Villamosmérnök A2 (2017 ősz) — 3. szigorlat

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Az integrálások sorrendjének felcserélésével számítsa ki a $\int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{x\sin y}{y}\, dydx$ integrál értékét!

Megoldásvázlat.

$$\int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{x\sin y}{y}\, dy\, dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{y}} \frac{x\sin y}{y}\, dx\, dy$$

$$= \int_0^4 \left[\frac{x^2\sin y}{2y}\right]_0^{\sqrt{y}} dy = \int_0^4 \frac{\sin y}{2} = -\frac{1}{2}\cos y\Big|_0^4 = \frac{1-\cos 4}{2}.$$

2. Konvergensek-e a következő numerikus sorok? (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; (b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$?

Megoldásvázlat. (a) Divergens, mert $\sin\frac{1}{\sqrt{n}} \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ ($\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ miatt a hányadosuk 1-hez tart) és $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergens.
(b) Hányadoskritériummal: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1} \to 0 < 1$, tehát konvergens.

3. Létezik-e, és ha igen, mennyi a $\sin x^2$ függvény 102. deriváltja 0-ban?

Megoldásvázlat. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ mindenütt konvergens hatványsor, speciálisan $f(x) = \sin x^2 = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!}$ is az, és így deriválható is. (A deriválhatóság persze abból is következik, hogy deriválható függvények kompozíciója.) A Taylor-sor egyértelműsége miatt ebből $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+2}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}x^n$-ből $\frac{f^{(102)}(0)}{102!} = \frac{(-1)^{25}}{(2\cdot 25+1)!} = \frac{-1}{51!}$, azaz $f^{(102)}(0) = -\frac{102!}{51!}$ következik.

4. Adja meg $\mathbb{R}^2$-nek egy olyan bázisát, amelyben felírva a $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixot diagonálmátrixot kapunk, és írja is fel ezt a diagonálmátrixot!

Megoldásvázlat. $0 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda - 8$, amiből $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ sajátértékei 4 és -2. A 4-hez tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz $c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, a -2-höz tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Új bázisnak tehát minden c, $d \neq 0$-ra jó a $\begin{pmatrix} c \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ -d \end{pmatrix}$ vektorrendszer, és ebben felírva a mátrix $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; vagy a $\begin{pmatrix} c \\ -c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} d \\ d \end{pmatrix}$ vektorrendszer, és ebben felírva a mátrix $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

5. (a) Definiálja az f kétváltozós valós függvény (a,b) pontbeli, második változója szerinti parciális deriváltját!
(b) Igazak-e a következő állítások?
(b1) Ha f kétváltozós valós függvény és $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$ minden origón áthaladó egyenes mentén (azaz minden $0 \neq a \in \mathbb{R}$-re $\lim_{x\to 0} f(x,ax) = 0$), akkor $\lim_{(0,0)} f(x,y) = 0$.
(b2) Ha $|a_n|$ monoton csökkenve tart 0-hoz, akkor $\sum_1^{\infty}(-1)^n a_n$ konvergens.
(b3) Van olyan numerikus sor, amelynek összege $1/e$.

Megoldásvázlat. (a) $\lim_{y\to b}\frac{f(a,y)-f(a,b)}{y-b}$
(b1) Nem: pl. ha $f(x,y) = 1$ ha (x,y) rajta van az $(1,0)$ középpontú, 1 sugarú K körön, és $f(x,y) = 0$ máskor, akkor teljesül a feltétel, de f-nek nincs határértéke az origóban, mert K mentén a határérték 1.
(b2) Nem: pl. $a_n = (-1)^n/n$.
(b3) Igen, e^x Taylor-sorából: $\sum_0^{\infty}(-1)^n/n! = e^{-1}$.