1. feladat (12 pont)
Adja meg az alábbi sorozat torlódási pontjainak halmazát, limesz inferiorját és limesz szuperiorját.

$$a_n = \sqrt{n^2 - 2n + 1} + (-1)^n \sqrt{n^2 + 3n + 6}.$$

Konvergens a sorozat?

Mo. Ha n páros, $a_n \to \infty$ **(2p)**.
Ha n páratlan

$$a_n \overset{\mathbf{1p}}{=} \sqrt{n^2 - 2n + 1} - \sqrt{n^2 + 3n + 6} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{n^2 - 2n + 1 - (n^2 + 3n + 6)}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 3n + 6}} =$$

$$\overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{-5n - 5}{\sqrt{n^2 - 2n + 1} + \sqrt{n^2 + 3n + 6}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{n}{n} \frac{-5 - \frac{5}{n}}{\sqrt{1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{6}{n^2}}} \overset{\mathbf{2p}}{\to} -\frac{5}{2}$$

$\liminf a_n = -\frac{5}{2}$, $\limsup a_n = \infty$ (**1p**), tehát (a_n) nem kovergens (**1p**).

---

2. feladat (4+10 =14 pont)
a) Ismertesse a l'Hospital-szabályt.
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \dfrac{\ln(x^2)}{x-1}$ függvénynek?

Mo. *a*) Analízis 1 jegyzet, 4.4 fejezet. (**4p**)

b) Az $x = 0$ pontban $\displaystyle\lim_{x\to 0\pm} \frac{\ln(x^2)}{x-1} = \infty$, tehát itt a függvénynek másodfajú szakadása van. (**4p**)
Az $x = 1$ pontban $\displaystyle\lim_{x\to 1\pm} \frac{\ln(x^2)}{x-1} = \lim_{x\to 1\pm} \frac{\frac{2x}{x^2}}{1} = 2$, tehát itt a függvénynek megszüntethető szakadása van. (**4p**)
A többi pontban a függvény folytonos, mert folytonos függvények összetétele. (**2p**)

---

3. feladat (8+6=14 pont)
Számolja ki az alábbi integrálokat

$$a)\ \int (x^2 - 2x)\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x \qquad\qquad b)\ \int_{-1}^{2} \left|(x^2 - 2x)\,\mathrm{ch}(x)\right| \mathrm{d}x.$$

Mo. *a*) Parciális integrálással

$$\int \underbrace{(x^2 - 2x)}_{u}\underbrace{\mathrm{ch}(x)}_{v'}\,\mathrm{d}x \overset{\mathbf{3p}}{=} (x^2 - 2x)\,\mathrm{sh}(x) - \int \underbrace{(2x - 2)}_{u}\underbrace{\mathrm{sh}(x)}_{v'}\,\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\mathbf{3p}}{=} (x^2 - 2x)\,\mathrm{sh}(x) - (2x - 2)\,\mathrm{ch}(x) + \int 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\mathbf{2p}}{=} (x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{sh}(x) - (2x - 2)\,\mathrm{ch}(x) + c$$

b) $\operatorname{ch} x > 0$, $x^2 - 2x < 0$, ha $0 < x < 2$ (**2p**) ha

$$\int_{-1}^{2} \left|(x^2-2x)\operatorname{ch}(x)\right| \mathrm{d}x \overset{\mathbf{1p}}{=} \int_{-1}^{0} (x^2-2x)\operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (2x-x^2)\operatorname{ch}(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$\overset{\mathbf{2p}}{=} \left[(x^2-2x+2)\operatorname{sh}(x) - (2x-2)\operatorname{ch}(x)\right]_{-1}^{0} - \left[(x^2-2x+2)\operatorname{sh}(x) - (2x-2)\operatorname{ch}(x)\right]_{0}^{2} \overset{\mathbf{1p}}{=}$$

$$= 2 + 5\operatorname{sh} 1 - 4\operatorname{ch} 1 - 2\operatorname{sh} 2 + 2\operatorname{ch} 2 + 2$$

---

4. feladat (8+12=20 pont)

a) Igazolja, hogy a homogén lineáris differenciálegyenletek megoldásai lineáris teret alkotnak.

b) Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 5\mathrm{e}^{-2x}\big(\sin(3x) + 2x\big)$ függvény. Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is.

Mo. a) Analízis 2 jegyzet, 1.52. tétel (**8p**)

b) $-2 \pm 3i$ egyszeres, -2 kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek. (**3p**)

$$\big((\lambda+2)^2+9\big)(\lambda+2)^2 = \lambda^4 + 8\lambda^3 + 33\lambda^2 + 68\lambda + 52 \quad \mathbf{(3p)}$$

A differenciálegyenlet: $y^{(4)} + 8y^{(3)} + 33y'' + 68y' + 52y = 0$ (**3p**), az általános megoldás pedig: $y = c_1 e^{-2x}\cos(3x) + c_2 e^{-2x}\sin(3x) + c_3 x e^{-2x} + c_4 e^{-2x}$ (**3p**).

---

5. feladat (10+4+4=18 pont)

a) Számolja ki az $f(x,y) = \sqrt{2x^2 + 4y^4}$ függvény parciális deriváltjait, ahol léteznek.

b) Adja meg a függvény érintősíkjának egyenletét a $(0,1)$ pontban.

c) Számolja ki a függvény $(1,-2)$ irányú iránymenti deriváltját a $(0,1)$ pontban.

Mo. *a*) Ha $(x,y) \neq (0,0)$, akkor

$$f'_x(x,y) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{4x}{2\sqrt{2x^2+4y^4}} \qquad f'_y(x,y) \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{16y^3}{2\sqrt{2x^2+4y^4}}.$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2h^2}}{h} = \sqrt{2}\lim_{h\to 0}\frac{|h|}{h} \nexists \qquad \mathbf{(3p)}$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4h^4}}{h} = 2\lim_{h\to 0} h = 0 \qquad \mathbf{(3p)}$$

b) $\operatorname{grad} f(0,1) = (0,4)$ (**1p**), $f(0,1) = 2$ (**1p**), így a sík egyenlete $4(y-1) = z-2$ (**2p**).

c) $\dfrac{df}{d\underline{e}}(0,1) \overset{\mathbf{3p}}{=} \left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}, -\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)(0,4) \overset{\mathbf{1p}}{=} -\dfrac{8}{\sqrt{5}}.$

6. feladat (11 pont)
Számolja ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$ és az $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{3\,(x^2 + y^2)}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát.

Mo. Gömbi koordinátákkal: $r \in [0, 2]$ (**1p**), $\varphi \in [0, 2\pi]$ (**1p**), $\vartheta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ (**2p**):

$$\iiint 1 dV \overset{\mathbf{2p}}{=} \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 \sin\vartheta \overset{\mathbf{4p}}{=} 2\pi \cdot \frac{2^3}{3} \left(\cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{4}\right) \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{8\pi\left(\sqrt{3} - \sqrt{2}\right)}{3}.$$

---

7. feladat (3+4+4=11 pont)
a) Definiálja egy függvény Fourier-transzformáltját.
b) Definiálja két függvény konvolúcióját.
c) Mondja ki a Fourier-transzformáció és a konvolúció kapcsolatáról tanult tételt.

Mo. (Fourier-transzformáció jegyzet: 1. definíció, 7. definíció, 9. tétel)
a) Az f abszolút integrálható függvény Fourier-transzformáltja
$\mathcal{F}[f](\omega) = F(\omega) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} f(x)\,dx$ (**3p**)
b) f és g konvolúciója: $(f * g)(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(x - t)\,dt$ (ha minden valós x-re létezik az integrál). (**4p**)
c) $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$. (**4p**)