

Tóth Péter 1-7. hét

Rövid távú 8-14

FMD 1
02-07

Szótársad. és Távolság
H 503/a
MAGY @ math. line hu / magy
5304 - es helye
21/2025781
20/537 - 2256

HTTP // www.math.line.hu/magy
manc 20 [1. ZH manc 23] 12-20
8. hét csatorna 18-20
13. hét hétfa' május 7

1. fele 52
5 pont hátra 45 p. ZH
össz 50 48 p.
min 20

2. fele 51
≤ 50 pont
min 20

40 - 54 - 2
55 - 63 - 3
70 - 84 - 4
85 - 100 - 5

Ismeretlen:

Kísérlet: → kísérlet → események {1-6} = Ω
32 éves magyar (32)
4

Villanykörte mikor ég ki, s felnyúl szálak → Ω = (0, ∞)
véletlen mennyiség → Ω = [0, ∞)
tömeg

esemény = Ω részhalmara

Jelölés: F = {események halmara}
|F| = 2^6

PL A = {2, 4, 6}
PL B = {van málva málna A'}

PL C = töltés, mino 100 óra
D = (égett, emelked 30 és 80 sz)
kőre esik

Valószínűség P |F| → [0, 1]

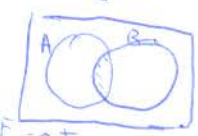
Valószínűségi változó = véletlen szám X: Ω → R függvény

Hocke dábárszék X = dábás értéke
Kísérlet: 2 hocke val dábás (piros world)
Ω {11 16
21 26}
X mi gott ki a kőbe
mi jött ki a pirosan
X a dábott számok összege.

Villanykörte égés ideje
véletlen szám.

[m. ejd: szótársad. és távolság fogalmat = változók sorozata]
Def: Ha A, B (Ω = {események} és P(B) ≠ 0 ⇒

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$



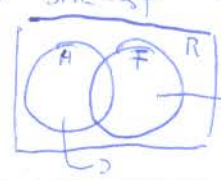
$$A \cap B = A \cap B = AB = A \cdot B$$

$$A \cup B = A \cup B = A + B$$

Példa: Kísérlet

valószínű 1

A: félé
B: hosszuhajó



Rövid távú

→ mártírhajó

$$A/B = 60\%$$

$$B/A = 15\%$$

$$54/(B \cup A) = 5\%$$

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	

$$P(Y \geq 7) = \frac{21}{36}$$

FMD 1.13
02-04

Matematikai jatek neldi mossa jatek Rendszer jatek

X folytonos sűrűségfüggvénye $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, ha azt tudjuk, hogy

$$P(X \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)) \approx 2 \cdot \varepsilon \cdot f(x)$$

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(x) dx$$

Előredefiniált függvény: X valószínűségi eloszlású $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Alkalmazható folytonos eset

$$P(X \in (a, b)) = F(b) - F(a)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

Példa:

Várható érték: diszkrét $EX = \sum_k k \cdot p_k$ súlyozott átlag érték súly

$$EX = \frac{2}{36} + \frac{3 \cdot 2}{36} + \frac{4 \cdot 3}{36} + \frac{5 \cdot 4}{36} + \frac{6 \cdot 5}{36} + \frac{7 \cdot 6}{36} + \dots$$

$$Példák: X_1 + X_2 \rightarrow EX = EX_1 + EX_2$$

$$\text{Folytonosra } EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad EX = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx$$

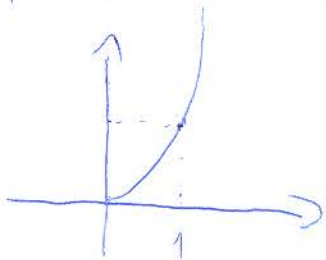
X második momentuma $= E(X^2)$

Jó hír: $E(X^2)$ kiszámításához nem kell X^2 sűrűség/súlyfüggvénye
hanem elég X -re diszkrétre folytonos

$$E(X^2) = \sum_k k^2 p_k$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx$$

Def: X m-edik momentuma $E(X^m) =$ diszkrétre $\sum_k k^m p_k$
folytonosra $\int_{-\infty}^{\infty} x^m f(x) dx$



Def: X szórásnégyzete $D^2 X = E(X - EX)^2$ ← könnyű látni

$$E(X - EX) = 0$$

$E(|X - EX|)$ ← nehezen számolható

$$D^2 X = E(X^2) - E^2(X)$$

Névenetes valószínűség eloszlások. I. diszkrét

- ① Diszkrét egyenletes $(1, 2, \dots, N)$ ha: $p_k = \frac{1}{N} \quad k=1, \dots, N$
 $E X = \frac{1+N}{2} \quad D X = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$

Péld.: kockadobás eredmény $X \sim \text{Uni}(\{1-6\})$

- ② Bernoulli = indikátor $X \sim B(p)$, ha $P(X=1) = p$
 $P(X=0) = q := 1-p \quad E X = p \quad D X = \sqrt{p-p^2} = \sqrt{pq}$
 Péld.: emmedobás indikátora hamis értékeivel.

- ③ Binomiális $X \sim \text{Bin}(n, p) \quad p_k = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \quad [q=1-p]$
 $k=0, 1, \dots, n \quad E X = n \cdot p \quad D X = \sqrt{n \cdot p \cdot q}$

Péld.: n kísérletből a sikeresek száma, ha a sikerességi p
 $[D^2(\text{Bin}(n, p)) = n D^2(B(p))]$
 fantom n a tényleges 1 millió nál csak 1000 $O(\sqrt{n})$
 centrális határeloszlás tétel.

- ④ Geometria $X \sim \text{Geom}(p)$ ha $p_k = q^{k-1} p \quad k=1, \dots, \infty$
 $E X = \frac{1}{p}$
 $D X = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$

Péld.: kísérletek sorozatából hányszor az első.

- ④/b Poissonista Geometriai eloszlás $P_{\text{Geom}}(p) \quad p_k = q^k p \quad k=0, 1, 2, \dots$
 $E X = \frac{1}{p} - 1$
 $D X = \sqrt{\frac{q}{p^2}}$

Péld.: Az első sikerig hány kísérlet/sikertelenség

- ⑤ Poisson eloszlás $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, ha $p_k = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad k=0, 1, 2, \dots$
 $E X = \lambda \quad D X = \sqrt{\lambda}$

Péld.: max. számú hibás nagyszámú hullócsillagok száma

Nevezetes folytonos eloszlások

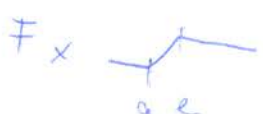
FMD/1.5
02.05

① Egyenletes $X \sim \text{Un}[(a, b)]$, ha $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{ha } x \in (a, b) \\ 0 & \text{ha nem} \end{cases}$

$f(x)$ 

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{ha } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{ha } x > b \end{cases}$

$EX = \frac{a+b}{2}$ $DX = \frac{(b-a)^2}{12}$

$F(x)$ 

② Exponenciális $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, ha $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha nem} \end{cases}$

$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{ha } x \geq 0 \\ 0 & \text{ha nem} \end{cases}$

$f(x)$ 

példa: villanykörte élettartama.
radióaktív anyag élettartama
 X időt türel egy beszerzési költség.

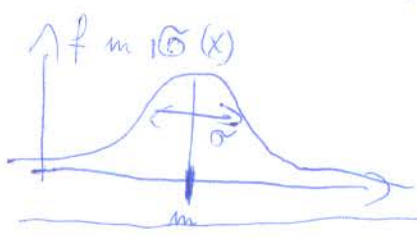
$EX = \frac{1}{\lambda}$ $DX = \frac{1}{\lambda^2}$

mem emlékszem a unitára, tudja a nevelőm a saját előadásában.
Emlékszem: exponenciális eloszlás órák, így ha $X \sim \text{Exp}(\dots)$
akkor $P(X > t+s | X > s) = P(X > t)$ 5 nem hozza + információ $\Rightarrow$ Markov folyamat

③ Normális eloszlás $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, ha $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$

$EX = \mu$ $DX = \sigma^2$ $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$, ahol ϕ a táblázatból kiválasztott standard normális EF

Standard normális, ha $\mu = 0$; $\sigma = 1$



Pl.: minden olyan vő, aki hisz határösszege.

Mi van ha nem 1, hanem 2 valószínűség van X, Y egybe = véletlen párosítás, valószínűsége változatlan

diszkrét eset:
Statistika is a tárgy része.

X : egyesek száma } Bevezető
 Y : sokak száma }

Kontingencia táblázat $\rightarrow$

Együtt és val volt eloszlás $\rightarrow$

$Y \backslash X$	0	1	2	3	
1	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{5}{20}$
2	0	$\frac{2}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{7}{20}$
3	0	0	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$
	$\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{12}{20}$

$P_{2,2}$ -lek nemeloszlás

$\frac{1}{20} + \frac{2}{20} + \frac{2}{20} + \frac{1}{20} = 1$

feltételes eloszlás: ~~Mar~~ $P(X$
 X feltételes eloszlása

6.

$Y = 2$ feltétel mellett

k	0	1	2	3
$P(X=k Y=2)$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{3}{6}$

feltételes várható érték

$$E(X|Y=2) = 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{3}{6} = \frac{14}{6} = \frac{7}{3}$$

Regressziós várható érték, hibák négyzetét felvettük

Tétel: teljes várható érték

$$EX = \sum_l P(Y=l) \cdot E(X|Y=l)$$

$$EY = 2,1$$

$$E(X \cdot Y) = \sum_k \sum_l k \cdot l \cdot P_{kl}$$

$$EX = \frac{48}{20} = 2,4$$

$$E(XY) = 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{20} + 0 \cdot 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{20} + 1 \cdot 2 \cdot \frac{2}{20} + 1 \cdot 3 \cdot \frac{3}{20} = \frac{14}{20}$$

Def: $\text{Cov}(X, Y) = E((X - EX)(Y - EY)) = E(XY) - E(X)E(Y)$
 ha cov: egyenértékű, ha az egyik növekszik, akkor a másikat lehet +, - jelűen.

várható érték vektor a covariancia mátrix

$$\underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} EX \\ EY \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{C}} = \begin{pmatrix} \text{cov}(X, X) & \text{cov}(X, Y) \\ \text{cov}(Y, X) & \text{cov}(Y, Y) \end{pmatrix}$$

$$\text{cov}(X, X) = D^2 X$$

$$\text{cov}(Y, Y) = D^2 Y$$

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$$

Hf21: addig első bratóság, addig dobott számok összege generátor, várható, szórás

Hf22: $X_0, X_1, \dots$ eddig $Y \sim \text{Geom}(p)$ utóeloszlás
 kényszer a_1, X_2 generátorfügg e , N várható érték
 $E X_{10}$
 a_1, T_3
 d_1, T_3

$$\text{I} \quad p = \frac{2}{3} \quad \text{II} \quad p = \frac{1}{3}$$

Teljes várható érték

Ha $A_1, \dots, A_k$ teljes eseményrendszer és X val. v. ált. ált.

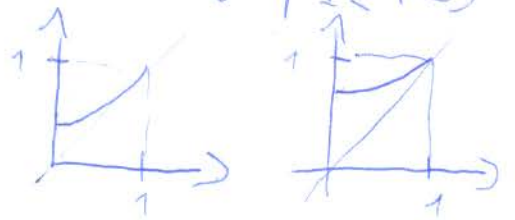
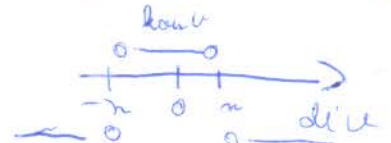
$$E X = \sum_i P(A_i) E(X|A_i)$$

Avagy: Ha Y val. v. ált. lehetséges értékei $y_1, \dots, y_k$ és X val. v. ált., akkor $E X = \sum_i P(Y=y_i) E(X|Y=y_i)$

Generátorfüggvény és alkalmazásai

Def: $A_0, \dots, A_k$ valósz. számrendszer generátorfüggvénye
a $G: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t. a ha $G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ $G: \mathbb{R} \rightarrow G(x)$
hatványsorEmlékeztető: $\sum a_k$ sor konvergens, ha $|x| < r$,
divergens, ha $|x| > r$ } ahol r a
konv. sugar
 $r = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ legkisebb törtlédás: sugarDef: A, X nemnegatív, egész értékei
val. v. ált. generátorfüggvénye

$$G_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k) x^k \quad G: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$$

All: extrémleg konvergens $[0,1]$ -en, mert minden $p_k \leq 1 \Rightarrow \sum p_k \leq 1$ Emlékeztető: $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ ha $|q| < 1$ ha $x=1$, akkor $G_X(1) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ 

Alaptulajdonságok:

$$G(1) = 1$$

$$G(0) = p_0 = P(X=0)$$

• legfőbb haszna: G teljes infó ad az első derivált: $p_k = \frac{G'(0)}{k!}$ Taylor sorfejtéssel.

$$G_X(x) = E(X^k)$$
 x val. v. ált.

$$G'(x) = E(X x^{x-1}) \Rightarrow x=1 \Rightarrow G'(1) = EX, \text{ ha } EX \text{ létezik}$$

$$G''(x) = E(X(X-1)x^{x-2}) \Rightarrow G''(1) = E(X^2 - X) = EX^2 - EX$$

ha EX^2 létezik

$$\text{Következmény: } G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = D^2 X$$

$$\bullet \text{ Ha } X=Y+1, \text{ akkor } G_X(x) = x G_Y(x)$$

úgyanígy

$G^{(k)}(1)$ kifejezhető az első & második momentumból

Fő tétel jó tulajdonságai:

Tétel: Ha X és Y független nemnegatív egész értékeket vesznek fel, akkor ha $Z = X + Y$ akkor $G_Z(x) = G_X(x) \cdot G_Y(x)$

Példák:

o. $X \sim B(p)$ (vagyis $P(X=0) = q = 1-p$, $P(X=1) = p$ Bernoulli (indikátor))
akkor $G_X(x) = q \cdot x^0 + p \cdot x^1 = 1-p+px$

1. $Y \sim \text{Geom}(p)$ (vagyis $P(Y=k) = p q^k$, $k=0,1,\dots$ $q=1-p$)
akkor $G_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p q^k x^k = p \sum_{k=0}^{\infty} (qx)^k = \frac{p}{1-qx}$

$\Rightarrow Z \sim \text{optim Geom}(p)$ Köv: Ha $Z \sim \text{optim Geom}(p)$
akkor $G_Z(x) = \frac{px}{1-qx}$

3. példa $V \sim \text{Poisson}(\lambda)$ (vagyis $P(V=k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}$, $k=0,1,\dots$)
akkor $G_V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} x^k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{\lambda(x-1)}$

Példa a tételre: $U \sim \text{Bin}(n, p)$ sikeres próbák száma,
 $U = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, ahol $X_1, \dots, X_n$ független sikeres kísérletek
tétel $X_i \sim B(p)$
 $\Rightarrow G_U(x) = (1-p+px)^n$ közös generátorfüggvénye G_X

Alkalmazás: véletlen tagok számú összeg
Legyen $X_1, \dots, X_n$ független sikeres kísérletek, nemnegatív egész értékeket vesznek fel, és legyen N is nemnegatív egész véletlen szám
függvénye X_i -ktől.

$Y := X_1 + X_2 + \dots + X_N \rightarrow$ véletlen független tagok számú összeg
Másképpen: ha $N=0$, akkor $Y=0$

$$G_Y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) E(x^Y | N=k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k E(x^{X_1 + \dots + X_k})$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} p_k [G_X(x)]^k = G_N(G_X(x))$$

Tétel: $G_Y(x) = G_N(G_X(x))^N$

FMD
02.14/3

Pl: Matancs leírás alapján felkenődő repülő tárgyak száma 1 óra alatt N db repülő tárgy keletkezik fel, ahol $N \sim \text{Poi}(\lambda)$

Ezek 30% egy 40% szitabotó 20% darabos 10% egyébként
 $\Rightarrow$ minden állat töblítő fleg 30%-a egy 40%...

Y := 1 óra alatt felkenődő szitabotók száma

mi Y eloszlása? Ekkor $Y = X_1 + \dots + X_n$ felkenődő állatok száma
 ahol $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha szitabotó} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$ $X_i \sim B(p=0,4)$

$\Rightarrow G_Y(x) \stackrel{\text{tétel}}{=} G_N(G_X(x)) = e^{\lambda(G_X(x)-1)} = e^{\lambda(1-p+px-1)} = e^{\lambda p(x-1)}$
 $\hookrightarrow \mu$ karakterizálja az eloszlást.

$Y \sim \text{Poi}(\lambda \cdot p) \rightarrow$ ritkítás

Mani

Megjegyzés: legyen X nemneg (de esetleg nem csak egész értékeket vehet fel). Ekkor a Laplace-transzformáltja $L(x)$

$L(x) = E(e^{-tx})$, ami értelmes és értelmezhető $t \geq 0$ -ra

Ex pont utasítást a hasznos tulajdonságokat tudja, mint a generátorfüggvény, például $EX = \lim_{t \rightarrow 0} (L(0) - L(t))$

$L_{X+Y}(t) = L_X(t) + L_Y(t)$, ha Y és X független

Sőt, ha $X = X_1 + \dots + X_n$ véletlen tagösszeg, akkor $L_X(t) = L_{X_1}(t) \dots L_{X_n}(t)$

Hát persze, hiszen $L(t) = E(e^{-tx}) = G_X(e^{-t})$
 és hiszen, ha X tetszőleges valószínűségi változó, akkor a karakterisztikus fű-e $\varphi_X(t) = E(e^{itx})$, létezik minden $t \in \mathbb{R}$ -re
 Ez is ugyanazt jelenti, hogy

Még $1 \times Y = X_1 \dots X_N$ véletlen tagozódni összege.

$$G_Y(x) = G_N(G_X(x)) \Rightarrow G_Y = G_N \circ G_X$$

Köv: $G_Y'(x) = G_N'(G_X(x)) \cdot G_X'(x)$

$$G_Y'(1) = G_N'(G_X(1)) \cdot G_X'(1)$$

$EY = EN \cdot EX$

sőt $G_Y''(x) = G_N'(G_X(x)) G_X''(x) + G_N''(G_X(x)) (G_X'(x))^2$

$$G_Y''(1) = G_N''(1) [G_X'(1)]^2 + G_N'(1) G_X''(1)$$

$$EY^2 - EY = (EN^2 - EN) EX^2 + EN(EX^2 - EX)$$

$$D^2 Y = (D^2 N + (EN)^2 - EN) (EX)^2 + EN(D^2 X + (EX)^2 - EX) + EN EX$$

$\underbrace{EN EX^2}_{(EY)^2}$

$$= D^2 N EX^2 + EN D^2 X$$

Definíció: $X_0, X_1, X_2, X_3, \dots, X_1^2, X_2^2, X_3^2, \dots$

független azonos eloszlású nemnegatív egész értékeket vevő véletlen X_k az i -edik generáció k -adik tagozódási tagjának hány utódja lesz? (már ha létezik utódja)

$$X_0 = 1 \quad ; \quad X_1 = X_0 \quad ; \quad X_2 = X_1^1 + X_2^1 + \dots + X_{X_1}^1$$

$$X_3 = X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_{X_2}^2$$

$$X_{k+1} = X_1^k + \dots + X_{X_k}^k$$

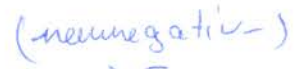
Eközben $X_0, \dots$ folyamatot elágazó folyamatnak nevezzük X utódeeloszlással.

Kérdések

1. Mi X_k generátorfüggvénye?
2. Mennyi X_k várható értéke?
3. π_k annak a valószínűsége hogy $P(X_k = 0)$
a k lépésen belüli kihalt valószínűsége.
4. $\pi_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \pi_k$ szűk tétel előbb utóbb kihalt a folyamat
5. $N := \sum_{k=0}^{\infty} X_k$ családja összehaláltsága, mi N generátorfüggvénye $EN = ?$ Foglaltsági periódus hossza.

FMD
02.14/5.

Eggenket
Leinyeg $\pi_\infty = g(\pi_\infty) \rightarrow$ fieggu'nyet fix panti.
fix panti, egyetelen fix panti.
m < 1-ne $\pi_\infty = 1$ g(x) fieggu'ny egyetelen fix panti.



most is a g(+) figgering leghisebbek for paula
ami szigancu letele, mint 1



$G_N(x)$ a megoldása az $x = x_0 y(x)$ egyenletnek

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

$$I \quad p = \frac{2}{3}$$

$$II \quad p = \frac{1}{3}$$

FM D 3.
02.21./1

Z_n elágazó fafa

$$e/ \quad EN = E \left(\sum_{i=0}^{\infty} X_i \right) = \sum_{i=0}^{\infty} m^i \rightarrow \infty \quad m \geq 1$$

$$f/ \quad G_N(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i q^2 \quad P(X=i) = p_i q^2 \quad i=0,1, \dots$$

$$G_N(x) = x g(G_N(x)), \text{ ahol } g(x)$$

$g(x) \rightarrow$ generátorfüggvény

$$g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} x^i p_i q^2 \quad P(X=i) = p_i q^2 \quad i=0,1, \dots$$

$$g(x) = \frac{p}{1-qx}$$

$$\Rightarrow G = x \frac{p}{1-qx}$$

$$G - qG^2 = x \cdot p$$

$$0 = qG^2 - G + px$$

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4px}}{2q}$$

+ulajdonság

$$G_N(1) = 1$$

$$G(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4px}}{2q}$$

$$\ominus \quad 1 \pm \frac{\sqrt{1-4px}}{2q}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1-4px}}{2(1-p)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{(1-2p)^2}}{2(1-p)}$$

$$\frac{p}{1-p} < \frac{1}{2}$$

nem is abszolút generátorfüggvény

$$\text{ha } p = \frac{1}{2} \quad G_N(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4px}}{2(1-p)}$$

$$\text{avagy } G_N(0) = P(N=0) \Rightarrow \ominus \text{ -os a jö.}$$

Nagy eltevés: Beverte's (CHT)

Tétel: $X_1, \dots, X_n$ független, azonos eloszlásúak (i.i.d. = independent and identically distributed)

$$EX_i = m \quad DX_i^2 = \sigma^2 < \infty$$

$$\text{Ekkor } P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \sigma} < x\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \phi(x) \text{ ahol } \phi \text{ a standard normális eloszlás}$$

Példa: szavazás

$n=400$ hallgató felel egyenértékű $X_1, \dots, X_{400}$ mennyiséggel meg (kg - ban)

$$EX_i = 0,02 \quad DX_i = 0,01 = \sigma^2$$

Kérdés: Milyen erős tanár kell a leggyorsabb el tudja vinni

Megoldás: Legyen K a tanársegéd tehetségessége, ekkor $P(\text{délgy})$

$$P(X_1 + \dots + X_{400} < K) = P\left(\frac{X_1 + \dots + X_n - n \cdot m}{\sqrt{n} \sigma} < \frac{K - n \cdot m}{\sqrt{n} \sigma}\right) \stackrel{\text{CHT}}{\approx} \phi\left(\frac{K - n \cdot m}{\sqrt{n} \sigma}\right)$$

$$0,99 = \phi\left(\frac{K-8}{0,2}\right)$$

$$K = 8 + 2,33 \cdot 0,2 = 8,466$$

$$2,33 = \frac{K-8}{0,2}$$

$$K = E(S_n) + \text{épes } m = \sqrt{n} \sigma$$

valósággal $\epsilon = 10^{-8}$

$$1 - 10^{-8} = \Phi\left(\frac{K-8}{0.12}\right) \quad 5.2 \text{ sz} \Rightarrow K = 9.4$$

2.

Ha fontos a biztonság, beleszámít a CHT hibája

Tétel (Berry-Esseen): $\exists c$ univerzális konstans pl. $c = 0.4784$

hogy ha $X_1, \dots, X_n$ iid, $E X_i = m$, $D X_i = \sigma^2$ és $E |X_i|^3 = \rho < \infty$

$$\text{akkor } \left| P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{c\rho}{\sqrt{n}\sigma^3}$$

képeges megj (rossz hír) és ennek jobbat nem is lehet igényi
CHT becsülés hibája $c < 0.5$ -eset már nem igaz

Esetünkben $c = 0.5$, $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$, $n = 400$, $\sigma =$

$$\text{hiba} \leq \frac{0.5 \cdot 8 \cdot 10^{-6}}{20 \cdot 10^{-6}} = \frac{1}{5} \Rightarrow \text{hiba túl nagy semmine se jó}$$

Tonúság: CHT alkalmazás várható érték, kis eltéréssel valószínűségi eloszlás
ha az eltérés nem kicsi, vegyük nagyobb eltérés tétel

Tétel: Hoeffding egyenlőtlenség: független $X_1, \dots, X_n$ fvk, és
 $X_i \in [a_i, b_i]$ intervallumon $P(X_i \in [a_i, b_i]) = 1$

$$a_i \leq X \leq b_i$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$\text{Ekkor } P(S_n > ES_n + \lambda) \leq \exp\left(-\frac{2(\lambda)^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right) \quad \exp a = e^a$$
$$P\left(\bar{X} > E\bar{X} + \frac{\lambda}{n}\right) \leq \exp\left(-\frac{2n^2 \lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$\forall \lambda > 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \text{ -ra}$$

Hátrány: csak sokaság val változókra használható
csak becsülés

Előny: nem kell axioma eloszlásának lenni.

• nem kell tudni X_i eloszlását, még a sokaságát sem.
• könnyű becsülés

Példa: szemeteszállítás

Halászfalcsúty 3000 háztartás elvétel

60 literes kosárja van 1500-nak
110 literes " " 1000-nak
120 literes " " 500-nak

napi átlag összes szemét
150000 liter

$$K = ?$$

↳ kosárba auto kapacitás $\epsilon = 10^{-5}$ biztonsággal beférjen a szemét.

Válassz: Hoeffding $P(S_n > ES_n + \lambda) \leq \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$

Esetünkben $S_n = X_1 + \dots + X_{3000}$
 $n = 3000$

$$a_i = 0$$

$$b_i = \begin{cases} 60 & 1500 \text{ -nek} \\ 110 & 1000 \text{ -nek} \\ 120 & 500 \text{ -nek} \end{cases}$$

$$\forall \lambda \geq 0 - \text{re}$$

FMD
02.21/3

$$ES_n = 150000 \quad E(b_i - a_i)^2$$

$$\sum_{i=1}^n 1500 \cdot 60^2 + 1000 \cdot 110^2 + 10000 \cdot 120^2 =$$

$$(\cancel{54} + 121 + 72) \cdot 10000 = 24700000$$

$$P(S_n > ES_n + \lambda) \leq \exp\left(\frac{-2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$K = ES_n + \lambda \Rightarrow e\left(\frac{-2\lambda^2}{2,47 \cdot 10^7}\right) = 10^{-5}$$

$\lambda \rightarrow$ tültetés mértéke

$$K = 162500$$

Van 1 labakocsi

piros 2

köld 4

eldobjuk 10-szer 6-szor köld
4-szer piros

Berny-Esseen Tétel I Ha $X_1, \dots, X_n$ iid $EX_i = 0$, $DX_i = \sigma^2$
 $E|X_i|^3 = S < \infty$, akkor $\left|P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) - \phi(x)\right| \leq \frac{CS}{\sqrt{n}\sigma^3}$
 akkor R/E

Ha II Ha $X_1, \dots, X_n$ iid $EX_i = m$, $DX_i = \sigma^2$, $E|X_i - m|^3 = S < \infty$, akkor $\left|P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) - \phi(x)\right| \leq \frac{CS}{\sqrt{n}\sigma^3}$

Dialektika

55%-os egyet A, 45%-ban B, $P = 0,55 > \frac{1}{2}$

n hallgatót kiderített vizsgateressel. Akinek többet szavazott, az a győztes.

a) $P(\text{tűvedtünk}) = P(\text{nem kap több szavazatot, mint pedig 55\%-os támogat.})$ - ne félő becsles

Más szóval: $S :=$ az A jelöltre szavazók száma.

S binomiális eloszlású $S \sim B(n, p)$

Kérdés: $P(S \leq \frac{n}{2}) \leq ?$

$$P(S_n \geq ES_n + \lambda) \leq \exp\left(\frac{-2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$P(S_n \leq ES_n - \lambda) \leq \exp\left(\frac{-2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

$$P(|S_n - ES_n| > \lambda) \leq 2 \exp\left(\frac{-2\lambda^2}{\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2}\right)$$

Ekkor $X_i = \begin{cases} 1, & \text{ha az } i\text{-edik megkérdezett A-ban} \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases}$

4.

$X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ i függetlenek, $S = \sum_{i=1}^n X_i = S_n$

$\Rightarrow$ Chebyshev 2. változat $ES_n = np$ $a_i = 0$ $b_i = 1$

$$P(S_n \leq np - \lambda) \leq \exp\left(-\frac{2\lambda^2}{n}\right) \quad \text{Legyen } np - \lambda = \frac{n}{2} \quad \text{vagyis}$$

$$\lambda = n\left(p - \frac{1}{2}\right) \quad \text{Válassz: } e^{-\frac{2n^2(p - \frac{1}{2})^2}{n}} = e^{-2n(p - \frac{1}{2})^2} \rightarrow \text{Chernoff Bound}$$

$b \cdot n = 2$, hogy $P(\text{tevédes}) < 10^{-8}$

$$\text{Válassz: } e^{-2n(p - \frac{1}{2})^2} = 10^{-8} \quad -2n(p - \frac{1}{2})^2 = -8 \ln 10$$

$$n \text{ legyen } \geq \frac{4 \ln 10}{(p - \frac{1}{2})^2} = \underline{4 \cdot 2,3}$$

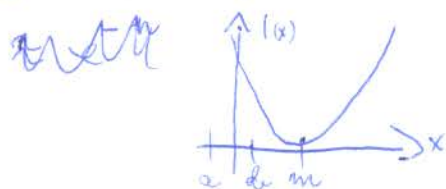
$$\frac{4 \cdot 2,3}{(\frac{1}{20})^2} = 4 \cdot 2,3 \cdot 400 = 3680$$

Tétel: Nagy et al.'s tétel: (Chvátel) Ha $X_1, \dots, X_n$ független axiális eljárás (éppenségyenlő eljárás) $\exists R \rightarrow R \cup \{\emptyset\}$ $x \rightarrow \bar{I}(x)$
 nota függvény $S_n = X_1 + \dots + X_n$ | hogy $P\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right) \sim$
 $\forall a < b \in R$

átalakítás

$$x \rightarrow |x|$$

intervallum
átalakítás



$$\sim e^{-n \inf_{a < x < b} I(x)}$$

$\inf_{a < x < b} I(x)$ minimum értéke a, b intervallumon.

$$\begin{cases} e^{-n \cdot 0} = 1 & \text{ha } m \in (a, b) \\ e^{-n I(a)} & \text{ha } m < a \\ e^{-n I(b)} & \text{ha } b < m \end{cases}$$

feltevések: független axiális eljárás kell hozzá.
 Könnyű ellenőrizni egyenlőre kell lennie.
 mit is jelent?

$I(x)$ kiszámolható macerás, mert pontosan kell ismerni az eljárást.

Előny: könnyű ellenőrizni egyenlőre sokkal egyszerűbb, mint a $\leq$
 Nem csak bontásos val változósra jó.
 Aszimptotikus esetben =

$$\text{Pontosan állítás: } -\frac{1}{n} \ln P\left(\frac{S_n}{n} \in (a, b)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \inf_{a < x < b} I(x)$$

$$I(x) \Rightarrow M(\lambda) = E(e^{\lambda x_i})$$

↳ maximum Laplace transform
cumulative generator függvény

$\hat{I}(\lambda) = \ln M(\lambda)$ $I(x)$ pedig az $\hat{I}(x)$ Legendre-transzformáltja.

Levitaleas képlet: $I(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}} (\lambda x - \hat{I}(\lambda))$

Gyakorlatilag: $\frac{d}{d\lambda}$ derivált 0 helyen λ szemint $x = \hat{I}(\lambda)$

egyenletből fejezd ki $x \rightarrow \lambda^*$

$$I(x) = \lambda^* x - \hat{I}(\lambda^*)$$

Pl.: Radiatív proximéter élő növények száma 1 ~~perc~~ ^{sec} alatt
számolással $X \sim \text{Pois}(\mu)$

$X_i = x_i$ másodpercenkénti értékű növények száma.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$ n sec alatt értékű száma

$ES_n = n\mu$ $S_n \sim \text{Poi}(n\mu)$ de ez nem

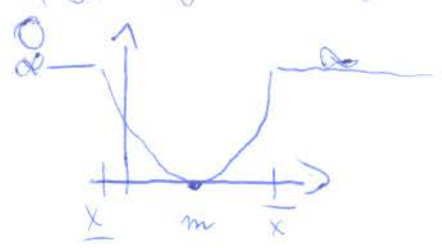
Elasmlás $P(X=0) = e^{-\mu}$ $M(\lambda) = E(e^{\lambda x}) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\mu} \frac{\mu^k}{k!} e^{\lambda k}$
 $= e^{-\mu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{\lambda} \mu)^k}{k!} = e^{-\mu} e^{e^{\lambda} \mu}$

$= \exp(\mu(e^{\lambda} - 1))$ $\hat{I}(\lambda) = \ln M(\lambda) = \mu(e^{\lambda} - 1)$

$\hat{I}(\lambda) = \mu e^{\lambda} \Rightarrow$ adyuk meg $\mu e^{\lambda} = x \Rightarrow \lambda^* = \ln \frac{x}{\mu}$

$\Rightarrow I(x) = x \ln \frac{x}{\mu} = \mu \left(e^{\ln \frac{x}{\mu}} - 1 \right) = \mu \left(\frac{x}{\mu} - 1 \right) = x \ln \frac{x}{\mu} - x + \mu$
 $(0 < x)$

Megj / Igéret $I(x)$ mindig konvex minimumhelye az n minimum
 Ha $x \in (x_-, x_+)$, akkor



$I(x)$ is, itt van a koncentráció
 az on kívül $= \infty$

a-1! $\mu = 1$ 10^6 $P(S_n > 1,1 \cdot 10^6) \approx$

Cramer $P(\frac{S_n}{n} \in (a, b)) \approx e^{-n I(a)} \approx e^{-n I(a)}$
 $n = \mu = 1$ $a = 1,1$ $b = \infty$

$P(\frac{S_n}{n} \in (1,1, \infty)) \rightarrow$

Munka láncok. Szállapothalmaz

S diszkrét halmaz

$x_0, x_1, \dots$ sztochasztikus

Def Munka, ha

Injektív:

$T_{\text{tel}}: \Pi_1 = T_0 \cdot p$ N lépés után megismerünk a
sorozatban. határhalmazt.

n lépés és n méret mátrix

Atméri mátrix helyettesítés!

el lehet jutni i -ből j -be.

előreható
érintkez

Munka lépés osztály

zárt. $\nwarrow$ $\searrow$ nyitott

lényeges lényegtelen.

Mátrix Gauss eliminációval

immediátus
apériódikus
vektor
aperiodikus

homogén lineáris egyen-
letrendszer nem 0 vektor

Itaandrius nemoldás

$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$ ha az alapérték
 $(5, 3)$

$\sqrt{5^2 + 3^2} \dots$

3×3 -as egyenletet az
eliminációval! nem kifejtéssel!

Munka lánc engedéssel

időlánc =

idő átlag szabályilag
végén innál ! kell, hogy

S-R $x_0 - x_n$ foly munka lánc & állapotellen
Stad eloszlással

Förster's

n

1

↓
mennyiség

cs Enged → konstans hoz
tart!

Albalmaz's:

Elmájszalt csakis azkék száma!

$F_{x0} F_{xn} \rightarrow$ engedéssel
1 valószínűséggel T_{0-x}
7

balgongol's

HF:



istályat!

vált, ingilt
külön külön

lényeges, levezetelt
visszatérő / otmenet.
periódus 2.

És szül kezünk

2.
Sanktamban az időjárás

esik

ruhagy

sza bad

0

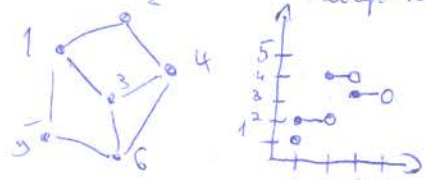
1

2

X_i , negatív munka lánc

P (hals)

Folytonos idejű Markov láncok állapotok



→ exponenciális eloszlás

λ natájú Poisson folyamat

3 lehetséges definíció

S = állapotter, diszkrét halmoz

① $\forall x \in S$ állapotban „van exponenciális óra”, ha ez csönvág $\approx \varepsilon \cdot \lambda + o(\varepsilon)$
 akkor a rendszernek ugrik, egy diszkrét idejű Q átmenet valószínűségi mátrix szerint.

Poisson folyamat (hullócsillagok esése)

$\forall i \rightarrow ne \quad Q_{ii} = 0$ (főátlóban csupa 0)

adatok: λ natáuektor; Q átmenet mátrix;

Pl: 2 állapot $S = \{0, 1\}$ on off folyamat. Janosi hieket; Jelisba mellet

függvénye $X=1$ natával 0-na; ju: $m=2$ — fel — 1 = malva

Természet állapotok: $X_t \in \{0, \infty\}$ — ne X_t folytonos idejű Markov lánc

X_t folytonos idejű ML $\lambda = (\lambda_0, \lambda_1) = (2, 1) \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 [Ez] komoly bűvés: T F H $t=0$ ki van kapcsolva $P(X_{10}=1 | X_0=0) = ?$
 → erre gőfőnénk.

② Most nem a csúcson van óra, hanem $\forall xy$ élén ül egy exponenciális óra a_{xy} natával $! x \neq y$
 Amelyik legkisebb időközönként ugrik, annak ugrik. Persze a legkisebb csak élemezések után. Adatok: Rátá Mátrix. Főátlójában nincs semmi. $\lambda_x = \sum_{y \neq x} a_{xy}$ összes naták összeadódhat.

$\begin{pmatrix} * & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & * & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & * & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & * \end{pmatrix} = R$ Összeíró: $\lambda_x = \sum_{y \neq x} a_{xy}$
 Minimum exponenciális valószínűség: natával arányos!

Rátamátrix a folyamatnak $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $Q_{xy} = \frac{a_{xy}}{\lambda_x}$

Definíció: Folytonos idejű időben homogén ML infinitesimális generátora az az A mátrix aminek a főátló hüti elemei az a_{xx} naták és a szásszegek 0-k.

Pl: az előbbi Jc-ju generátora $R = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Megjegyzés: $a_{xx} = -\lambda_x$
 ③ ML def 3. változat $A_n \{X_t\} \in (a, \infty), X_t \in S$ folyamat folytonos idejű ML, ha $\forall t_1 < t_2 < \dots < t_n$ idő sorozatva $t_{n+1} \leftarrow t_n$

és $X_{t_1} \dots X_{t_n} | X_{t_{n+1}}$ $X_m \in S$ állapot sorozat
 $P(X_{t_{n+1}} = X_{n+1} | X_m = X_m | X_{t_1} = X_1 \dots X_{t_n} = X_n)$
 $= P(X_{t_{n+1}} = X_{n+1} | X_n = X_m | X_{t_1} = X_1 \dots X_{t_n} = X_n)$

Tétel 1-~~2~~ def es

2

$$(1 \Rightarrow 2) \Rightarrow 3$$

időben homogén lehet inhomogén

Példa: fagejcs láncsi + uicikli előtt állnak $X_t \in \{0, 1, 2, 3\}$ egyezése csak 1 gegenes, generátan könnyű, fötállójaat kitölt



$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\lambda} = (1; 3; 4; 1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Def: folytonos idejű időben homogén ML átmenet val mátrix

$$P_{xy}^t = P_+(x, y) = P(X_t = y | X_0 = x) \quad \text{homogenitás} \quad P(X_{s+t} = y | X_s = x)$$

Állítás: "folytonos idejű időben homogén ML teljes valószínűség tétel"

$$P_{xy}^{(t_1+t_2)} = \sum_{z \in S} P_{xz}^{(t_1)} P_{zy}^{(t_2)} \quad s, t \geq 0 \text{ -ra}$$

avagy $\underline{P}(t_1+t_2) = \underline{P}(t_1) \cdot \underline{P}(t_2)$ cél $\underline{P}(t)$ kiszámolása $\underline{A}$ -ból
Filozófia $P(\varepsilon) \approx \underline{1} + \varepsilon \underline{A}$, megcselelve $\underline{A} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d}{dt} \underline{P}(t) \Big|_{t=0} = \underline{P}'(0)$

Alaptulajdonság $\underline{P}(0) = \underline{1}$ Képletbizonyítás: $\underline{P}(t) = \underline{P}(s) \cdot \underline{P}(t-s)$
 $\underline{P}'(s) = \frac{d}{dt} \underline{P}(s+t) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\underline{P}(s) \cdot \underline{P}(t)) \Big|_{t=0} = \underline{P}(s) \frac{d}{dt} \underline{P}(t) \Big|_{t=0} = \underline{P}(s) \cdot \underline{A}$

Tétel: $\underline{P}'(t) = \underline{P}(t) \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{P}(t)$

Ennélfogva: $y' = Ky \rightarrow$ szétválaszt
 $y(t) = e^{Kt} y(0)$ két diff egyenlet

Képletbizonyítás: $\underline{P}(t) = e^{(t \cdot \underline{A})}$

Def: $\exp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

Def: $\exp(B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k$

Köv: Ha $\underline{\Pi}(t)$ az X_t eloszlásvektora, akkor

$$\underline{\Pi}(t) = \underline{\Pi}(0) \cdot \underline{\Gamma}(t) = \underline{\Pi}(0) e^{(t \cdot \underline{A})}$$

$e^{(t \cdot \underline{A})}$ kiszámolása

szétszét 3×3 -s
(1×3) mátrix
k az állapotok sorszáma

$$D = \begin{pmatrix} S_1 & & \\ & S_2 & \\ & & S_3 \end{pmatrix}$$

ahol $S_1 \dots S_3$ az $\underline{A}$ sajátértékei

$$B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = B^T = \left(v_1 \mid \dots \mid v_n \right)$$

FMD
03.06
13

Ezek után $e^{tA} = B^{-1} (\exp(tD)) B$

$$\exp = \begin{pmatrix} e^{t+s_1} & 0 \\ 0 & e^{t+s_2} \end{pmatrix}$$

Megjegyzés: $A^n = B^{-1} \begin{pmatrix} s_1^n & \\ & s_2^n \end{pmatrix} B$

Pl: on 10ft $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

[Pense $s_1 = 0$ a saját értéke, mert $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$]

$$0 = \det(A - sI) \rightarrow \det \begin{pmatrix} -2-s & 2 \\ 1 & -1-s \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} -2-s & 2 \\ 1 & -1-s \end{pmatrix} = 2 + 3s + s^2 - 2 = s(3+s) \rightarrow s=0$$

Tétel $\forall s_k < 0$

SV a, $s_1 = 0$ - haszn

$$v_1 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

← egyseg haszn
sajátvektor

$$s_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

= -3 haszn

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$v_2 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Ellenőrzés:

$$\frac{\sqrt{10}}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{10}}{3} \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

1.) $A = B^{-1} D B$ alakban

$$B^{-1} (v_1 \mid \dots \mid v_n)$$

$$D = \begin{pmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{pmatrix}$$

$$B = (B^{-1})^{-1}$$

ahol $v_1 \dots v_n$ sajátvektor
v-ek nem
kell egyseg
használnak lenni.

Es nem pedig úgy, mint

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

hümmó!!

$$P(t) = \exp(t \cdot A) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{+0} & 0 \\ 0 & e^{+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ e^{-3t} & e^{-3t} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2e^{-3t} & 2-2e^{-3t} \\ 1-e^{-3t} & 2+e^{-3t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \Pi(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, ekkor $\Pi(t) \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} + e^{-3t} \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$
 Altalában: $\Pi(t) = \Pi_{\infty} + e^{+g_2 t} (\text{hiba1}) + e^{+g_3 t} (\text{hiba2}) +$
 konvergenciasebbség

Tétel: Ha a ML irreducibilis, akkor $g_1 = 0$ sajátérték
 egyenlő sajátérték és a fő hibatag $\approx e^{-g_2 t}$, ahol $|g_2|$ legkisebb
 negatív

van konvergencia a stationárius eloszlás.

Pl. fogás hálói $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$ irreducibilis. ~~Vidék~~ állap.
 póló $\forall$ állapotra el
 lehet jutni, esetleg több úttal
 ben.

folytatós időben nincs "periódus" viselkedés
 folytatós időben Π invariáns
 $\Pi P(t) = \Pi \quad \forall t \geq 0$

Tétel: Π stationárius $\Leftrightarrow \Pi P(t) = \Pi \Leftrightarrow \Pi A = 0$

mikor stationárius egy eloszlás, ha a időben nem változik az eloszlás

$\Pi A = 0$
 $\uparrow \nwarrow$ sorvektor
 $\square$ mátrix
 sorvektor

Tétel: folytatós idejű irreducibilis,
 véges állapotterű ML-nek pontosan 1
 stac eloszlása van.

Tétel: Folytatós idejű ML stac eloszlású A generátor
 baloldali sajátvektora (i) a $\boxed{g_1 = 0}$ sajátértékhez

Pl: az on/off folyamatok $Pl(\text{on/off}) \quad \Pi_0 \Pi_1 \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (0 \ 0)$
 $(\Pi_0 \ \Pi_1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ Dis

stac ea: $(\Pi_0 \ - \ \Pi_1) \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = (0 \ 0 \ 0 \ 0)$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Pi$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\pi_1 &= \pi_0 \\ \pi_2 &= 2\pi_1 \\ \pi_3 &= 3\pi_2\end{aligned}$$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix} \leftarrow \text{lenormáljuk valószínűsége}$$



Rakta $\pi_0 \cdot a_{01} = \pi_1 \cdot a_{10}$

$$\begin{aligned}1 \pi_0 &= 1 \pi_1 \\ 2 \pi_1 &= 1 \\ 3 \pi_2 &= \pi\end{aligned}$$

Def: Egy folytonos idejű ML az ~~SA~~

$$S = \{0, 1, \dots, K\} \text{ (esetleg } K = \infty)$$

állapotok és skálázási halálkorai folyamat

ha $|i-j| \geq 2$ -re $a_{ij} = 0$ (ha csak szomszédos állapotok van (közvetlen) átmenet)

$\lambda_0, \dots$ a skálázási ráták λ_i ugrik rájárja $i \rightarrow i+1$
 $\mu_1, \dots, \mu_j$ a halálkorai ráták μ_i ugrás $j \rightarrow j-1$

Környező tétel: A stac. osztály (ha van), akkor hogy $\pi_i \lambda_i = \pi_{i+1} \mu_{i+1}$

vagyis $\pi_i = \pi_0 \cdot r_i$, ahol $r_i = \frac{\lambda_0 - \lambda_{i-1}}{\mu_1 - \mu_i}$ let szomszédos μ_{i+1} hányadosa.

Példá, ha K véges, akkor van pontosan 1 stac. osztály
 $K = \infty$ esetén pontosan akkor van stac. osztály, ha $\sum r_i < \infty$
 hányados szűk követelmény $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} < 1 > 1$ szépen 1

Ergot tétel !!!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 6 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \end{pmatrix}$$

Tétel: amit DT-ként ha $f: S \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos
 akkor $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(x_t) dt \Rightarrow \sum_{x \in S} \pi_x f(x)$, ahol π az inv. osztály.

Spec. esete $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} (T \cdot \text{ig } x\text{-en töltött idő}) = \pi_x$

Ha xi

H F megbeszélés:

3 bontó mendegejeke 1 natával tucit beírni. X_+ a működő egős száma + -ban (F_1, M_2)
1 natával 10 a gondolat, és minit csinálni.

$S = \{0, 1, 2, 3\}$ generátum $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}$ ← ha jön a gondolat
← összeg 0 számúként

Sajátértékek:

$0 = \det(A - \lambda I) = 24\lambda + 26\lambda^2 + 9\lambda^3 + \lambda^4 = \lambda(24 + 26\lambda + 9\lambda^2 + \lambda^3)$
 $= \lambda(\lambda + 2)(12 + 7\lambda + \lambda^2)$

matlab, octave $a = [-1 \ 0 \ 0 \ 1; 1 \ -2 \ 0 \ 1; 0 \ 2 \ -3 \ 1; 0 \ 0 \ 3 \ -3]$
eig(a)

länge $p(t) = c_0 e^{\lambda_0 t} + c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3$

($\phi = \pi$; ← stac elemek)

$p(t) = B^{-1} \begin{pmatrix} e^{\lambda_0 t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_2 t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\lambda_3 t} \end{pmatrix} B$
 $A = B^{-1} D B$
 $D = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

Matlab nem képes kifejezésben gondolkodni.
 $t = 10 - n$
kell inni $\exp(10A) - t$

Statistika:

- Van valami X változó, valami osztálással, amit nem v. teljes en ismeryint, de e'ndekel.
- Min'si sorokat: $X_1 \dots X_n$ független, azonos osztású valóv'ltokó sorokat $n \times$
- Ennek nealind'ciója pl.: 2, 4, 6, ..., 0

Típus (Bergsle's) valóható értéke: $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = 2\%$
egy más'ik lehetséges becslés: $X_1 = 2$

Def: Statistika'nal nevesre'ik a méne'sadat sorból szármalt fr. eket. → ez valóv'ltokó egy @ jellemzőjével.

Def: Az X osztáldscímal egy @ T_n statistika tonxitatlan becslése, ha $\forall n - n \rightarrow 0$ $ET_n = 0$

Tétel: @ $m = EX - n$ @ m -nen tonxitatlan becslése az átlag

Def: az osztáldscímal egy @ jellemzőjével a T_n statistika (sorokat) konszistens becslése, ha $T_n \rightarrow 0$ (valószínűs'glen /1 us'ggel) gyengen tant

Tétel : Az átlag a várható értékek konzisztens becslése.¹²
(gyengén és erősen is)

Tétel : $S_n^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X})^2$ konzisztens, és aszimptotikusan
törzstatlán becslése a szórási négyzetnek.
 S_n^2 a "tapasztalati szórásnégyzet"

Def : Egy T_n statisztika (sorozat) aszimptotikusan törzstatlán
becslése a Θ jellemzőnek, ha $ET_n \xrightarrow{P} \Theta$

Tétel $S_n^{x^2} = \frac{n}{n-1} S_n^2$ törzstatlán becslése a szórási négyzetnek
és erősen konzisztens is)

Megj : 1. Nem igaz, hogy $\sqrt{\frac{n}{n-1}} S_n^{x^2}$ törzstatlán becslése lenne a
szórásnak de sebj

$$2.) S_n^2 = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 \right] - \bar{X}^2 \quad \text{Emeljük } D^2 X = E((X - EX)^2) =$$
$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad \left(\text{ezt egyenkénti számlái, viszont az adat-} \right)$$
$$E X^2 - (EX)^2$$

sont tanári kéll)

Paraméterbecslések :

Adott ismét egy Θ paraméterrel jellemzett eloszlás család
amiből mintát tudunk venni,amilyen $\Theta = \Theta^*$ de Θ ismeretlen
cél : Θ^* valami $f(\Theta)$ függék becslése.

Ezek leggyakoribb módszere a "maximum likelihood becslés".

Def : folytonos eset : Ha X sűrűségfüggvénye $f_X(x)$, akkor az
 $X_1, \dots, X_n$ adatokhoz tartozó LH fu. $L_X(\Theta) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i)$
kihathóság minthet sűrűség fu. : Θ paraméter, x változó ; LH-ban ^{fontos}
= mennyi lenne a megfigyelt esemény valószínűsége, ha Θ lenne a
paraméter

Diszkrét eset : ha X_n diszkrét eloszlás (= súlyfüv-e) $P_0(x)$
akkor $L(\Theta) = \prod_{i=1}^n P_0(x_i)$

Def : Θ max LH becslése $\hat{\Theta}$, am $L(\Theta)$ fu (globális) maximumhelye
Sokszor (de nem mindig), ha a Θ paraméternek valóságszám
jelentése van (valóság / várható érték / szórási négyzet, akkor
 Θ Max LH becslése összhangban van a jelentésével.

Tétel: Ha Θ max LH becselő $\hat{\Theta}$, akkor $G(\Theta)$ max LH becselő éppen $G(\hat{\Theta})$ lesz

pl: $X \sim B(p)$; vagyis $P(X=0) = 1-p$; $P(X=1) = p = \Theta$ 100 mérés eredménye $\{x_i\} = 111000101 \dots 0010$

$$\prod_{i=1}^n p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} \quad n=100 \quad B_p(x_i) = p^{x_i} \cdot (1-p)^{1-x_i} \quad L(p) = \prod_{i=1}^n B_p(x_i)$$

$l(p) = \log L(p)$ - logaritmus / természetes / LH függvény

$$\log L(p) = \sum_{i=1}^n \log B_p(x_i) = \sum_{i=1}^n [x_i \log p + (1-x_i) \log (1-p)] \quad \text{Max helye:}$$

$$\frac{d}{dp} \log L(p) \stackrel{!}{=} 0 = l'(p) = \sum_{i=1}^n \left[x_i \cdot \frac{1}{p} + (1-x_i) \cdot \frac{-1}{1-p} \right] = \frac{1}{p} \left[\sum_{i=1}^n x_i \right] - \frac{1}{1-p} \left[\sum_{i=1}^n (1-x_i) \right]$$

$$\frac{n - \sum x_i}{1-p} = \frac{\sum x_i}{p} \quad \frac{n}{\sum x_i} - 1 = \frac{n - \sum x_i}{\sum x_i} = \frac{1-p}{p} = \frac{1}{p} - 1 \quad p = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\hookrightarrow$ ha pl. 100-ból 56 db 1-es + találatunk, akkor $p = 0,56$

$X \sim \text{Bin}(N, p)$ $N=10$
 $n=8$ elemű mintát vettünk: 5, 6, 9, 2, 6, 9, 8, 7 $\sum x_i = 58$
 Adjunk MLH becselőt p -re!

Megoldás: $L(p) = \prod_{i=1}^n \text{Bin}_{N,p}(x_i) = \prod_{i=1}^n \binom{N}{x_i} p^{x_i} (1-p)^{N-x_i}$

$$l(p) = \log L(p) = \sum_{i=1}^n \left[\log \binom{N}{x_i} + x_i \log p + (N-x_i) \log (1-p) \right]$$

szerzőentékhely: $0 = l'(p) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{x_i}{p} - \frac{N-x_i}{1-p} \right] = \frac{1}{p} \sum x_i - \frac{1}{1-p} [Nn - \sum x_i]$

$$\frac{1}{p} \sum x_i = \frac{58}{80} \quad \left(\begin{array}{l} \text{mint ugyan} \\ (N \cdot n) - \text{re} \end{array} \right) \quad \text{az } x_i \text{ mint a Bernoulli, csak } n \text{ helyett}$$

H 7.6.1 Legyen $X \sim \text{Geom}(p)$ melyből vettünk 10 elemű mintát
 1; 8; 7; 11; 6; 5; 6; 7; 4; 3 Adj MLH becselőt p -re (számold ki nevelésen) (összesen próbálkoztam 58 szerből sikeres 10)
 $10 : \frac{10}{58} \text{ tag}$

pl: $X \sim \text{Exp}(x)$ kezdőle mintá: 1; 8; 8; 10; 9; 6; 2; 5; 8; 7; 4; 3, 1 ($n=10$)
 ML becselő λ -ra $L(\lambda) = \sum_{i=1}^n f_{\lambda}(x_i) = \prod_{i=1}^n \lambda e^{-\lambda x_i}$ (sűrűség fu=1)

$$l(\lambda) = \log L(\lambda) = \sum_{i=1}^n [\log \lambda - \lambda x_i] = n \log \lambda - \lambda \sum_{i=1}^n x_i$$

szerzőentékhely: $0 = l'(\lambda) = \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^n x_i \Rightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{1}{\text{átlag}} = \frac{10}{58}$
 lehet nevelni!

Konfidencia intervallum

Alapfeladat: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma^2 = 4$ m ismeretlen.

Vessünk egy $n=9$ elemű mintát: $X_1, \dots, X_n$ konstruálj m-ne 95% valószínűségi konfidencia intervallumot!

Vagyis keress $a = a(X_1, \dots, X_n)$, $b = b(X_1, \dots, X_n)$ statisztikát, amire $P(a < \mu < b) = 95\%$.

$$P((a, b) \ni \mu) = 0,95$$

Megoldás $(a, b) := \bar{X} \pm \tilde{r}_{95} \odot$, úgy, hogy jó legyen

avagy $a = \bar{X} - r$ $b = \bar{X} + r$ $P(a < \mu < b) = P(\bar{X} - r < \mu < \bar{X} + r)$

$$= \uparrow \begin{array}{c} r \\ \bar{X} \end{array} \rightarrow = P(\mu - r < \bar{X} < \mu + r) = \bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) \odot$$

$$\odot F_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}(\mu + r) - F_{\mu, \frac{\sigma^2}{n}}(\mu - r) \odot \text{Emlékezz: } D^2(X - X_n) =$$

$$D^2(X_1 + \dots + X_n) = n \cdot D^2 X = n \sigma^2 \quad D(X_1 + \dots + X_n) = \sqrt{n} \cdot \sigma$$

$$D\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\sqrt{n} \cdot \sigma}{n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \left[F_{\mu, \sigma^2}(\cdot) = \Phi\left(\frac{\cdot - \mu}{\sigma} \right) \right]$$

$$\odot \Phi\left(\frac{\mu + r - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) - \Phi\left(\frac{\mu - r - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{r \sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = 0,95$$

$$\Phi\left(\frac{r \cdot \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (a, b) = \bar{X} \pm r \text{ ahol } r = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

A pl-mó kiszámításra, ex $n=9$ mérés és eredmény 1,36
nem emlékszem, de az értéke 81,81 volt. Ekkor $\bar{X} = \frac{81,81}{9} = 9,09$
 $r = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot 1,36 = \frac{2 \cdot 1,36}{3} = 2 \cdot 0,65 = 1,306 \quad (a, b) = (9,09 - 1,31; 9,09 + 1,31)$

Hipótesztelési vizsgálat

A kóla átlagos "kóla mennyisége (ml - ben) $\sim X(\mu, \sigma^2)$
 $\sigma^2 = 4$ most tudjuk a dóból gyártó állítja, hogy $\mu = 1000$

Vessünk egy n elemű mintát és teszteljük a gyártó állítását.
Nullhipótesis: $H_0: \mu = 1000$ Ellenhipótesis: $H_1: \mu \neq 1000$

Amirek van hirtétele (súly), ha H_0 -t elfogadjuk elvetjük.

Próbát csinálunk $1 - \varepsilon = 99\%$ konfidenciasszinten.

Módszer: gyártó $1 - \varepsilon$ valószínűségi konfidencia intervallumot
m-ne a mennyiség alapján $\rightarrow \bar{X} \pm r$ ha H_0 igaz (lenne)
akkor $1 - \varepsilon$ valószínűséggel $\mu \in (a, b)$ lenne. Nem tud meg, hogy lenne
vagy-e $\rightarrow$ ha igen elfogadjuk
 $\rightarrow$ nem, ~~akkor~~ elvetjük

2. fajta hiba $\rightarrow$ elsőfajú: H_0 igaz, mégis elvetem ε FMD
 $\rightarrow$ másodfajú H_0 hamis, mégis elfogadom 03/13/5.

Cyábarlakban $u = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ tesztstatisztika,

Σ Ha H_0 igaz $U \sim N(0,1)$ összemérjük $K = \Phi^{-1}(1 - \frac{\varepsilon}{2})$ (U-próba)
 szisztematikussal

Ha $|u| < K$, akkor elfogadjuk H_0 -t, egyébként elvetjük

Példa: Művészi eredetűek $n = 16$, $\bar{x} = 992$, $\sigma = 2$ ismert

$H_0: \mu = 1000$ $H_1: \mu \neq 1000$ $\varepsilon = 0,05$

Tesztstatisztika: $u = \frac{992 - 1000}{2} \cdot \sqrt{16} = -16$

Küszöb: $K = \Phi^{-1}(0,975) = 1,96$ Döntés $| -16 | > 1,96 \Rightarrow$ Elvetjük

Ezt lehet bizonyítani 1. H_0 helyett $\mu \geq 1000$

$H_1: \mu \neq 1000$ helyett $H_1: \mu < 1000$
 "egyszoldali"

ketoldali próba

2. Ha σ ismert helyett σ ismeretlen "U-próba" Student
 t-próba Student t-próba

3. $H_0: \mu = 1000$
 $H_1: \mu \neq 1000$
 "egymintés"

$H_0: \mu_1 = \mu_2$

$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$
 kétmintés

Nullhipotézis

12 -ből ≤ 5 -öt tud

H_0 nem érdemel 1-est, mert $6 \geq$ feladatot tud

52 - 1 -

H_1 : 5 véletlenül válaszolt feladat

felgyűlt megadott feladatok száma. T statisztika

Döntés: H_0 -t elfogadjuk, ha $T \geq 2$
elvetjük, ha $T \leq 1$

Elsőfajda helya H_0 -t elvetjük, pedig igaz

Ehhez: TFI PONT 6-ot tud.

Ehhez: (Visszatérő nélküli mintavétel) / Hipergeometria /

$$P(T \leq 1) = \frac{\binom{6}{5} + \binom{6}{1} \cdot \frac{\binom{6}{4}}{\binom{12}{4}}}{\binom{12}{5}}$$

mind a 6 feladatot tud
és amit pont egyet válaszoltunk

$$\frac{\binom{6}{5} + \binom{6}{1} \cdot \frac{\binom{6}{4}}{\binom{12}{4}}}{\binom{12}{5}} =$$

$$P(T \leq 1) = \frac{6 + \frac{6 \cdot 5}{2}}{11 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{21}{11 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{6 \cdot 16}{11 \cdot 9 \cdot 8} \approx 12,1\%$$

Másodfajda helya, a tényleg, de nem érdemi.

U próba: szórás ismert (teszt statisztika standard normalis $\sim N(0,1)$)

t próba: szórás ismeretlen (teszt statisztika - Student t-eloszlás szabadsági fokok száma.

Tétel: Ha $X_1, X_2, \dots, X_n$ független azonos eo. $\sim N(\mu_0, \sigma)$ i μ_0 -t ismerjük,
de σ -t nem. akkor $\frac{(\bar{X} - \mu_0) \cdot \sqrt{n}}{\sqrt{s^2}}$ $\rightarrow$ hasonlít a standard normalis eloszlás

$\hookrightarrow X_i$ -kétlaga

Eloszlása ($n \geq 1$) szabadsági fokok t-eloszlás

egyalda 1 minta $\rightarrow$ a U próbára is
kétaldali 2 minta $\rightarrow$ a T próbára is.

5 mintás negatív $X_1 \dots X_5$ és azt fogjuk, hogy
 $x_n \in N(m, \sigma)$

7,7; 8,1; 7,7; 7,5; 7,0

+ - próbák, mert σ ismert

95%-os

1 mintasampran van ezért egyintés van

$H_0 \Rightarrow m = 7 \Rightarrow$ betöltési

$$t = \frac{\bar{x} - m}{s_n^x} \sqrt{n}$$

ellenhipotézis

$H_1: m \neq 7 \Rightarrow$ iránytalan két megfigyelés.

(ha $m \leq 7 \rightarrow$

$m = 7$ $n = 5$ s_n^x -et kell számolni nem $(s_n^x)^2$

1	x_i	x_i^2
1	7,7	59,29
1	8,1	65,61
1	7,7	59,29
1	7,5	56,25
1	7	49
5	38	289,44

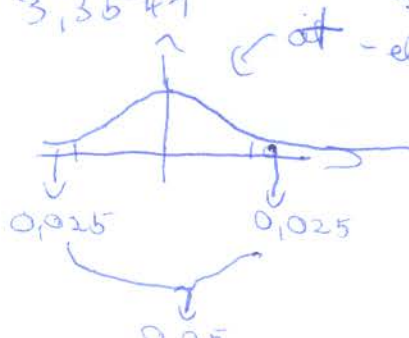
átlag $7,6$
 négyzetátlag $57,888$

$$s_n^2 = 0,128 \quad s_n^x^2 = 0,16 \Rightarrow s_n^x = 0,4$$

$$t = \frac{7,6 - 7}{0,4} \sqrt{5} = 3,3541$$

$$\varepsilon = 1 - \alpha = 0,05$$

DF (Degree of freedom)
 szabadsági fokok száma
 két oldalás próba:



$$\frac{\varepsilon}{2} = 0,025$$

Mivel $|t| > K \Rightarrow$ Elvetjük.

$\Rightarrow$ táblázatból

$$K = 2,776$$

2 csomópont

A: 2,1; 1,2; 1,4; 2,2; 0,4; 1,7
 B: 7,2; 1,1; 1,8; 2,5; 0,8; 1,6; 1,7

Nullhipotézis

$$H_0: m_A \geq m_B$$

$$H_1: m_A < m_B$$

Pótfeltétel: $X_1, \dots, X_n$ is normális (m_A, σ)
 eloszlású $Y_1, \dots, Y_n$ is $N(m_B, \sigma_B)$
 TFH, ~~de~~ a két szórás azonos.

Döntünk 95%-os szinten

• + próbák: 2-mintás; 1-oldali

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n_1 + n_2}}}$$

FMD
első adatsor x 03.20/3.
második -"- y

$$x \sim \sigma_1^2, n_1$$

↓
bármelyik tapasztalati szórásnégyzet

A: átlag: 1,5
négyzetátlag: 2,6166
 $n = 6$
 $s_n^2 = 0,366$
 $s_n^{*2} = 0,44$
 $s_n^x = 0,6633$

B: átlag = 1,6875 $y \sim \sigma_2^2, n_2$
négyzetátlag: 3,08625
 $n = 8$
 $s_n^2 = 0,23859$
 $s_n^{*2} = 0,27267$
 $s_n^x = 0,52219$
 $t = -0,59$

$\varepsilon = 0,05 \rightarrow$ egy fazonk minete 2. oszlop 1-tait
 $K = 1,782$ Megjegyzés: $H_0: \mu_A \geq \mu_B$
 $\bar{x} = 1,5$ $\bar{y} = 1,68$ $\bar{x} < \bar{y}$ emiatt a + próbát
szorozzuk -1-gyel: $-0,59 \cdot -1 = +0,59$
Mivel $0,59 < K$ ezért elfogadjuk

5. HF-fel tapasztalatos megjegyzés: Nagy hiba = $B \cup N$
FML stac eloszlása π sorjektan vagy Baloldali BALOLDALI

$\pi P = \pi$, vagy baloldali $\lambda = 1$ -hez
Zabla'l. A jobbaloldalt tudjuk el.
Megj: jobbaloldali sajáttesteknek mindig jó az (1 1 1 1)
NEM KAPUNK RA' PONTOT !!!

Baloldali sajáttestek a transzponált mátrix jobbaloldali.
Mindenk van mátrix megoldás. Mindig van megoldás

Szerda 12:15 helyszín be-sőlt KONZULTACIO

Nempanani teres kleszkedés: próbák.

X_0, X_n $\mu_1, \dots, \mu_r$ egy eloszlás egy vég

$H_0: x$ -es eloszlása pont f

$$S = \{1, \dots, r\}$$

Durított változata.

Exponenciális sűrűségfüggvény.



Van mérési érték.

Tétel: Ekkor
$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i} \rightarrow$$

$Y_i = \#$ - az i -edik

$\# \{1 \leq k \leq n \mid X_k = i\}$
 $\hookrightarrow$ az i -edik osztályba esők száma

Ha a hipotézis igaz lenne, mennyire tér el a várható értéktől?

$$\sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \chi^2_{r-1}$$

$n-1$ szabadságfokú eloszlás száma.

Def: Ha $X_1, \dots, X_n \sim N(0,1)$ függetlenek, akkor $\sum X_i^2$ eloszlású χ^2 -eloszlású variábilis.

Statistikai probléma: $\Rightarrow \chi^2 \rightarrow$ hogy χ^2 probléma
 ismétlődő X betű

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}$$

pl.:

	1	2	3	4	5	6	összes
Y_i	105	86	91	43	75	211	611
$n \cdot p_i$	104	104	104	104	104	104	611

összes: 611
 H_0 : szabályos kockadobás eredménye
 H_1 : a kocka hamis

$Y_i - np_i$	1	-18	-13	-61	-29	107	
$(Y_i - np_i)^2$	1	324	169	3721	841	11449	
$\frac{(Y_i - np_i)^2}{np_i}$	0.0096	2.4615	1.2404	33.9805	7.0707	111.028	

$df = 5$ $\alpha = 0.05 \rightarrow$ 5. sor 2. oszlop χ^2 eloszlás

$K = 11.07$

Döntés: $\chi^2 > K \Rightarrow$ Elvetjük.

FM D
03.20.15

$$\varepsilon = 0,101$$

Függetlenség vizsgálata

X és Y véges halmazon lévő v. változó

Mintát veszünk az (X, Y) párból.

Kategóriák	alacsony	Száraz	magas	$V_{i.}$
gyermek				
1	120	140	60	320
2	41	81	20	142
Férfi	41	62	10	113
$V_{.j}$	232	283	90	605

Függetlenség vizsgálata

H_0 : X és Y független

H_0 : nem független

Homogenitásvizsgálat: ~~$X_1, X_2, \dots, X_n$~~ X és $\tilde{X}$ is véges értékeszkészletű v. változó $\{1, \dots, r\}$.

H_0 : eloszlásuk azonos.

En a függetlenségvizsgálat spec esete, ha Y csak 2 értékű.

χ^2 eloszlású teszt. $\sum (V_{ij} - \frac{V_{i.} V_{.j}}{n})^2$

$$\chi^2 = n \sum_i \sum_j \frac{(V_{ij} - \frac{V_{i.} V_{.j}}{n})^2}{V_{i.} V_{.j}}$$

$V_{i.} \rightarrow i.$ sorösszeg

$V_{.j} \rightarrow j.$ oszlopszám

4240	30560	2880	320
38	48676	15480	172
6216	31979	1017	113
232	238	1017	

$$\begin{array}{l|l|l} 9,8897 \cdot 10^{-5} & 0,00104 & 0,00534 \\ 0,0000637 & 6,1 \cdot 10^{-6} & 0,00202 \\ 0,000207 & 0,00261 & 0,00405 \\ \hline \text{sum } i,j = 0,01651 & & \end{array}$$

4. sor 4. oszlop

$$K = 13,28$$

miel $\chi^2 < K \Rightarrow$ elfogadjuk $\chi^2 = 9,88957$