Megoldókulcs, Valószínűségszámítás vizsga

2010.06.04.

1. *Egy dobozban 3 golyó van: piros, kék, sárga. Ötször húzunk visszatevéssel. Feltéve, hogy kéket is és sárgát is húzunk legalább kétszer, mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem húzunk pirosat? (20 pont)*

Megoldás. A következő eseményeket definiálásával:

$$\begin{array}{lcl} A & : & \text{kék és sárga is legalább kétszer} \\ B & : & \text{nem húzunk pirosat} \end{array}$$

A kérdéses feltételes valószínűség:

$$P(B|A) = ? = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ (5 pont)}$$

Számláló: P(2 kék és 3 sárga, vagy 3 kék és 2 sárga tetszőleges sorrendben 5 húzásból)

$$P(AB) = \frac{2\binom{5}{2}}{3^5} \text{ (7 pont)}$$

Nevező: P(2 kék és 3 sárga, vagy 3 kék és 2 sárga, vagy 2 kék 2 sárga és 1 piros tetszőleges sorrendben 5 húzásból)

$$P(A) = \frac{2\binom{5}{2} + \binom{5}{2}\binom{3}{1}}{3^5} \text{ (8 pont)}$$

$$P(B|A) = 0.4$$

2-es feladatsor: $P(B|A) = \frac{1}{3}$

2. *Legyenek $X \in Po(2)$, $Y = [\frac{X}{2}]$. Adja meg Y eloszlását! (10 pont)*

Megoldás.

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P([\frac{X}{2}] = k) = P(X = 2k) + P(X = 2k+1) = \\ &= \frac{2^{2k}}{(2k)!}e^{-2} + \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!}e^{-2},\ k = 0, 1, 2, \ldots \text{ (10 pont)} \end{aligned}$$

2-es feladatsor:

$$\begin{aligned} P(Y = k) &= P([\frac{X}{3}] = k) = P(X = 3k) + P(X = 3k+1) + P(X = 3k+2) = \\ &= \frac{1^{3k}}{(3k)!}e^{-1} + \frac{1^{3k+1}}{(3k+1)!}e^{-1} + \frac{1^{3k+2}}{(3k+2)!}e^{-1},\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

3. *Legyenek $X \in N(-1, 2)$ és $Z = (\frac{X+1}{2})^2$. Számolja ki Z sűrűségfüggvényét! (20 pont)*

Megoldás. Legyen $Y = \frac{X+1}{2}$,
ekkor $Y \in N(0,1)$ és $Z = Y^2$ (7 pont)
Z eloszlásfüggvénye:

$$\begin{aligned} F_Z(t) &= P(Y<t) = P(Y^2<t) = P(-\sqrt{t}<Y<\sqrt{t}) \text{ (6 pont)} \\ &= \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) = 2\Phi(\sqrt{t}) - 1 \text{ (4 pont)} \end{aligned}$$

Z sűrűségfüggvénye deriválással adódik:

$$f_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\varphi(\sqrt{t}) \text{ (3 pont)}$$

2-es feladatsor: Legyen $Y = \frac{X-2}{4}$, majd mint az 1-es feladatsornál.

4. *Legyen $X \in N(-4,2)$, $Y = 3X+1$, $Z = X^2-1$. Számolja ki $cov(Y,Z)$-t! (20 pont)*

Megoldás.

$$\begin{aligned} cov(Y,Z) &= E(YZ) - E(Y)E(Z) = E(3X^3 + X^2 - 3X - 1) - E(3X+1)E(X^2-1) \\ &= 3E(X^3) - 3E(X)E(X^2), \text{ (7 pont)} \end{aligned}$$

ahol $E(X^2) = \sigma^2(X) + (E(X))^2 = 4 + 16$, illetve (3 pont)

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \frac{1}{2}\varphi(\frac{x+4}{2})dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (2u-4)^3 \frac{1}{2}\varphi(u)2du &= \int_{-\infty}^{\infty} (8u^3 - 48u^2 + 96u - 64)\varphi(u)du = \\ &= 8E(U^3) - 48E(U^2) + 96E(U) - 64 \text{ (6 pont)} \end{aligned}$$

ahol $U \in N(0,1)$, $E(U^3) = E(U) = 0$, valamint $E(U^2) = 1$, amiből $E(X^3) = -112$ (4 pont)
A kérdéses kovariancia tehát:

$$cov(Y,Z) = 3(-112) + 12(4+16) = -96$$

2-es feladatsor:

$$cov(Y,Z) = 2E(X^3) - 2E(X)E(X^2),$$

ahol $E(X^2) = \sigma^2(X) + (E(X))^2 = 1 + 16$, illetve

$$\begin{aligned} E(X^3) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^3 f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^3 \varphi(x-4)dx = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} (u+4)^3 \varphi(u)du &= \int_{-\infty}^{\infty} (u^3 + 12u^2 + 48u + 64)\varphi(u)du = \\ &= E(U^3) + 12E(U^2) + 48E(U) + 64 \end{aligned}$$

ahol $U \in N(0,1)$, $E(U^3) = E(U) = 0$, valamint $E(U^2) = 1$, amiből $E(X^3) = 76$
A kérdéses kovariancia tehát:

$$cov(Y,Z) = 2(76) + 8(1+16) = 288$$

5. *Egy dobozban 2 piros és 5 fehér golyó van. Visszatevéssel húzunk 20-szer. X jelentse a kihúzott pirosak számát az els˝o 15, Y pedig az utolsó 15 húzás során. Határozzuk meg az X és Y korrelációs együtthatóját! (20 pont)*

Megoldás. Legyen Z_i a piros húzás indikátora az i-ik húzás során. Ezek független, azonos eloszlású valószínűségi változók.

$$P(Z_i = 1) = \frac{2}{7},\ P(Z_i = 0) = \frac{5}{7} \text{ (4 pont)}$$

$$X = \sum_{i=1}^{15} Z_i,\ Y = \sum_{i=6}^{20} Z_i \text{ (5 pont)}$$

X és Y kovarianciája:

$$\begin{aligned} cov(X,Y) &= cov(\sum_{i=1}^{5} Z_i + \sum_{i=6}^{15} Z_i, \sum_{i=6}^{15} Z_i + \sum_{i=16}^{20} Z_i) \\ &= \sum_{i=6}^{15} \sigma^2(Z_i) = 10\sigma^2(Z_i) = 10\frac{2}{7}\frac{5}{7} = \frac{100}{49} \text{ (6 pont)} \end{aligned}$$

X és Y szórásnégyzete:

$$\sigma^2(X) = \sigma^2(Y) = 15\sigma^2(Z_i) = 15\frac{2}{7}\frac{5}{7} = \frac{150}{49} \text{ (3 pont)}$$

A korrelációs együttható tehát:

$$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{2}{3} \text{ (2 pont)}$$

2-es feladatsor:

$$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{1}{3}$$

6. *Mikor mondjuk, hogy egy statisztika konzisztens becslése egy paraméternek? (10 pont)*

Megoldás. A $t_n(X_1,...,X_n) \in \mathbb{R}^k$ statisztikasorozat a $\vartheta \in \mathbb{R}^k$ paraméter konzisztens becslése, ha $\forall \mathbf{P} \in \mathcal{P}$, valamint $\forall \varepsilon > 0$ esetén $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(\|t_n - \vartheta\| > \varepsilon) = 0$. (10 pont)

2-es feladatsor:

Mikor mondjuk, hogy egy statisztika erősen konzisztens becslése egy paraméternek?

A $t_n(X_1,...,X_n) \in \mathbb{R}^k$ statisztikasorozat a $\vartheta \in \mathbb{R}^k$ paraméter erősen konzisztens becslése, ha $E(t_n) = \vartheta$ (torzítatlan), és $\lim_{n\to\infty} \sigma^2(t_n) = 0$, tehát ha a szórásnégyzetek sorozata nullához tart a mintaelemszám növekedésével.