Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2011. március 17.

Általános alapelvek.

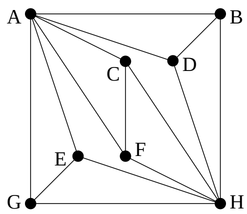
A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legkevesebb hány élt kell hozzávenni az alábbi gráfhoz ahhoz, hogy a kapott gráfban legyen Hamilton-kör?



* * * * *

Az A és H csúcsokat elhagyva a maradék gráfnak 3 komponense lesz (a $\{B, D\}$, a $\{C, F\}$ és a $\{G, E\}$ élek). (3 pont)
Így (a tanult tétel szerint) a gráfban nincs Hamilton-kör. (2 pont)
Azonban (például) az $\{E, F\}$ élt hozzávéve a gráfhoz abban már lesz Hamilton-kör (például az F, C, H, B, D, A, G, E, F sorrendben). (4 pont)
Így minimálisan 1 élt kell a gráfhoz venni, hogy legyen benne Hamilton-kör. (1 pont)

2. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan (tízes számrendszerben felírt) n szám, amelyben a szomszédos számjegyek összege sosem 9, viszont bárhogyan is választunk két különböző (0 és 9 közötti) számjegyet, amelyek összege nem 9, a két választott számjegy pontosan egyszer fordul elő n-ben szomszédos helyeken (valamilyen sorrendben).

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai a $0, 1, \dots, 9$ számjegyek, két különböző csúcs pedig pontosan akkor szomszédos G-ben (egyetlen él mentén), ha a megfelelő számjegyek összege nem 9. (2 pont)
A feladat megoldásához azt kell belátnunk, hogy G-ben van Euler-út (vagy Euler-kör). Ugyanis ebben az esetben az Euler-utat végigjárva és az út során érintett számjegyeket sorban leírva épp a kívánt tulajdonságú számot kapunk. (4 pont)
G nyilván összefüggő: ha két csúcs nem szomszédos, mindig van közös szomszédjuk. (2 pont)
G-ben minden pont foka 8 (mert sajátmagán kívül még egy számjeggyel nem szomszédos: azzal, amelyik őt 9-re egészíti ki). (1 pont)
Mivel minden fokszám páros és G összefüggő, a tanult tétel szerint G-ben valóban van Euler-kör.(1 pont)
(A megoldáshoz elvileg hozzátartozna, hogy az Euler-kör bejárását nem a 0-tól kell indítani, hogy az első leírt számjegy ne 0 legyen; ennek elhagyásáért nem vonunk le pontot.)

3. Legyen G perfekt gráf. Az alábbi állításokról döntsük el, hogy feltétlenül igazak-e!

a) Ha G-ből elhagyunk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

b) Ha G-hez hozzáveszünk egy élt, a kapott gráf is perfekt.

c) Ha G-ből elhagyunk egy csúcsot (az összes élével együtt), a kapott gráf is perfekt.

d) Ha G-hez hozzáveszünk egy új csúcsot és azt az összes meglévő csúccsal összekötjük, a kapott gráf is perfekt.

* * * * *

a) Az állítás hamis. Ha igaz volna, az 5 pontú teljes gráfból – ami definíció szerint nyilván perfekt – egyesével éleket elhagyva mindig perfekt gráfokat kapnánk. Ez azonban nem így van: az 5 pontú kör (ami K_5-ből 5 él elhagyásával megkapható) nem perfekt. (2 pont)
b) Az állítás hamis. Egy 5 pontú út nyilván perfekt gráf (például mert páros gráf), de a végpontjait összekötve már nem perfekt gráfot kapunk. (2 pont)
c) Az állítás igaz. A kapott gráf minden F feszített részgráfja G-nek is nyilván feszített részgráfja, így arra $\chi(F) = \omega(F)$ fenn kell álljon G perfektsége miatt. (2 pont)
d) Az állítás igaz. Legyen a hozzávett új csúcs v, a v-vel kiegészített gráf G'. Legyen F' a G' egy feszített részgráfja. Ha $v \notin V(F')$, akkor F' feszített részgráfja G-nek is, így $\chi(F') = \omega(F')$. Ha viszont $v \in V(F')$, akkor F'-ből v-t elhagyva a kapott F-re $\chi(F) = \omega(F)$ ismét igaz, mert F már feszített részgráfja G-nek. Azonban $\chi(F') = \chi(F) + 1$, mert v színe minden más csúcsétól különböző kell legyen és $\omega(F') = \omega(F) + 1$, mert bármely F-beli klikk kiegészíthető v-vel. Így $\chi(F') = \omega(F')$ is igaz.(4 pont)

4. 64 kockacukorból építettünk egy $(4 \times 4 \times 4)$-es nagyobb kockát (amelynek tehát az élhosszúsága 4 kockacukornyi). A G gráf csúcsai legyenek a kockacukrok, két különböző csúcs pedig akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő két kockacukor közös lap mentén szomszédosak az építményben. Határozzuk meg $\chi_e(G)$-t, vagyis a G élkromatikus számát!

* * * * *

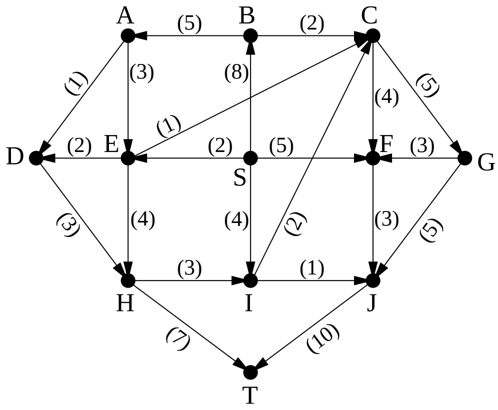
G-ben a maximális fokszám 6: bármely, nem a nagy kocka felszínére illeszkedő kockacukor 6 másikkal szomszédos (és 6-nál többel nyilván egy sem lehet). (3 pont)
G páros gráf. Ugyanis képzeljük az építményt 4 egymásra helyezett, (4×4)-es kockacukorrétegnek és mind a 4 réteget színezzük a sakktábla mezőihez hasonlóan, de az egymásra következő rétegeken mindig felcserélve a világos és sötét szerepét. Ekkor G csúcsait valóban úgy osztottuk két osztályra, hogy egyiken belül sem vezet él. (4 pont)
Így az előadáson tanult tételből (miszerint páros gráfra $\chi_e(G) = \Delta(G)$) következően $\chi_e(G) = 6$.(3 pont)
A fenti tételre való hivatkozás helyettesíthető azzal is, ha megadjuk a gráf éleinek egy 6 színnel való színezését.

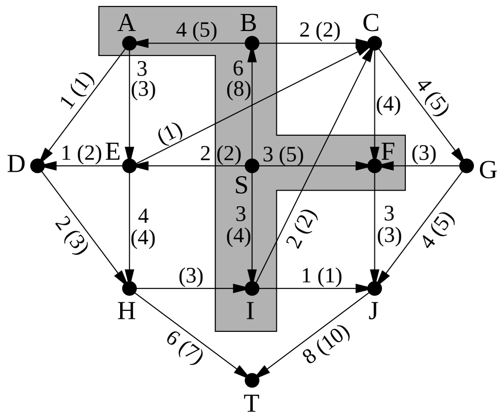
5. Jelölje G_8 azt a Mycielski-konstrukció által készített gráfot, amelyre $\chi(G_8) = 8$. Ekkor G_8-nak 191 csúcsa van. Határozzuk meg $\nu(G_8)$, vagyis a G_8-beli független élek maximális számának értékét!

* * * * *

$\nu(G_8) \leq 95$, hiszen 96 párhoz már 192 csúcsú gráf kellene. (1 pont)
Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy minden $k \geq 3$-ra G_k-ban van olyan párosítás, amely csak egyetlen csúcsot hagy párosítatlanul.
Ebből már következni fog, hogy $\nu(G_8) = 95$. (1 pont)
$k = 3$-ra ez nyilván igaz, hiszen G_3 egy 5 pontú kör. (1 pont)
Tegyük fel, hogy G_k-ban adott egy M párosítás, ami egyedül az x csúcsot hagyja szabadon. G_{k+1}-et úgy kapjuk, hogy G_k minden v csúcsához felveszünk egy új v' csúcsot, ezt összekötjük v minden G_k-beli szomszédjával, végül egy további w csúcsot összekötünk az összes v' típusú ponttal.
Az M párosítás minden $\{u, v\}$ élét helyettesítsük az $\{u, v'\}$ és az $\{u', v\}$ élekkel. (4 pont)
A kapott párosítás csak három pontot hagy szabadon: x-et, x'-t és w-t. Azonban x' és w szomszédos, így az előbbit az $\{x', w\}$ éllel kiegészítve valóban olyan párosítást kapunk, ami csak egyetlen G_{k+1}-beli csúcsot (x-et) hagy szabadon. (3 pont)

6. Adjunk meg a bal oldalt látható hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be) és egy minimális vágást!





∗ ∗ ∗ ∗ ∗

A fenti, jobb oldali ábrán látható folyam értéke 14. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (3 pont)

Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S, A, B, F, I\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S, A, B, F, I\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 14. (4 pont)

Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)

ezért a 14 értékű vágás bizonyítja, hogy a 14 értékű folyam maximális (1 pont)

és a 14 értékű folyam bizonyítja, hogy a 14 értékű vágás minimális. (1 pont)

Az utolsó 3 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam, illetve vágás maximális, illetve minimális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális, a vágás minimális" mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak; aki csak ennyit ír, az utolsó 3 pontból 1-et kapjon.) Lehet úgy is érvelni, hogy a 14 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út, tehát a folyam maximális.