás

2. $\frac{dy}{dx} = a \cdot y$ Tegyük fel, hogy: y sehol se 0

$$\int \frac{dy}{y} = \int a dx$$

$$\ln|y| = a \cdot x + C$$

$$|y| = e^{a \cdot x + C}$$

$$|y| = e^{a \cdot x} \cdot e^C \quad e^C \text{ helyett írjunk } K\text{-t } (K > 0)$$

$$|y| = K \cdot e^{a \cdot x}$$

Bolzano-tétel ...

$$y = \pm K \cdot e^{a \cdot x}$$

Egyszintencia-unicitás-tétel

1. Peano-féle egzisztenciátétel: Az $y' = F(x, y)$ differenciálegyenletnek létezik lokális megoldása az (x_0, y_0) pontban, ha F folytonos függvény.

2. Cauchy-Lipschitz-tétel (gyenge): Ha az F folytonosan differenciálható egy nyílt halmazon és ezen belül egy $I \times J$ téglalap belsejében kijelölünk egy (x_0, y_0) pontot, akkor van az egyenletnek egy I -n értelmezett (x_0, y_0) -n áthaladó megoldása.

Példa

$$y' = \sqrt[3]{y} \quad y(0) = 0$$

$y_1 = 0$ egy jó megoldás

Többi megoldás: $\frac{dy}{dx} = y^{\frac{1}{3}}$

$$\int y^{-\frac{1}{3}} dy = \int dx \quad (y > 0)$$

$$\frac{y^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = x + C \quad (C = 0)$$

$$y = \sqrt{\left(\frac{2}{3} \cdot x\right)^3}$$

Definíció: szinguláris pont: több megoldás (görbe) halad keresztül ezen a ponton

2. előadás

Példa

$$y' - 2 \cdot y = 1$$

Homogén általános megoldás (y_{ha}): $y^{(n)}$ helyett λ^k -t írunk mindenhol és a jobb oldal 0. Itt most y' helyett λ , y (0. derivált) helyett $\lambda^0 = 1$

$$\lambda - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = 2 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{2 \cdot x} \quad (\text{Mert a megoldást mindig } c \cdot e^{\lambda \cdot x} \text{ alakban keressük})$$

Inhomogén partikuláris megoldás (y_{ip}): y helyére beírjuk, amit az előbb kaptunk, csak c helyett $c(x)$ -et írunk, feltételezve, hogy egy függvény. Tehát $y = c(x) \cdot e^{2 \cdot x}$ és kifejezzük $c(x)$ -et.

$$\underbrace{c'(x) \cdot e^{2 \cdot x} + 2 \cdot c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}_{y'} - 2 \cdot \underbrace{c(x) \cdot e^{2 \cdot x}}_y = 1$$

$$c'(x) = e^{-2 \cdot x}$$

$$c(x) = \int e^{-2 \cdot x} dx = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} + C \quad \text{Ezt visszahelyettesítjük a } c \text{ helyére a homogén megoldásba.}$$

$$y_{ip} = -\frac{1}{2} \cdot e^{-2 \cdot x} \cdot e^{2 \cdot x} = -\frac{1}{2}$$

Ezekből összerakhatjuk az **inhomogén általános megoldást** (y_{ia}):

$$y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c \cdot e^{2 \cdot x} - \frac{1}{2}$$

Példa

$$y' + y = \sin(x)$$

Homogén általános megoldás

$$\lambda + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \rightarrow \quad y_h = c \cdot e^{-x}$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(x) \cdot e^{-x}$$

$$c'(x) \cdot e^{-x} - c(x) \cdot e^{-x} + c(x) \cdot e^{-x} = \sin(x)$$

$$c'(x) = e^x \cdot \sin(x)$$

$$c(x) = \int e^x \cdot \sin(x) dx = \dots = \frac{1}{2} \cdot e^x \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

$$y_{ip} = \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

Inhomogén általános megoldás:

$$y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c \cdot e^{-x} + \frac{1}{2} \cdot (\sin(x) - \cos(x))$$

Elsőrendű függvényegytetűthetős differenciálegyenletek

$$\text{Alakjuk: } y' + f(x) \cdot y = b(x)$$

$$\text{Ha homogén: } y' = -f(x) \cdot y$$

Állítás: Ha van 2 megoldás, akkor hányadosuk konstans.

$$\text{Bizonyítás: } \left(\frac{y_1}{y_2}\right)' = \frac{y_1' \cdot y_2 - y_1 \cdot y_2'}{y_2^2} = \frac{-f(x) \cdot y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot (-f(x)) \cdot y_2}{y_2^2} = 0$$

Példa

$$y' + \frac{1}{x} \cdot y = 3 \cdot x^2$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -\frac{1}{x} \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad \int \frac{y'}{y} = \int -\frac{1}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + C = \ln \frac{1}{|x|} + C$$

$$|y| = \frac{1}{|x|} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

$$\text{Bolzano tételét alkalmazva: } y_{ha} = \frac{1}{x} \cdot C_2 \quad C_2 \neq 0$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(x) \cdot x^{-1}$$

$$3 \cdot x^2 = c'(x) \cdot x^{-1} - c(x) \cdot x^{-2} + c(x) \cdot x^{-2}$$

$$c'(x) = 3 \cdot x^3$$

$$c(x) = \int 3 \cdot x^3 dx = \frac{3}{4} \cdot x^4 + C$$

$$y_{ip} = \frac{3}{4} \cdot x^3$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{ia} = \frac{c}{x} + \frac{3}{4} \cdot x^3 \quad c \neq 0$$

Példa

$$y' + 2 \cdot t \cdot y = t \quad \text{Kezdeti feltétel:} \quad y(1) = 2$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -2 \cdot t \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -2 \cdot t$$

$$\ln|y| = -t^2 + C \quad \rightarrow \quad |y| = e^{-t^2} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

$$y_{há} = e^{-t^2} \cdot C_2$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y(t) = c(t) \cdot e^{-t^2}$$

$$t = c'(t) \cdot e^{-t^2} - c(t) \cdot e^{-t^2} \cdot 2 \cdot t + 2 \cdot t \cdot c(t) \cdot e^{-t^2}$$

$$c'(t) = t \cdot e^{t^2}$$

$$c(t) = \int t \cdot e^{t^2} dt = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} + C$$

$$y_{ip} = \frac{1}{2} \cdot e^{t^2} \cdot e^{-t^2} = \frac{1}{2}$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{ia} = c \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2}$$

Kezdeti érték feltétel

$$y(1) = 2$$

$$2 = c \cdot e^{-1} + \frac{1}{2}$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot e$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e \cdot e^{-t^2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{1-t^2} + \frac{1}{2}$$

Példa

$$y' + \frac{2}{t} \cdot y = e^t$$

Homogén általános megoldás

$$y' = -\frac{2}{t} \cdot y$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{t}$$

$$\ln|y| = \ln|t|^{-2} + C \quad \rightarrow \quad |y| = \frac{1}{t^2} \cdot C_1 \quad C_1 > 0$$

$$y = \frac{C_2}{t^2} \quad C_2 \neq 0$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y = c(t) \cdot t^{-2}$$

$$e^t = c'(t) \cdot t^{-2} - c(t) \cdot 2 \cdot t^{-3} + 2 \cdot c(t) \cdot t^{-3}$$

$$c'(t) = t^2 \cdot e^t$$

$$c(t) = \int t^2 \cdot e^t dt = e^t \cdot (t^2 - 2 \cdot t + 2)$$

$$y_{ip} = e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right)$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{ia} = \frac{c}{t^2} + e^t \cdot \left(1 - \frac{2}{t} + \frac{2}{t^2}\right) \quad c \neq 0$$

Másodrendű, állandó együtthatós differenciálegyenletek

Ha a karakterisztikus egyenlet diszkriminánsa (D):

- $D > 0$: - két különböző gyök van
 $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x} \quad (\lambda_1, \lambda_2 \text{ a megoldások})$
- $D = 0$: - kétszeres multiplicitású gyök
 $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda \cdot x} + c_2 \cdot x \cdot e^{\lambda \cdot x} \quad (\lambda \text{ a kétszeres gyök})$
- $D < 0$: - komplex gyökök (konjugált párok)
 $\lambda_1 = \mu_1 + \tau \cdot j, \quad \lambda_2 = \mu_2 - \tau \cdot j$
 $y_{há} = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot x}$

Alkalmazzuk a következő átalakítást: $e^{x+j \cdot y} = e^x \cdot (\cos y + j \cdot \sin y)$

$$e^{\lambda_1 \cdot x} = e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))$$

$$e^{\lambda_2 \cdot x} = \overline{e^{\mu \cdot x} \cdot (\cos(\tau \cdot x) + j \cdot \sin(\tau \cdot x))}$$

$$y_{há} = (c_1 + c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + j \cdot (c_1 - c_2) \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$$

$$\rightarrow y_{há} = C_3 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x) + C_4 \cdot e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$$

2. gyakorlat

Példa

$$y' = x^2 \cdot \frac{\cos^4 y}{\sin y}$$

Kezdeti feltételek:

$$a, \quad y(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$b, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$$

$$c, \quad y(0) = \frac{3\pi}{4}$$

$$d, \quad y(0) = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot \pi$$

Nézzük meg, hol nincs megoldás: 0-val való osztás $\rightarrow y_0 = k \cdot \pi$ esetén nincs megoldás

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cdot \cos^4 y}{\sin y}$$

$$\int \frac{\sin y}{\cos^4 y} dy = \int x^2 dx$$

$$\text{megjegyzés:} \quad \int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + C$$

$$- \int \cos^{-4} y (-\sin y) dy = \int x^2 dx$$

$$- \frac{\cos^{-3} y}{-3} = \frac{x^3}{3} + C$$

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3 \cdot C}}$$

$$y = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+3 \cdot C}}\right) + A \cdot 2 \cdot \pi \quad A \in \mathbb{Z}$$

Nem szeparálható megoldás

$$y \equiv \frac{\pi}{2}$$

$$\text{b,} \quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 0$$

$$\text{c,} \quad C = \frac{\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 0$$

$$\text{d,} \quad C = \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-3}}{3} \quad A = 1$$

I. Lineáris helyettesítéssel megoldható differenciálegyenletek

Példa

$$y' = \sqrt{y-2 \cdot x} \quad y = y(x)$$

$$u' + 2 = \sqrt{u} \quad u(x) = y(x) - 2 \cdot x \quad u = y - 2 \cdot x$$

$$u' = \sqrt{u} - 2 \quad u'(x) = y'(x) - 2 \quad u' = y' - 2$$

$$\frac{du}{dx} = \sqrt{u} - 2$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u}-2} = \int dx \quad \text{Helyettesítés:} \quad t = \sqrt{u}$$

Nem elég a $\sqrt{u}$ helyett t -t írni, a du -t is át kell írni dt -re, de ezt ki kell számolni.

$$t^2 = u$$

$$2 \cdot t \cdot t' = u'$$

$$2 \cdot t \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{du}{dx}$$

$$2 \cdot t \cdot dt = du \quad \text{Tehát a } du \text{ helyett } 2 \cdot t \cdot dt\text{-t írunk.}$$

$$\int \frac{2 \cdot t \cdot dt}{t-2} = \int \frac{2 \cdot (t-2) + 4}{t-2} dt = \int 2 + \frac{4}{t-2} dt = 2 \cdot t + 4 \cdot \ln|\sqrt{t-2}|$$

Visszahelyettesíthetjük t helyett a $\sqrt{u}$ -t, u helyett pedig az $y - 2 \cdot x$ -et.

$$2 \cdot \sqrt{y-2 \cdot x} + 4 \cdot \ln|\sqrt{y-2 \cdot x}-2| = x + C$$

II. Homogén fokszámú differenciálegyenletek

$$u = \frac{y}{x} \quad \rightarrow \quad y = u \cdot x \quad \rightarrow \quad y' = u' \cdot x + u$$

Példa

$$y' = -\frac{2 \cdot x + y}{x + y} = -\frac{2 + \frac{y}{x}}{1 + \frac{y}{x}}$$

$$u' \cdot x + u = -\frac{2+u}{1+u}$$

$$u' \cdot x = -\frac{2+u}{1+u} - u = -\frac{2+u+u(1+u)}{1+u}$$

$$\frac{du}{dx} \cdot x = -\frac{u^2+2u+2}{1+u}$$

$$\int \frac{1+u}{u^2+2u+2} du = \int -\frac{1}{x} dx$$

2-vel beszorozzuk a törtet, majd 2-vel osztjuk és így a tört $\frac{f'}{f}$ -es lesz, aminek tudjuk az integrálját.

$$\frac{1}{2} \cdot \int \frac{2 \cdot u + 2}{u^2 + 2 \cdot u + 2} du = \frac{1}{2} \cdot \ln|u^2 + 2 \cdot u + 2|$$

$$\frac{1}{2} \cdot \ln \left| \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2 \right| = -\ln|x| + C$$

Ezt szépíthetjük egy kicsit. Pl.: C helyett írhatjuk, hogy $\ln K$, és így összevonhatjuk a 2 logaritmust a jobb oldalon, az $\frac{1}{2}$ -t bevihetjük a logaritmusba kitevőnek, majd eltüntetjük a logaritmust mindkét oldalról.

$$\left| \left(\frac{y}{x} \right)^2 + 2 \cdot \frac{y}{x} + 2 \right|^{\frac{1}{2}} = K \cdot \frac{1}{|x|}$$

Egzakt differenciálegyenletek

Definíció: Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos, Q sehol sem 0. Azt mondjuk, hogy az $y' = -\frac{P}{Q}$ differenciálegyenlet egzakt, ha van olyan $F: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvény, melyre:

$$\text{I.} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = P$$

$$\text{II.} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

Példa

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Ennek a megoldását már korábban megkaptuk: $\underbrace{x^2 + y^2}_{F(x,y)} = C$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 2 \cdot x = P \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 2 \cdot y = Q \end{aligned} \right\} -\frac{P}{Q} = -\frac{2 \cdot x}{2 \cdot y} = y'$$

Megjegyzések:

$$1. \quad \text{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) = (P, Q)$$

2. Implicit függvény-tétel: Ha $F(x_0, y_0)$ környezetében mindenhol folytonosan diffható és $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, akkor egyértelműen létezik az (x_0, y_0) környezetben az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ egyenletnek implicit függvénye és enne deriváltja:
 $y'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))}$

$$3. \quad F(g(x), h(x))' = \text{grad} F(g(x), h(x)) \cdot \begin{pmatrix} g'(x) \\ h'(x) \end{pmatrix}$$

Tétel (Egzisztencia)

$U \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, $P, Q: U \rightarrow \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható, Q sehol sem 0. $(x_0, y_0) \in U$, $\frac{\partial F}{\partial x} = P$, $\frac{\partial F}{\partial y} = Q$.

Ilyenkor $y' = -\frac{P}{Q}$ megoldása pontosan az $F(x, y) = F(x_0, y_0)$ implicit megoldása.

$$\text{Bizonyítás:} \quad \Leftrightarrow y'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x))} = -\frac{P(x, y(x))}{Q(x, y(x))}$$

$\Rightarrow$ Legyen y olyan, hogy $y' = -\frac{P}{Q}$ ami egzakt.

$$Q \cdot y' = P$$

$$P + Q \cdot y' = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot y' = 0 \quad \text{Ez egy skaláris szorzat.}$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$(F(x, y(x)))' = 0$$

$$F(x, y) = C$$

Általános megoldás: $F(x, y) = C$

Tétel (Egzaktság jellemzése)

Legyen az U ezen kívül egyszeresen összefüggő halmaz. $y' = -\frac{P}{Q}$ pontosan akkor egzakt, ha $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$$y' = -\frac{P}{Q} \text{ másik jelölése: } \frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} \rightarrow Q \cdot dy = -P \cdot dx \rightarrow \underline{P \cdot dx + Q \cdot dy = 0}$$

Példa

$$\underbrace{(y \cdot e^{xy} + \cos x)}_P dx + \underbrace{(x \cdot e^{xy} + \cosh y)}_Q dy = 0$$

Megoldás:

1. Tényleg egzakt-e?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} + y \cdot x \cdot e^{xy}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy}$$

A kettő egyenlő $\rightarrow$ tényleg egzakt

2. Egyenletrendszer

$$\text{I. } \frac{\partial F}{\partial x} = y \cdot e^{xy} + \cos x$$

$$\text{II. } \frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot e^{xy} + \cosh y$$

Elsőt kiintegráljuk: $F(x, y) = y \cdot \frac{e^{xy}}{y} + \sin x + C_1(y)$ $C_1(y)$ csak y -nak a függvénye

$$\text{Majd deriváljuk } y \text{ szerint: } \underbrace{x \cdot e^{xy} + C_1'(y)}_{a \text{ derivált}} = \underbrace{x \cdot e^{xy} + \cosh y}_Q$$

$$C_1'(y) = \cosh y$$

$$C_1(y) = \sinh y$$

$$F(x, y) = e^{xy} + \sin x + \sinh y$$

$$\underline{e^{xy} + \sin x + \sinh y = C}$$

Példa

$$y' = -\frac{y \cdot \cos(xy) + 1}{x \cdot \cos(xy)} \quad y(1) = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y \cdot \cos(xy) + 1}{x \cdot \cos(xy)}$$

$$(x \cdot \cos(xy)) dy = -(y \cdot \cos(xy) + 1) dx \rightarrow \underbrace{(y \cdot \cos(xy) + 1)}_P dx + \underbrace{(x \cdot \cos(xy))}_Q dy = 0$$

Megoldás:

$$1. \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \cos(xy) + y \cdot (-\sin(xy)) \cdot x$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \cos(xy) + x \cdot (-\sin(xy)) \cdot y$$

Tényleg egzakt

$$2. \quad \frac{\partial F}{\partial x} = y \cdot \cos(xy) + 1 \rightarrow F(x, y) = y \cdot \sin(xy) \cdot \frac{1}{y} + x + C_1(y)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x \cdot \cos(x \cdot y) \quad \rightarrow \quad F(x, y) = x \cdot \sin(x \cdot y) \cdot \frac{1}{y} + C_2(x)$$

$C_2(x)$ csak x függvénye, az első egyenletben van egy $+x$, ami a másodikban nincs és ez csak x függvénye, ezért ez lesz a $C_2(x)$. $C_1(y)$ nulla lesz, mert a második egyenletben nincs olyan tag, ami csak y függvénye.

$$F(x, y) = \sin(x \cdot y) + x$$

$$\underline{\sin(x \cdot y) + x = C}$$

3. előadás

$$D < 0 \text{ esetén a 2 gyök: } \mu \pm j \cdot \tau \quad \rightarrow \quad \text{A két megoldás: } e^{\mu \cdot x} \cdot \cos(\tau \cdot x), e^{\mu \cdot x} \cdot \sin(\tau \cdot x)$$

$$e^{a \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \cos(b \cdot x) + q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$$

$$y_{ip} = x^m \cdot e^{a \cdot x} \cdot (P(x) \cdot \cos(b \cdot x) + Q(x) \cdot \sin(b \cdot x))$$

$$P \text{ és } Q \text{ polinomok. } gr(P) = gr(Q) = \max\{p(x), q(x)\} \quad (gr: \text{a polinom foka})$$

$$m: a + b \cdot j \text{ multiplicitása a karakterisztikus polinomban}$$

Példa

$$y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y = 6 \cdot e^{4 \cdot t}$$

Homogén általános megoldás

$$\lambda^2 + 3 \cdot \lambda - 10 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = -5 \quad \rightarrow \quad y_{há} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t}$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$6 \cdot e^{4 \cdot t} = e^{4 \cdot t} \cdot (6 \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t)) \quad \rightarrow \quad a = 4, b = 0, p \text{ és } q \text{ nulladfokú}$$

$$a + b \cdot j = 4 \text{ nullszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak} \rightarrow m = 0$$

$$y_{ip} = t^0 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} = P \cdot e^{4 \cdot t}$$

Visszahelyettesítés

$$y'_{ip} = 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$y''_{ip} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$6 \cdot e^{4 \cdot t} = 16 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} + 3 \cdot 4 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t} - 10 \cdot P \cdot e^{4 \cdot t}$$

$$P = \frac{1}{3}$$

$$y_{ip} = \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t} \quad \rightarrow \quad y_{ia} = y_{há} + y_{ip} = c_1 \cdot e^{2 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-5 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t}$$

Példa

$$y'' + 4 \cdot y = 3 \cdot \sin t$$

Homogén általános megoldás

$$\lambda^2 = -4 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm 2 \cdot j \quad \rightarrow \quad y_{há} = c_1 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot e^{0 \cdot t} \cdot \sin(2 \cdot t)$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$3 \cdot \sin(t) = e^{0 \cdot t} \cdot (0 \cdot \cos(1 \cdot t) + 3 \cdot \sin(1 \cdot t)) \rightarrow a = 0, b = 1$$

$$m = 0, \text{ mert } 0 + 1 \cdot j \text{ nullszoros gyöke a karakterisztikus polinomnak}$$

$$p \text{ és } q \text{ foka } 0 \rightarrow gr(P) = gr(Q) = 0$$

$$y_{ip} = P \cdot \cos(t) + Q \cdot \sin(t) \quad (P, Q \in R)$$

Visszahelyettesítés

$$y'_{ip} = -P \cdot \sin(t) + Q \cdot \cos(t)$$

$$y_{ip}'' = -P \cdot \cos(t) - Q \cdot \sin(t)$$

$$3 \cdot \sin(t) = -P \cdot \cos(t) - Q \cdot \sin(t) + 4 \cdot P \cdot \cos(t) + 4 \cdot Q \cdot \sin(t) = 3 \cdot P \cdot \cos(t) + 3 \cdot Q \cdot \sin(t)$$

$$P = 0, Q = 1$$

$$y_{ip} = \sin(t) \rightarrow y_{ia} = c_1 \cdot \cos(2 \cdot t) + c_2 \cdot \sin(2 \cdot t) + \sin(t)$$

Példa

$$y'' - 2 \cdot y' + y = 3 \cdot t \cdot e^t$$

Homogén általános megoldás

$$\lambda^2 - 2 \cdot \lambda + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 1 \text{ (kétszeres gyök)} \rightarrow y_{há} = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$3 \cdot t \cdot e^t = e^{1 \cdot t} \cdot (3 \cdot t \cdot \cos(0 \cdot t) + 0 \cdot \sin(0 \cdot t)) \rightarrow a = 1, b = 0$$

$$p \text{ foka } 1, q \text{ foka } 0 \rightarrow gr(P) = gr(Q) = 1$$

$$m = 2, \text{ mert } 1 + 0 \cdot j \text{ kétszeres gyöke a karakterisztikus polinomnak}$$

$$y_{ip} = t^2 \cdot e^t \cdot \left(\frac{P \text{ (elsőfokú polinom)}}{(u \cdot t + v)} \cdot \cos(0 \cdot t) + Q \cdot \sin(0 \cdot t) \right) = t^2 \cdot e^t \cdot (u \cdot t + v) =$$

$$= e^t \cdot (u \cdot t^3 + v \cdot t^2)$$

Visszahelyettesítés

$$y_{ip}' = e^t \cdot (3 \cdot u \cdot t^2 + 2 \cdot v \cdot t) + e^t \cdot (u \cdot t^3 + v \cdot t^2)$$

$$y_{ip}'' = e^t \cdot (u \cdot t^3 + (6 \cdot u + v) \cdot t^2 + (6 \cdot u + 4 \cdot v) \cdot t + 2 \cdot v)$$

$$3 \cdot t \cdot e^t = y_{ip}'' - 2 \cdot y_{ip}' + y = \dots = e^t \cdot (6 \cdot u \cdot t + 2 \cdot v) \rightarrow u = \frac{1}{2}, v = 0$$

$$y_{ip} = e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot t^3 \rightarrow y_{ia} = c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot t \cdot e^t + \frac{1}{2} \cdot t^3 \cdot e^t$$

Lineáris differenciálegyenlet rendszer (állandó együtthatós)

$$y' - a \cdot y = b(x) \text{ analógiájára } \underline{\underline{y}}' - \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}} = \underline{\underline{b}}(x)$$

$n = 2$ esetén:

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \text{ azaz } \begin{matrix} y_1' = a_{11} \cdot y_1 + a_{12} \cdot y_2 + b_1 \\ y_2' = a_{21} \cdot y_1 + a_{22} \cdot y_2 + b_2 \end{matrix}$$

Példa

$$y_1' = y_1 + y_2 - 2 \cdot e^{-t}$$

$$y_2' = 4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot t$$

Homogén általános megoldás

$$\underline{\underline{y}}' = \underline{\underline{A}} \cdot \underline{\underline{y}}$$

a, $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei: $|A - \lambda \cdot I| = 0$ gyökei

$$0 = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 4 & 1 - \lambda \end{vmatrix} \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = -1 \end{cases}$$

b, sajátvektorok

$$\lambda = 3\text{-hoz tartozó: } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2 \cdot v_1 + v_2 = 0 \rightarrow v_2 = 2 \cdot v_1 \rightarrow \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(A másik egyenlet ennek a duplája)

$$\lambda = -1\text{-hez tartozó: } \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

c, alaprendszer

$$\underline{\Psi} = (e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \underline{v}^1, \dots, e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \underline{v}^n)$$

Homogén általános megoldás: Ψ oszlopainak összes lineáris kombinációja

$$\text{Most: } \Psi = \begin{pmatrix} e^{3 \cdot t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{Ha } \underline{A} \cdot \underline{v} &= \lambda \cdot \underline{v}, \text{ akkor } \underline{y} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{v} \text{ tényleg megoldás, mert } \underline{y}' = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{v} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{A} \cdot \underline{v} = \\ &= \underline{A} \cdot (e^{\lambda \cdot t} \cdot \underline{v}) \rightarrow \underline{y}' = \underline{A} \cdot \underline{y} \end{aligned}$$

3. gyakorlat

Egzaktra visszavezethető differenciálegyenletek

$$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \rightarrow \text{Egzakt}$$

Ha ez nem teljesül, akkor nem egzakt. Ekkor beszorozzuk egy μ függvénnyel, hogy egzakt legyen. Biztosan létezik minden egyenlethez ilyen μ . Nincs általános megoldás. Mi két módszert tanulunk μ keresésére.

$$\underbrace{\mu \cdot P}_{M} \cdot dx + \underbrace{\mu \cdot Q}_{N} \cdot dy = 0$$

$$\frac{\partial(\mu \cdot P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu \cdot Q)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P + \mu \cdot \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q + \mu \cdot \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\mu \cdot \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = \frac{\partial \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \mu}{\partial y} \cdot P \quad \mu\text{-vel osztás + használjuk: } \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} \cdot Q - \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} \cdot P$$

1. módszer: $\mu = \mu(x)$ (csak x -től függ) $\rightarrow y$ szerinti deriváltja 0

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{\partial \ln \mu}{\partial x}$$

$$\ln \mu = \int R(x) dx$$

$$\mu(x) = e^{\int R(x) dx}$$

2. módszer: $\mu = \mu(y)$

$$S(y) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$$

$$\mu(y) = e^{-\int S(y) dy}$$

Példa

$$y' = \frac{x^3 + y^3}{x \cdot y^2} \quad x > 0$$

$$x \cdot y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$$

$$\underbrace{-(x^3 + y^3)}_P dx + \underbrace{x \cdot y^2}_Q dy = 0$$

1. Egzakt-e?

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = y^2$$

Nem egzakt $\rightarrow$ tegyük egzakttá, keressük egy μ -t.

$$R(x) = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{-3 \cdot y^2 - y^2}{x \cdot y^2} = -\frac{4}{x}$$

Azért Q -val osztunk, és nem P -vel, mert így kiesik az y és csak x -től fog függeni a μ .

$\mu = e^{\int \frac{-4}{x} dx} = e^{-4 \cdot \ln x} = \frac{1}{x^4}$ Az abszolút értéket el lehet hagyni, mert feltettük az elején, hogy x pozitív. Az integrál utáni konstanst is el lehet hagyni, mert nekünk csak egy μ kell, amivel beszorozva az eredeti egyenletet egzakttá tesszük.

Tehát szorozzuk be az egyenletet $\mu = \frac{1}{x^4}$ -nel.

$$-\frac{x^3 + y^3}{x^4} dx + \frac{y^2}{x^3} dy = 0$$

2. Ez már egzakt-e?

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{1}{x^4} \cdot 3 \cdot y^2$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = -3 \cdot y^2 \cdot x^{-4}$$

Igen, ez már egzakt.

3.

$$\text{I. } \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{x^3 + y^3}{x^4} \xrightarrow{\int dx} F(x, y) = -\ln x - \frac{x^{-3} \cdot y^3}{-3} + C(y) \quad \text{Beírjuk a II. egyenletbe.}$$

$$\text{II. } \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{y^2}{x^3}$$

$$\frac{1}{3} \cdot x^{-3} \cdot 3 \cdot y^2 + C'(y) = \frac{y^2}{x^3}$$

$$C'(y) = 0$$

$$C(y) = \text{konstans}$$

$$F(x, y) = -\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} + \text{konstans}$$

$$-\ln x - \frac{y^3}{3 \cdot x^3} = C$$

Ez a μ -vel beszorozott (x^4 -nel leosztott) egyenlet megoldása, de e miatt nem csökken a megoldáshalmaz.

Elsőrendű függvényegyütthatós lineáris differenciálegyenlet

$$y' + f(x) \cdot y = g(x)$$

$e^{\int f(x) dx} = \mu(x)$ -el egzakttá tehető, vagy megoldható a Lagrange-féle állandók variálása módszerrel

Példa

$$y' - \frac{y}{x-2} = 2 \cdot (x-2)^2$$

Megoldás:

1, Homogén általános megoldás

$$\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x-2} = 0$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x-2}$$

$$\ln|y| = \ln|x-2| + C \quad C \in \mathbb{R} \quad C = \ln C^*$$

$$\ln|y| = \ln C^* \cdot |x-2|$$

$$|y| = C^* \cdot |x-2| \quad + \text{Bolzano}$$

$$y_{há} = K \cdot (x-2) \quad K \in \mathbb{R}$$

2, Keressünk egy **inhomogén partikuláris megoldást**

$$y_{ip} = K(x) \cdot (x-2) \quad \text{Visszahelyettesítés}$$

$$K'(x) \cdot (x-2) + K(x) - \frac{K(x) \cdot (x-2)}{(x-2)} = 2 \cdot (x-2)^2$$

$$K'(x) = 2 \cdot (x-2)$$

$$K(x) = (x-2)^2 \quad \text{Nem kell a } +C, \text{ elég egy megoldás.}$$

$$y_{ip} = K(x) \cdot (x-2) = (x-2)^3$$

3, **Inhomogén általános megoldás**

$$y_{ia} = y_{há} + y_{ip} = K \cdot (x-2) + (x-2)^3$$

4. előadás

Példa

$$y_1' = y_1 + y_2 - 2 \cdot e^{-t}$$

$$y_2' = 4 \cdot y_1 + y_2 + 3 \cdot t$$

Homogén általános megoldás

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) \text{-ből a saját értékek:} \quad \lambda_1 = 3$$

$$\text{Ehhez tartozó sajátvektor: } \underline{\underline{v}}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1$$

$$\text{Ehhez tartozó sajátvektor: } \underline{\underline{v}}^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Alaprendszer

$$\psi = e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}^1, \dots, e^{\lambda_n \cdot t} \cdot \underline{\underline{v}}^n$$

$$\text{Most: } \psi = \begin{pmatrix} e^{3 \cdot t} & e^{-t} \\ 2 \cdot e^{3 \cdot t} & -2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$\text{A homogén megoldás pedig: } y_h = \psi \cdot c = \begin{pmatrix} y_{h1} \\ y_{h2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3 \cdot t} + c_2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3 \cdot t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

Inhomogén partikuláris megoldás

$$y_{ip} = \psi \cdot c(t)$$

1. állítás: Ha ψ oszlopai $y' = A \cdot y$ megoldásai, akkor $\underline{\underline{\psi}}'(t) = A \cdot \underline{\underline{\psi}}(t)$

$$\psi' \triangleq (\psi_1', \dots, \psi_n'), \text{ ahol } \psi_i \text{ a } \psi \text{ i. oszlopa}$$

$$\text{Bizonyítás: } \left(\underline{\underline{\psi}}' \right)_i = \left(\underline{\underline{\psi}}_i \right)' = A \cdot \underline{\underline{\psi}}_i = \left(A \cdot \underline{\underline{\psi}} \right)_i$$

2. állítás: Az első állítás feltételei mellett:

Ha $c(t)$ kiegyenlíti $\psi \cdot c'(t) = b(t)$ egyenletet, akkor $y = \psi \cdot c$ egy jó partikuláris megoldása az inhomogénnek.

$$\text{Bizonyítás: } \underline{y} = \underline{\psi} \cdot \underline{c} \Rightarrow \underline{y}' = \underbrace{\underline{\psi}'} \cdot \underline{c} + \underbrace{\underline{\psi} \cdot \underline{c}'} = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{\psi}}_{\underline{A} \cdot \underline{\psi}} \cdot \underline{c} + \underline{b} = \underline{A} \cdot \underbrace{\underline{\psi} \cdot \underline{c}}_{\underline{y}} + \underline{b}$$

Elég a $\psi \cdot c' = b$ egyenletet megoldani c' -re.

$$b = \begin{pmatrix} -2 \cdot e^{-t} \\ 3 \cdot t \end{pmatrix}$$

$$\text{Azaz } \left. \begin{aligned} c_1'(t) \cdot e^{3t} + c_2'(t) \cdot e^{-t} &= 2 \cdot e^{-t} \\ 2 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3t} - 2 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} &= 3 \cdot t \end{aligned} \right\}$$

A felső kétszeresét hozzáadva az alsóhoz:

$$4 \cdot c_1'(t) \cdot e^{3t} = 3 \cdot t - 4 \cdot e^{-t}$$

$$c_1'(t) = \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^{-3t} - e^{-4t}$$

A felső kétszeresét kivonva az alsóból:

$$-4 \cdot c_2'(t) \cdot e^{-t} = 3 \cdot t + 3 \cdot e^{-t}$$

$$c_2'(t) = -\frac{3}{4} \cdot t \cdot e^t - 1$$

Integrálás után...

$$\left. \begin{aligned} c_1(t) &= \frac{1}{4} \cdot e^{-4t} - \frac{1}{4} \cdot e^{-3t} \cdot t - \frac{1}{12} \cdot e^{-3t} \\ c_2(t) &= -t - \frac{3}{4} \cdot t \cdot e^t + \frac{3}{4} \cdot e^t \end{aligned} \right\} \text{visszahelyettesítés}$$

$$y_{ip1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3}$$

$$y_{ip2} = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3}$$

$$y_{ia} = y_{há} + y_{ip} = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^{3t} + c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{4} \cdot e^{-t} - t \cdot e^{-t} - t + \frac{2}{3} \\ 2 \cdot c_1 \cdot e^{3t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + 2 \cdot t \cdot e^{-t} + t - \frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

Példa

$$y_1' = y_1 - 10 \cdot y_2 + e^t$$

$$y_2' = -y_1 + 4 \cdot y_2 + \sin(t)$$

$$\rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -10 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & -10 \\ -1 & 4-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda) \cdot (4-\lambda) - 10 = 4 - 5 \cdot \lambda + \lambda^2 - 10 = 0$$

$$\lambda^2 - 5 \cdot \lambda - 6 = 0 \rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 6$$

$$\lambda_1\text{-hez tartozó sajátvektor: } \underline{v}^1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2\text{-hez tartozó sajátvektor: } \underline{v}^2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ezekből már tudjuk ψ -t.

$$\psi = \begin{pmatrix} 5 \cdot e^{-t} & -2 \cdot e^{6t} \\ 1 \cdot e^{-t} & e^{6t} \end{pmatrix}$$

$$y_{há1} = 5 \cdot c_1 \cdot e^{-t} - 2 \cdot c_2 \cdot e^{6t}$$

$$y_{há} = \psi \cdot c, \text{ azaz}$$

$$y_{há2} = c_1 \cdot e^{-t} + c_2 \cdot e^{6t}$$

Kéne olyan c , hogy $\psi * c' = b$, azaz

$$\left. \begin{aligned} e^t &= 5 \cdot c'_1 \cdot e^{-t} - 2 \cdot c'_2 \cdot e^{6t} \\ \sin(t) &= c'_1 \cdot e^{-t} + c'_2 \cdot e^{6t} \end{aligned} \right\}$$

Alsó kétszeresét hozzáadjuk a másikhoz:

$$e^t + 2 \sin(t) = 7 \cdot c'_1 \cdot e^{-t} \Rightarrow c'_1 = \frac{1}{7} \cdot e^{2t} + \frac{2}{7} \cdot e^t \cdot \sin(t)$$

Alsó ötszörösét kivonjuk a felsőből:

$$e^t - 5 \cdot \sin(t) = 7 \cdot c'_2 \cdot e^{6t} \Rightarrow c'_2 = -\frac{1}{7} \cdot (e^{-5t} - 5 \cdot e^{-6} \cdot \sin(t))$$

Integrálás után:

$$c_1(t) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot e^{2t} - e^t \cdot (\cos(t) - \sin(t)) \right)$$

$$c_2(t) = \frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{5} \cdot e^{-5t} + \frac{5}{37} \cdot e^{-6t} \cdot (\cos(t) - 6 \cdot \sin(t)) \right)$$

$$\text{visszahelyettesítve az } y_{há} = \psi \cdot c\text{-be} \Rightarrow y_{ip1} = \frac{3}{10} \cdot e^t + \frac{35}{37} \cdot \sin(t) - \frac{25}{37} \cdot \cos(t)$$

$$y_{ip2} = \frac{1}{10} \cdot e^t + \frac{1}{37} \cdot \sin(t) - \frac{6}{37} \cdot \cos(t)$$

Inhomogén általános megoldás

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip} \dots$$

Laplace-transzformáció

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = F(s)$$

Definíció: Ha $Do(f) \supseteq \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, akkor $\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$, feltéve, hogy ez az integrál konvergens

Tétel: Ha f szakaszonként folytonos $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ -n és $\exists M, c \in \mathbb{R}$, hogy $|f(t)| \leq M \cdot e^{c \cdot t}$, akkor $\forall s > c$ -re $\exists F(s)$

Definícióból következik: $\mathcal{L}$ lineáris operátor

4. gyakorlat

$$P \cdot dx + Q \cdot dy = 0$$

$$P = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial F}{\partial y}$$

$$\text{egzakt, ha } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\text{Bizonyítás:} \Rightarrow \text{Young-tétel: } \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

$\Leftarrow$ Feladatokból adódik, hogy kell megcsinálni F-et

Komplex analízis

Komplex aritmetika

I. Algebrai definíció:

$$\mathbb{R}[X] = \{a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n\}, n \in \mathbb{N}, a_0 \dots a_n = \mathbb{R}$$

$$(x^3 - 1) : (x - 1) = x^2 + x + 1$$

$$x^3 - x^2$$

$$x^2 - 1$$

$$x^2 - x$$

$$x - 1$$

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}[X]/x^2 - 1 = \{a * x + b; a, b \in \mathbb{R}\}$$

$$p^2(x) + 1 = 0$$

$$x^2 + 1 = 0$$

$$x = i$$

$$i^2 = -1$$

2. Halmazelméleti definíció

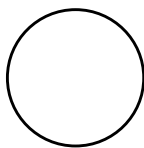
$$w \cdot z = (x \cdot u - y \cdot v, x \cdot v + y \cdot u)$$

$$\text{lineárisan izomorf: } \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$$

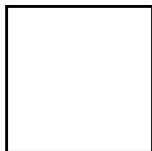
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$$

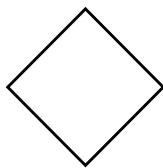
$$\|z\|_2$$



$$\|z\|_\infty$$



$$\|z\|_1 = |x| + |y|$$



(egyes norma)

3. Geometriai definíció

$$w \xrightarrow{\mathcal{A}} z \cdot w$$

forogtatva nyújtás: forgatás $\arg(z)$ – vel
nyújtás r – szeresére

$$[\mathcal{A}] = ?$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & \mathcal{A} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cdot \cos(\varphi) & -r \cdot \sin(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) & r \cdot \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\text{forgatás mátrixa: } \begin{bmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{C} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

$$1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$i = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\mathbb{C}$ topológia

$$\text{gömbi környezet: } B_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

$$\dot{B}_\varepsilon(z_0) = B_\varepsilon(z_0) \setminus z_0$$

(kipontozott környezet)

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ nyílt, ha minden } z \in H \text{-ra } \exists \varepsilon > 0 \ B_\varepsilon(z) \subseteq H$$

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ zárt, ha } \mathbb{C} \setminus H \text{ nyílt}$$

$$H \subseteq \mathbb{C} \text{ korlátos, ha } \exists \varepsilon > 0: H \subseteq B_\varepsilon(0)$$

Heine-Borel tétel: Véges dimenziós normált térben zárt és korlátos halmaz kompakt.

Definíció: $K \subseteq \mathbb{C}$ kompakt, ha minden $\{U_i\}_{i \in I}$ nyílt halmazokból álló rendszer esetén, ha $H \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$; akkor van $J \subseteq I$ véges halmaz, hogy $H \subseteq \bigcup_{i \in J} U_i$

$\mathbb{C}$ kompaktifikációja

(Alexandrov-féle egy pontú kompaktifikáció)

$$P \rightarrow z$$

$$E \rightarrow \infty$$

sztereografikus projekció

$$\bar{\mathbb{C}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

$$B_\varepsilon(\infty) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \frac{1}{\varepsilon} \right\}$$

Állítás: $\bar{\mathbb{C}}$ kompakt

Bizonyítás: $\bar{\mathbb{C}} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

$$\infty \in U_i \rightarrow B_\varepsilon(\infty) \subseteq U_{i_0}$$

$$\overline{B_\varepsilon(0)} \subseteq \bigcup_{j \in J} U_j \quad J \text{ véges}$$

$|J| + 1$ db U_i -vel le van fedve $\bar{\mathbb{C}}$.

Folytonosság

Definíció: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, z_0 \in \text{Dom}(f)$. Az f folytonos, ha minden $\varepsilon > 0$ -hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\forall z \in \text{Dom}(f), z \in B_\delta(z_0) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(f(z_0))$

$$f = u + i \cdot v$$

$$u, v: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$$

$$f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad z = x + i \cdot y \in \mathbb{C} \quad x, y \in \mathbb{R}$$

Állítás: f folytonos $\Leftrightarrow u$ és v is folytonos

Példa: $f(x + i \cdot y) = x + y + i \cdot (x^2 + y^2)$

$$u(x, y) = x + y$$

$$v(x, y) = x^2 + y^2$$

Határérték

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, u \in \text{Dom}(f), A \in \bar{\mathbb{C}}$$

$$\exists \lim_u f = A \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0) \exists \delta > 0 \forall z \in \text{Dom}(f) \setminus \{u\} \text{ teljesül, hogy } z \in B_\delta(u) \Rightarrow f(z) \in B_\varepsilon(A)$$

Példa

$$\text{a, } \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty \quad \varepsilon > 0, \text{ kell } \delta > 0: |z| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\delta := \varepsilon$$

$$\text{b, } \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z} = 0 \quad \varepsilon > 0, \text{ kell } \delta > 0: |z| > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{|z|} < \varepsilon$$

$$\delta := \varepsilon$$

5. előadás

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f\}(s)$
$t^n \ (n \in \mathbb{N})$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$

$e^{a \cdot t}$	$\frac{1}{s - a}$
$\sin(\omega \cdot t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$t \cdot \sin(\omega \cdot t)$	$\frac{2 \cdot \omega \cdot s}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos(\omega \cdot t)$	$\frac{s^2 - \omega^2}{(s^2 + \omega^2)^2}$
$sh(a \cdot t)$	$\frac{a}{s^2 - a^2}$
$ch(a \cdot t)$	$\frac{s}{s^2 - a^2}$

$$e^{a \cdot t}\text{-re végigszámolva: } \mathcal{L}\{e^{a \cdot t}\}(s) = \int_0^\infty e^{a \cdot t} \cdot e^{-s \cdot t} dt = \int_0^\infty e^{a-s \cdot t} dt \stackrel{ha \ a \neq s}{=} \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{e^{(a-s) \cdot t}}{a-s} \right]_0^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{(a-s) \cdot b} - 1}{a-s} = \begin{cases} \infty, & \text{ha } a > s \\ \frac{1}{s-a}, & \text{ha } a < s \end{cases}$$

Tétel: $\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = s \cdot \mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = s \cdot F(s) - f(0)$, ha $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \cdot e^{-st} = 0$, f, f' folytonos $[0, \infty]$ -en

$$\text{Bizonyítás: } \mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = \int_0^\infty f'(t) \cdot e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f'(t) \cdot e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\underbrace{[f(t) \cdot e^{-st}]_0^\infty}_{0 - f(0)} + s \cdot \underbrace{\int_0^b f(t) \cdot e^{-st} dt}_{F(s)} \right) = s \cdot F(s) - f(0)$$

Következmény: $\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot f(0) - f'(0)$

$$\text{Bizonyítás: } s \cdot \mathcal{L}\{f'\} - f'(0) = s \cdot (s \cdot F - f(0) - f'(0))$$

Általánosan: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n \cdot F(s) - \sum_{i=0}^{n-1} s^i \cdot f^{(n-1-i)}(0)$

Példa

$$\begin{aligned} y'' + 3 \cdot y' - 10 \cdot y &= 6 \cdot e^{4 \cdot t} & \text{Kezdeti feltételek: } y(0) &= 0 & y'(0) &= 0 \\ \underbrace{s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)}_{\mathcal{L}\{y''\}} + 3 \cdot \underbrace{(s \cdot Y - y(0))}_{\mathcal{L}\{y'\}} - 10 \cdot Y &= \frac{6}{s-4} \end{aligned}$$

A kezdeti feltételeket behelyettesítve:

$$(s^2 + 3 \cdot y - 10) \cdot Y = \frac{6}{s-4} \Rightarrow Y = \frac{6}{(s-4) \cdot (s-2) \cdot (s+5)} = \dots = \frac{-\frac{3}{7}}{s-2} + \frac{\frac{1}{3}}{s-4} + \frac{\frac{2}{21}}{s+5}$$

Ilyen alakból már vissza tudjuk alakítani az inverz transzformáció képleteivel:

$$y = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}(t) = -\frac{3}{7} \cdot e^{2 \cdot t} + \frac{1}{3} \cdot e^{4 \cdot t} + \frac{2}{21} \cdot e^{-5 \cdot t}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}(s)$
1) $t \cdot g(t)$	$-1 \cdot \frac{d}{ds} \cdot G(s)$
2) $t^n \cdot g(t) \ (n \in \mathbb{N})$	$(-1)^n \cdot \frac{d^n}{ds^n} \cdot G(s)$
3) $e^{a \cdot t} \cdot g(t)$	$G(s - a)$ (eltolás)
4) $g(a \cdot t)$	$\frac{1}{a} \cdot G\left(\frac{s}{a}\right)$ (nyújtás)

Példa

- $\mathcal{L}^{-1}\{\cos(\omega \cdot t)\}$ kiszámítható $\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\}$ -ből, mert: $\frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}\{\omega \cdot \cos(\omega \cdot t)\} = \frac{1}{\omega} \cdot \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)'\} = \frac{1}{\omega} \cdot \left(s \cdot \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - s(\omega \cdot 0)\right) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- $\mathcal{L}\{t \cdot \sin(\omega \cdot t)\}$ kiszámítható $\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\}$ -ből az 1) segítségével

- $ch(a \cdot t)$ kiszámítható $sh(a \cdot t)$ -ből a 2) segítségével

Példa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\}$$

$$1. \text{ megoldás} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = t \quad \xrightarrow{2) \text{ felhasználásával}} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{(s-2)^2}\right\} = -e^{2t} \cdot \underbrace{t}_{g(t)} \quad G(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$2. \text{ megoldás} \quad \int \frac{-1}{(s-2)^2} ds = \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{G \rightarrow g=e^{2t}} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} = -t \cdot e^{2t}$$

Példa

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\}$$

$$\left(\frac{1}{s-4}\right)'' = \frac{2}{(s-4)^3} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)^3}\right\} = \frac{1}{2} \cdot t^2 \cdot e^{4t}$$

$$\frac{1}{s-4} = G \Rightarrow g = e^{4t}$$

Példa

$$y'' - 2 \cdot y' + y = x$$

Kezdeti feltétel:

$$y(0) = 0 = y'(0)$$

Laplace-transzformálás után:

$$\underbrace{s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)}_{y''} - 2 \cdot \underbrace{(s \cdot Y - y(0))}_{y'} + Y = \frac{1}{s^2}$$

$$(s^2 - 2 \cdot s + 1) \cdot Y = \frac{1}{s^2}$$

$$Y = \frac{1}{s^2 \cdot (s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{(s-1)^2} = \dots = \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{(s-1)^2}$$

Inverz Laplace-transzformálva:

$$y = 2 + x - 2 \cdot e^x + x \cdot e^x$$

Példa

$$y' = z$$

Kezdeti feltétel:

$$y(0) = 1 \text{ és } z(0) = 0$$

$$z' = y$$

$$\left. \begin{aligned} -Z &= s \cdot Y - y(0) \\ s \cdot Z - z(0) &= Y \end{aligned} \right\}$$

$$(s^2 + 1) \cdot Y = s$$

$$-(s^2 + 1) \cdot Z = -1$$

$$Y = \frac{s}{s^2+1}$$

$$Z = \frac{-1}{s^2+1}$$

$$y = \cos(t)$$

$$z = \sin(t)$$

Példa

$$y' + z' + y + z = 1$$

$$y(0) = -1$$

$$y' + z' = e^t$$

$$z(0) = 2$$

...

Megoldás

$$y = 1 - 2 \cdot e^t + t \cdot e^t$$

$$z = 2 \cdot e^t - t \cdot e^t$$

Példa (Általános megoldás keresése Laplace-transzformációval)

$$y'' + y = e^{-t} \quad \text{Új jelölések:} \quad y_0 = y(0) \quad y_1 = y'(0)$$

$$s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 + Y = \frac{1}{s+1}$$

$$Y = \frac{\frac{1}{2}}{s+1} + \frac{\frac{1}{2}s+\frac{1}{2}}{s^2+1} + \frac{s \cdot y_0}{s^2+1} + \frac{y_1}{s^2+1}$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \frac{1}{2} \cdot (-\cos(t) + \sin(t)) + y_0 \cdot \cos(t) + y_1 \cdot \sin(t)$$

$$y = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + \left(y_0 - \frac{1}{2}\right) \cdot \cos(t) + \left(y_1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \sin(t) = \frac{1}{2} \cdot e^{-t} + c_1 \cdot \cos(t) + c_2 \cdot \sin(t)$$

6. előadás

Példa

$$y'' - y = 0 \quad y_0 = y(0)$$

$$y_1 = y'(0)$$

$$0 = s^2 \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1 - Y = (s^2 - 1) \cdot Y - s \cdot y_0 - y_1$$

$$Y = \frac{s y_0 + y_1}{s^2 - 1} = y_0 \cdot \frac{s}{s^2 - 1} + y_1 \cdot \frac{1}{s^2 - 1} \quad \rightarrow \quad Y = y_0 \cdot \text{ch}(t) + y_1 \cdot \text{sh}(t) = c_1 \cdot \text{ch}(t) + c_2 \cdot \text{sh}(t)$$

Példa

$$y''' - y = 1 \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$$

Visszavezethető elsőrendűre

$$y_1 = y' \quad y_2 = y_1' \quad y_2' + y = 1$$

$$\frac{1}{s} = s^3 \cdot Y - s^2 \cdot y(0) - s \cdot y'(0) - y''(0) + Y \quad \rightarrow \quad Y = \frac{1}{s(s^3+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C \cdot s + D}{s^2 - s + 1}$$

$$Y = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{\frac{2}{3}s - \frac{1}{3}}{s^2 - s + 1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{s - \frac{1}{2}}{\left(\frac{s-1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = 1 - \frac{1}{3} \cdot e^{-t} - \frac{2}{3} \cdot e^{\frac{t}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot t\right)$$

Konvolúció ($\mathcal{L}^{-1}$ kiszámolásához)

$$\text{Definíció: } \forall (t > 0) \quad f * g(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x) dx$$

$$1. \text{ Állítás: kommutatív} \quad f * g = g * f$$

$$2. \text{ Állítás: } \mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\} \quad (\Rightarrow f * g = \mathcal{L}^{-1}\{F \cdot G\})$$

Példa

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+1)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2+1}\right\} = 1 * \sin(t) = \sin(t) * 1 = \int_0^t \sin(x) dx =$$

$$= -[\cos(t)]_0^t = 1 - \cos(t)$$

$$\text{Ellenőrzés:} \quad \mathcal{L}\{1 - \cos(t)\} = \mathcal{L}\{1\} - \mathcal{L}\{\cos(t)\} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+1} = \frac{s^2+1-s^2}{s(s^2+1)} = \frac{1}{s(s^2+1)}$$

Vektoranalízis

Vektorértékű függvényeket akarunk integrálni görbéken és felületeken

1. Mik ezek a görbék, felületek?

2. Mekkora ezek?

3. Irányítás.

Felület

Definíció: $1 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ zárt, korlátos, összefüggő, mérhető, nem üres belsejű halmaz

$r = r(u)$ A-n értelmezett, szakaszonként folytonosan differenciálható, $\mathbb{R}^n$ -be képező injektív (1-1) függvény úgy, hogy a Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek (A belsejében)

$$\begin{pmatrix} \nabla r_1 \\ \vdots \\ \nabla r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dr_1}{du_1} & \dots & \frac{dr_1}{du_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dr_n}{du_1} & \dots & \frac{dr_n}{du_n} \end{pmatrix}$$

$Rg(r)$ (Rg : értékészlet) az r által definiált **n-dimenziós** (m-dimenzióbeli) **felület**. r ennek a felületnek az explicit egyenlete.

A felület **térrész**, ha $m = n$, **valódi felület**, ha $n = m - 1$, **görbe**, ha $n = 1$.

Egy pont **belső pont**, ha van olyan homeomorfizmus (folytonos és kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, bijekció), ami a (nyílt) n-dimenziós egységömböt a felületbe képezi úgy, hogy a pont benne van a képben. Ezek halmaza: $Int F$ (ha F a felület). F **zárt**, ha minden pontja belső pont.

5. gyakorlat

Példa

$$f(z) = \begin{cases} \underbrace{\bar{z} + z}_{\text{valós}} + \underbrace{\frac{i \cdot \text{Im}(z)}{|z|}}_{\text{valós}}, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases}$$

$$z = x + i \cdot y$$

$$v(x, y) = \bar{z} + z = 2 \cdot x$$

$$u(x, y) = \frac{\text{Im}(z)}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} \neq \lim_{y \rightarrow 0}$, ezért nincs határértéke.

Példa

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2 \end{cases} \quad \begin{matrix} t \rightarrow x_1(t) \in Diff \\ t \rightarrow x_2(t) \in Diff \end{matrix}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{A} \cdot \underline{x}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \quad \rightarrow \quad \det \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 1 & 4 - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(2 - \lambda) \cdot (4 - \lambda) = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 8 = 3$$

$$\lambda^2 - 6 \cdot \lambda + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$$

Sajátvektorok

$$\lambda = 1: \quad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 2: \quad \begin{bmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

ψ együtthatómátrixa:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} -3 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5t} \\ 1 \cdot e^t & 1 \cdot e^{5t} \end{bmatrix}$$

$$x = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} -3 \cdot c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5t} \\ c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{5t} \end{pmatrix}$$

Kezdeti érték feltétel

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = -1$$

Ha már megvan ψ , akkor

$$1 = -3 \cdot c_2 + c_2$$

$$-1 = c_1 + c_2$$

Egyébként Laplace-transzformálással:

$$(\mathcal{L}\{y'\} = s \cdot Y - y(0))$$

$$s \cdot X_1 - 1 = 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2$$

$$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 4 \cdot X_2 \quad \rightarrow \quad X_1 = (s - 4) \cdot X_2 + 1 \quad (\text{elsőbe beírjuk})$$

$$(s - 2) \cdot [(s - 4) \cdot X_2 + 1] - 1 = 3 \cdot X_2$$

$$(s - 2) \cdot (s - 4) \cdot X_2 + s - 2 - 1 = 3 \cdot X_2$$

$$((s - 2) \cdot (s - 4) - 3) \cdot X_2 = 3 - s$$

$$X_2 = \frac{3-s}{s^2-6s+8} = \frac{3-s}{(s-1)(s-5)} = \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s-5} = \frac{A \cdot (s-5) + B(s-1)}{(s-1)(s-5)}$$

$$s = 1: \quad A \cdot (-4) = 2 \quad \rightarrow \quad A = -\frac{1}{2}$$

$$s = 5: \quad B \cdot 4 = -2 \quad \rightarrow \quad B = -\frac{1}{2}$$

$$X_2 = \frac{-\frac{1}{2}}{s-1} + \frac{-\frac{1}{2}}{s-5}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X_2\} = -\frac{1}{2} \cdot e^t + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot e^{5t}$$

2. egyenlet: $\dot{x}_2 = x_1 + 4 \cdot x_2$ Ebből kifejezzük x_1 -et:

$$x_1 = \dot{x}_2 - 4 \cdot x_2 = \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5t}\right)' - 4 \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot e^t - \frac{1}{2} \cdot e^{5t}\right)$$

Példa

$$\dot{x}_1 = 3 \cdot x_1 + x_2 \quad x_1(0) = 1$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + 3 \cdot x_2 \quad x_2(0) = -1$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$s \cdot X_1 - 1 = 3 \cdot X_1 + X_2$$

$$s \cdot X_2 + 1 = X_1 + 3 \cdot X_2$$

$$s \cdot (X_1 + X_2) = 4 \cdot (X_1 + X_2)$$

$$(s - 4) \cdot (X_1 + X_2) = 0 \quad \forall s\text{-re}$$

$$X_1 = -X_2$$

Inhomogén általános differenciál egyenletrendszer általános megoldása

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_1 + e^{2 \cdot t}$$

I. Homogén általános megoldás

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2 \cdot t} \end{bmatrix}$$

$$\det(A - \lambda \cdot E) = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \pm 1$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_2 = -1: \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{-t} \\ e^t & -e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$x_h = \psi(t) \cdot c = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix}$$

II. Inhomogén partikuláris megoldás

$c = c(t)$, állandók variálása módszer

$$\psi(t) \cdot c'(t) = b$$

$$\underline{c}'(t) = \underline{\psi(t)}^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad e^t \cdot c_1' + e^{-t} \cdot c_2' = 0 \\ (2) \quad e^t \cdot c_1' - e^{-t} \cdot c_2' = e^{2t} \end{array} \right\}$$

Két egyenletet összeadva:

$$2 \cdot c_1' \cdot e^t = e^{2t}$$

$$c_1' = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

$$c_1 = \int \frac{1}{2} \cdot e^t dt = \frac{1}{2} \cdot e^t$$

Első egyenletbe behelyettesítve és átrendezve:

$$c_2' = -\frac{e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t}{e^{-t}} = -\frac{1}{2} \cdot e^{3t}$$

$$c_2 = -\frac{1}{2} \cdot \int e^{3t} dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3t}$$

$$\underline{x}_p = \underline{\psi(t)} \cdot \underline{c(t)} = \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \end{pmatrix}$$

$$x = x_h + x_p = \begin{pmatrix} c_1 \cdot e^t + c_2 \cdot e^{-t} \\ c_1 \cdot e^t - c_2 \cdot e^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t - e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \\ e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot e^t + e^{-t} \cdot \frac{1}{6} \cdot e^{3t} \end{pmatrix}$$

Példa

$$y' + \frac{2y}{x} = \sin(x^3 + 1)$$

I. $y' + \frac{2y}{x} = 0$

$$y' = -\frac{2y}{x}$$

$$\frac{y'}{y} = -\frac{2}{x}$$

/∫

$$\ln|y| = -2 \cdot \ln|x| + C$$

/e⁰

$$|y| = e^{\ln|x|^{-2} + C}$$

$$|y| = |x|^{-2} \cdot C^*$$



Bolzano-tétel

$$y = K \cdot x^{-2}$$

$$y_p = K(x) \cdot x^{-2}$$

Visszahelyettesítés: $K'(x) \cdot x^{-2} + K(x) \cdot (-2) \cdot x^{-3} + \frac{2 \cdot K(x) \cdot x^{-2}}{*} = \sin(x^3 + 1)$

$$K'(x) \cdot x^{-2} = \sin(x^3 + 1)$$

$$K'(x) = x^2 \cdot \sin(x^3 + 1)$$

$$K(x) = \frac{1}{3} \cdot \int 3 \cdot x^2 \cdot \sin(x^3 + 1) dx = \frac{1}{3} \cdot (-\cos(x^3 + 1)) \quad (\text{helyettesítési integrálás})$$

Példa

$$y'' - 10 \cdot y' + 9 \cdot y = 5 \cdot t \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$$

$$\mathcal{L}\{y''\} = s^2 \cdot Y - s \cdot y(0) - y'(0)$$

$$s^2 \cdot Y + s - 2 - 10 \cdot (s \cdot Y + 1) + 9 \cdot Y = \frac{5}{s^2}$$

$$Y \cdot \underbrace{(s^2 - 10 \cdot s + 9)}_{(s-1) \cdot (s-9)} + s - 12 = \frac{5}{s^2}$$

$$Y = \frac{\frac{5}{s^2} - s + 12}{(s-1) \cdot (s-9)} = \frac{5 - s^3 + 12 \cdot s^2}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s-1} + \frac{D}{s-9} = \frac{A \cdot s \cdot (s-1) \cdot (s-9) + B \cdot (s-1) \cdot (s-9) + C \cdot s^2 \cdot (s-9) + D \cdot s^2 \cdot (s-1)}{s^2 \cdot (s-1) \cdot (s-9)}$$

$$\left. \begin{array}{l} s = 0 \\ s = 1 \\ s = 9 \end{array} \right\} \text{nem elég, kell még egy: } s = -1$$

Példa

$$y'' - 3 \cdot y' + 2 \cdot y = 2 \cdot e^{3 \cdot x}$$

$$\lambda^2 - 3 \cdot \lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \quad \lambda_2 = 2$$

$$y_{\text{há}} = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{2 \cdot x}$$

$$\text{Ha } e^{\alpha \cdot x} \cdot (p(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$$

$$\rightarrow x^m \cdot e^x \cdot (P(x) \cdot \sin(\beta \cdot x) + Q(x) \cdot \cos(\beta \cdot x))$$

m: $\alpha \pm \beta \cdot i$ multiplicitása a karakterisztikus polinomban

Példa

$$y'' + 6 \cdot y' + 9 \cdot y = 2 \cdot e^{-3 \cdot x}$$

$$\lambda^2 + 6 \cdot \lambda + 9 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -3$$

$$y_{\text{há}} = C_1 \cdot e^{-3 \cdot x} + C_2 \cdot x \cdot e^{-3 \cdot x}$$

$$y_p = x^2 \cdot A \cdot e^{-3 \cdot x}$$

Példa

$$y'' + 4 \cdot y = \cos(2 \cdot x)$$

$$\lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2 \cdot i \quad \alpha = 0, \beta = 2, 0 \pm 2 \cdot i \quad \rightarrow m = 1$$

$$y_{\text{há}} = C_1 \cdot \sin(2 \cdot x) + C_2 \cdot \cos(2 \cdot x)$$

$$y_p = x \cdot (A \cdot \sin(2 \cdot x) + B \cdot \cos(2 \cdot x))$$

6. gyakorlat

Differenciálhatóság

$\mathbb{R}$ -beli

$$f \equiv \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad x_0 \in \text{int}(\text{Dom} f)$$

f $\mathbb{R}$ -differenciálható (totálisan), ha van olyan $A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés, hogy: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - A(x - x_0)}{\|x - x_0\|}$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix}$$

$$\text{Jakobi-determináns: } Jf_{x(0)} = [A] = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx} & \frac{df_1}{dy} \\ \frac{df_2}{dx} & \frac{df_2}{dy} \end{bmatrix} \quad A = df(x)$$

Példa

$$z \xrightarrow{f} w \cdot z = (w_1 + i \cdot w_2) \cdot (x + i \cdot y) = \underbrace{w_1 \cdot x - w_2 \cdot y}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(w_2 \cdot x + w_1 \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$f = u + i \cdot v$$

$$z = x + i \cdot y$$

konst: $w = w_1 + i \cdot w_2$

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} w_1 & -w_2 \\ w_2 & w_1 \end{bmatrix} = [w_1 + i \cdot w_2] = w$$

$$(w \cdot z)' = w$$

$$(5 \cdot x)' = 5$$

Példa

$$z \rightarrow z^2 = (x + i \cdot y)^2 = x^2 + 2 \cdot i \cdot x \cdot y - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + i \cdot \underbrace{(2 \cdot x \cdot y)}_{v(x,y)}$$

$$Jf(x, y) = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & -2 \cdot y \\ 2 \cdot y & 2 \cdot x \end{bmatrix} = [2 \cdot x + i \cdot 2 \cdot y] = [2 \cdot z]$$

$$(z^2)' = 2 \cdot z$$

Példa

$$z \rightarrow \bar{z} = \overline{(x + i \cdot y)} = x - i \cdot y$$

$$u(x, y) = x$$

$$v(x, y) = -y$$

$$Jf = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \notin \mathbb{C}$$

Definíció: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z_0 \in \text{int}(\text{Dom}(f))$. Azt mondjuk, hogy f komplex differenciálható, ha van olyan $w \in \mathbb{C}$, hogy $\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = w$. Ilyenkor $f'(z_0) = w$. $f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0)$

Példa

$$\text{Milyen } n \in \mathbb{Z}\text{-re komplex differenciálható a } 0\text{-ban az } f = \begin{cases} \bar{z} \cdot z^n, & \text{ha } z \neq 0 \\ 0, & \text{ha } z = 0 \end{cases} \text{ függvény?}$$

$$n = 0 \quad f(z) = \bar{z}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} - 0}{z} = \nexists$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$\bar{z} = r \cdot (\cos(-\varphi) + i \cdot \sin(-\varphi))$$

$$\frac{\bar{z}}{z} = \cos(-2 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(-2 \cdot \varphi)$$

Milyen hosszú?

$$\left| \frac{\bar{z}}{z} \right| = \frac{|\bar{z}|}{|z|} = 1$$

$$n = 1 \quad f(z) = \bar{z} \cdot z$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \cdot z - 0}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z} \cdot z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \bar{z} = 0$$

$$f'(0) = 0$$

$n \geq 1$ esetén $f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(0)$

$n < 1$ esetén $f \notin \text{Diff}_{\mathbb{C}}$

Tétel: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ $z_0 \in \text{Int}(\text{Dom}(f))$

$$f \in \text{Diff}_{\mathbb{C}}(z_0) \Leftrightarrow \begin{cases} f = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \text{Diff}_{\mathbb{R}}(x_0, y_0) \\ \text{és} \\ Jf(x_0, y_0) \in \mathbb{C} \\ \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$z_0 = x_0 + i \cdot y_0$$

$$f = u + i \cdot v$$

Bizonyítás: $[w] = Jf(x_0, y_0)$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0) - [w] \cdot (z - z_0)}{|z - z_0|} = 0$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{|z - z_0|} - [w] \cdot \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right| = 0$$

$$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} \underbrace{\left| \frac{z - z_0}{|z - z_0|} \right|}_1 \cdot \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - [w] \right) = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \left(\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - w \right) = 0$$

Cauchy-Riemann-egyenletek

$$f = u + v \cdot i$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} I, \quad \partial_x u = \partial_y v \\ II, \quad \partial_y u = -\partial_x v \end{array} \right\}$$

$$f \text{ komplex differenciálható} \Leftrightarrow \begin{cases} 1. (u, v) \text{ totálisan diffható} \\ 2. \text{Teljesíti a C - R egyenleteket} \end{cases}$$

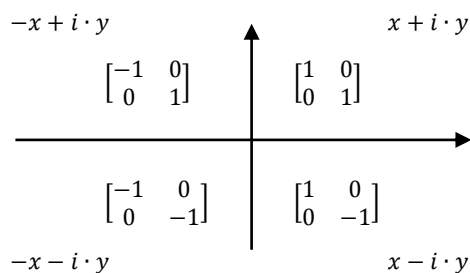
Definíció: $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reguláris a $z_0 \in \text{int}(\text{Dom}(f))$ pontban, ha a z_0 -nak van olyan $B_\varepsilon(z_0)$ nyílt környezete, ahol a függvény minden pontban komplex differenciálható.

Példa

Hol differenciálható és hol reguláris az $f(z) = |x| + |y| \cdot i$, $z = x + i \cdot y$

$$u = |x|, v = |y|$$

Totálisan differenciálható: tengelyeken kívül



$\mathbb{C}$ differenciálható: I. és III. síknegyed (nyílt: tengelyek nincsenek benne)

$$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} \mid x \cdot y > 0\}$$

Reguláris: ugyanitt

Példa

$$f(x + i \cdot y) = x^2 + i \cdot y^3$$

$$u = x^2, \quad v = y^3$$

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ totálisan differenciálható

$$\begin{bmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot x & 0 \\ 0 & 3 \cdot y^2 \end{bmatrix}$$

Differenciálhatóság feltétele: $2 \cdot x = 3 \cdot y^2$

$$y^2 = \frac{2}{3} \cdot x \text{ parabola}$$

$$\{x + i \cdot y \in \mathbb{C} \mid 2 \cdot x = 3 \cdot y^2\}$$

Reguláris: sehol, mert nincs belső pontja

Harmonikus társkeresés

$\phi(x, y)$ nyílt halmazon értelmezett $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ függvény harmonikus, ha $(\Delta \phi \equiv 0)$

$$\partial_{xx}^2 \phi + \partial_{yy}^2 \phi = 0$$

Tétel: U egyszeresen összefüggő, nyílt, $\subseteq \mathbb{C}$.

$f: U \rightarrow \mathbb{C}$ harmonikus komponensekkel rendelkezik $\Leftrightarrow f$ reguláris.

Ekkor $f = u + i \cdot v$ -ben is harmonikus társa v -nek.

Young-tétel

I. $\partial_x u = \partial_y v$

II. $\partial_y u = -\partial_x v$

$$\partial_{xx}^2 u = \partial_{xy}^2 v$$

$$\partial_{yy}^2 u = -\partial_{xy}^2 v = -\partial_{yx}^2 v$$

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 v = \partial_{xy}^2 v - \partial_{xy}^2 v = 0$$

7. előadás

Felület definíciója:

$$n < m$$

$$r_a \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

n-dimenziós, m-dimenzióbeli felület

- folytonos legyen $\rightarrow$ tudjuk deriválni

- Jakobi-determináns oszlopai lineárisan függetlenek

$$r(u, v) = r^*(u, v, w) \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} 0 \\ 3. \text{ oszlop: } 0 \\ 0 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \text{lineárisan függő}$$

$$r(u, v) = (u + v, u + v, u + v) \quad \rightarrow \quad r(t) = (t, t, t)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{dr}{du} & \frac{dr}{dv} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f(t) = (t, f(t)) \text{ görbe}$$

$$\text{deriváltja: } (t, \dot{f}(t)) \Big|_{t=t_0} = \underbrace{(1, f'(t_0))}_{(t_0, f(t_0))\text{-beli érintő}}$$

$\dot{r}(t)$ az $r(t_0)$ -beli érintővektor

Érintősík normálisa merőleges a felületi görbék érintővektoraira.

Görbék és felületek paraméteres megadása:

- a,b pontot összekötő szakasz

$$r(t) = a + t \cdot (b - a) \quad t \in [0; 1], \quad (a, b \in \mathbb{R}^2)$$

- R sugarú, 0 középpontú kör $\mathbb{R}^2$ -ben

$$r(t) = R \cdot (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0; 2 \cdot \pi]$$

- R sugarú, z tengelyű, origó csúcsú, $\frac{\pi}{4}$ félnyílásszögű, egyenletes emelkedésű kúp

$$r(t) = R \cdot (t \cdot \cos(t), t \cdot \sin(t), t) \quad t \in [0; 2 \cdot \pi]$$

- R sugarú, 0 középpontú gömbfelület

$$r(u, v) = R \cdot (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u))$$

$$v \in [0; 2 \cdot \pi], \quad u \in [0; \pi]$$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú hengerpalást

$$r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) \quad u \in [0; 2 \cdot \pi], \quad v \in [0; h]$$

- R sugarú, R magasságú, 0 középpontú, z tengelyű, $\frac{\pi}{4}$ félnyílásszögű kúppalást

$$r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), v) \quad u \in [0; 2 \cdot \pi], \quad v \in [0; R]$$

- R sugarú, 0 középpontú körlap az x,y síkban

- mint 2-dimenziós térrész ($n = m = 2$)

$$r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v)) \quad v \in [0; 2 \cdot \pi], \quad u \in [0; R]$$

- mint 3-dimenziós valódi felület ($n = 2, m = 3$)

$$r(u, v) = (u \cdot \cos(v), u \cdot \sin(v), 0)$$

- R sugarú, z tengelyű, h magasságú henger

$$r(u, v) = \begin{cases} ((u + v) \cdot \cos(u), (v + R) \cdot \sin(u), 0) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [-R; 0] \\ (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [0; h] \\ ((v - R) \cdot \cos(u), (v - R) \cdot \sin(u), h) & u \in [0; 2 \cdot \pi], v \in [h; h + R] \end{cases}$$

Speciális esetek: görbék

$$r: I \rightarrow \mathbb{R}^m \quad r(t) \text{ irányítása } \dot{r}(t)$$

$$t_0\text{-beli érintővektor: } \dot{r}(t_0)$$

$$t_0\text{-beli érintő egységvektor: } \frac{\dot{r}(t_0)}{|\dot{r}(t_0)|}$$

Ívhossz

$$\text{Közelítő poligon hossza: } \sum_{i=0}^n |r(t_{i+1}) - r(t_i)|$$

$$\sum_{i=0}^n \underbrace{\frac{r(t_{i+1}) - r(t_i)}{t_{i+1} - t_i}}_{\dot{r}(t_i)} \cdot (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=0}^n |\dot{r}(t_i)| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\rightarrow \int_a^b |\dot{r}(t)| dt \quad \text{ív hossz}$$

Példa

origó középpontú, R sugarú kör kerülete = ?

$$r(t) = (R \cdot \cos(t), R \cdot \sin(t)) \quad t \in [0; 2 \cdot \pi]$$

$$\dot{r}(t) = (-R \cdot \sin(t), R \cdot \cos(t)) \quad \rightarrow \quad |\dot{r}(t)| = \sqrt{R^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = R$$

$$\rightarrow \text{ívhossz: } \int_0^{2\pi} R = 2 \cdot R \cdot \pi$$

Példa

$$s(t) = \int_a^t |\dot{r}(\tau)| d\tau \quad \text{Szigorúan, monoton nő: invertálható}$$

r ívhossz szerinti paraméterezése

$$\rho(s) = r(t(s))$$

$$\rightarrow \rho'(s) = \dots = \frac{\dot{r}(t(s))}{|\dot{r}(t(s))|}$$

Speciális esetek: felületek

$$r(u, v) \quad r_u \times r_v \quad \leftarrow \text{irányítás}$$

(u_0, v_0) -beli vektor az $r(u_0, v_0)$ -beli felületi normális

Felületi normális normálva: felületi egységnormális

Gömb (egységgömb)

$$r(u, v) = (\sin(u) \cdot \cos(v), \sin(u) \cdot \sin(v), \cos(u)) \quad u \in [0, \pi], \quad v \in [0, 2 \cdot \pi]$$

$$r_u = (\cos(u) \cdot \cos(v), \cos(u) \cdot \sin(v), -\sin(u))$$

$$r_v = (-\sin(u) \cdot \sin(v), \sin(u) \cdot \cos(v), 0)$$

$$r_u \times r_v = \begin{pmatrix} \sin^2(u) \cdot \cos(v), \sin^2(u) \cdot \sin(v), \underbrace{\sin(u) \cdot \cos(u) \cdot \cos^2(v) + \sin(u) \cdot \cos(u) \cdot \sin^2(v)}_{\sin(u) \cdot \cos(u)} \end{pmatrix} = \sin(u) \cdot r(u, v)$$

7. gyakorlat

Komplex integrálás

Definíció: $\Gamma \subseteq \mathbb{C}$, ez görbe, ha van olyan $G: [a; b] \subseteq \mathbb{R}$, ami véges kivétellel folytonosan differenciálható és folytonos. (néhol eltörhet a görbe) $\text{Ran}(b) = \Gamma$

$G(a)$ kezdőpontja Γ -nak

$G(b)$ végpontja Γ -nak

Γ zárt, ha $G(a) = G(b)$

Γ egyszerű, ha G injektív (egy értéket csak egyszer vesz fel, nem metszi át magát)

Példa

$$z(t) = x(t) + i \cdot y(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cdot \cos(t) \\ R \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

$$z(t) = R \cdot \cos(t) + i \cdot R \cdot \sin(t) = R \cdot e^{i \cdot t}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= R \cdot (-\sin(t)) + i \cdot R \cdot \cos(t) = R \cdot (\sin(-t) + i \cdot \cos(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (i \cdot \sin(-t) + i^2 \cdot \cos(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot \\ &(-\cos(-t) + i \cdot \sin(-t)) = R \cdot \frac{1}{i} \cdot (-\cos(t) - i \cdot \sin(t)) = R \cdot i \cdot (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) = R \cdot i \cdot e^{i \cdot t} \end{aligned}$$

Komplex Riemann-integrál

Egyváltozós valós függvények integráljához hasonló módon értelmezzük.

Legyen G a komplex sík egy irányított szakasza. Osszuk fel ezt a G görbét osztópontokkal $(z_0, z_1, z_2, \dots)$, és minden z_{k-1}, z_k íven vegyünk fel egy tetszőleges ρ_k pontot.

Ha a felosztást minden határon túl finomítva a $\sum_{k=1}^n f(\rho_k) \cdot (z_k - z_{k-1})$ integrálközelítő összegnek létezik véges határértéke, akkor ez a határérték az f komplex függvény G görbe menti integrálja.

$$\int_G f(z) dz$$

Integrálok kiszámítása

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

$$[a; b] \rightarrow \mathbb{C}$$

Vonalra

$$\int_{\Gamma} v dr = \int_a^b \underline{v}(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

A helyettesítéssel integrálás tételének felhasználásával belátható, hogy ez az integrál független a paraméterezéstől, ha azok ugyanazt az irányítást határozzák meg.

Megjegyzés: $h: \mathbb{R} \ni t \rightarrow h(t) \in \mathbb{C}$

$$\int_a^b h(t) dt = \left(\int_a^b h_1(t) dt \right) + i \left(\int_a^b h_2(t) dt \right) \equiv \int_a^b \operatorname{Re}(h) + i \int_a^b \operatorname{Im}(h)$$

Példa

$$z(t) = \cos(t) + i \cdot \sin(t) \quad (\text{egységkör a komplex számsíkon})$$

$$\dot{z}(t) = -\sin(t) + i \cdot \cos(t)$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos(t) + i \sin(t)} \cdot \frac{(-\sin(t) + i \cos(t))}{i e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it}}{e^{it}} dt = \int_0^{2\pi} i \cdot dt = \left(\int_0^{2\pi} 0 dt \right) = \left(2 \cdot \pi \right) = 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$$z(t) = t \cdot (1 + 2 \cdot i)$$

$$\dot{z}(t) = 1 + 2 \cdot i$$

$$\int_{\Gamma} \bar{z} dz = \int_0^1 \overline{(t \cdot (1 + 2 \cdot i))} \cdot (1 + 2 \cdot i) dt = \int_0^1 (t - 2 \cdot i \cdot t) \cdot (1 + 2 \cdot i) dt = \int_0^1 t \cdot 5 dt = \left[\frac{5t^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{2}$$

Komplex Newton-Lebnitz formula

Definíció: Legyen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ nyílt halmazon értelmezett függvény. Az $F: \operatorname{Dom}(f) \rightarrow \mathbb{C}$ primitív függvénye f -nek, ha reguláris és $F' = f$.

Tétel (Newton-Leibnitz):

Ha az előbbiek szerint f folytonos és $F' = f$, akkor minden $\Gamma \subseteq \operatorname{Dom}(f)$ -re, aminek a kezdő- és végpontja z_1, z_2 :

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

Példa

$$f(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = ? \quad \text{és} \quad F(z) = ?, \text{ ha } F'(z) = \frac{1}{z^2}$$

$$F(z) = -z^{-1} = -\frac{1}{z} \quad \rightarrow \quad \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2} dz = -\frac{1}{1} - \left(-\frac{1}{1} \right) = 0$$

Követelmény: Ha f -nek van primitív függvénye, akkor $\int_{\Gamma} f = 0$

A komplex függvénytan alaptétele (Cauchy-tétel):

Megjegyzés: $\mathbb{C}$ -beli integrálok előállítása vonalintegrálként:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} (u + i \cdot v) \cdot (dx + i \cdot dy) = \int_{\Gamma} (u dx - v dy) + i \int_{\Gamma} (v dx + u dy)$$

$$P = (u, -v) \quad \text{és} \quad Q = (v, u)$$

$$\rightarrow \int P dr + i \cdot \int Q dr$$

Newton-Leibnitz $\mathbb{R}^3$ -ban

$$v = \text{grad}(\phi)$$

$$\int_{\Gamma} \text{grad}(\phi) dr = \phi(r_2) - \phi(r_1)$$

Ez az I. gradiens-tétel

Γ kezdő- és végpontja: r_1 és r_2

Bizonyítás: $\mathbb{C}$ N-beli

$$f = u + i \cdot v$$

$$F = \phi + i \cdot \psi$$

$$\begin{bmatrix} \partial_x \phi & \partial_y \phi \\ \partial_x \psi & \partial_y \psi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

$$F' = \partial_x \phi + i \cdot (-\partial_y \phi) = u + i \cdot v$$

$$F' = \partial_y \psi + i \cdot \partial_x \psi = u + i \cdot v$$

$$\begin{aligned} \int f &= \int u dx - v dy + i \cdot \int v dx + u dy = \int \partial_x \phi dx + \partial_y \phi dy + i \cdot \int \partial_x \psi dx + \partial_y \psi dy = \\ &= \int \text{grad} \phi + i \cdot \int \text{grad} \psi = \phi(r_2) - \phi(r_1) + i \cdot (\psi(r_2) - \psi(r_1)) = F(r_2) - F(r_1) \end{aligned}$$

8. előadás

Implicit egyenlet:

$$u(r) = 0 \quad u: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$$

$$u(r(t)) = 0 \quad \text{grad}(u) \big|_{r(t)} \cdot \dot{r}(t) = 0$$

$$\rightarrow \text{grad}(u) \perp \dot{r}(t)$$

A felületi normális a gradiens.

Példa

$$\text{Gömb:} \quad u(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \quad \text{grad} = (2 \cdot x, 2 \cdot y, 2 \cdot z)$$

Irányítás általánosan n-dimenzióra

Definíció:

CROSS: $\mathbb{R}^n$ -ben $a_1, \dots, a_{n-1} \rightarrow \text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1})$ az egyetlen olyan, aki:

1. Merőleges az $a_1, \dots, a_{n-1}$ által kifeszített altérre

2. Nagysága: $a_1, \dots, a_{n-1}$ által kifeszített paralelotop n-1-dimenziós térfogata

3. $a_1, \dots, a_{n-1}, \text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1})$ jobb sodrású ($\Leftrightarrow$ a szokásos bázisról az erre való áttérés mátrixának determinánsa > 0)

$$\text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1}) = (-1)^{n-1} \cdot \begin{vmatrix} e_1 & \dots & e_n \\ a_1(1) & \dots & a_1(n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1}(1) & \dots & a_{n-1}(n) \end{vmatrix}$$

$$\text{2-dimenzióban:} \quad \text{CROSS} \begin{pmatrix} a \\ x, y \end{pmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} i & j \\ x & y \end{vmatrix} = -(y, -x) = (-y, x) \quad (\text{balra forgatás})$$

Állítás: - argumentumok cserélése $\rightarrow -1$ -szeresére változik

- minden argumentumban lineáris

- $\exists i \neq j: a_i = a_j \Rightarrow \text{CROSS}(a_1, \dots, a_{n-1}) = 0$

$r = r(u)$ által adott valódi felület irányítása: $\text{cross}(r_u(u))$. Egy pontbeli értéke az ottani felületi normális.

$\frac{\text{cross}(r_u(u))}{|\text{cross}(r_u(u))|}$: felületi egységnormális

$$F: r(u_1 \dots u_n) \quad (u_1 \dots u_n) \in A$$

$$A' = \{(u_1 \dots u_n) | (-u_1 \dots u_n) = A\}$$

$$-F: s(u_1 \dots u_n) = r(-u_1 \dots u_n) \quad (u_1 \dots u_n) \in A'$$

$$F \text{ zárt felület kifelé irányított} \Leftrightarrow \forall u \in A \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta \in (0, \varepsilon) \quad r(u) + \delta \cdot \text{cross}(r_u(u)) \notin V$$

F felület a V -t határolja

$$2D\text{-ben:} \quad |F| = \iint_A |r_a \times r_b| du dv \quad \Delta f \approx f' \cdot \Delta x$$

$$\text{Általában:} \quad F \text{ felszíne} = |F| = \iint_A |\text{cross}(r_u)| du$$

Példa

R sugarú, h magasságú hengerpalást

$$r(u, v) = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), v), u \in [0, 2 \cdot \pi], v \in [0, h]$$

$$r_u = (-R \cdot \sin(u), R \cdot \cos(u), 0)$$

$$r_v = (0, 0, 1)$$

$$\Rightarrow r_u \times r_v = (R \cdot \cos(u), R \cdot \sin(u), 0)$$

$$|r_u \times r_v| = \sqrt{R^2 \cdot (\cos^2(u) + \sin^2(u))} = R$$

$$|F| = \int_0^{2\pi} \int_0^h R dv du = 2 \cdot \pi \cdot h \cdot R$$

$$H \subseteq \mathbb{R}^m \quad v: H \rightarrow \mathbb{R}^k \quad k = m + 1 \quad v \text{ folytonos}$$

1. Vonalintegrálok

$$\text{Legyen } L: r = r(t) \quad t \in I \quad L \subseteq H \quad \text{adott görbe}$$

a, v görbementi integrálja L -en

$$\int_L v dr \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

b, v ívhossz szerinti integrálja L -en

$$\int_L v |dr| \stackrel{\text{def}}{=} \int_I v(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)| dt$$

2. Felületi integrálok

$$F \subseteq H \text{ valódi felület } r = r(u), u \in A \subseteq A^{m-1}$$

a, v felületmenti integrálja F -en

$$\int_F v df \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot \text{cross}(r_u(u)) du$$

b, v felszín szerinti integrálja F -en

$$\int_F v |df| \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r(u)) \cdot |\text{cross}(r_u(u))| du$$

Tétel

A fent definiált integrálok alaptulajdonságai

1. Lineáris operátorok
2. Additív halmazfüggvény

$$3. \quad \int_{-L} v dr = - \int_L v dr$$

$$\int_{-F} v df = - \int_F v df$$

$$4. \quad m \leq v(r) \leq M \quad \Rightarrow \quad m \cdot |L| \leq \int_L v dr \leq M \cdot |L|$$

$$m \cdot |F| \leq \int_F v df \leq M \cdot |F|$$

$$5. \quad \int_L 1|dr| = |L| \quad \text{és} \quad \int_F 1|df| = |F|$$

$$6. \quad v_e \text{ a } v\text{-nek } r \text{ érintő egységvektorára eső vetületének előjeles hossza, azaz } v \cdot e \rightarrow$$

$$\int_L v dr = \int_L v_e |dr| \quad \left(e = \frac{\dot{r}}{|\dot{r}|} \right)$$

$$7. \quad v_n \text{ a } v\text{-nek felületi normálisra eső vetületének előjeles hossza, azaz } v \cdot n \rightarrow$$

$$\int_F v df = \int_F v_n |df| \quad \left(n = \frac{\text{cross}(r_u)}{|\text{cross}(r_u)|} \right)$$

$$6\text{-os bizonyítása: } \int_L v_e |dr| = \int_I \underbrace{v_e(r(t)) \cdot |\dot{r}(t)|}_{v(r(t)) \frac{\dot{r}(t)}{|\dot{r}(t)|}} = \int_I v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt$$

8. gyakorlat

Stokes-tétel: F felület $\mathbb{R}^3$ -ban. ∂F pereme F -nek. $\underline{v}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, folytonosan differenciálható.

$Dom(\underline{v})$ nyílt. $F \cup \partial F \subseteq Dom(\underline{v})$

$$\int_{\partial F} \underline{v} = \int_F \text{rot}(\underline{v})$$

$$\text{rot}(\underline{v}) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad v = (v_1, v_2, v_3)$$

Keressük $\mathbb{C}$ -ben az alakját.

$$v_3 = 0 \quad \rightarrow \quad v_1 = v_1(x, y) \text{ és } v_2 = v_2(x, y)$$

$$\text{rot}(v) = \partial_x \cdot v_2 - \partial_y \cdot v_1$$

$$\oint_{\partial T} f = ? \quad f = u + i \cdot v$$

$$P = \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

Cauchy-Riemann szerint: $\partial_x u = \partial_y v$ és $\partial_y u = -\partial_x v$

$$\oint_{\partial T} f = \oint P \cdot dr + i \cdot \oint Q \cdot dr = \int_T \overbrace{-\partial_x v - \partial_y u}^{\partial_y u} + i \cdot \int_T \overbrace{\partial_x u - \partial_y v}^{\partial_y v} =$$

$$= \iint_T 0 dx dy + i \cdot \iint_T 0 dx dy = 0 \in \mathbb{C}$$

Megjegyzés: A bizonyításban feltettük, hogy f folytonosan differenciálható (valójában nem szükséges)

Perem és tartomány helyett egy görbére mondjuk majd ki.

Goursat-lemma

f $\mathbb{C}$ -differenciálható függvényt háromszögon (T) értelmezzünk, akkor $\int_{\partial T} f = 0$

Bizonyítás:

$$\int_{\partial T} f \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Delta_1} f + \int_{\Delta_2} f + \int_{\Delta_3} f + \int_{\Delta_4} f$$

Középső szakaszokon kétszer integrálunk, egyszer az egyik, majd a másik irányba, így azok kiesnek.

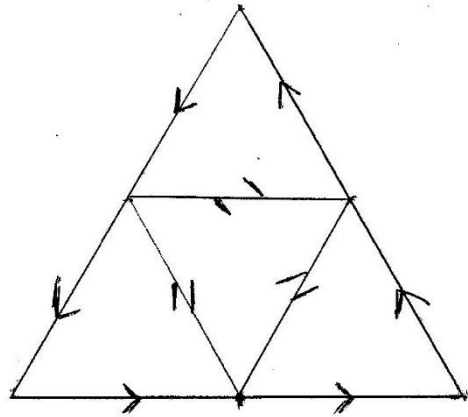
$$|\oint_{\partial T} f| \leq \underbrace{|\int_{\Delta_1} f| + |\int_{\Delta_2} f| + |\int_{\Delta_3} f| + |\int_{\Delta_4} f|}_{\text{ezek közül van egy maximális}} \leq 4 \cdot |\int_{\partial T} f|$$

$$K \rightarrow K_{T(1)} = \frac{K}{2^1}$$

$$1. \quad |\oint_{\partial T} f| \leq 4^n \cdot |\int_{\partial T^{(n)}} f|$$

$$2. \quad K_{T^{(n)}} = \frac{K}{2^n}$$

3. Ezek egymásba skatulyázott határértékeke sorozata, z_0 lesz a határértéke



$$|\oint_{\partial T^{(n)}} f(z) dz| = |\oint_{\partial T^{(n)}} f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz|$$

$$\exists \varepsilon > 0, \text{ hogyha } |z - z_0| < \delta, \text{ akkor } |\varepsilon(z)| < \varepsilon$$

$$\rightarrow \left| \underbrace{f(z_0)}_0 + \underbrace{f'(z_0) \cdot (z - z_0)}_0 + \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz \right| = |\oint_{\partial T^{(n)}} \varepsilon(z) \cdot (z - z_0) dz| \leq$$

$$\leq \oint_{\partial T^{(n)}} \underbrace{|\varepsilon(z)|}_{\varepsilon} \cdot \underbrace{|z - z_0|}_{\frac{K}{2^n}} \cdot \underbrace{d|z|}_{\frac{K}{2^n}} \leq \varepsilon \cdot \frac{K}{2^n} \cdot \underbrace{\oint_{\partial T^{(n)}} d|z|}_{\frac{K}{2^n}} = \varepsilon \cdot \frac{K^2}{4^n}$$

$$\rightarrow |\oint_{\partial T} f| \leq 4^n \cdot |\int_{\partial T^{(n)}} f| = 4^n \cdot \frac{\varepsilon K^2}{4^n} = \varepsilon \cdot K^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Cauchy-féle integráltétel

$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ reguláris a Γ görbén és belsejében, $Dom(f)$ egyszeresen összefüggő nyílt tartomány. Ekkor $\oint_{\Gamma} f = 0$

Cauchy-féle integrálformula

$f: T \rightarrow \mathbb{C}$ reguláris a T tartományon, T egyszeresen összefüggő, Γ egyszerű zárt görbe a T -ben, amely körülhurkolja z_0 -at. Ekkor:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

Példa

$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell használni. Adjuk meg a képletben szereplő paramétereket:

$$f(z) = ch(z)$$

$$z_0 = 0 \quad (\text{mert } (z - z_0) \text{ most } (z - 0))$$

$$n = 4 \quad (\text{mert } n + 1 = 5)$$

Most már felírhatjuk a formulát:

$$ch^{(4)}(0) = \frac{4!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz \quad / \text{átszorunk } 2 \cdot \pi \cdot i \text{-vel, leosztunk } 4! \text{-al}$$

$$\oint_{|z|=1} \frac{ch(z)}{z^5} dz = ch^{(4)}(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = ch(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!}$$

$$ch' = sh, \quad ch'' = sh' = ch \quad ch^{(3)} = sh \quad ch^{(4)} = ch$$

Használjuk fel, hogy $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ és $ch(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$

$$ch(0) \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = \frac{e^0 + e^{-0}}{2} \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{4!} = \frac{\pi \cdot i}{12}$$

Példa

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z^2 - z} dz$$

$|z - 1| = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}$ sugarú kör, aminek a középpontja az (1,0) pontban van

Át kell alakítani a törtet, hogy a nevezőbe csak $(z - z_0)$ -os dolog kerüljön.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z^2 - z} dz = \oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{2 \cdot z - 1}{z \cdot (z - 1)} dz$$

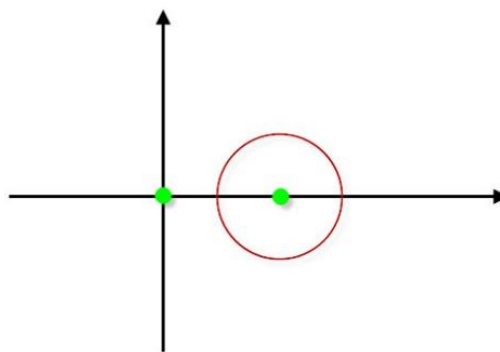
A $(z - 1)$ van a körön belül $\rightarrow$ a többit felvisszük a számlálóba. $z - 1$ marad a nevezőbe, ami már jó.

$$\oint_{|z-1|=\frac{1}{2}} \frac{\frac{2 \cdot z - 1}{z}}{z - 1} dz$$

Ebből az alakból már felírhatjuk a formulát:

$$f(z) = \frac{2 \cdot z - 1}{z} \quad n + 1 = 1 \rightarrow n = 0 \quad z_0 = 1$$

$$\rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot f^{(0)}(1) = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{2 \cdot z - 1}{z} \Big|_{z=1} = 2 \cdot \pi \cdot i$$



Példa

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z^2 + 1} dz$$

$|z - i| = 1 \rightarrow 1$ sugarú kör, aminek a középpontja $(0, i)$ -ben van

Megint átalakítjuk a törtet:

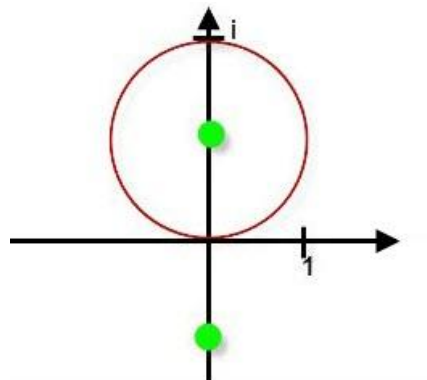
$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{(z-i) \cdot (z+i)} dz$$

A $(z - i)$ -s gyök van a körön belül, a többi felkerül a számlálóba:

$$\oint_{|z-i|=1} \frac{\frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z+i}}{z-i} dz \quad \text{Ebből felírhatjuk a Cauchy-formulát:}$$

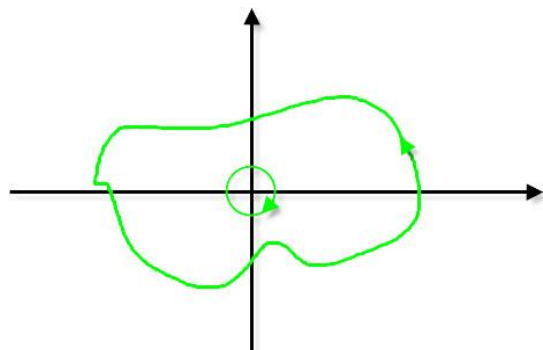
$$f(z) = \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z+i} \quad n = 0 \quad z_0 = i$$

$$\rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot \frac{\sin\left(\frac{iz\pi}{2}\right)}{z+i} \Big|_{z=i} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{2i}\right) = -\pi \quad \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$



Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen $\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz$?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör: $|z| = 1$

A külső görbe Γ .

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = -2 \cdot \pi \cdot i + 2 \cdot \pi \cdot i = 0$$

☞ pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

9. előadás

Példa

$$\int_L r dr \quad (r: \text{identitás függvény})$$

L : origó középpontú, 3 sugarú, pozitívan irányított kör

$$r(t) = 3 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \quad t \in [0, 2 \cdot \pi]$$

$$\dot{r}(t) = 3 \cdot (-\sin(t), \cos(t))$$

$$\int_0^{2\pi} 9 \cdot (\cos(t), \sin(t)) \cdot (-\sin(t), \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} 0 dt = 0$$

Példa

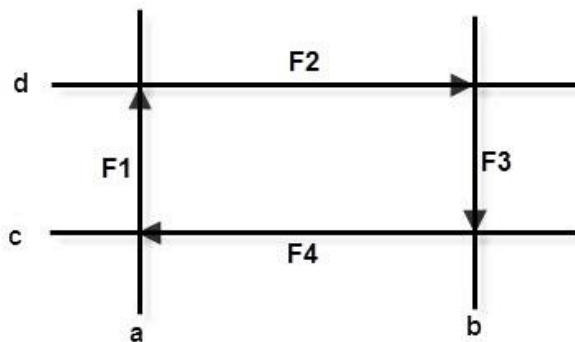
$$\int_F 2 \cdot r df \quad F: z \text{ tengelyű, origó csúcsú, } \frac{\pi}{4} \text{ felnyílásszögű, kifelé irányított kúp}$$

$$r(u, v) = (v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), u) \quad u \in [0, 2 \cdot \pi], \quad v \in [0, \pi]$$

$$r_u \times r_v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -v \cdot \sin(u) & v \cdot \cos(u) & 0 \\ \cos(u) & \sin(u) & 1 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} v \cdot \cos(u), v \cdot \sin(u), -v \cdot (\cos^2(u) + \sin^2(u)) \end{pmatrix}$$

$$\int_F 2 \cdot r df = \int_0^{2\pi} \int_0^R 2 \cdot v^2 \cdot (\cos(u), \sin(u), 1) \cdot (\cos(u), \sin(u), -1) dv du =$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^R 0 dv du = 0$$



$$\text{cross}(r_u(u)) = (-1, 0)$$

90°-os forgatás balra

Példa

$$v(x, y) = (f(x), 0)$$

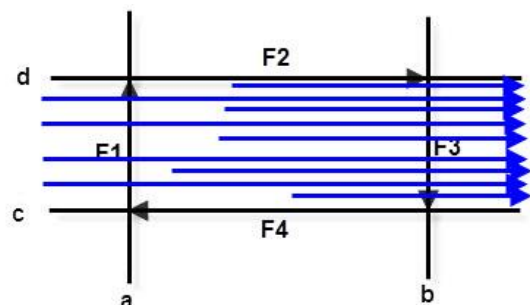
nem negatív, monoton nő (jobbra sűrűsödik)

Több megy ki, mint be.

Alul és felül az integrál 0.

Előző előadáson tanult képlet szerint:

$$\int_F v df \stackrel{\text{def}}{=} \iint_A v(r_u(u)) \cdot \text{cross}(r_u(u)) du$$



$$\int_{F_1} v df = \int_c^d (f(a), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(a) du = (c - d) \cdot f(a)$$

$$\int_{F_3} v df = - \int_{-F_3} v df = \dots = -(c - d) \cdot f(b)$$

$$\text{Egész felületen: } \int_F v df = (d - c) \cdot (f(b) - f(a))$$

Példa

$$v(x, y) = (f(y), 0) \quad f \text{ folytonos}$$

Alul és felül továbbra is 0.

$$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(u), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(u)$$

$$\int_{F_3} vdf = -\int_{-F_3} vdf = \dots = \int_c^d f(u)$$

$$\Rightarrow \int_F vdf = 0 \quad \text{Ugyanannyi megy be, mint ki.}$$

Példa

$$w(x, y) = (0, f(x)) \quad f \text{ folytonos}$$

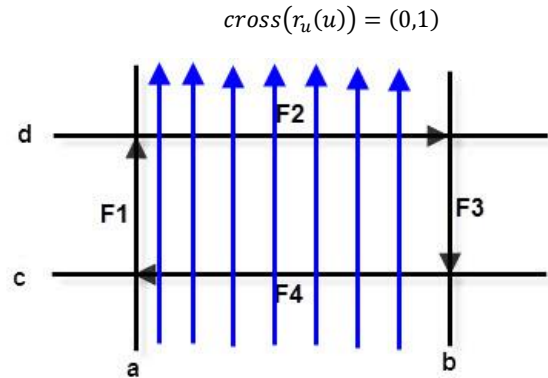
Bal és jobb oldalon 0.

$$\int_{F_2} vdf = \int_a^b (0, f(d)) \cdot (0, 1) du = (b-a) \cdot f(d)$$

$$\int_{F_4} vdf = -\int_{-F_4} vdf = \dots = -(b-a) \cdot f(c)$$

Eredmény

$$\int_F wdf = (b-a) \cdot (f(d) - f(c))$$

**Példa**

$$v(x, y) = (f(x, y), 0) \quad f \text{ folytonos}$$

Alul és felül 0

$$\int_{F_1} vdf = \int_c^d (f(a, u), 0) \cdot (-1, 0) du = \int_c^d -f(a, u) du$$

$$\int_{F_3} vdf = -\int_{-F_3} vdf = \dots = \int_c^d f(b, u) du$$

$$\Rightarrow \int_F vdf = \int f(b, u) - f(a, u) du$$

Példa

$$w(x, y) = (0, g(x, y)) \quad \text{Előzően hasonlóan}$$

$$\int_F wdf = \int_a^b g(u, d) - g(u, c) du$$

Definíció:

$$(1) \quad H \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (korlátos halmaz) átmérője} = d|H| = \{\sup |x - y| ; x, y \in H\}$$

$$(2) \quad H_k \subseteq \mathbb{R}^n \quad r_0 \in \mathbb{R}^n \text{-re zsugorodik, ha } r_0 \in \text{Int} H_k \quad \forall k \text{ és } \lim_{k \rightarrow \infty} d(H_k) = 0$$

Definíció (forrássűrűség): $r_0 \in G \subseteq \mathbb{R}^n$, $v: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ folytonos $G \setminus \{r_0\}$. Ha normál térrészek minden $\mathbb{R}^n$ -beli r_0 -ra zsugorodó V_k sorozatára $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int_{F_k} vdf$ létezik, és ugyanannyi, akkor ezt hívjuk v forrássűrűségének az r_0 -ban. (F_k a V_k -t határoló kifelé irányított felület)

$$s(v)(r_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|V_k|} \cdot \int vdf$$

Példa

$$v \text{ forrássűrűsége } (x_0, y_0) \text{ pontban } ((x_0, y_0) \in (a, b) \times (c, d))$$

$$V_k = \underbrace{[a_k, b_k]}_{x_0 \in} \times \underbrace{[c_k, d_k]}_{y_0 \in} \quad \lim b_k - a_k = 0$$

$$\lim d_k - c_k = 0$$

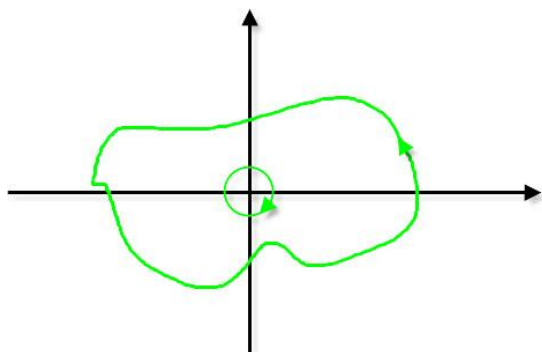
$$\begin{aligned} \rightarrow \int_{F_k} v df &= \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du \\ \frac{1}{|v_k|} \cdot \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du &= \frac{1}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \cdot \int_{c_k}^{d_k} (f(d_k, u) - f(a_k, u)) du = \\ \exists \xi \in [c_k, d_k] &\stackrel{\text{Lagrange}}{=} \frac{(f(b_k, \xi_k) - f(a_k, \xi_k)) \cdot (d_k - c_k)}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \stackrel{\exists \rho_k \leftarrow (a_k, b_k)}{=} f_x(\rho_k, \xi_k) \rightarrow f_x(x_0, y_0) \quad \text{Ha } f_x \text{ folytonos} \end{aligned}$$

9. gyakorlat

8. gyakorlat végén volt:

Van egy kompatibilisen irányított felületünk. Mennyi ezen $\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz$?

Kompatibilis irányítás: ha az iránynak megfelelően sétálok, akkor bal kéz felől legyen a felület.



A belső kör egy egységsugarú kör: $|z| = 1$

A külső görbe Γ .

$$\int_{\partial T} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \oint_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz + \int_{\Gamma} \frac{1}{z} dz = -2 \cdot \pi \cdot i + 2 \cdot \pi \cdot i = 0$$

$\cup$ pozitívan irányított kör, amire tudjuk, hogy $\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2 \cdot \pi \cdot i$

Negatívan irányított körre ennek a -1-szerese.

Azt kaptuk, hogy egy függvény integrálja a nagy görbére ugyan az, mint az integrálja a kis körre. $\rightarrow$ A kis körökre Integrálunk.

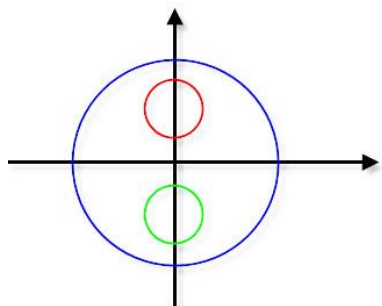
Példa

$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \oint_{|z|=2} \frac{1}{(z+i) \cdot (z-i)} dz$$

Felrajzoljuk: $|z| = 2 \rightarrow$ origó középpontú, 2 sugarú kör

Kis körök középpontjai: $(0, i)$ és $(0, -i)$

Erre a két kis körre integrálunk. A sugarat tetszőlegesen megválaszthatjuk. Legyen $\frac{1}{2}$, hogy ne lógjon a nagy körön kívülre.



$$\oint_{|z|=2} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{(z-i) \cdot (z+i)} dz$$

A Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmaznunk, tehát a nevezőben valahogy $(z - z_0)$ alakra kell hozni.

A piros körnél a $(z - i)$ van a körön belül, a többi felvisszük a számlálóba, a zöld körnél pedig a $(z + i)$ van a körön belül.

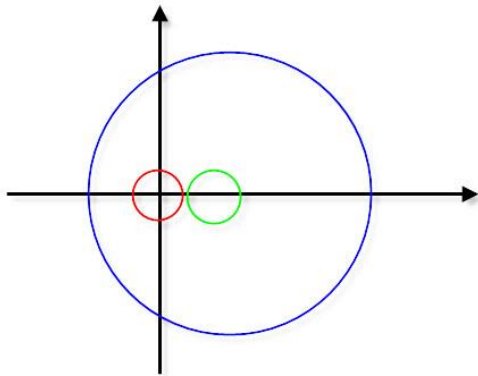
$$\rightarrow \int_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z-i} dz + \int_{|z+i|=\frac{1}{2}} \frac{1}{z+i} dz$$

Most már alkalmazhatjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z+i} \Big|_{z=i} + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot \frac{1}{z-i} \Big|_{z=-i} = \pi - \pi = 0$$

Példa

$$\oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^4 - z^3} dz = \oint_{|z-2|=3} \frac{e^z}{z^3 \cdot (z-1)} dz$$



Megint rajzoljuk fel:

$$|z - 2| = 3$$

→ Közepont: (2,0), sugár 3

2 kis kör középpontja: (1,0) és (0,0). Ezekre integrálunk.

Kis körök sugarát válasszuk $\frac{1}{3}$ -nak, hogy ne érjenek össze.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3 \cdot (z-1)} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3 \cdot (z-1)} dz$$

A **piros** körnél a z van a körön belül, a többit felvisszük a számlálóba, a **zöld** körnél pedig a $(z-1)$ van a körön belül, a z^3 kerül fel a számlálóba.

$$\int_{|z|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z^3} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{3}} \frac{e^z}{z-1} dz$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z-1}$$

$$n+1=3 \rightarrow n=2$$

$$z_0 = 0$$

$$f(z) = \frac{e^z}{z^3}$$

$$n+1=1 \rightarrow n=0$$

$$z_0 = -1$$

Használjuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$n=2$, vagyis az $\frac{e^z}{z-1}$ függvényt kell kétszer deriválni és a $z_0=0$ pontbeli értékét venni:

$$\left(\frac{e^z}{z-1}\right)' = \frac{e^z \cdot (z-1) - e^z \cdot 1}{(z-1)^2} = \frac{e^z \cdot (z-2)}{(z-1)^2}$$

$$\left(\frac{e^z \cdot (z-2)}{(z-1)^2}\right)' = \frac{(e^z \cdot (z-2) + e^z) \cdot (z-1)^2}{(z-1)^4} + e^z \cdot (z-2) \cdot 2 \cdot (z-1) \Big|_{z=0} = -5$$

$n=0$, vagyis az $\frac{e^z}{z^3}$ függvényt kell vennünk a $z_0=1$ helyen: e^1

A végeredmény

$$\frac{2 \cdot \pi \cdot i}{2!} \cdot (-5) + \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{0!} \cdot e^1 = -5 \cdot \pi \cdot i + 2 \cdot e \cdot \pi \cdot i$$

Elemi függvények

Négyzetre emelés

$$z \rightarrow z^2$$

$$z = e \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$w = z^2 = r^2 \cdot (\cos(2 \cdot \varphi) + i \cdot \sin(2 \cdot \varphi))$$

z^2 -nek nincs inverze, de a z^2 Riemann felületén már invertálható.

Exponenciális

$$z \rightarrow e^z$$

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi))$$

$$z \rightarrow w$$

$$e^z = e^{x+i \cdot y} = \underbrace{e^x}_{|w|} \cdot \underbrace{e^{i \cdot y}}_{\arg(w)=y}$$

Nem invertálható, de Riemann felületen igen.

$z \rightarrow e^z$ periodikus:

$$e^z \rightarrow e^{z+k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i} = e^z \cdot \left[(e^{i \cdot \pi})^2 \right]^k = e^z \cdot 1^k \quad (e^{i \cdot \pi} = -1)$$

Periódus: $2 \cdot \pi \cdot i$

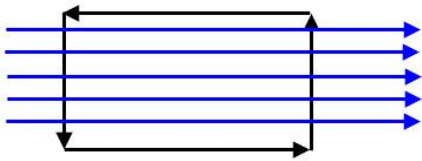
10. előadás

$(f(x, y), 0)$ forrassűrűsége az (x_0, y_0) pontban $f_x(x_0, y_0)$

$(0, g(x, y))$ forrassűrűsége az (x_0, y_0) pontban $g_y(x_0, y_0)$

$\underbrace{(f(x, y), g(x, y))}_{v(x, y)}$ forrassűrűsége az (x_0, y_0) pontban $\underbrace{f_x(x_0, y_0) + g_y(x_0, y_0)}_{\text{div}(v)|_{(x_0, y_0)}}$

Példa



$$\int_L v dv = ?$$

L a görbe.

Bal és jobb oldalt az integrál 0, mert a felületi normális merőleges az erővonalakra.

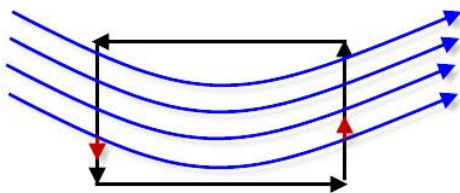
Felül pedig az integrál az alsó integrál -1-szerese $\rightarrow \int_L v dv = 0$

Példa

Ugyan ez, csak az erővonalak ferdén haladnak.

A szemben lévő oldalak integráljai kiejtik egymás (egymás -1-szeresei) $\rightarrow \int_L v dv = 0$

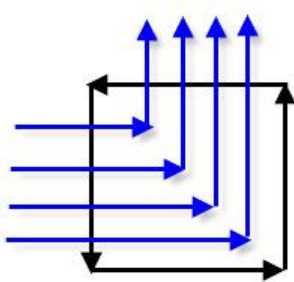
Példa



Alul és felül megint kiejtik egymást, viszont bal és jobb oldalon is pozitív lesz az integrál, mert az erővonalak merőleges vetülete (piros nyilak) pozitív irányba mutat.

$\rightarrow$ Az integrál értéke pozitív

Példa



Jobb oldalon és alul nem halad át erővonal, így ott az integrál 0.

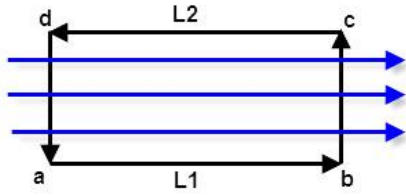
Felül és bal oldalon pedig ugyan annyi megy be mint ki, ez egy négyzet.

$$\rightarrow \int df = 0$$

Példa

$$v(x, y) = (f(x, y), 0)$$

Bal oldalon és jobb oldalon ismét 0.



$$r(t) = (t, c)$$

$$\dot{r}(t) = (1, 0)$$

Alul: $\int_{L_1} v dr = \int_{L_1} v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = \int_a^b (f(t, c), 0) \cdot (1, 0) dt = \int_a^b f(t, c) dt$

Felül: $\int_{L_2} v dr = \int_a^b -f(t, d) dt$

$$\rightarrow \int_L v dr = \int_a^b f(t, c) - f(t, d) dt$$

$\mathbb{R}^2$ -beli normált térrészek minden r_0 -ra zsugorodó F_k sorozatára ha $\exists \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|F_k|} \cdot \int_{L_k} v dr$ (ahol L_k az F_k pozitívan irányított határa) és ez ugyanannyi, akkor ezt v r -beli örvénysűrűségének nevezzük.

Jele: $c(v)(r_0)$

Példa

$$F_k = [a_k, b_k] \times [c_k, d_k] \quad x_0 \in [a_k, b_k], \quad y_0 \in [c_k, d_k]$$

$$\lim b_k a_k = \lim d_k - c_k = 0$$

$$\begin{aligned} c(f(x, y), 0)(x_0, y_0) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \cdot \int_a^b f(t, c) - f(t, d) dt \stackrel{\exists \xi_k \in [a, b]}{=} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(\xi_k, c) - f(\xi_k, d)) \cdot (b_k - a_k)}{(b_k - a_k) \cdot (d_k - c_k)} \stackrel{\substack{\text{Lagrange} \\ \exists \rho_k \in [c_k, d_k]}}{=} \lim_{k \rightarrow \infty} -f_y(\xi_k, \rho_k) \stackrel{f_y \text{ folytonos}}{=} -f_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

Hasonlóan: $c(0, g(x, y))(x_0, y_0) = \dots = g_x(x_0, y_0)$

Következmény: $c(f(x, y), g(x, y))(x_0, y_0) \stackrel{\substack{\text{ha } \exists f, g \\ \text{folytonosan} \\ \text{differenciálható}}}{=} g_x(x_0, y_0) - f_y(x_0, y_0) = \text{rot}(v) \big|_{(x_0, y_0)}$

Lemma: Ha F a síkbeli V valamelyik tengely szerinti normál tartomány kifelé irányított határa és $\mathbb{R}$ folytonosan differenciálható valós értékű függvény V -n, akkor

1. $\int_F (0, h) df = \int_V h_y(x, y) dV$, ha V x -re nézve normál tartomány

2. $\int_F (h, 0) df = \int_V h_x(x, y) dV$, ha V y -ra nézve normál tartomány

Tétel (Gauss–Osztrogradskij-tétel):

Ha F a V síkbeli normál tartomány kifelé irányított határa és $v: H \rightarrow \mathbb{R}^2$, $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2$ folytonosan differenciálható, akkor $\int_F v df = \int_V \text{div}(v) dV$

Bizonyítás:

$$\int_F \underbrace{v}_{(g, h)} df = \int_F (g, 0) df + \int_F (0, g) df = \int_V g_x(x, y) dV + \int_V h_y(x, y) dV =$$

$$\int_V \underbrace{g_x + h_y}_{\text{div}(v)} dV$$

Következmény: Az előző igaz akárhány dimenzióban és normál tartomány helyett normál térrészre is.

Példa

H : R sugarú, h magasságú, z tengelyű henger

$$v(x, y, z) = v(x, y, 0)$$

$$\int_H v df = \int_{\underbrace{V}_{\text{hengertest}}} \overbrace{\operatorname{div}(v)}^2 dV = 2 \cdot \int_{dV} 1 dV = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$$

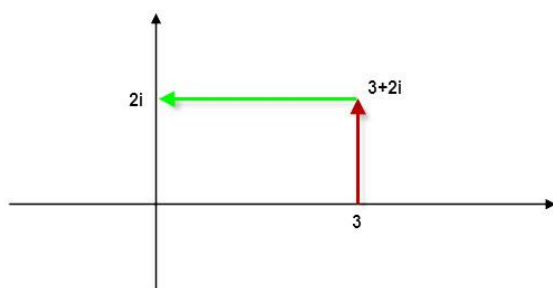
$$\text{Vagy: } \int_H v df = \int_H v_n |df| = \int_{H^-} R |df| = R \cdot \int_{H^-} 1 |df| = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi \cdot h = 2 \cdot R^2 \cdot \pi \cdot h$$

10. gyakorlat

Példa

Komplex integrálás megtört szakaszon (két részre kell bontani az integrált)

$$f(z) = \operatorname{Re}(z) + i \cdot (\operatorname{Im}(z))^2 \quad (x + i \cdot y^2)$$



Γ : a görbe, amin integrálunk

$f(z)$ sehol sem differenciálható $\rightarrow z(t)$ -s képletet kell használni

$$\int_{\Gamma} f = \int_{t_1}^{t_2} f(z(t)) \cdot \dot{z}(t) dt$$

$$\Gamma = \underbrace{[3; 3 + 2 \cdot i]}_{\text{piros szakasz}} \rightarrow \underbrace{[3 + 2 \cdot i; 2 \cdot i]}_{\text{zöld szakasz}}$$

A teljes integrál a 2 integrál összege: $I = I_1 + I_2$

A **piros** szakasz egyenlete: $z_1(t) = 3 + t \cdot i \quad 0 \leq t \leq 2$

Kell még: $\dot{z}_1(t) = i$

$$\text{Behelyettesíthetünk a képletbe: } I_1 = \int_0^2 \underbrace{(3 + i \cdot t^2)}_{f(z_1(t))} \cdot \underbrace{i}_{\dot{z}_1(t)} dt = \int_0^2 3 \cdot i - t^2 dt = \left[3 \cdot i \cdot t - \frac{t^3}{3} \right]_0^2 = 6 \cdot i - \frac{8}{3}$$

A **zöld** szakasz egyenlete: $z_2(t) = 2 \cdot i + 3 - t \quad 0 \leq t \leq 3$

Kell még: $\dot{z}_2(t) = -1$

$$\text{Behelyettesítés: } I_2 = \int_0^3 \underbrace{(3 - t + i \cdot 4)}_{f(z_2(t))} \cdot \underbrace{(-1)}_{\dot{z}_2(t)} dt = \left[\frac{(t-3)^2}{2} - 4 \cdot i \cdot t \right]_0^3 = -12 \cdot i - \frac{9}{2}$$

$$\text{Végeredmény: } I = I_1 + I_2 = -6 \cdot i - \frac{8}{3} - \frac{9}{2}$$

$$e^{i \cdot \varphi} = \cos(\varphi) + i \cdot \sin(\varphi)$$

$$\sin(z) = \frac{e^{i \cdot z} - e^{-i \cdot z}}{2 \cdot i} \left(= \frac{1}{i} \cdot \operatorname{sh}(i \cdot z) \right)$$

$$\cos(z) = \frac{e^{i \cdot z} + e^{-i \cdot z}}{2} (= \operatorname{ch}(i \cdot z))$$

$$\operatorname{sh}(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$$

Példa

$$e^z = -1 \quad z = ?$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i\pi}$$

$$z = i \cdot \pi + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$$e^z = i$$

Átírjuk a jobb oldalt

$$e^z = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z = i \cdot \frac{\pi}{2} + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

$$\operatorname{sh}\left(1 + \frac{\pi}{2} \cdot i\right) = \frac{e^{1+\frac{\pi}{2}i} - e^{-1-\frac{\pi}{2}i}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(e \cdot \underbrace{\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)}_0 - \frac{1}{e} \cdot \underbrace{\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)}_{-1} \right) = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \left(e + \frac{1}{e}\right)$$

Példa

$$\operatorname{sh}(z) = \operatorname{sh}(x + i \cdot y) = \frac{e^{x \cdot (\cos(y) + i \cdot \sin(y))} - e^{-x \cdot (\cos(-y) + i \cdot \sin(-y))}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \cos(y) \cdot (e^x - e^{-x}) + i \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin(y) \cdot (e^x + e^{-x})$$

Példa (Harmonikus társkeresés)

$$u = x^3 - 3 \cdot x \cdot y^2$$

$$u = ? \quad f = u + i \cdot v \text{ reguláris} \quad f(0) = 2 \cdot i \quad (u = 0, v = 2)$$

$$\partial_x u = 3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2 \quad \rightarrow \quad \partial_{xx}^2 u = 6 \cdot x$$

$$\partial_y u = -6 \cdot x \cdot y \quad \rightarrow \quad \partial_{yy}^2 u = -6 \cdot x$$

$$\partial_{xx}^2 u + \partial_{yy}^2 u = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Laplace-féle parciális differenzienleteket kielégíti} \rightarrow \text{harmonikus függvény.}$$

A Cauchy-Riemann-féle parciális differenciálegyenletek szerint:

$$\partial_x u = \partial_y v$$

$$\partial_y u = -\partial_x v$$

(u -t ismerjük, v -t keressük, ez lesz a harmonikus társa)

Az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\text{I.} \quad \partial_y v = \underbrace{3 \cdot x^2 - 3 \cdot y^2}_{\partial_x u}$$

$$\text{II.} \quad \partial_x v = \underbrace{6 \cdot x \cdot y}_{-\partial_y u}$$

I. egyenletet parciálisan integráljuk y szerint:

$$v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^3 + C(x) \quad C(x) \text{ csak } x\text{-től függ, mert } y \text{ szerint deriváltunk}$$

II. egyenletbe ezt behelyettesítjük v helyére (majd x szerint deriváljuk)

$$6 \cdot x \cdot y + C'(x) = 6 \cdot x \cdot y$$

$$C'(x) = 0$$

$$C(x) = konst.$$

$$\text{Vagyis } v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + konst$$

Kezdeti feltétel szerint ez a (0,0) pontban egyenlő 2-vel:

$$v = 3 \cdot 0^2 \cdot 0 - 0^2 + konst = 2 \quad \rightarrow \quad konst = 2$$

$$\rightarrow v = 3 \cdot x^2 \cdot y - y^2 + 2$$

Példa

$$r(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \end{pmatrix} \quad 0 \leq t \leq 2$$

Ívhossz = ?

$$s = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{r}(t)| dt$$

$$\dot{r}(t) = \begin{pmatrix} e^t \cdot \cos(t) - e^t \cdot \sin(t) \\ e^t \cdot \sin(t) + e^t \cdot \cos(t) \\ e^t \end{pmatrix}$$

$$s = \int_0^2 \sqrt{e^{2t} \cdot (\cos(t) - \sin(t))^2 + e^{2t} \cdot (\sin(t) + \cos(t))^2 + e^{2t}} dt =$$

$$= \int_0^2 e^t \cdot (\cos^2(t) - 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \sin^2(t) + (\sin^2(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + \cos^2(t)) + 1) dt$$

$\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$ és $-2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t) \cdot \sin(t)$ kiesik így a gyök alatt marad $1+1+1$

$$= \int_0^2 e^t \cdot \sqrt{3} dt = \sqrt{3} \cdot \int_0^2 e^t dt = \sqrt{3} \cdot [e^t]_0^2 = \sqrt{3} \cdot (e^2 - 1)$$

Igazoljuk, hogy ez egy kúpfelület!

$$45^\circ\text{-os kúp paraméterezése: } \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\varphi) \\ r \cdot \sin(\varphi) \\ r \end{pmatrix} \text{ ami megegyezik a megadott felülettel, ha } r = e^t \text{ és } \varphi = t$$

ZH-ban lehet a kúp, henger és a gömb paraméterezése. Kúp már megvan.

$$\text{Hengerfelület paraméterezése: } \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \\ R \cdot \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

$$\text{Gömb paraméterezése: } \begin{pmatrix} R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \\ R \cdot \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Példa

Mennyi a 8-ad gömb felszíne?

$$F = \iint_{T_{u,v}} |\partial_u r \times \partial_v r| du dv =$$

$\partial_u r \times \partial_v r$ számolása

$$\begin{matrix} \partial \varphi \rightarrow \\ \partial \vartheta \rightarrow \end{matrix} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -R \cdot \sin(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & R \cdot \cos(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) & 0 \\ R \cdot \cos(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & R \cdot \sin(\varphi) \cdot \cos(\vartheta) & -R \cdot \sin(\vartheta) \end{vmatrix}$$

$$= \iint \sqrt{R^4 \cdot \cos^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot \sin^2(\varphi) \cdot \sin^4(\vartheta) + R^4 \cdot (\sin^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta) + \cos^2(\varphi) \cdot \sin(\vartheta) \cdot \cos(\vartheta))^2} d\varphi d\vartheta$$

$$= \iint R^2 \cdot \sqrt{\sin^4(\vartheta) + \sin^2(\vartheta) \cdot \cos^2(\vartheta)} = \int_{\varphi=0}^{\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi} R^2 \cdot \sin(\vartheta) d\vartheta d\varphi = \int_{\varphi=0}^{\pi} R^2 \cdot [-\cos(\vartheta)]_0^{\pi} d\varphi =$$

$$= \int_{\varphi=0}^{\pi} R^2 d\varphi = R^2 \cdot \int_0^{\pi} d\varphi = R^2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Ez tényleg a teljes gömb $(4 \cdot R^2 \cdot \pi) \frac{1}{8}$ -ad része

11. előadás

TÉTEL (Stokes) 2D:

F 2-dimenziós normált térrész, melynek határa a pozitívan irányított L görbe.

$$F \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^2 \quad v: H \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ F-en folytonosan diffható} \rightarrow \int_L v dr = \int_F \text{rot}(v) dV$$

Bizonyítás: $1. \int_L v dr = \int_L \text{cross}(v) df \quad L: r(t) \quad t \in [a, b]$

$$\rightarrow \int_a^b v(r(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = \int_a^b \text{cross}(v(r(t))) \cdot \text{cross}(\dot{r}(t)) dt$$

$$2. \text{div}(-\text{cross}(v)) = \text{rot}(v) = \text{div}(g, -f) = g_x - f_y = \text{rot}(f, g)$$

$$3. \int_L v dr = \int_L \text{cross}(v) df = \int_{-L} -\text{cross}(v) df = \int_F \underbrace{\text{div}(-\text{cross}(v))}_{\text{rot}(v)} dV = \int_F \text{rot}(v) dV$$

TÉTEL (stokes) 3D:

V 3-dimenziós normált térrész, melynek határa felosztható az F kifelé irányított valódi felületre és a kifelé irányított $-G$ normált síkfelületre. Legyen G határa a G -ből nézve pozitívan irányított L görbe. Ha $V \subseteq H \subseteq \mathbb{R}^3, v: H \rightarrow \mathbb{R}^3$ folytonosan diffható, akkor

$$\int_L v dr = \int_F \text{rot}(v) df$$

Példa

$$\int_F \text{rot}(k \times r) df \xrightarrow{\text{Stokes}} \int_L k \times r dr$$

$L: [x, y]$ síkban az origó középpontú R sugarú pozitívan irányított kör. (egyik megoldás)

Korábbi előadáson tanultak alapján az integrál egyik alaptulajdonsága: $\int_L v dr = \int_L v_e |dr|$

$$\text{Tehát: } \int_L k \times r dr = \int_L (k \times r)_e |dr| = \int_L R |dr| = R \cdot \int_L 1 |dr| = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Másik megoldás

$$(h \times r) = v$$

$$|h \times r| = |h| \cdot |r| = |v| = R$$

$h \times r$ párhuzamos az érintővektorral

$$\int_L (h \times r) dr = \int_L \underbrace{(h \times r)_e}_R |dr| = \underbrace{\int_L R |dr|}_{L \cdot |R|} = R \cdot 2 \cdot R \cdot \pi = 2 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Definíció:

$A: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ lineáris leképezés skalárinvariánsa: A főátlóinak összege

Állítás: Ez bázis független.

Definíció:

$\text{div}(v)$: v deriváltoperátorának skalárinvariánsa, azaz a Jacobi-mátrix főátlójának összege: $\sum \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$

$$\left(\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \Rightarrow \text{div}(v) = \nabla \cdot v \right)$$

Definíció: A lineáris transzformáció adjungáltja A^*

A szimmetrikus, ha $A = A^*$, antiszimmetrikus, ha $A^* = -A$

megjegyzés: A antiszimmetrikus lineáris transzformáció $\rightarrow$ deriváltoperátorának mátrixának (Jakobi) főátlója csupa 0 $\Rightarrow \operatorname{div}(A) = 0$

speciálisan 2 dimenzióban a cross ilyen.

$$\operatorname{cross} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}(\operatorname{cross}) = 0$$

Állítás:

A antiszimmetrikus lineáris transzformáció, ha

$$2D\text{-ben: } \exists c \in \mathbb{R} \ A \cdot r = c \cdot \operatorname{cross}(r) \quad (c = a_{21})$$

$$3D\text{-ben: } \exists \vec{c} \in \mathbb{R}^3, \text{ hogy } A \cdot r = c \times r \quad (c = (a_{32}, a_{13}, a_{21}))$$

Bizonyítás:

Egyértelműség $\mathbb{R}^3$ -ban: $c_1, c_2, e_{\vec{x}}$ is jó

$$0 = c_1 \times r - c_2 \times r = (c_1 - c_2) \times r \Rightarrow c_1 - c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2$$

$$\exists \mathbb{R}^3\text{-ban: } \begin{pmatrix} 0 & -a_{21} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & -a_{32} \\ -a_{13} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-a_{21} \cdot y + a_{13} \cdot z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-a_{21} \cdot y + a_{13} \cdot z) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_{32} & a_{13} & a_{21} \\ x & y & z \end{pmatrix} \text{ Ez megegyezik az előbb kapott végeredménnyel.}$$

Definíció: A antiszimmetrikus lineáris transzformáció vektorinvariánsa az az egyetlen $c \in \mathbb{R}$, illetve $c \in \mathbb{R}^3$, amire $A \cdot r = \operatorname{cross}(r)$, illetve $A \cdot r = c \times r$.

Definíció: A tetszőleges lineáris transzformáció antiszimmetrikus része: $\frac{1}{2} \cdot (A - A^*)$ és szimmetrikus része $\frac{1}{2} \cdot (A + A^*)$

Definíció:

$\operatorname{rot}(v)$: v deriváltoperátorának antiszimmetrikus része invariánsának kétszerese

kiszámolása: $\mathbb{R}^2$ -ben $a_{21} - a_{12}$

$\mathbb{R}^3$ -ban $(a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{32}, a_{21} - a_{12})$

Ha A a v Jakobi:

$$\mathbb{R}^2\text{-ben: } \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}$$

$$\mathbb{R}^3\text{-ben: } \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}, \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \nabla \times v$$

11. gyakorlat

Egyszeres összefüggőség

$\Gamma: t \rightarrow z(t), t \in [a, b]$ görbe

Definíció: Γ zárt görbe a T tartományban a z_0 pontra deformálható, ha létezik olyan $\Gamma: [0, 1] \rightarrow T^{[a, b]}$ folytonos leképezés, hogy $\gamma(1) = \Gamma, \gamma(0) = z_0$ konstans görbe.

Definíció: T egyszeresen összefüggő, ha benne minden zárt görbe pontra deformálható.

Ellenpélda

$$\operatorname{Dom} \left(\frac{1}{z} \right) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\operatorname{Dom} \left(\frac{1}{id_{\mathbb{C}}} \right) \quad id: z \rightarrow z$$

Ez a tartomány nem egyszeresen összefüggő.

Zsugorodás közben át kellene mennie az origón, de ez nem lehetséges, mert az origó nincs benne a T tartományban (ellentmond a definíciónak) $\rightarrow$ Kétszeresen összefüggő

Példa

Csillagszerű tartomány, ha $\exists z_0 \in T$, hogy $\forall z \in T$ esetén $[z; z_0] \subseteq T$

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

Középpontos kicsinyítés

Egyszeresen összefüggő, mert a z_0 középpontú, λ arányú kicsinyítések a γ -t alkotják.

$$\|f - g\| = \sup(f - g)$$

távolság = szuprénumnorma

Komplex logaritmus

$$e^z = w$$

$$e^z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^z = e^{\ln(r)} \cdot e^{i\varphi}$$

$$e^z = e^{\ln(r) + i\varphi}$$

$$z = \ln(r) + i \cdot \varphi + 2 \cdot \pi \cdot i \cdot k$$

$$\operatorname{Ln}(w) = \ln|w| + i \cdot (\arg|w| + 2 \cdot \pi \cdot k)$$

$$k = 0 \rightarrow \text{logaritmus főértéke } \ln(w)$$

$$z^w := e^{w \cdot \operatorname{Ln}(z)}$$

$$e^{\operatorname{Ln}(z^w)} = e^{w \cdot \operatorname{Ln}(z)} \quad (\text{komplex logaritmust nagy „L” betűvel írjuk})$$

Példa

$$i^i = e^{i \cdot \operatorname{Ln}(i)} = e^{i \left(\ln 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2 \cdot \pi \cdot k \right) \right)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2 \cdot \pi \cdot k}$$

Példa

$$e^{i \cdot z} = 1 + i$$

$$e^{i \cdot z} = e^{\sqrt{2}} \cdot e^{i \frac{\pi}{4}}$$

Hatványsorok

1, Nem negatív kitevőjű hatványsor

$$z \xrightarrow{s} \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n \cdot (id_{\mathbb{C}} - z_0)^n \right)$$

$$z_0 = \mathbb{C} \quad - \quad \text{középpontja / centruma a hatványsornak}$$

$$c_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}_0^+} \quad - \quad \text{együttható sorozat}$$

TÉTEL (Cauchy-Hadamard-tétel):

s konvergenciatartománya egy $B_r(z_0)$ alakú halmaz, ahol

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}}, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = +\infty \\ +\infty, & \text{ha } \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = 0 \end{cases}$$

Példa

$$1 + z^2 + z^4 + z^6 + \dots$$

$$z_0 = 0$$

$$c_n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \frac{1}{0} \rightarrow \limsup \sqrt[n]{|c_n|} = 1 \quad R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|c_n|}} = 1$$

Ez egy körlap belseje.

Taylor-sor

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}}_{c_n} \cdot (z - z_0)^n$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \dots$$

Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1$$

Mert: $\frac{\sin(z)}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$, ami $z \rightarrow 0$ esetén $= 1$

Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6}$$

$$\sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \quad \text{Mindkét oldalból kivonva } z\text{-t és elosztva } z^3\text{-al}$$

$$\frac{\sin(z) - z}{z^3} = -\frac{1}{6} + \frac{z^2}{5!} - \dots, \text{ ami } z \rightarrow 0 \text{ esetén } = -\frac{1}{6}$$

Példa

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2}$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots \quad \text{Kivonva } z\text{-t, } z^2\text{-tel osztva és előjeleket cserélve}$$

$$\frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \dots, \text{ ami } z \rightarrow 0 \text{ esetén } = \frac{1}{2}$$

Egész kitevőjű sorok

$$z \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$$

$$\underbrace{c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z}}_{\text{főrész}} + \underbrace{c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 + \dots}_{\text{reguláris rész}}$$

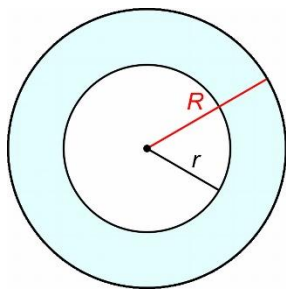
$$\limsup \sqrt[n]{\left| c_{-n} \cdot \frac{1}{z^n} \right|} < 1$$

$$\limsup \sqrt[n]{|c_{-n}|} \cdot \frac{1}{|z|} < 1$$

$$\limsup \sqrt[n]{c_{-n}} < |z|$$

Ez egy végtelenbe nyúló körgyűrű.

$B_\delta(\infty)$ alakú a konvergencia tartomány.



A két tartomány (egy R sugarú körlap belseje, és egy r sugarú végtelenbe nyúló körgyűrű) metszete: körgyűrűn konvergens.

Példa

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

$z_0 = i$ körül fejtsük sorba

$$z_1 = \frac{i}{2}$$

Kell: $\sum c_n \cdot (z - i)^n$

Ehhez átírjuk az $f(z)$ -t úgy, hogy a nevezőben kivonunk és hozzáadunk i -t, majd alkalmazzuk a mértani sor összegképletét.

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i}$$

Mértani sor összegképlete: $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$

$f(z)$ -t valahogy $\frac{1}{1-q}$ alakra kell hozni. Emeljük ki a nevezőben i -t:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-i}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{z-i}{i}\right)} = \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{(z-i)}{i}} = \frac{1}{i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(i \cdot (z-i)\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} i^{n-1} \cdot (z-i)^n$$

Ez a nem negatív kitevőjű rész, vagyis a reguláris rész.

Meg kell vizsgálni, hogy hol konvergens:

A mértani sorösszeg $|q| < 1$ esetén konvergál:

$$|q| < 1$$

$$|i \cdot (z - i)| < 1$$

$$|z - i| < 1$$

Ez az ábrán az **I-es tartomány**, vagyis megkaptuk az i körüli 1 sugarú körben a Taylor-sort.

Most emeljük ki a nevezőben a másik tagot, $(z - i)$ -t:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)+i} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 + \frac{i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \cdot \frac{1}{1 - \frac{-i}{z-i}} = \frac{1}{z-i} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-i}{z-i}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot \frac{1}{(z-i)^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \cdot (z-i)^{-n-1}$$

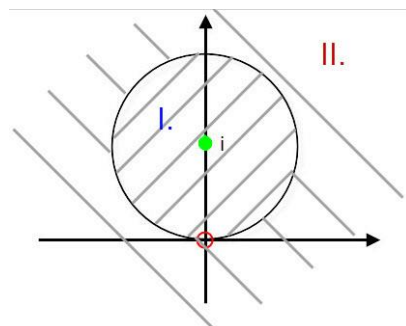
Ez a negatív kitevőjű rész, vagyis a főrész.

Ennek a konvergencia tartománya:

$$|q| < 1$$

$$\left| \frac{-i}{z-i} \right| < 1$$

$$\frac{1}{|z-i|} < 1$$



$$|z - i| > 1$$

Ez az ábrán a **II-es tartomány**.

12. előadás

Vektorfüggvények jellemzőinek számítása (grad, div, rot)

- TÉTEL:**
1. div , grad , rot lineáris operátorok (mert a deriválás lineáris operátor)
 2. konstans vektorfüggvénynek $\text{div} = 0$, $\text{rot} = 0$ és konstans skalárfüggvénynek $\text{grad} = 0$
 3. Tegyük fel, hogy u skalárfüggvény, v vektorfüggvény
- $$\text{div}(u \cdot v) = u \cdot \text{div}(v) + v \cdot \text{grad}(u)$$

Bizonyítás: $\text{div}(u \cdot v) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial(u \cdot v_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v_i + u \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) =$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v_i + u \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \text{grad}(u) \cdot v + u \cdot \text{div}(v)$$

$$4. \quad \text{rot}(u \cdot v) = u \cdot \text{rot}(v) - \text{CROSS}(v) \cdot \text{grad}(u) \quad \text{2D-ben}$$

$$\text{rot}(u \cdot v) = u \cdot \text{rot}(v) - v \times \text{grad}(u) + \text{grad}(u) \times v \quad \text{3D-ben}$$

Bizonyítás: $(\text{rot}(u \cdot v))_1 = \frac{\partial u \cdot v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u \cdot v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial u}{\partial x_2} \cdot v_3 + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \cdot u - \frac{\partial u}{\partial x_3} \cdot v_2 - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \cdot u = (\text{grad}(u \times v))_1 + u \cdot (\text{rot}(v))_1$

$$5. \quad \text{grad}(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot \text{grad}(u_2) + u_2 \cdot \text{grad}(u_1)$$

u_1 és u_2 skalárfüggvények

$$6. \quad \mathbb{R}^2\text{-ben rot és div kapcsolata}$$

$$- \quad \text{div}(v) = \text{rot}(\text{cross}(v))$$

$$- \quad \text{rot}(v) = -\text{div}(\text{cross}(v))$$

Bizonyítás: a, $\text{rot}(\text{cross}(u)) = \text{rot}(-v_2, v_1) = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \text{div}(v)$

b, $\text{div}(\text{cross}(v)) = \text{rot} \left(\underbrace{\text{cross}(\text{cross}(v))}_{\substack{2 \cdot 90^\circ \text{ forgatás} \\ -1\text{-szeresre vált}}} \right) = \text{rot}(-v) = -\text{rot}(v)$

Tétel: 1. $\text{div}(r) = n \quad (\mathbb{R}^n - \text{ben}) \quad r: \text{identitásfüggvény}$

$$2. \quad \text{div}(\text{cross}(r)) = \sum f_{\text{óátló}} = 0$$

$$\text{rot}(\text{cross}(r)) = \text{div}(r) = 2$$

$$3. \quad u(r) = c \cdot r \Rightarrow \text{grad}(u) = c$$

$$\sum_{i=1}^n c_i \cdot x_i \text{ paricálisan deriválni kell}$$

$$4. \quad u(r) = f(|r|) \quad f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenciálható függvény}$$

$$\rightarrow \quad \text{grad}(u) = f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|}$$

Bizonyítás: $\text{grad}(u) = f'(|r|) \cdot \text{grad}(|r|)$

$$(\text{grad}(|r|))_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot (\sum x_i^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot x_i}{|r|} = \frac{x_i}{|r|}$$

$$\forall i\text{-re: } \frac{1}{|r|} \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{r}{|r|}$$

$$5. \quad v(r) = f(|r|) \cdot r \quad f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \text{ differenciálható}$$

$$\rightarrow \quad r \neq 0 \Rightarrow \text{rot}(v) = 0$$

Bizonyítás: $\mathbb{R}^3$

$$4.-ből : u(r) = f(|r|) \quad v = r$$

$$rot(v) = \underbrace{f(|r|) \cdot \underbrace{rot(r)}_0}_{0} - \underbrace{r \times \underbrace{grad(f(|r|))}_0}_0$$

$$6. \quad v(r) \text{ mint 5.-ben} \rightarrow r \neq 0$$

$$\rightarrow div(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$$

$$\text{Bizonyítás: } div(f(|r|) \cdot r) = f(|r|) \cdot div(r) + r \cdot grad(f(|r|)) =$$

$$= n \cdot f(|r|) + r \cdot f'(|r|) \cdot \frac{r}{|r|} = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|$$

TÉTEL: u, v kétszer folytonosan differenciálható skalár illetve vektorfüggvények

$$1. \quad rot(grad(u)) = 0$$

$$2. \quad div(rot(v)) = 0$$

$$3. \quad div(grad(u)) = \sum_{i=1}^n u_{x_i} \cdot x_i = \Delta u \quad \text{Laplace-operátor}$$

TÉTEL: - G nyílt, összefüggő halmaz

- $v: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos

- u potenciálfüggvénye v -nek

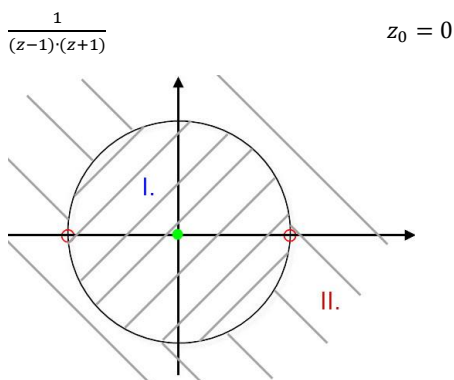
$$\text{Ekkor: } 1. \int_L v dr = u(q) - u(p), \text{ ha } L \text{ } G\text{-beli görbe } p \text{ kezdő- és } q \text{ végpontú}$$

$$2. \int_L v dr = 0, \text{ ha } L \text{ zárt } G\text{-beli görbe}$$

$$3. \text{ ha } v \text{ folytonosan differenciálható} \rightarrow rot(v) = rot(grad(u)) = 0 \text{ } G\text{-n}$$

12. gyakorlat

Példa



Parciális törtekre bontunk (pl. letakarásos módszer) és az előzőekhez hasonlóan kiemeljük az egyik tagot a nevezőben:

$$\frac{\frac{1}{2}}{z-1} - \frac{\frac{1}{2}}{z+1} = -\frac{\frac{1}{2}}{1-\underbrace{z}_{q_1}} + \frac{\frac{1}{2}}{1-\underbrace{(-z)}_{q_2}} = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot z^n + \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{2} \cdot \overbrace{(-z)^n}^{(-1)^n \cdot z^n} = \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot (-1)^n\right)}_{c_n} \cdot z^n$$

Konvergencia tartomány:

$$|q_1| < 1 \rightarrow |z| < 1$$

$$|q_2| < 1 \rightarrow |-z| < 1 \quad \text{Ez az I-es tartomány.}$$

Másik tag kiemelése esetén a II-es tartományt kapjuk.

TÉTEL (Laurent-tétel): $0 \leq r \leq R$

$$T = \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}: f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

f reguláris T -n. Ekkor f előáll egy z_0 körüli egész kitevőjű hatványsor formájában, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n = f(z)$, ahol $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$

$\Gamma \subseteq T$, egyszerű és egyszer hurkolja körbe a z_0 -at.

Izolált szingularitás és szakadások osztályozása

Definíció: z_0 -ban az $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ -nek izolált szingularitása van, ha f a z_0 -ban szakad, de van olyan $B_\delta(z_0)$ kipontozott környezete, ahol f reguláris.

Példa

$$\frac{1}{z} \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{z} = \infty$$

0-ban van izolált szingularitása

Példa

$$\frac{1}{(z-1)(z+1)}$$

-1-nek van olyan környezete, ahol mindenhol reguláris (maximum 2 sugarú környezet, de a lényeg, hogy van)

+1-nek is

Ellenpélda

$$z \rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$$

Hol szakad?

$z_0 = 0$ -ban illetve a sinus függvény zérushelyeinél

Komplex sinus zérushelyei:

$$\sin(z) = 0$$

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0$$

$$e^{iz} - e^{-iz} = 0$$

$$e^{iz} = e^{-iz}$$

$$i \cdot z = -i \cdot z + k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$2 \cdot i \cdot z = k \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

$$z = k \cdot \pi \quad \text{Ugyan ott, ahol a valós sinusnak.}$$

0-ban nem izolált szingularitása van az $\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$ -nek, mert akármilyen kis környezetben van szakadása. Az összes többi szingularitása izolált.

1. Megszüntethető szakadás

$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ és véges $\Leftrightarrow$ az f z_0 körüli Laurent-sorában nincs főrész $\left(\frac{1}{z} - s \text{ tagok}\right)$

Példa

$$f(z) = \frac{e^z - 1 - z}{z^2}$$

Megszüntethető szakadás 0-ban

$$f(z) = \frac{\overbrace{1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots - 1 - z}^{e^z \text{ Taylor-sora}}}{z^2} = \frac{1}{2} + \frac{z}{3!} + \frac{z^2}{4!} \dots \xrightarrow{\lim} \frac{1}{2}$$

2. Lényeges szingularitás

$\nexists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \Leftrightarrow f$ z_0 körüli Laurent-sorában végtelen hosszú a főrész

Példa

$$\sin\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{3! \cdot z^3} + \frac{1}{5! \cdot z^5} - \dots$$

3. Pólus szingularitás

$\exists \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty \Leftrightarrow$ az f z_0 -beli Laurent-sora véges sok (de nem nulla!) főrészbeli tagot tartalmaz

Példa

$$f(z) = \frac{\sin(z)}{z^4} = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots}{z^4} = \underbrace{\frac{1}{z^3} - \frac{1}{3! \cdot z}}_{\text{fő rész}} + \frac{1}{5!} \cdot z - \dots$$

3-ad fokú pólus, mert az utolsó $\frac{1}{z}$ kitevője 3.

Másképp:

A számlálónak a z egyszeres gyöke: egyszer emelhető ki z úgy, hogy a következő tag konstans legyen:

$$z \cdot \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} \dots\right)$$

z^4 -nek a 0 négyszeres gyöke.

Harmadfokú pólus = négyszeres multiplicitású gyök - egyszeres multiplicitású gyök = 3

Rezidumszámítás

Definíció: $z \xrightarrow{f} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot (z - z_0)^n$ reziduma a z_0 helyen $\text{Res}^f(z_0) = c_{-1}$

Példa

$$z_0 = 0$$

$$\dots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \dots$$

$$\int_{\Gamma} \dots c_{-3} \cdot \frac{1}{z^3} + c_{-2} \cdot \frac{1}{z^2} + c_{-1} \cdot \frac{1}{z} + c_0 + c_1 \cdot z + c_2 \cdot z^2 \dots dz = ?$$

$$\text{Csak } c_{-1} \cdot \frac{1}{z} \text{ tagnak az integrálja nem 0.} \quad \rightarrow \quad \oint_{\Gamma} \dots dz = \oint_{\Gamma} c_{-1} \cdot \frac{1}{z} dz = \text{Res}^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i = c_{-1} \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

13. előadás

TÉTEL: $g: G \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos, $\exists u: G \rightarrow \mathbb{R}$

$v = \text{grad}(u) \quad \rightarrow \quad$ ha $L: G$ -beli görbe p kezdőponttal és q végponttal, akkor

$$\int_L v dr = u(q) - u(p)$$

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy L -et $r(t)$ $t \in [a, b]$ paraméterezi $\rightarrow$

$$\int_L v dr = \int_a^b \text{grad}(u) dr = \int_a^b \text{grad}(u(t)) \cdot \dot{r}(t) dt = u(r(b)) - u(r(a)) = u(q) - u(p)$$

TÉTEL: az előző tétel feltételei mellett

1. v egy tetszőleges G -beli rögzített középpontú görbére vett görbementi integrálja, mint végpontjának függvénye megadja v egy potenciálfüggvényét

Bizonyítás: Legyen $p \in G$ rögzített és $\forall r \in G$ -re $w(r) = \int_{L(r)} v dr = u(r) - u(p)$
 $(L(r): p$ középpontú, r végpontú G -beli görbe)

$$\rightarrow \quad \text{grad}(w(r)) = \text{grad}(u(r)) - \underbrace{\text{grad}(u(p))}_{\substack{\text{0, mert } p \\ \text{rögzített}}} = \text{grad}(u(r)) = v$$

2. v potenciálfüggvényei csak konstansokban térnek el egymástól

Bizonyítás: Legyen $p \in G$ rögzített, $L(r)$ mint az előbb, w egy potenciálfüggvénye v -nek

$$\int_{L(r)} v dr = u(r) - u(p) = w(r) - w(p) \quad \rightarrow \quad w(r) - u(r) = \underbrace{w(p) - u(p)}_{\text{konstans}}$$

Potenciálfüggvény létezéséhez nem elég a folytonosság!

Például: $\text{cross}(r)$ folytonos, de $\text{rot}(\text{cross}(r)) = 2 \neq 0$

Nem elég $\text{rot}(r) = 0$

$$v(r) = \frac{\text{cross}(r)}{|r|^2} = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2} \quad r = 0\text{-ra } \text{rot}(v(r))$$

$$\text{rot}(v(r)) = \frac{d}{dx} \cdot \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{d}{dy} \cdot \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2 - 2 \cdot x^2 + x^2 + y^2 - 2 \cdot y^2}{x^2 + y^2} = 0, \text{ de ha } L \text{ egy } 0 \text{ körüli } R \text{ sugarú kör, akkor}$$

$$\int_L v dr = \int_L v_e \cdot |dr| = \int_L \frac{1}{R} |dr| = \frac{1}{R} \cdot \int_L 1 |dr| = \frac{1}{R} \cdot 2 \cdot r \cdot \pi = 2 \cdot \pi$$

TÉTEL

$G \subseteq \mathbb{R}^2$ nyílt, egyszeresen összefüggő tartomány

$v: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ folytonos

Ekkor az alábbiak ekvivalens:

1. v -nek van G -n potenciálfüggvénye
2. $\int_L v dr = u(q) - u(p)$, ha L G -beli p kezdő- és q végpontú görbe és u egy potenciálfüggvénye v -nek
3. zárt egyszerű G -beli görbéken az integrál 0
4. $\text{rot}(v) = 0$ G -n

Példa (potenciál keresése)

$f(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ vektorfüggvény

$$\Rightarrow \quad 0 = \text{rot}(f) = Q_x - P_y, \text{ azaz } Q_x = P_y$$

Példa (Coulomb-erő)

$$v(r) = |f(r)| \cdot r$$

$$r = 0\text{-ban: } \underbrace{\text{div}(v) = n \cdot f(|r|) + f'(|r|) \cdot |r|}_{\substack{\text{11. előadás vége felé} \\ \text{6. pontban bizonyítva}}} = 0$$

Ez egy differenciálegyenlet. Más paramétereket használva:

$$n \cdot y + y' \cdot t = 0$$

$$y' = -n \cdot \frac{y}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} = -n \cdot \frac{y}{t}$$

$$\int \frac{1}{y} dy = -n \cdot \int \frac{1}{t} dt$$

$$\ln|y| = -n \cdot \ln|t| = \frac{1}{\ln|t|^n} + c$$

$$|y| = \frac{1}{|t|^n} + c \xrightarrow{\text{Bolzano}} y = \frac{c_1}{t^n} \Rightarrow v(r) = \frac{c_1 \cdot r}{|r|^n}$$

n -dimenziós Coulomb-törvény

13. gyakorlat

Példa

$$I = \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz \quad c \in \mathbb{Z}$$

I. eset: $c \leq 0$

Mivel $c \leq 0$, ezért z^c a számlálóba kerül: $f(z) = e^z \cdot z^c$, ekkor tehát a függvénynek nincs szakadása a $z_0 = 0$ helyen
 $\rightarrow$ reguláris $\rightarrow$ a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

II. eset: $c > 0$

$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^c} dz$$

$$\text{Cauchy-féle integrálformula: } f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2 \cdot \pi \cdot i} \cdot \oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

$$\text{Most: } f(z) = e^z, \quad z_0 = 0, \quad c = n + 1, \quad n = c - 1$$

$$\text{Tehát: } \int \frac{e^z}{z^c} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^0}{(c-1)!} = \frac{2 \cdot \pi \cdot i}{(c-1)!}$$

Riemann-tétel: f korlátos, egyetlen szingularitása a z_0 , Γ egyszerű és zárt görbe, egyszer körbehurkolja z_0 -t $\rightarrow \oint_{\Gamma} f = 0$

Példa

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz \quad R > 0$$

Ennek a $z_0 = 1$ helyen van szakadása, ezért a megoldás függ attól, hogy mekkora az R .

I. eset

$$0 < R < 1$$

A körben nincs benne a szakadás $\rightarrow$ reguláris $\rightarrow$ a Cauchy-féle integráltétel szerint ekkor az integrál 0

II. eset

$$R = 1 \quad (\text{vizsgán nem kell})$$

III. eset

$$R > 1 \quad \text{A görbe körbehurkolja a szingularitást.}$$

Két módszerrel is megoldható. 1. módszer: Cauchy-féle integrálformula

2. módszer: Residum-tétel

$$\int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = \text{Res}^f(z_0) \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Ha z_0 az f -nek n -edfokú pólusa, akkor a rezidum a z_0 -ban:

$$\text{Res}^f(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow z_0} ((z - z_0)^n \cdot f(z))^{n-1}$$

Most a $z_0 = 1$ elsőfokú pólus $\rightarrow n = 1$

$$\text{Tehát a képlet szerint: } \text{Res}^f(1) = \frac{1}{(1-1)!} \cdot \lim_{z \rightarrow 1} \left((z-1)^1 \cdot \frac{e^z}{z-1} \right) = 1 \cdot \lim_{z \rightarrow 1} e^z = e$$

$$\text{Visszaírva a legelső képletbe: } \int_{|z|=R} \frac{e^z}{z-1} dz = e \cdot 2 \cdot \pi \cdot i$$

Példa

Hányadfokú pólusa van a $\frac{\sin(z^2)}{z^8}$ függvénynek?

$$\frac{\sin(z^2)}{z^8} = \frac{z^2 - \frac{z^6}{3!} + \frac{z^{10}}{5!} - \frac{z^{14}}{7!} + \dots}{z^8} = \frac{z^2 \left(1 - \frac{z^4}{3!} + \frac{z^8}{5!} - \frac{z^{12}}{7!} + \dots \right)}{z^8} = \underbrace{\frac{1}{z^6} - \frac{1}{3! \cdot z^2}}_{\text{főrész}} + \frac{1}{5!} \cdot z^2 \dots$$

6-odfokú pólus, mert a főrészben az utolsó $\frac{1}{z}$ kitevője 6.

Példa

$$f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z^2} \quad z \neq 0$$

a, $f(0) = ?$

b, $f^{(4)}(0) = ?$

c, $f^{(100)}(0) = ?$

d, $f^{(n)}(0) = ?$

a, Nevezetes határértékek, amiket jó tudni:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{Most ez kell, pontosabban a -1-szerese} \rightarrow f(0) = -\frac{1}{2}$$

Vagy ha nem ismerjük ezeket:

$$f(z) = \frac{1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots - 1}{z^2} = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots \xrightarrow{z \rightarrow 0} -\frac{1}{2}$$

b, 4 deriválás (1. módszer) vagy Cauchy-féle integrálformula + rezidum tétel használata (2. módszer) vagy

3. módszer:

0 körüli Taylor-sor:

$$f(0) + f'(0) \cdot z + \frac{f''(0)}{2} \cdot z^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot z^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!} \cdot z^4 + \dots$$

Az előbb felírt Taylor-sor:

$$f(z) = -\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \dots$$

A z^4 -es tagok együtthatóit egyenlővé téve:

$$\frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{-1}{6!} \rightarrow f^{(4)}(0) = -\frac{4!}{6!}$$

b, z^{100} -os tagok együtthatói rövid gondolkodás után:

$$\frac{f^{(100)}(0)}{100!} = -\frac{1}{102!} \quad (\text{akkor negatív, ha 4-gyel osztható a } z \text{ kitevője})$$

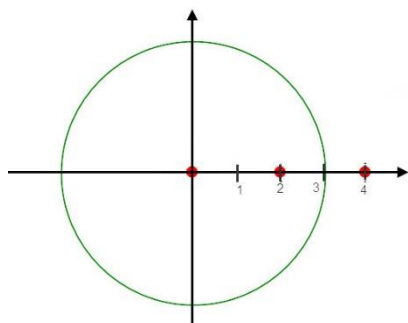
$$f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{102!}$$

c, n paraméter szerint szétbontva:

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ -\frac{n!}{(n+2)!}, & \text{ha } n \text{ osztható } 4 - \text{gyel} \\ \frac{n!}{(n+2)!}, & \text{ha } n = 2(\text{mod } 4) \end{cases}$$

Példa

$$\int_{|z|=3} \frac{1}{z \cdot (z^2 - 6z + 8)} dz = \int_{|z|=3} \frac{1}{z \cdot (z-2) \cdot (z-4)} dz = ?$$



3 kis kör van 0, 2 és 4 középponttal. A 4 középpontú kör nincs a nagy körön belül, ezért arra az integrál 0.

Az integrál a másik 2 kis körre vett integrál összege. A kis körök sugarát mi választhatjuk, csak ne lógjon a nagy körön kívülre és ne érje el a másik kiskört. Például $\frac{1}{4}$ és $\frac{1}{5}$ jó választás.

$$\underbrace{\int_{|z|=\frac{1}{4}} \frac{1}{(z-2)(z-4)} dz}_{\substack{0 \text{ középpontú kör, tehát} \\ a \ z=0 \text{ marad a nevezőben}}} + \underbrace{\int_{|z-2|=\frac{1}{5}} \frac{1}{(z-4)(z-2)} dz}_{\substack{2 \text{ középpontú kör, tehát} \\ a \ z=2 \text{ marad a nevezőben}}}$$

Cauchy-féle integrálformula

$$f(z) = \frac{1}{(z-2)(z-4)} \quad z_0 = 0 \quad n = 0$$

$$f(z) = \frac{1}{(z-4)(z-2)} \quad z_0 = 2 \quad n = 0$$

Tehát: $\int_{|z|=3} \frac{1}{z(z^2-6z+8)} dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{1}{(-2)(-4)} + 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{1}{2(-2)} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{\pi \cdot i}{4}$

Példa

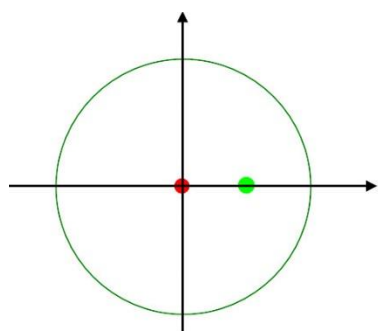
$$f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}} \quad \text{Milyen szingularitása van?}$$

$$f(z) = z^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots\right) = z^2 + z + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3!z} + \frac{1}{4!z^2} + \dots}_{\text{végtelen főrés}}$$

- Lehetnek:
- megszüntethető szakadás, ha nincs főrés
 - lényeges szingularitás, ha végtelen hosszú a főrés
 - pólus szingularitás, ha véges hosszú a főrés

Példa

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4(z-1)} dz$$



Kis körök középpontjai: 0 és 1, nagy kör sugara 2, középpontja 0.

$$\int_{|z|=\frac{1}{11}} \frac{e^{z^4}-1}{z^4} dz + \int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{e^{z^4}-1}{z-1} dz$$

Cauchy-féle integrálformulát kell alkalmazni, de a piros kör esetében z^4 miatt 4-szer kéne deriválni. Ehelyett trükközve: átírható $\frac{e^{z^4}-1}{z^4} \cdot \frac{1}{z-1}$ alakba.

Nevezetes határérték: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$, vagyis $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^{z^4}-1}{z^4} = 1 \rightarrow$ 2 reguláris függvény szorzata $\rightarrow$
Integrálja 0

$$\int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4(z-1)} dz$$

$$\int_{|z-1|=\frac{1}{23}} \frac{e^{z^4}-1}{z-1} dz \rightarrow f(z) = \frac{e^{z^4}-1}{z^4} \quad z_0 = 1 \quad n = 1$$

$$\rightarrow \int_{|z|=2} \frac{e^{z^4}-1}{z^4 \cdot (z-1)} \cdot dz = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot \frac{e^{1^4}-1}{1^4} = 2 \cdot \pi \cdot i \cdot (e-1)$$

Példa

$$\left(\frac{z^3}{z-3}\right)^{(100)}(0) = ?$$

$$f(z) = \frac{z^3}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{z-3} = z^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{z}{3}-1\right)} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{3}} = z^3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{z}{3} + \frac{z^2}{3^2} + \frac{z^3}{3^3} + \dots\right) = -\frac{1}{3} \cdot \left(z^3 + \frac{z^4}{3} + \frac{z^5}{3^2} + \frac{z^6}{3^3} + \dots\right)$$

$$z^{100}\text{-on együtthatója: } -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^{97}} = -\frac{1}{3^{98}}$$

$$z^{100}\text{-on együtthatója a Taylor-sorban: } \frac{f^{(100)}(0)}{100!}$$

$$\text{Tehát } f^{(100)}(0) = -\frac{100!}{3^{98}}$$

Vektoranalízis

$$w(r) = r \cdot |r|^n$$

$$\operatorname{div}(r \cdot |r|^n) = \operatorname{div}(r) \cdot |r|^n + v \cdot \operatorname{grad}(|r|^n)$$

$$\text{Ha } r \text{ egy } n \text{ dimenziós vektor: } \operatorname{div}(r) = \operatorname{div} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} = n \cdot 1 = \dim$$

$$\operatorname{grad}(|r|^n) = \underbrace{n \cdot |r|^{n-1}}_{\text{nagyság}} \cdot \underbrace{\frac{r}{|r|}}_{\text{irány}}$$

$$\text{Visszahelyettesítve: } \operatorname{div}(r \cdot |r|^n) = \dim \cdot |r|^n + r \cdot n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{r}{|r|} =$$

$$= \dim \cdot |r|^n + n \cdot |r|^{n-1} \cdot \frac{|r|^2}{|r|} = \dim \cdot |r|^n + n \cdot |r|^n = (\dim + n) \cdot |r|^n$$