# 1. ISMERTESSE AZ E.M.T. FORRÁS MENNYISÉGEIT ÉS A KÖZTÜK LÉVŐ KAPCSOLATOT!

töltés → töltésfajták → áram → [illegible]
hatások → folytonossági egyenlet.

## a) AZ ELEKTROMOS TÖLTÉS

Az EM jelenségek oka az, hogy egyes elemi részecskéknek (elektronnak: $q_e = -1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C, protonnak: $q_p = 1{,}602 \cdot 10^{-19}$ C) elektromos töltésük van, alapdefiníció, részecskék egy tulajdonsága. A tárgy keretein belül csak olyan esetekkel foglalkozunk, amikor olyan nagyszámú töltött részecske hatásait vizsgáljuk, hogy azok kvantáltsága és egyéb kvantumfizikai tulajdonságai figyelmen kívül hagyhatók. A közelítés jogosságát mutatja, hogy az $1\,pC = 10^{-12}$ C töltés is $10^7$ nagyságrendű elemi részecskét jelent. $[Q] = C = As$

A töltések összehasonlíthatóak az egymásra kifejtett erőhatásuk alapján: A tapasztalati Coulomb törvény megadja két pontszerűnek tekinthető töltéssel rendelkező test között fellépő erőt: * $\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{As}{Vm}$

$$\boxed{|F| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|Q_1 Q_2|}{r_{1,2}^2}}$$

, ahol $r_{1,2}$ a testek közti távolság

$\varepsilon$ a közeg permittivitása (dielektromos állandója), amit $\varepsilon = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0$ alakban szokás megadni, $\varepsilon_r$ a relatív permittivitás, amely a közegre jellemző puszta szám. $\varepsilon_0$ a vákuum permittivitása*: Elsőre furcsának tűnik de a vákuumban is állandó EM-es fluktuáció van, mivel EM rezgés, aminek az okát nem tudjuk, a határozatlansági reláció következménye. A tapasztalat szerint két- ~~Töltésfajták~~: féle töltés van, amelyeket előjellel különböztetünk meg egymástól. Azonos előjelűek taszítják, ellentétes előjelűek vonzzák egymást.

Töltésfajták:

- Térbeli (térfogati) töltéssűrűség: $\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}$ $[\rho] = \frac{As}{m^3}$

– Felületi töltéssűrűség: (Tul. képpen ez is térfogati, csak a felület méretéhez képest elhanyagolható a vastagsága) $\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta A}$ $[\sigma] = \frac{As}{m^2}$

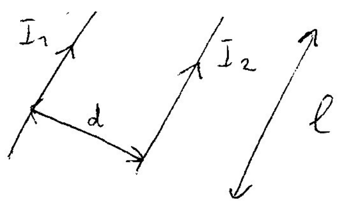
– Vonalmenti töltéssűrűség: $q = \frac{\Delta Q}{\Delta l}$ $[q] = \frac{As}{m}$

## b) AZ ELEKTROMOS ÁRAM

A töltések mozgása áramot jelent, a technikai felfogás azonban a töltéstől független mennyiségként értelmezi az áramot. Az áramok is az egymásra kifejtett erőhatásukkal hasonlíthatóak össze:

Tapasztalati Ampère-törvény: Két végtelen hosszúnak tekinthető és elhanyagolhatóan kis keresztmetszetűnek tekinthető, párhuzamos, egyenes vezetőkben folyó áramok esetére:

$$\boxed{|F| = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{|I_1 I_2|\, l}{d}}$$



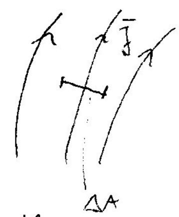

$l$: vizsgált vez. szakasz hossza

$\mu$: közegre jellemző (mágneses) permeabilitás, $\mu_r$: a közegre jellemző puszta szám, $\mu_0$ a vákuum permeabilitása: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$

Áram mértékegysége $[I] = A$

Áramfajták:

Térbeli (~~térbeli~~) Áramsűrűség: Térbeli $j = \frac{\Delta I}{\Delta A}$ $[j] = \frac{A}{m^2}$




Vonalszerű áram: $I = \int_A \bar{j}\, d\bar{A}$ $d\bar{A}$ felület normális irányú.

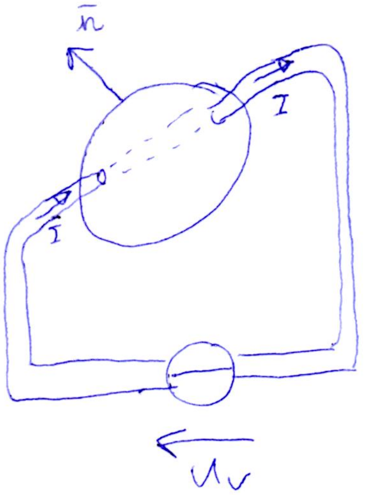
Felületi áramsűrűség: Az áram olyan felületen folyik át, aminek egyik mérete elhanyagolhatóan kicsi, egy szakaszon átfolyó áram.

$\Delta I = \bar{K}\, ds\, \bar{n}$

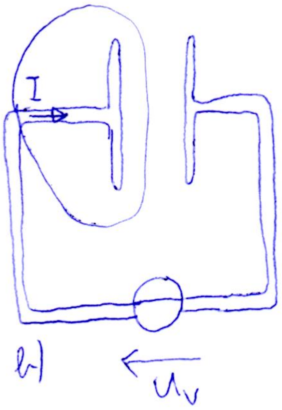
$K = \frac{\Delta I}{\Delta s}$ ; $[K] = \frac{A}{m}$ Az áram a felületen kúszik. Megjegyzendő, hogy a mértékegysége megegyezik a mágneses térerősséggel, van olyan eset ahol $H = K$.

## c) AZ ÁRAM - TÖLTÉS KAPCSOLAT

1) Ha egy $V$ térfogatban $Q$ töltés van felhalmozva és a térfogatot körülzáró $A$ felületen összesen $I$ áram folyik ki, akkor:




$$I = \oint_A \bar{j}\, d\bar{A} = 0$$




b) ábra: Vizsgáljuk a bekarikázott részt! Az áram befolyik a térrészbe, és töltéseket rak le a kondenzátor lemezein. Az áram nem folyik ki, a töltések száma növekszik:

$$\oint_A \bar{j}\, d\bar{A} = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$I = -\frac{dQ}{dt}$$

$$\Downarrow$$

A negatív előjel oka: az áram befelé folyik, a felületi normális viszont kifelé mutat, az integrálon belül skaláris szorzás van. Más szóval a kifolyó áramot tekintjük pozitívnak.

$$\oint_A \bar{j}\, d\bar{A} = -\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$$ : Folytonossági egyenlet integrális alakja.

Alkalmazzuk a Gauss-Osztrogradszkij tételt az első tagra:

$$\int_V \operatorname{div} \bar{j}\, dV = -\int_V \frac{d\rho}{dt}\, dV \Rightarrow \int_V \left(\operatorname{div} \bar{j} + \frac{d\rho}{dt}\right) dV = 0$$

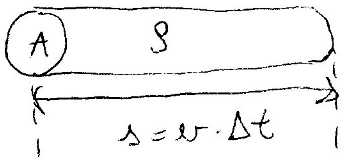
Ennek bármely térfogatra teljesülnie kell, ezért az integrandus maga is nulla:

$$\boxed{\operatorname{div} \bar{j} + \frac{d\rho}{dt} = 0}$$

FOLYTONOSSÁGI EGYENLET

A folytonossági egyenlet a töltés megmaradásának el-
vét ~~fejez~~ fejezi ki, és analóg pl. a tömeg meg-
maradását kifejező egyenlettel.

2) <u>v sebességgel mozgó töltések árama</u>




$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\int_V \rho \, dV}{\Delta t} = \frac{\rho \cdot A \cdot v \cdot \Delta t}{\Delta t} = A \cdot \rho \cdot v$$

$\Rightarrow J = \dfrac{I}{A} = \rho v$, ez vektorosan is igaz: $\bar{j} = \rho \bar{v}$

Ha kétféle töltés is van: $\bar{j} = \rho_+ \bar{v}_+ + \rho_- \bar{v}_-$

## 2. ISMERTESSE AZ E.M.T. ~~FORR~~ INTENZITÁSVEKTORAIT, ÉS A KÖZTÜK LÉVŐ KAPCSOLATOT!

El. térerősség, indukció, Lorentz tv., forgatónyomaték, feszültség, fluxus, Faraday-ind. tv. (II. M.E.), fizikai, ...

a) Bevezető, EM erőtér

A töltések és az áramok egymásra gyakorolt hatása csak speciális feltételek mellett határozható meg a Coulomb és Ampère törvények alapján. A hatásokat az EM erőtér bevezetésével írhatjuk le. Az erőteret a töltések és áramok hozzák létre, illetve az erőtér az, amely erőt fejt ki a töltésre és az áramra. Az EM tér nem csak az erőt közvetíti, hanem az energia hordozója és a felgyorsítás közvetítője is. Az EM teret két vektormennyiséggel jellemezzük: Elektromos térerősség és Mágneses indukció. Ezek az intenzitásvektorok.

A térerősséget, illetve mágneses indukciót egy kis ~~b~~ méretű nyugvó, illetve $v$ sebességgel mozgó $Q$ elektromos töltésre ható erővel definiálhatjuk:

$$\boxed{\bar{F} = Q \cdot \bar{E}} \quad ; \quad \boxed{\bar{F} = Q\, \bar{v} \times \bar{B}}$$

Ha a vizsgált pontban mindkét erő fellép, akkor az erő kifejezését a Lorentz törvény adja meg: $\boxed{\bar{F} = Q\left(\bar{E} + \bar{v} \times \bar{B}\right)}$

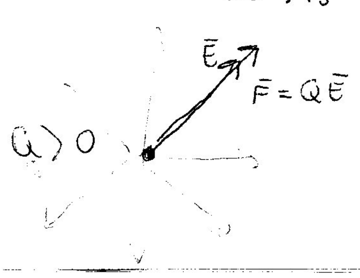
A törvényből látmik hogy a töltés egyben indikátor (jelzi hogyha valahol villamos tér van), másrészt a töltés egyben a térnek a forrása is. A Lorentz törvény fő haszna, hogy részecskék pályáját (trajektóriáját) lehet vele számolni.

b) ELEKTROMOS (VILLAMOS) TÉRERŐSSÉG

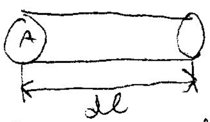
A pozitív, egységnyi töltésre ható erő. $\bar{E} = \dfrac{\bar{F}}{Q}$

jele: $\bar{E}$ Térszerkentés pozitív próbatöltéssel történik.

m.e.: $[E] = \dfrac{VAs}{m\,As} = \dfrac{V}{m}$

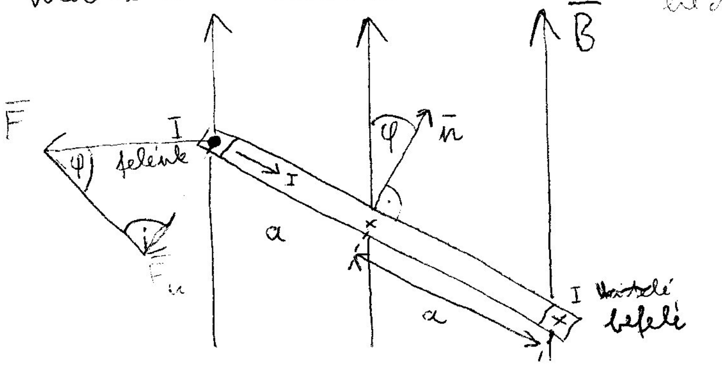


c) MÁGNESES INDUKCIÓ: $\bar{B}$   mértékegysége: $\frac{VAs}{m} = As\frac{m}{s}$ $[B]$

$\bar{F} = Q\bar{v}\times\bar{B}$   $Q\bar{v} = \rho A\,dl\,\bar{v} = \bar{j}A\,dl$      $[B] = \frac{Vs}{m^2} = T$

A $\bar{j}\cdot A$-t miért nem írnánk át $I$-nek, de $\bar{j}$ vektor. Ilyenkor azt tesszük, hogy átadjuk a vektor képviseletét $dl$-nek:

$\Rightarrow$ $\bar{j}A\,dl = I\,\bar{dl}$ $\Rightarrow$ $\boxed{d\bar{F} = I\,\bar{dl}\times\bar{B}}$ ez is a $\bar{B}$ vektor kifejezésének módja, de a továbbiakban végeredmény-nek használjuk a(z) indukció keretre gyakorolt forgatónyomaték levezetéséhez.

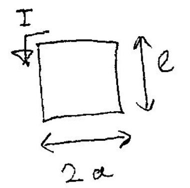



A 2a hosszú oldal járuléka 0, mert a vektoriális szorzat $dl$-re merőleges vektort eredményez

A forgatónyomaték: erő · erőkar

$\boxed{T = 2a\cdot I\cdot l\cdot B\sin\varphi}$

$2a\cdot l$: keret területe:




$\mu_0 A\bar{n} I$

A keret mágneses dipólnyomatéka (def.): $\boxed{\bar{m} = \mu_0 I\cdot A\bar{n}}$

$\boxed{\bar{T} = \frac{1}{\mu_0}\bar{m}\times\bar{B}}$ : A $\bar{B}$ és a mágneses dipólnyomaték $\varphi$ szöget zár be.

Ennek az a haszna, hogy megtaláltuk az <u>indukció mérésének</u> módját: Rakjunk be a térbe egy árammal átjárt kisméretű keretet (lokálisan fel tudjuk térképezni), az egyensúlyi helyzetbe beálló keretet $90°$-al kitérítjük, és megmérjük a rá ható nyomatékot. Továbbá a villamos motorok többsége ezen az elven működnek, valamint az analóg műszereknél is használták.

d) INTENZITÁSVEKTOROK INTEGRÁLJA

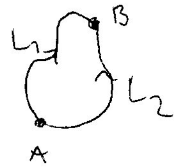
- Feszültség: $\boxed{U_{AB} = \int_A^B \bar{E}\,\bar{dl}}$ : A és B pont közti feszültség

$U_{AB}Q = \int_A^B Q\bar{E}\,\bar{dl} = \int_A^B \bar{F}\,\bar{dl}$ : Munkát ad meg, itt az erőnek csak az útirányú elmozdulása számít, innen a skalárszorzat

$W_{AB} = Q\,U_{AB}$ : Tér által végzett munka.

$\oint \bar{E}\,d\bar{l} = 0 \quad \oint \bar{F}\,d\bar{l} = 0$ konzervatív erőtér

Következmények: 1)




$$\int_{A,\,L_1}^{B} \bar{E}\,d\bar{l} + \int_{B,\,L_2}^{A} \bar{E}\,d\bar{l} = 0 = \int_{A,\,L_1}^{B} \bar{E}\,d\bar{l} - \int_{A,\,L_2}^{B} \bar{E}\,d\bar{l} = 0$$

$$\Rightarrow \int_{A,\,L_1}^{B} \bar{E}\,d\bar{l} = \int_{A,\,L_2}^{B} \bar{E}\,d\bar{l}$$ : úttól való függetlenség.

→ potenciálja 0: $\varphi(0) = \int_0^0 \bar{E}\,d\bar{l} = 0$

2) Potenciál: P pont és az $\overbrace{0 \text{ alappont}}$ közti feszültség.

$$\varphi(P) = \int_P^0 \bar{E}\,d\bar{l} \qquad d\varphi = -\bar{E}\,d\bar{l} = \operatorname{grad}\varphi\,d\bar{l}$$

$$\bar{E} = -\operatorname{grad}\varphi$$

- Fluxus: $\bar{B}$ felületi integrálja:

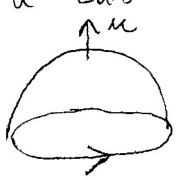
$$\boxed{\phi = \int_A \bar{B}\,d\bar{A}}$$

Így $\bar{B}$-t szokás fluxussűrűségnek hívni.

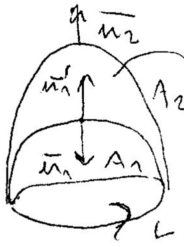
$[\phi] = Vs = (W \text{ (wéber)})$

Zárt felületen az áthaladás zérus (ami bemegy az ki is lép): $\oint_A \bar{B}\,d\bar{A} = 0 \Rightarrow$ A $\bar{B}$ vonalak zártak, $\bar{B}$ forrásmentes. → Mágneses töltés (monopólus) nincs.

c) TÉRINTEZITÁSOK KAPCSOLATA: Két fontos tétel tárgyalása előtt a zárt görbét és a ráfeszített felület irányítását kell beszélni:




Jobbcsavar szabály szerint rendeljük össze az irányítást: A körüljárási irány jobbfele mutat, akkor a normális felfele.




→ zárt felület által határolt térfogat.

$n_1'$ kifele mutat.

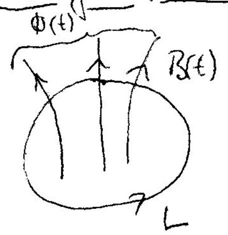
$$\oint_A \bar{B}\,d\bar{A} = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \bar{B}\,d\bar{A}_1 + \int_{A_2} \bar{B}\,d\bar{A}_2 = 0$$

ha $\bar{n}_1'$ normálist használjuk:

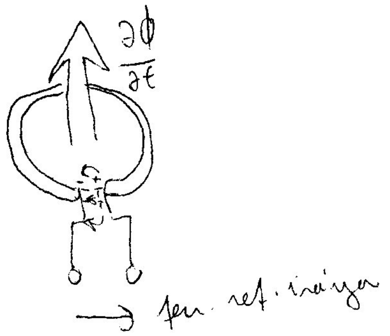
$$-\int_{A_1} \bar{B}\,d\bar{A}_1' + \int_{A_2} \bar{B}\,d\bar{A}_2 = 0 \Rightarrow \int_{A_1} \bar{B}\,d\bar{A}_1' = \int_{A_2} \bar{B}\,d\bar{A}_2$$

A fluxus független a zárt görbére feszített felülettől.

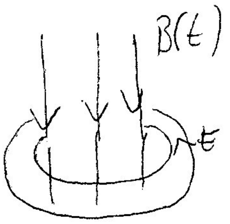
## – Faraday-féle indukció törvény –




$$u_i = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$ : Egy hurokban indukálódó $u_i$ feszültség egyenlő a hurok $\phi$ fluxusának idő szerinti deriváltjával, a jobbcsavar-szabállyal ellentétes előjellel.



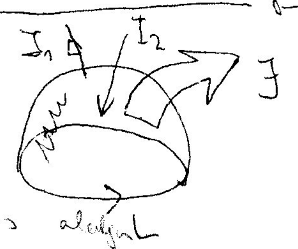

$u_i$ oka: villamos térerősség keletkezik, a hurok nem csinál mást, mint integrálja ezt L úton keresztül.




$$u_i = \oint_L \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$$

$$\oint_L \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \bar{B}\, d\bar{A}$$ : A II. Maxwell egyenlet integrális alakja

## – $\bar{B}$ vonalintegrálja és $\bar{E}$ felületi integrálja




$$\oint_L \bar{B}\, d\bar{l} = \mu_0 \int_A \bar{J}\, d\bar{A}$$

I. M.E. hiányos, integrális alakja

$$\oint_A \bar{E}\, d\bar{A} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$ : A a zárt felület, V az általa közbezárt térfogat.

IV. M.E. integrális alakja

Ezek tapasztalati törvények.

## 3. ISMERTESSE AZ E.M.T. GERJESZTETTSÉGI VEKTORAIT ÉS A KÖZTÜK LÉVŐ KAPCSOLATOT!

szimmetria MI, MIV között → D, H → dielektromos gerjesztés homogén térben → közegek hatása → általános eset: $\bar{P}$, $\bar{M}$ vektorok → bevezetett t.e.

### a) bevezetés

Alapvető kérdés, hogy milyen kapcsolat van az erőteret gerjesztő mennyiségek (töltés és áram) valamint az erőteret leíró intenzitásvektorok között (el. térerősség és mágn. indukció). Ezek akkor a legegyszerűbbek, ha $\varepsilon$ permittivitás és $\mu$ permeabilitás a közegre jellemző, vagyis az erőtértől független.

Ekkor:

$$\oint_L \bar{B}\, d\bar{l} = \mu \int_A \bar{J}\, d\bar{A}$$

: ~~általánosított~~ Gerjesztési törvény (Még hiányzik az eltolási áramsűrűség)

$$\oint_A \bar{E}\, d\bar{A} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \varrho\, dV$$

: Gauss-törvény

($\bar{B}$ vonalintegrálja és $\bar{E}$ felületi integrálja.)
A két tételt szeretnénk egyszerűsíteni ($\mu$ és $\frac{1}{\varepsilon}$-t eltüntetni) a Gerjesztettségi vektorok bevezetésével:

### b) GERJESZTETTSÉGI VEKTOROK

Mágneses térerősség: $\boxed{\bar{H} = \frac{\bar{B}}{\mu}}$ $\qquad [H] = \frac{Vs}{m^2}\frac{Am}{Vs} = \frac{A}{m}$ *

Ezt felhasználva:

IMe $\qquad \boxed{\oint_L \bar{H}\, d\bar{l} = \int_A \bar{J}\, d\bar{A}}$

: A gerjesztő mennyiséggel egyszerűbb kapcsolatban van, mint B.

* ugyanaz a mértékegysége, mint a felületi áramsűrűségnek!

Eltolási vektor (villamos eltolás):

$\boxed{\bar{D} = \varepsilon \bar{E}}$ $\qquad [D] = \frac{As}{Vm}\frac{V}{m} = \frac{As}{m^2}$

: Ugyanaz a dimenziója, mint a felületi töltéssűrűségnek. Ez majd az eltolási áramsűrűségnél lesz fontos!

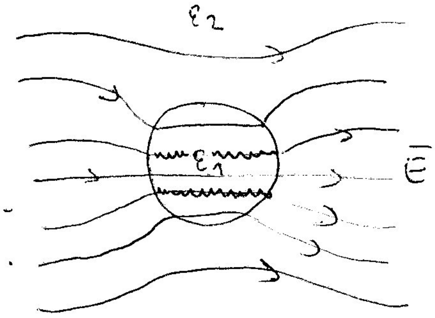
Ezt felhasználva:

IV. Me $\qquad \boxed{\oint_A \bar{D}\, d\bar{A} = \int_V \varrho\, dV}$

Felmerül a kérdés, hogy miért jó nekünk ezeket a vektorokat bevezetni. Valóban, ha $\varepsilon$ és $\mu$ nem helyfüggő nincs lényegi különbség, de változó $\varepsilon$ és $\mu$ esetén csak a gerjesztettségi vektorokkal felírt törvények érvényesek.

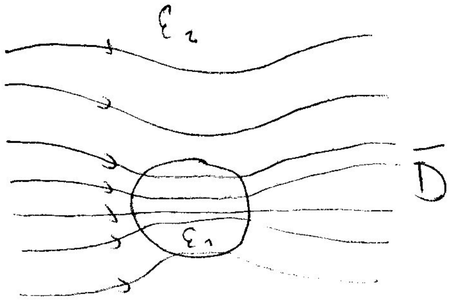
Pl.: ($\bar{E}$ és $\bar{D}$ közti különbsége)
Dielektromos gömb homogén térben:

* Pont az a lényeg, hogy belül nem folytonosak mind.




· A vill. térerősségnek ott is forrása van, ahol a permittivitás változik, de ott töltés nincs $\Rightarrow$ a polarizációs különbségeknél látszólagos töltés keletkezik.

$\bar{E}$ mindig örvénymentes (el. statika)




Itt már nincsen látszólagos töltés, viszont $\bar{D}$ örvényes.

c) <u>KÖZEGEK HATÁSA</u>: $\bar{D}$ és $\bar{E}$, $\bar{B}$ és $\bar{H}$ közti kapcsolat

A közegek elektromágneses tulajdonságaikat hívó képződményekből (atomok, molekulák, mágneses domének, stb.) állnak. A töltések eloszlása, mozgása, az erőtér kialakulása bonyolult kölcsönhatások eredménye. Ha a közegek hatásait szeretnénk leírni, az alábbi összefüggéseket kell meghatározni:

$$\bar{D} = \bar{D}(\bar{E}) \qquad \bar{B} = \bar{B}(\bar{H}) \qquad \bar{j} = \bar{j}(\bar{E})$$

Legegyszerűbb értelemben: LINEÁRIS, IZOTRÓP KÖZEG (iránytfüggetlen)

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ , $\bar{B} = \mu \bar{H}$ , $\bar{J} = \sigma \bar{E}$

$\sigma$: fajlagos vezetőképesség ($\sigma$)

Általános értelemben:

Pl. kristályos közegben, kemény mágnesben az $\bar{E}$ és $\bar{D}$ illetve a $\bar{B}$ és $\bar{H}$ vektorok nem párhuzamosak.

Ekkor:

$$\boxed{\bar{D} = \varepsilon_0 \bar{E} + \bar{P}}$$ ahol $\bar{P}$: polarizáció

$$\boxed{\bar{B} = \mu_0 (\bar{H} + \bar{M})}$$ ahol $\bar{M}$: mágnesezettség

A különbség (aszimmetria) oka hogy a polarizációt a gerjesztettségi ~~mennyiséggel~~ vektorral azonos dimenziójúnak vesszük az első egyenlet, a másodikban is ugyanez történik.

⇒ a polarizáció és mágnesezettség a megfelelő gerjesztettségi ~~mennyiségekkel~~ vektorral azonos dimenziójú.

$$[P] = [D] = \frac{As}{m^2} \qquad [M] = [H] = \frac{A}{m}$$

$\bar{M}$ nem más, mint a térfogategység mágneses dipólnyomatéka.

Az általánlános értelmből az is látszik hogy nem feltétlenül egyirányú a $\bar{D}$ és az $\bar{E}$ ill. a $\bar{B}$ és $\bar{H}$ vektor, pl.: $\bar{D}$ az $\bar{E}$-vel akkor egyirányú, ha $\bar{P}$ az $\bar{E}$-vel egyirányú.

Beiktatott térerősség

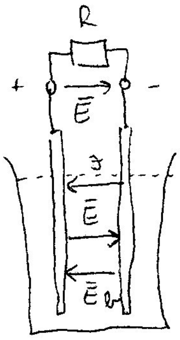
Vizsgáljuk meg az áramsűrűségre vonatkozó $\bar{J} = \bar{J}(\bar{E})$ kapcsolatot!

Legegyszerűbb esetben $\bar{J} = \sigma \cdot \bar{E}$, ahol $\sigma (=\gamma)$ a konduktivitás (fajlagos vezetőképesség). $[\sigma] = \frac{1}{\Omega m}$

Ez a rezisztivitás (fajlagos ellenállás) reciproka:

$\rho = \frac{1}{\sigma}$ $\quad [\rho] = \Omega m$

Általános esetben meg kell jegyezni, hogy a töltésekre az elektromos erőn kívül hathat $F_b$ nem elektromos erő is, ~~ebből~~ ezt az $E_b$ beiktatott térerősséggel írhatjuk le. Ez kémiai eredetű, az EMT elmélettől idegen.




A galvánelemben amikor áram folyik, akkor az $\bar{E}$ tér ellenében kellene az áramnak folyni. A ~~áramot~~ pozitív töltéseket a kémiai eredetű beiktatott (idegen) térerősség segíti át.

Ha folyik áram: $E < E_b$

Ha nem folyik áram: $E = E_b$

Így az áramsűrűségre vonatkozó összefüggés általános alakja, a differenciális Ohm-törvény: $\boxed{\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)}$

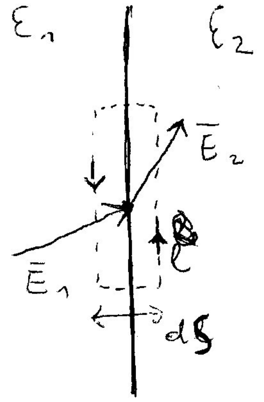
# 4. ISMERTESSE AZ E.M.T. TÉRJELLEMZŐIRE VONATKOZÓ FOLYTONOSSÁGI ÉS PEREMFELTÉTELEKET!

Rec → E vonatkozó (M2) → H-ra van. (M1) → B-re van (M3) → D-re van (M4)

## a) bevezető: HATÁRFELTÉTELEK

Az EM feladatok nagy részénél a közeg nem homogén (pl. vezető és szigetelő közegek). Ilyenkor úgy járunk el hogy az egyes közegekre külön-külön megoldjuk a Maxwell egyenleteket, majd gondoskodunk arról hogy a közegeket elválasztó felületeken is ki legyenek elégítve az egyenletek. Tehát a térjellemző vektoroknak két közeg határain bizonyos folytonossági feltételeknek kell eleget tenni. Ez a határ jelentheti a vizsgált térrész peremét is, amelyen túl az erőteret nem akarjuk számítani. Az erre vonatkozó feltételek a peremfeltételek. Ezeket összefoglalva határfeltételeknek nevezzük.

## b) ELEKTROMOS TÉRERŐSSÉGRE VONATKOZÓ FELTÉTELEK




A vektorok találkozási pontja a határfelülethez egész közel, bal és jobboldali határértékkel írható le.
Alkalmazzuk a II. M.E.-et a zárt görbére (nagyított):

$$\oint_L \bar E \, d\bar l = -\int_A \frac{\partial \bar B}{\partial t} \, d\bar A$$

// járjuk körül a felületet, de a skaláris szorzásra figyeljünk.

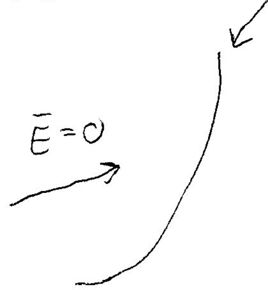
$$E_{2t} \cdot l + E_t' \, ds - E_{1t} \cdot l + E_t'' \, ds = - ds \cdot l \cdot \frac{\partial B_n}{\partial t}$$

$$ds \to 0 \Rightarrow E_{2t} \cdot l - E_1 l = 0$$

$$\boxed{E_{1t} = E_{2t}}$$

Villamos térerősség tangenciális komponense folytonos.

Peremfeltétel (fém elektróda):



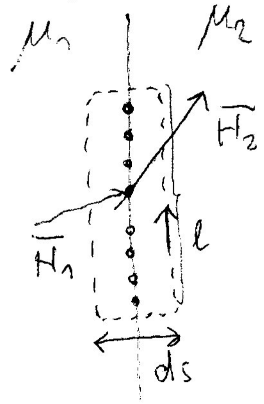

Belsejében a térerősség 0, ha nem így lenne végtelen nagy áram folyna.

Így a tangenciális komp. is Ø.

$E_{1t} = 0$ $\quad E_{1t} = E_{2t}$ $\quad \boxed{E_{2t} = 0}$

⇒ Elektróda felszínén a villamos térerősség merőleges a felületre. Azért peremfeltétel, mert a belsejével nem foglalkozunk. Ebből következik, hogy az $\boxed{\text{elektróda ekvipotenciális}}$, hiszen ha egy töltést mozgatunk, munkavégzés nincs, hiszen nincs érintőleges komponens (skalár szorzat mindig 0).
Lehet alkalmazni a helyettesítő töltések módszerénél, hogy ott is ez egy gyakorlati peremfeltétel.

## C) MÁGNESES TÉRERŐSSÉGRE VONATKOZÓ HATÁRFELTÉTELEK




M1

$$\oint_L \bar H \, d\bar l = \int_A \bar j \, d\bar A$$

// Skalárszorzat miatt csak a tangenciális komponens számít.

$$H_{2t} l + H' ds - H_{1t} l + H'' ds = K \cdot l$$

Kérdés hogy az áramsűrűségnek van-e olyan áram, ami akkor is megmarad, ha $ds \to 0$.

Igen, ez a felületen kúszó felületi áramsűrűség ($\bar K$). A határfelületeket a kis gömbök ezt jelzik.

Tehát ha $ds \to 0$: $H_{2t} l - H_{1t} l = K l$

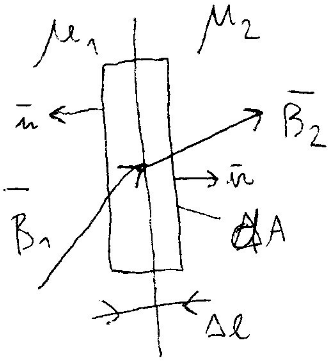
$$\boxed{H_{2t} - H_{1t} = K}$$

peremfeltétel:

Ideális fém belsejében $\bar H = 0 \Rightarrow H_{1t} = 0 \Rightarrow \boxed{H_{2t} = K}$

Ismert térből a felületi áramelosztás.

## d) MÁGNESES INDUKCIÓRA VONATKOZÓ HATÁRFELTÉTELEK




Vegyünk fel a határfelületen egy zárt térrészt, ami cipőpasztás dobozhoz hasonló, ekkor:

M3

$$\oint_A \bar B \, d\bar A = 0$$

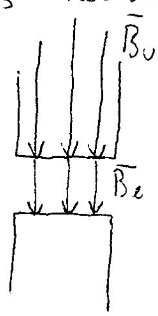
a cipőpaszta doboz palástján kiáramló fluxus

$$\Rightarrow -B_{1n} \cdot dA + B_{2n} \, dA + \Delta \phi_{PAL} = 0$$

ha $dl \to 0$ : $-B_{1n} \, dA + B_{2n} \, dA = 0 \Rightarrow \boxed{B_{1n} = B_{2n}}$

A mágneses indukció normális komponense folytonos.

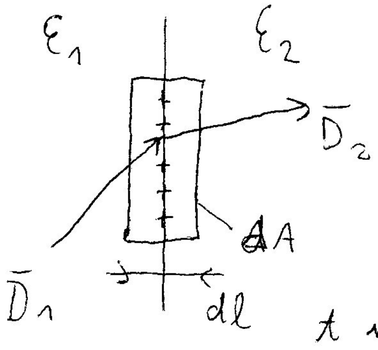
Pl.: Mágneses körök légrése:




$\bar B_v = \bar B_e$

## e) ELTOLÁSI VEKTORRA VONATKOZÓ HATÁRFELTÉTELEK

M4.



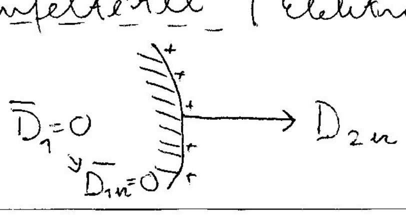

$$\oint_A \bar D \, d\bar A = \int_V \rho \, dV$$

$$-D_{1n} \cdot dA + D_{2n} \, dA + \Delta \phi^{elektr.}_{PAL.} = \sigma \cdot dA$$

A mágneses térerősséghez hasonlóan itt is van a jobb oldalon olyan mennyiség, ami akkor is megmarad, ha $dl \to 0$, ez a felületi töltéssűrűség.

Tehát, ha $dl \to 0$ : $\boxed{D_{2n} - D_{1n} = \sigma}$

peremfeltétel (Elektródák):




$D_{2n} = \bar D_2 = \sigma$ ($\bar D_2 \perp$ a felületre.)

## 5.) ISMERTESSE A MAXWELL-EGYENLETEK INTEGRÁLIS ÉS DIFFERENCIÁLIS ALAKJAIT!

Szükséges matek → általános áramsűrűség bevezetése → 1. ME, 2. ME, .....

### 0.) Bevezető, matematikai tételek

Az E.M. tér egyenleteit először James Clerk Maxwell állította össze 1864-ben. Az eddigi tapasztalat azt igazolja, hogy a Maxwell-egyenletek rendszere teljes, azaz bármely elektromágneses probléma elvben megoldható. A M-E-ek a fizika legátfogóbb törvényei közé tartoznak, érvényességüknek a kvantumos hatások (kvantumelektrodinamika) ~~és a~~ szabnak határt.

Szükséges matematikai tételek:

Gauss-Osztrogradszkij: $\int_V \operatorname{div} \bar{v}\, dV = \oint_A \bar{v}\, d\bar{A}$

Stokes-tétel: $\int_A \operatorname{rot} \bar{v}\, d\bar{A} = \oint_l \bar{v}\, d\bar{l}$

Szükséges matematikai definíciók:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$ : Fajlagos, lokális fluxus

$$\operatorname{div} \bar{v} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\oint_A \bar{v}\, d\bar{A}}{\Delta V}$$

(Fajlagos: $\frac{1}{A}$; lokális: $\Delta A \to 0$)

$$\operatorname{rot}_{\bar{n}} (\bar{v}) = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\oint_L \bar{v}\, d\bar{l}}{\Delta A}$$ : Fajlagos, lokális örvénysűrűség

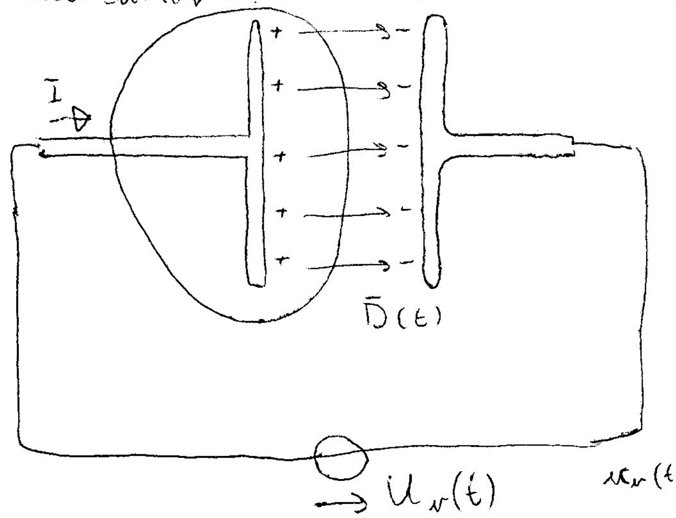
$$\operatorname{rot} \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{e}_x & \bar{e}_y & \bar{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\bar{e}_x - \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right)\bar{e}_y + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\bar{e}_z$$

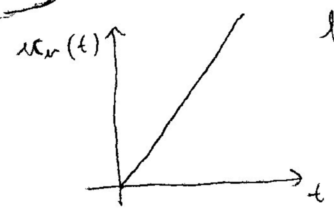
divergencia: vektor → skalár

rotáció: vektor → vektor

## 1) Az I. M.E.: A GERJESZTÉSI TÖRVÉNY

Az egyenlet teljes alakjának felírásához be kell vezetni az Eltolási áramsűrűséget. Vizsgáljuk meg a kondenzátort: A bejelölt zárt görbére igaz a folytonossági egyenlet: Befolyik az áram, nő a töltések száma. Ha megérkezik egy újabb ⊕ töltés, az „eltaszít" egy ⊕ töltést a túloldalról: Egy időtől függő felületi töltéssűrűséget kapunk: $\sigma(t)$



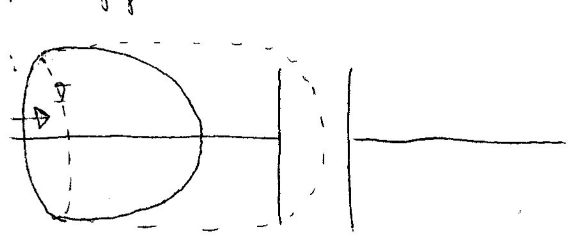

Ekkor a lemezek közt $\bar{D}(t)$ eltolási vektor lép fel a lemezek közt. Maxwell tisztán elméleti úton a következőt vette észre:

ugyan az a MÉRTÉKEGYSÉG

$$\bar{j}_{eltolási} = \frac{\partial \bar{D}(t)}{\partial t}$$

: Ha az eltolási vektor időben változik, hozzá áramsűrűséggel jellemezhető mennyiség köthető. Kiderült, hogy az eltolási áram is kelt mágneses teret.

Értelmezés:




ELTOLÁSI ÁRAM BELEILLESZTÉSE AZ I. M.E.-BE:

$$\oint_L \bar{H}\, d\bar{l} = \int_A \bar{j}\, d\bar{A}$$

: Ha a mágneses térerősséget zárt görbére integráljuk, akkor megkapjuk a zárt görbére feszített felületet döfő összes áramot. (!)

De ez független a z.g. feszített felület alakjától, akkor is ha az belóg a kondenzátorlemezek közti részbe.

így kell mondani vizsgán.

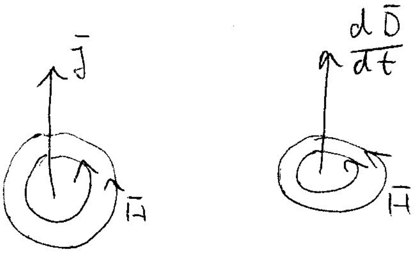
→ Kiderült (kísérlettel is igazolható): Az eltolási áramsűrűség is mágneses teret kelt!

Így az I. M.-E.: $\boxed{\oint_L \bar{H}\, d\bar{l} = \int_A \left(\bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right) d\bar{A}}$

Azaz a vezetési és eltolási áram mágneses teret kelt.

$$\int_A \mathrm{rot}\, \bar{H}\, d\bar{A} = \int_A \left(\bar{j} + \frac{\partial D}{\partial t}\right) d\bar{A}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}}$$



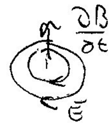

## 2.) A II. M.E.: A Faraday-féle indukciós törvény

$u_i = -\frac{\partial \phi}{\partial t}$ // $u_i = \oint_L \bar{E}\, d\bar{l}$ $\phi = \int_A \bar{B}\, d\bar{A}$

$$\boxed{\oint_L \bar{E}\, d\bar{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_A \bar{B}\, d\bar{A}}$$

$$\oint_L \bar{E}\, d\bar{l} = \int_A -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{A} \Rightarrow \cancel{\oint} \int_A \mathrm{rot}\, \bar{E}\, dA = \int_A -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}\, d\bar{A}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}}$$

A mágneses indukció időbeli változása villamos teret kelt. 

balosan

## 3.) A III. M.E.: A mágneses Gauss-törvény

$\boxed{\oint_A \bar{B}\, d\bar{A} = 0}$ $\int_V \mathrm{div}\, \bar{B}\, dV = 0$ $\boxed{\mathrm{div}\, \bar{B} = 0}$

A mágneses erővonalak mindig zártak, mágneses töltés nincs!

## 4) A IV. M.E.: Az elektrosztatika Gauss-~~törvénye~~ tétele

$\boxed{\oint_A \bar{D}\, d\bar{A} = \int_V \rho\, dV}$ $\int_V \mathrm{div}\, \bar{D}\, dV = \int_V \rho\, dV$ ~~div~~

$$\boxed{\mathrm{div}\, \bar{D} = \rho}$$

Zárt felület villamos fluxusa a belül levő összes töltéssel egyezik meg.

## 5.) A Maxwell egyenletek V. egyenletcsoportja

$\bar{D} = \varepsilon \bar{E}$ , $\bar{B} = \mu \bar{H}$ , $\bar{J} = \sigma (\bar{E} + \bar{E}_{be})$

## 6.) A VI. Maxwell - egyenlet

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 \left( = \frac{1}{2} \bar{D} \bar{E} + \frac{1}{2} \bar{B} \bar{H} \right)$$

## Folytonossági egyenlet

1. Me.

$$\mathrm{rot}\, H = J + \frac{\partial D}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\, H = \mathrm{div}\, J + \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\, D$$

$$\boxed{0 = \mathrm{div}\, J + \frac{\partial \rho}{\partial t}}$$

Folytonossági egyenlet

$$\int_A \bar{J} dA = - \frac{dQ}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_V \rho dV$$

$$\mathrm{div}\, \bar{J} = - \frac{d\rho}{dt}$$

# 6. ISMERTESSE AZ ELEKTRODINAMIKA FELOSZTÁSÁT!

## 1) BEVEZETŐ:

A Maxwell-Egyenletek általános alakjainak megoldása nagyon nehéz feladat. Különböző egyszerűsítő feltételezéseknél ~~feltételezéssel~~ ekkel az egyenletek alakja nagymértékben leegyszerűsödik. A tipikus egyszerűsítési lehetőségekkel kijelöljük az elektrodinamika fő részterületeit is.

## 2) ~~ELEKTROSZTATIKA~~ IDŐTŐL FÜGGETLEN JELENSÉGEK

Tekintsük először azt az esetet, amikor időben minden állandónak tekinthető, {a töltések nem mozognak, vagyis áram sem folyik} $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ $\{\bar{J} = 0\}$

Ekkor a Maxwell-egyenletek két külön csoportra bomlanak:

Elektrosztatika: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0 \quad \mathrm{div}\,\bar{D} = \rho \quad \bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

Magnetosztatika ~~(Magnetosztatika)~~: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = 0 \quad \mathrm{div}\,\bar{B} = 0 \quad \bar{B} = \mu\bar{H}$

~~(stacionárius áramok mágneses tere)~~

(Ennek egy speciális esete: $\bar{J} = 0$: Magnetosztatika)

## 3) STACIONÁRIUS ÁRAMLÁS ÉS MÁGNESES TÉR

Most azt az esetet tekintjük, amikor időben minden állandó, de a töltések mozognak, vagyis állandó áram folyik. A M.E.-ek egyik csoportja ekkor a

Stacionárius áramlási tér: $\mathrm{rot}\,\bar{E} = 0 \quad \mathrm{div}\,\bar{J} = 0$

$$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$$

A $\mathrm{div}\,\bar{J} = 0$ a folytonossági egyenletből következik. $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0\right)$

Ha az $\bar{E}_b$-től eltekintünk, akkor látható, hogy az elektrosztatika és a stac. áramlás közötti analógia kirajzolódik!

A másik csoport a:

Stacionárius áramok mágneses tere:

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\bar{B} = \mu\bar{H}$

## 4.) IDŐTŐL FÜGGŐ JELENSÉGEK

Most már vegyük figyelembe az időbeli változást, de első lépésként feltételezzük, hogy az eltolási áramsűrűség elhanyagolható a vezetési áramsűrűség mellett; ekkor:

a) Kváziastacionárius közelítés: $\left|\frac{\partial \bar{D}}{\partial t}\right| \ll |\bar{J}|$

Itt már az egyenletek szorosan kapcsolódnak:

$\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J}$ $\quad$ $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$

$\bar{B} = \mu\bar{H}$ $\quad$ $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$ $\quad$ $\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$

Ennek nagy szerepe van pl. az erősárami eszközök működésében, hisz 50 Hz-nél az eltolási áramsűrűség elég kicsi.

~~Az~~

b) Elektromágneses hullámok:

Az eltolási áram figyelembevételével az EM hullámok egyenleteihez jutunk, ami az általános eset: $\mathrm{rot}\,\bar{H} = \bar{J} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t}$ $\quad$ $\mathrm{rot}\,\bar{E} = -\frac{\partial B}{\partial t}$

$\mathrm{div}\,\bar{B} = 0$ $\quad$ $\mathrm{div}\,\bar{D} = \varrho$ $\quad$ $\bar{B} = \mu\bar{H}$ $\quad$ $\bar{D} = \varepsilon\bar{E}$

$\bar{J} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b)$.

Ebben az esetben már igen szoros kölcsönhatás lép fel az elektromos és mágneses tér között: A mágneses tér időbeni változása villamos ~~teret~~ indukál, az el. tér időbeni változása eltolási áramként mágneses teret gerjeszt.

## 7. ISMERTESSE AZ E.M. TÉRBEN AZ ENERGIA SŰRŰSÉGRE ÉS AZ ENERGIAÁRAMLÁSRA VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEKET!

### 1) AZ ENERGIAMÉRLEG

Az első két Maxwell egyenletből vezetjük le:

$$\text{rot}\, \bar{H} = \bar{j} + \frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \text{rot}\, \bar{E} = -\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{E}\, \text{rot}\, \bar{H} = \bar{j}\bar{E} + \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} \qquad \bar{H}\, \text{rot}\, \bar{E} = -\bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

$$\bar{H}\, \text{rot}\, \bar{E} - \bar{E}\, \text{rot}\, \bar{H} = -\bar{j}\bar{E} - \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - H\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Létezik egy olyan matematematikai tétel, hogy:

$\bar{v}\, \text{rot}\, \bar{u} - \bar{u}\, \text{rot}\, \bar{v} = \text{div}\,(\bar{u} \times \bar{v})$, szerint:

$$\text{div}(\bar{E} \times \bar{H}) = -\bar{j}\bar{E} - \bar{E}\frac{\partial \bar{D}}{\partial t} - \bar{H}\frac{\partial \bar{B}}{\partial t}$$

Ha $\varepsilon$ és $\mu$ időfüggetlen:

$$-\varepsilon \bar{E}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t} - \mu \bar{H}\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} = \bar{j}\bar{E} + \text{div}\,(\bar{E} \times \bar{H})$$

Integráljunk térfogatra! Mivel: $\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon 2\bar{E}\frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) dV}_{\text{A V térfogat EM energiája}} = \underbrace{\int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dV - \int_V \bar{j}\bar{E}_b\, dV}_{\bar{j} = \sigma(\bar{E} + \bar{E}_b),\ \bar{E} = \frac{\bar{j}}{\sigma} - \bar{E}_b} + \int_V \text{div}\,(\bar{E} \times \bar{H})\, dV$$

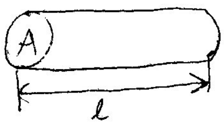
A matematikai Gauss tétel (G-O) miatt

$$\boxed{\underbrace{-\frac{\partial}{\partial t}}_{\text{csökkenő}}\underbrace{\int_V \left(\frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2}\mu H^2\right) dV}_{\text{V térf. EM. energiája}} = \underbrace{\int_V \frac{j^2}{\sigma}\, dV}_{\text{Joule-hő}} - \underbrace{\int_V \bar{j}\bar{E}_b\, dV}_{\text{fesz. forrás}} + \underbrace{\oint_A (\bar{E} \times \bar{H})\, d\bar{A}}_{\text{kisugárzott telj.}}}$$

Szemléletesen: Az energiamérleg jobb oldala megmondja, hogy miért csökken $\left(-\frac{\partial}{\partial t}\right)$ a bal. Zárt térfogat összes EM energiájáról van szó, ez csökken.

a) Joule-hő: valamilyen $\sigma$ vezetőképességű anyagban ~~disszipálódó~~ keletkező hő. Az összes energia egy része hővé alakul. Fogyasztó mennyiség.

Pl.: Hasáb ($A$ keresztmetszetű, $l$ hosszú hasáb):




$$\int_V \frac{J^2}{\sigma}\, dV \qquad R=\frac{l}{\sigma A} \qquad \sigma=\frac{l}{RA}$$

$$\int_V \frac{J^2 R A}{l}\, dV = \frac{J^2 R A}{\cancel{l}}\cdot A\cancel{l} = J^2 R A^2 = R I^2$$

b) Forrás teljesítménye:

Ha a beiktatott térerősség és az áramsűrűség egyirányúak, akkor az $\bar{E}_b \bar{J}$ skalárszorzat pozitív lesz, a negatív előjel megmarad. Ez hozzájárul a térrész EM energiájához, nem fogyasztja, hanem növeli.


$$\mathcal{E}=\int \bar{E}_b\, dl$$

$\mathcal{E}$: elektromotoros erő

$$U_v=\int \bar{E}\, d\bar{l} \qquad P=-U_v I \qquad P=\mathcal{E} I$$

P lehet poz. és negatív: Az akkumulátor töltődik vagy lead.

c) A felületen átáramló teljesítmény

$\bar{S} \triangleq \bar{E}\times\bar{H}$ : Poynting vektor $\quad [S]=\frac{V}{m}\,\frac{A}{m}=\frac{W}{m^2}$

A Poynting vektor a felületegységen a felületre merőlegesen átáramló teljesítmény.

2) ENERGIASŰRŰSÉG

$$w=\frac{1}{2}\varepsilon\bar{E}^2+\frac{1}{2}\mu\bar{H}^2=\frac{1}{2}\bar{D}\bar{E}+\frac{1}{2}\bar{B}\bar{H}$$

# ~~8.~~ ISMERTESSE AZ ELEKTROSZTATIKA POISSON-EGYENLETÉT ÉS MEGOLDÁSÁT! példa, sk. pot.

El. sztatika → skalárpot → POISSON → megoldás + általa → kifejezve descartes-koordinátákban → ...ben felvehető egy töltés pontból...

## 1. SKALÁRPOTENCIÁL

Elektrosztatikus problémának nevezzük az olyan feladatokat, ahol időben minden állandónak tekinthető $\left(\frac{d}{dt}=0\right)$ és a töltések sem mozognak ($\bar{J}=0$). Ekkor az elektrosztatika egyenletei:

$$\text{rot}\,\bar{E}=0 \qquad \text{div}\,\bar{D}=\varrho \qquad \bar{D}=\varepsilon\bar{E}$$

Bevezetünk egy segédmennyiséget. Az hogy az elektrosztatikus tér örvénymentes ($\text{rot}\,\bar{E}=0$), lehetővé teszi, hogy a villamos teret egy skalár gradienseként vezessük be: $\bar{E}=-\text{grad}\,\varphi$ $\quad$ $\varphi$: skalárpotenciál $(\text{rot grad}\,\varphi=0)$

A negatív előjel azt fejezi ki, hogy a térerősség a kisebb potenciálú pont felé mutat. Ezzel az $\bar{E}$ vektorfüggvény meghatározásának a feladatát visszavezettük a $\varphi$ skalárfüggvény meghatározásának feladatára.

## 2. POISSON EGYENLET

Szeretnénk a $\varphi$ skalárfüggvényre valamilyen egyenletet bevezetni: ($\varepsilon$ homogén \& egyenletes helyfüggetlen).

$$\text{div}\,\bar{D}=\varrho \Rightarrow \text{div}\,\varepsilon\bar{E}=\varrho \Rightarrow \text{div}\,\bar{E}=\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow \text{div grad}\,\varphi=-\frac{\varrho}{\varepsilon}$$

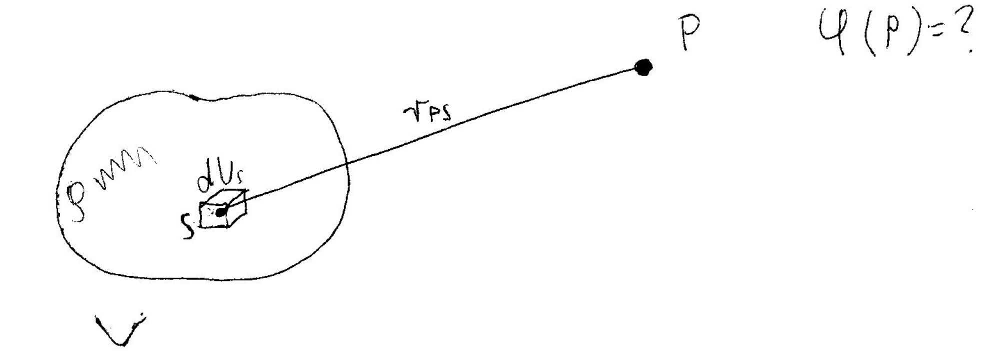
$$\boxed{\Delta\varphi=-\frac{\varrho}{\varepsilon}}$$

A Poisson egyenlet, ahol

$$\Delta\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

# 3. A Poisson egyenlet általános megoldása

Nézzük a következő feladatot (ez egy fizikai alapon történő levezetés, de létezik matematikai is!)




Adott egy V térfogat (homogén közeg permittivitása ε), Ebben töltés van (mint pl. az elektroncsőben repülő elektronok töltést ~~jelentenek~~ alkotnak, vagy a tranzisztor kiürített rétegében is töltés van).

Keressük a potenciált a P pontban.

Osszuk fel a térfogatot kis térfogatelemekre.

A térfogatelem nagysága $dV_s$. P és S közti távolságot $r_{PS}$-el jelöljük. S ponttöltésnek tekinthető, vagyis:

$$d\varphi(P) = \frac{\rho(S)\, dV_s}{4\pi \varepsilon r_{PS}}$$

Ponttöltés potenciálja: A töltés úgy hozza létre a potenciálját, mint ponttöltések szuperpozíciója.

$$\varphi(P) = \int_V \frac{\rho(S)\, dV_s}{4\pi\varepsilon\, r_{PS}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(S)}{r_{PS}}\, dV_s$$

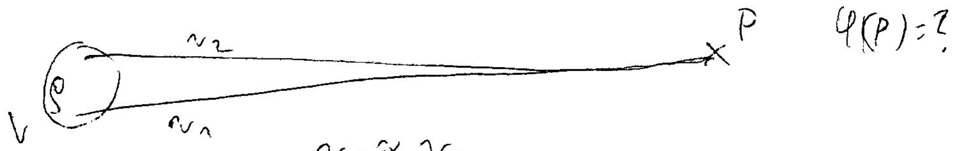
$$r_{PS} = \sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}$$

$$\varphi(x_P, y_P, z_P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \iiint \frac{\rho(x_S, y_S, z_S) \quad dx_S\, dy_S\, dz_S}{\sqrt{(x_P - x_S)^2 + (y_P - y_S)^2 + (z_P - z_S)^2}}$$

A töltés villamos teret és potenciált hoz létre.

4. Mikor tekinthető egy töltés eloszlás ponttöltésnek?

Ha egy töltésfelhőnek olyan távoli pontban keressük a potenciálját, hogy a ~~töltő~~ térfogat bármely pontjától vett távolsága közel azonos. Továbbá ha valamilyen ilyen távolság sokkal nagyobb mint a töltés legnagyobb lineáris mérete




$$r_1 \approx r_2$$

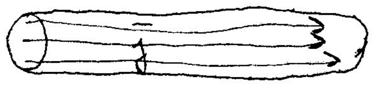
$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int \frac{\rho(S)\, dV_S}{r_{PS}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon r} \int_V \rho\, dV_S = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$$

# ~~9.~~ 9.) ISMERTESSE AZ ÁRAMLÁSI TÉR ALAP-ÖSSZEFÜGGÉSEIT!

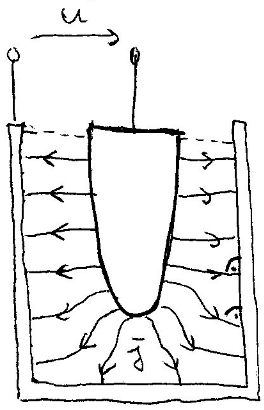
1. Bevezető: Bevezető → példák → elektrodinamika feladatainak [illegible] → analógia → → milyen probl. feltételekre [illegible] és az analógia → Pontforrás ( $\frac{\cdot}{4\pi r^2}$ ) → G-C analógia

Olyan eseteket vizsgálunk, amikor időben minden állandó $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$, de a töltések mozognak, vagyis állandó áram folyik. Ilyen például a

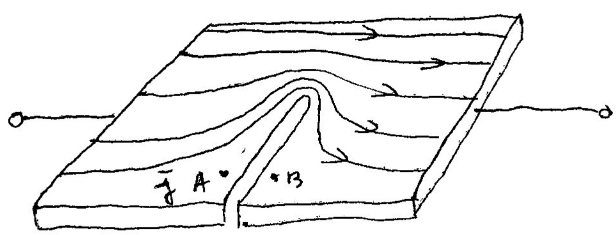
- Vezetékbeli áramlás: Az áramsűrűség vonalak követik a vezető hossztengelyét.




- Folyadékellenállás




- vastagréteg ellenállás

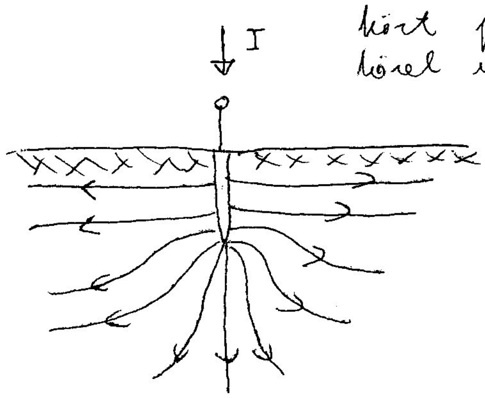



Fém lap bevágással.
A bevágás két ~~lapja~~ partja közt pot. különbség van. Ha ugyan közel vannak, a potenciál ugrik.

$u = j \Rightarrow u$

$\bar{j} \to E \to U_{AB}$

- Földelés




## 2. ALAPEGYENLETEK:

~~Itt~~ a Maxwell-egyenletekből indulunk ki: $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$

$$\operatorname{rot}\bar{E}=0 \qquad \operatorname{div}\bar{j}=0 \qquad \bar{j}=\sigma\bar{E}$$

↑

Folytonossági egyenlet stacionárius esetben.

összehasonlítás miatt nézzük meg az elektrosztatika egyenleteit:

$rot\ \bar{E} = 0 \qquad div\ \bar{D} = \varrho \qquad \bar{D} = \varepsilon \bar{E}$

A következő megfigyeléseket tehetjük: Analógia van a térbeli áramlás és az elektrosztatika egyenletei között.

- Az analógia

Akkor nevezünk két mennyiséget analógnak, ha:

- Azonos formájú differenciálegyenletek írják le őket.
- Azonosak a peremfeltételek

a) Az el. sztatika és a stac. áramlás ~~(egyenletei)~~ közötti analógia ~~felállítá~~ felállítása során a

$div\ \bar{j} = 0 \qquad div\ \bar{D} = \varrho$ pár okoz gondot,

Ezt úgy hidalták át, hogy azt mondták hogy a térbeli áramlás a töltésmentes elektrosztatikával analóg ($\varrho = 0$).

b) Vizsgáljuk meg a peremfeltételeket is, hogy kimondhassuk az analógia jogosságát.

Peremfeltételek elektródán:

el. sztatika: ekvipotenciális

térbeli áramlás: $\sigma_{el} \gg \sigma_{közeg} \Rightarrow$ Merőlegesen lépnek ki az áramsűrűség vonalak, $\Rightarrow$ térerősség is merőleges, ekvipotenciális.

Ha a vezető-szigetelő határon mozgolódunk. nem 0

térbeli áramlás: $J_n = 0$ (Csak akkor lenne ~~te~~ ~~tetszőleges~~, ha töltéseket rakna le: $\operatorname{div} \bar{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,

de mivel $\frac{\partial}{\partial t} = 0$, nem lehet)

Ennek viszont nincs elektrosztatikus megfelelője: $D_n \neq 0$, nincs $D_n = 0$ peremfeltétel.

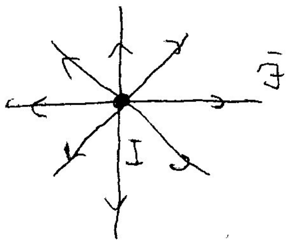
Olyan stac. áramlási feladatoknál, ahol vezető-szigetelő határ van, nincs el. sztatikus megfelelője. Pl. Helyettesítő töltések vs. helyettesítő források módszere.

Összefoglalva: Ha nincs tértöltés, és nem vezető-szigetelő határfelületen mozgolódunk

| El. sztatika | $\bar{E}$ | $\bar{D}$ | $\varepsilon$ | $Q$ | $C$ |
|---|---|---|---|---|---|
| áramlási tér | $\bar{E}$ | $\bar{J}$ | $\sigma$ | $I$ | $G$ |

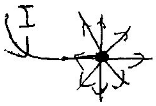
## 3. PONTFORRÁS

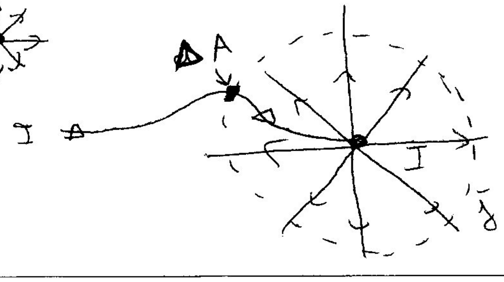
Egy térbeli pontból egyenletesen, a tér minden irányában, összesen $I$ áram folyik ki (pontforrás erőssége).



$$\operatorname{div} \bar{j} = 0 \Rightarrow \int_V \operatorname{div} \bar{j}\, dV = 0 \overset{G-O}{\Longrightarrow} \oint_A \bar{j}\, d\bar{A} = 0$$

Ez azt jelenti, hogy azt az áramot, ami a pontforrásból kifolyik, azt oda be is kell vezetni.





Jelöljük $\Delta A$-val azt a felületet, ahol $I$ befolyik:

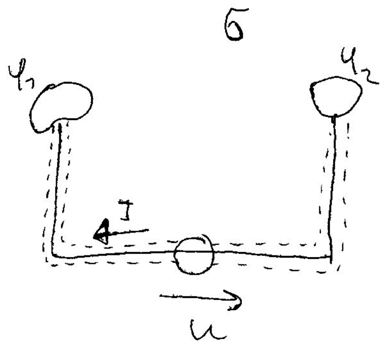
$$\int_{\Delta A} \bar{j}\, d\bar{A} + \int_{A-\Delta A} \bar{j}\, d\bar{A} = 0$$ $\Delta A$ nagyon kicsi, $A$ folytonos.

$$-I + j\, 4\pi r^2 = 0 \Rightarrow j(r) = \frac{I}{4\pi r^2}$$

~~Ez az áramsűrűség~~ $$E(r) = \frac{\bar{j}}{\sigma} = \frac{I}{4\pi\sigma r^2}$$

$$\varphi(r) = \frac{I}{4\pi\sigma r}$$ $I$ és $Q$ között analógia!

## 4. TÉRBELI ÁRAMLÁSI ELLENÁLLÁS




$$R \triangleq \frac{U}{I} \qquad U = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U}$$ analóg a $C = \frac{Q}{U}$-val

- Földelési ellenállás (magányos elektróda kapacitása): $C_{10} = \frac{Q}{\Phi}$ $\quad R_{föld} = \frac{U_{1\infty}}{I} = \frac{\varphi}{I}$

## 5. KAPACITÁS ÉS TÉRBELI VEZETŐKÉPESSÉG:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint_A \bar{D}\, d\bar{A}}{\int_l \bar{E}\, d\bar{l}} = \varepsilon \frac{\oint_A \bar{E}\, d\bar{A}}{\int_L \bar{E}\, d\bar{l}}$$

$$G = \frac{I}{U} = \frac{\oint_A \bar{J}\, d\bar{A}}{\int_l \bar{E}\, d\bar{l}} = \sigma \frac{\oint_A \bar{E}\, d\bar{A}}{\int_l \bar{E}\, d\bar{l}}$$

$$\left.\right\} \quad \frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\sigma} \qquad G = \frac{\sigma}{\varepsilon} C$$

Olyan mintha $C$ formulájában $\varepsilon$-t $\sigma$-ra cserélnénk. Ekkor megkapjuk $G$.

# 10. ISMERTESSE AZ ELEKTROSZTATIKA LAPLACE EGYENLETÉT ÉS A KAPCSOLÓDÓ PEREMFELTÉTELEKET!

## 1. A LAPLACE EGYENLET

A skalár potenciálnak a $\Delta\varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon}$ Poisson egyenletet kell kielégítenie minden közegben.

Olyan esetben, amikor nincs töltés:

$\Delta\varphi = 0$, ez a Laplace-egyenlet. Ha forrásmentes teret vizsgálunk, ~~a pt~~ akkor a peremértékek, az elektródákon felvett értékek határozzák meg a teret (vagy potenciál, vagy annak deriváltja).

## 2. A LAPLACE EGYENLET EGYÉRTELMŰ MEGOLDHATÓSÁGA

Azt bizonyítjuk, hogy a peremfeltételek meghatározzák a teret.

A matematikai levezetéshez szükség van a Green-tételre (vektoranalitikai azonosság):

$$\boxed{\operatorname{div}(u\cdot\bar{v}) = u \operatorname{div}\bar{v} + \bar{v}\operatorname{grad} u} \quad \text{Green-tétel}$$

Alkalmazzuk ezt a tételt: $u = \psi \quad \bar{v} = \operatorname{grad}\varphi$

$$\Rightarrow \operatorname{div}(\psi \operatorname{grad}\varphi) = \psi \underbrace{\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi}_{} + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi \quad // \text{integrálás térfogatra + G-O tétel}$$

$$\oint_A \psi \operatorname{grad}\varphi \, d\bar{A} = \int_V (\psi\Delta\varphi + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi)\, dV$$

Vizsgáljuk meg az egyenlet bal oldalát: A $d\bar{A}$ egy normális egységvektort tartalmaz, és tudjuk hogy a gradiens skalárisan szorozva a normális egységvektorral, a grad. normális irányú vetületét jelenti:

$$\oint_A \psi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dA = \int_V (\psi\Delta\varphi + \operatorname{grad}\varphi \operatorname{grad}\psi)\, dV$$

Vegyük $\Psi$-t egyenlőnek $\varphi$-vel (eddig ~~azt~~ a Green-tétel miatt vettük külön): $\oint_A \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dA = \int_V (\varphi \Delta \varphi + \text{grad}^2 \varphi) dV$

Tegyük fel hogy két megoldást kapunk: $\varphi_1$ és $\varphi_2$, ezekről fogjuk megmutatni, hogy csak azonosak lehetnek (Ez az egyértelmű megoldhatóság).

Tulajdonságaik:

- Mindkettő eleget tesz a Laplace (Poisson) egyenletnek: $\Delta \varphi_1 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ $\quad \Delta \varphi_2 = -\frac{\rho}{\varepsilon}$ (Tértöltés ha van akkor is igaz)

- A perem egy részén $\varphi$ értéke elő van írva ($f(s)$): $\varphi_1 \big|_{A_D} = f(s)$ $\quad \varphi_2 \big|_{A_D} = f(s)$

- Van olyan része a felületnek, ahol $\varphi$ normálisa van előírva:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\bigg|_{A_N} = g(s) \qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\bigg|_{A_N} = g(s)$$

Képezzük a két megoldás különbségét:

$$\Phi = \varphi_1 - \varphi_2$$

$$\oint_A \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA = \int_V (\Phi \Delta \Phi + \text{grad}^2 \Phi) dV$$

A bal oldal felontható két részre, ahol a potenciál, és ahol annak normálisa van előírva: Nullát írunk elő

$$\int_{A_D} \underbrace{\Phi}_{0} \frac{\partial \Phi}{\partial n} dA + \int_{A_N} \Phi \underbrace{\frac{\partial \Phi}{\partial n}}_{0} dA = \int_V \left[ \Phi \underbrace{\Delta \Phi}_{0} + \text{grad}^2 (\varphi_1 - \varphi_2) \right] dV = 0$$

Ezért: $\mathrm{grad}^2(\varphi_1-\varphi_2)=0$

$$\mathrm{grad}(\varphi_1-\varphi_2)=0$$

$$\varphi_1-\varphi_2=\mathrm{const}$$

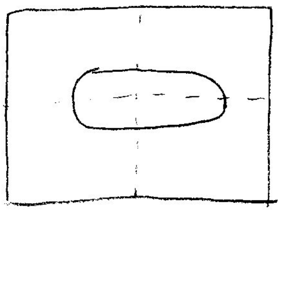
A Laplace egyenlet megoldhatóságához a követ-kező feltételek szükségesek: A peren egy ré-szén a potenciál van előírva:

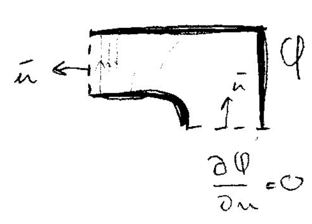
ha $\boxed{\varphi\Big|_{A_D}=f(s)}$ : DIRICHLET peremfeltétel

ha $\boxed{\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{A_N}=g(s)}$ : NEUMANN peremfeltétel

Ha ezeket az előírásokat a teljes felületen meg-tesszük, akkor egyértelműen megoldható feladat-ot kapunk. $\Rightarrow$ A Laplace egyenletnek a pe-remfeltételeket kielégítő megoldását kell megtalálni.

Példa: Dirichlet és Neumann per. felt.-re:





## 11. ISMERTESSE AZ ELEKTROSZTATIKUS FELADATOK MEGOLDÁSÁT A HELYETTESÍTŐ TÖLTÉSEK MÓDSZERÉVEL!

LAPLACE EGYENET → DIRICHLET, NEUMANN

### 1. Bevezető:

A kevés gyakorlati ~~esetekben kívül~~ esetben használható megoldáson kívül különleges megoldási lehetőségeket nyújt az a tény, hogy ~~az elektródától~~ a Laplace egyenletnek a peremfeltételeket kielégítő megoldását kell hogy megtaláljuk. Ilyen pl. a helyettesítő töltések módszere.

### 2. HELYETTESÍTŐ TÖLTÉSEK MÓDSZERE:

A töltések az elektródákon helyezkednek el, és a helyettesítő töltések ezeknek súlyozott, sűrített kifejezései. Az elektródák terét úgy számoljuk (az elektródákon kívül), mintha a helyettesítő töltések hozták volna létre.

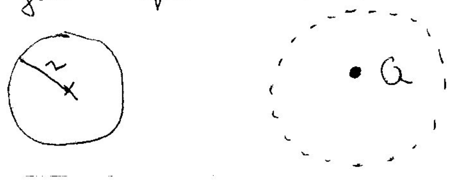
Kritérium: a helyettesítő töltések együttes potenciálja valamennyi elektródát ekvipotenciálissá tegye.

Bizonyítás: A helyettesítő töltések potenciálja eleget tesz a Laplace egyenletnek, ~~mert~~ kivéve a töltés helyét. De ez nem zavar minket, mert a helyettesítő töltés az elektródán belül van, és ott úgysem vizsgálódunk.

A konstrukcióból következően a helyettesítő töltések potenciálja konstans az elektródákon, így a Laplace egyenletnek a peremfeltételeknek is eleget tevő megoldását kapjuk meg.

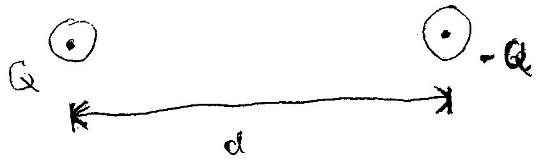
### 3. PÉLDÁK

a) $r_0$ sugarú fémgömb, végtelen távoli ponthoz képest valamilyen potenciálra kötve:

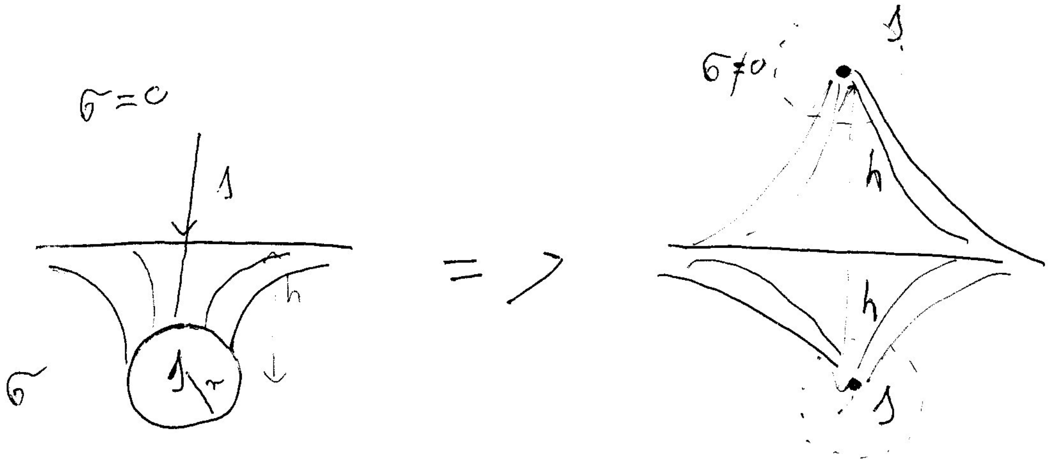



Helyettesítő töltése: a gömb közép-be helyezett töltés.

b) két gömb ;




csak közelítőleg lesz ekvipotenciális
$d \gg r_0$




$J_h = 0$

$$\varphi = \frac{s}{4\pi\sigma}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{2h}\right)$$

fémgömb -> helyettesítő pontforrás (ekvipotenciális teret hoz létre a gömb felszínén)

A J-nek nem lehet normális komponense a 2 közeg határán

$\sigma = 0$ ~~→ ez az~~ !

ez a peremfeltétel biztosítható a fenti tükör elrendezéssel

# 13. ISMERTESSE A VÉGES DIFFERENCIÁK MÓDSZERÉT!

## 1. BEVEZETŐ:

Az elektromágneses feladatok megoldásának hatékony módszerei numerikus eljárásokon alapulnak. Ezek során az ismeretlen függvények meghatározása helyett nagyszámú ismeretlen számérték meghatározása a feladatunk. Ezek a számértékek közelítőleg meghatározzák az ismeretlen függvényt. A gyakorlatban egy lineáris egyenletrendszert állítunk fel, amelyet számítógép segítségével oldunk meg. Ilyen a véges differenciák módszere (rácsmódszer) is.

## 2. VÉGES DIFFERENCIA (RÁCS) MÓDSZER

A módszer lényege: Azt a tartományt, ahol a Laplace-egyenletet meg kell oldani, négyzethálóval felbontjuk, gyakorlatilag rácsot helyezünk rá. Ezek után nem a tér minden pontjában keressük a potenciált, hanem csak a rácspontokban. Ha elég sűrűn vesszük fel a rácsot, akkor ez a megoldás jól leírja az általános viszonyokat.

Attól, hogy a Laplace-egyenlet teljesül a rácspontokra, egy bizonyos kötés alatt ki kötöttük:

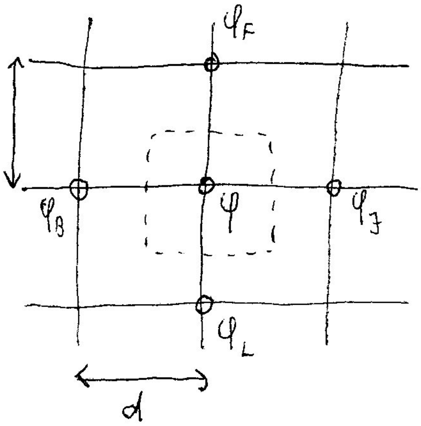
$$\oint_A \bar{E}\, d\bar{A} = 0$$ : Gauss-tétel töltésmentes esetben.

$$\oint_L \bar{E}\, d\bar{l} = 0$$ : E = pot. közl / örvénymentesség

Ezeket az egyenleteket fogjuk felhasználni.

Összesen három féle rácshelyzetet fogunk megvizsgálni (Egyenletes rácsosztásban):

a)

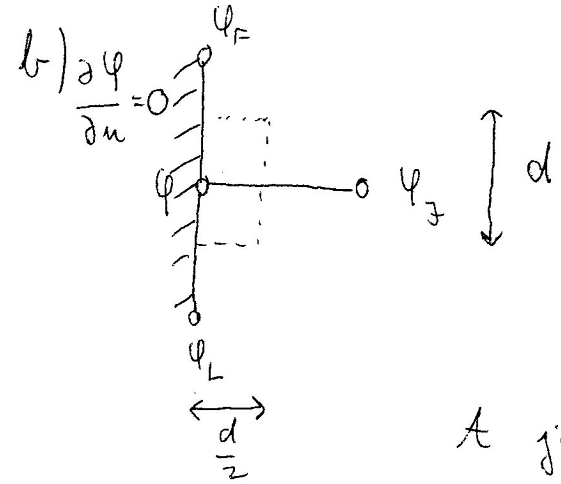



$$\frac{\varphi-\varphi_J}{d}\cdot d+\frac{\varphi-\varphi_F}{d}\cdot d+\frac{\varphi-\varphi_B}{d}d+\frac{\varphi-\varphi_L}{d}\cdot d=0$$

$$4\varphi-\varphi_J-\varphi_F-\varphi_B-\varphi_L=0$$

Tehát egy rácspont pot. értékét meghatározza a környező rácspontok potenciáljainak számtani közepe (átlaga).

b)



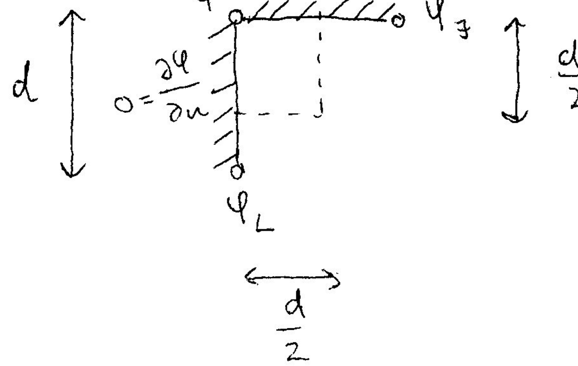

Zérus Neumann peremfeltétel

$$\frac{\varphi-\varphi_J}{d}d+\frac{\varphi-\varphi_F}{d}\frac{d}{2}+\frac{\varphi-\varphi_L}{d}\frac{d}{2}=0$$

$$4\varphi-2\varphi_J-\varphi_F-\varphi_L=0$$

A jobb oldali rácspont 2-es szorzóját úgy is lehet interpretálni, hogy a $\varphi$ baloldalán megjelenik egy fiktív rácspont.

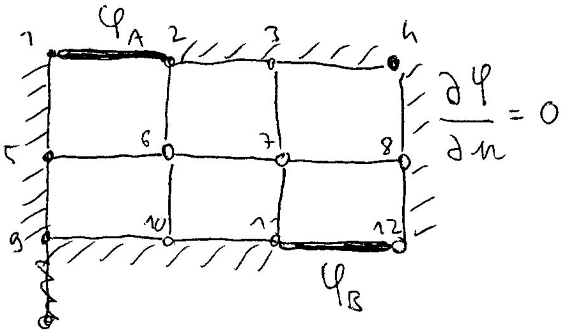
c) A rácspontunk Neumann peremek sarkában van.




$$\frac{\varphi-\varphi_J}{d}\frac{d}{2}+\frac{\varphi-\varphi_L}{d}\frac{d}{2}=0$$

$$4\varphi-2\varphi_J-2\varphi_L=0$$

Nézzünk meg egy konkrét példát:




Kezdetben a Dirichlet per. felt. nem vesszük tudomásul, azt majd a végén érvényesítjük.

1. pont:

$4\varphi_1 - 2\varphi_2 - 2\varphi_5 = 0$

$$
\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\
\hline
1 & & & & & & & & & & & & \\
2 & -1 & 4 & -1 & & & -2 & & & & & & \\
3 & & -1 & 4 & -1 & & & -2 & & & & & \\
4 & & & -2 & 4 & 0 & & & -2 & & & & \\
5 & -1 & & & 0 & 4 & -2 & & & -1 & & & \\
6 & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & & \\
7 & & & -1 & & & -1 & 4 & -1 & & & -1 & \\
8 & & & & -1 & & & -2 & 4 & 0 & & & -1 \\
9 & & & & & -2 & & & 0 & 4 & -2 & & \\
10 & & & & & & -2 & & & -1 & 4 & -1 & \\
11 & & & & & & & -2 & & & -1 & 4 & -1 \\
12 & & & & & & & & -2 & & & -2 & 4
\end{array}
$$

- Ritka mátrix (sparse): kis helyigényű tárolás.
- 5 sávos sávmátrix
- A Dirichlet peremfeltételt még ~~érv~~ érvényesíteni kell.

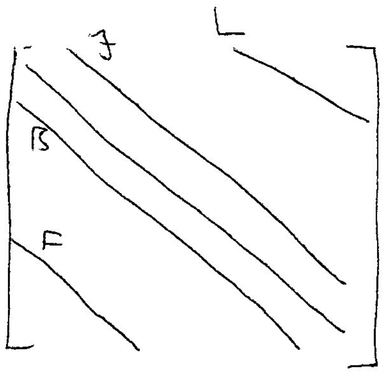
– Dirichlet érvényesítése:

1. egyenlet helyett $\varphi_1 = \varphi_A$

2. — " — $\varphi_2 = \varphi_A$

11. — " — $\varphi_{11} = \varphi_B$

12. — " — $\varphi_{12} = \varphi_B$

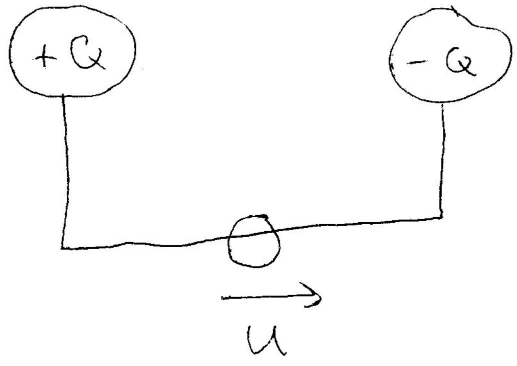


# 14. ISMERTESSE A RÉSZKAPACITÁSOK FOGALMÁT ÉS MEGHATÁROZÁSÁNAK MÓDJÁT!

Kapacitás def (AUCu) → Maxwell e.h. (pot: Q-val) → Kapacitásmátrix (...)
→ Részkapacitások

## 1. KAPACITÁS

Vizsgáljuk meg egy példán keresztül:

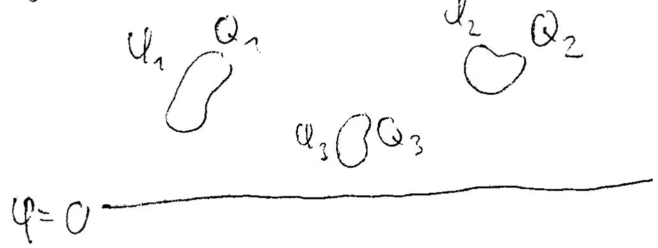



Van két elektródánk (jól vezető anyagból készült test.). Ezekre U feszültséget kapcsolunk: Az egyik elektródára Q, másikra -Q jut (töltésszétválasztó hatás). Ha a feszültséget kétszeresére növeljük, akkor a töltések is ~~kétszeresére~~ kétszeresükre válnak, (fordítva is igaz):

$$\boxed{C \triangleq \frac{Q}{U}} \qquad [C] = \frac{As}{V} = F$$

## 2. RÉSZKAPACITÁSOK

Kettőnél több elektróda esetén részkapacitásokról beszélünk.




Írjuk fel a potenciálokat a töltések segítségével: A ~~ke~~ $p_{mn}$-ek az ún. Maxwell-együtthatók.

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= p_{11} Q_1 + p_{12} Q_2 + p_{13} Q_3 \\ \varphi_2 &= p_{21} Q_1 + p_{22} Q_2 + p_{23} Q_3 \\ \varphi_3 &= p_{31} Q_1 + p_{32} Q_2 + p_{33} Q_3 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

Maxwell együtthatók jelentése:

$$p_{12} = \left.\frac{\varphi_1}{Q_2}\right|_{Q_1 = Q_3 = 0}$$

igazolni lehet, hogy

$$p_{ik} = p_{ki}$$

Ezt az egyenletet invertálni kell, mert minket a töltés érdekel a potenciállal kifejezve:

$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3$$
$$Q_2 = c_{21}\varphi_1 + c_{22}\varphi_2 + c_{23}\varphi_3$$
$$Q_3 = c_{31}\varphi_1 + c_{32}\varphi_2 + c_{33}\varphi_3$$

$c_{ik} = c_{ki}$

Ezek kis $c$-betűk, még nincs olyan jelentésük, hogy kapacitások lennének.

A következő módosítást végezzük el:

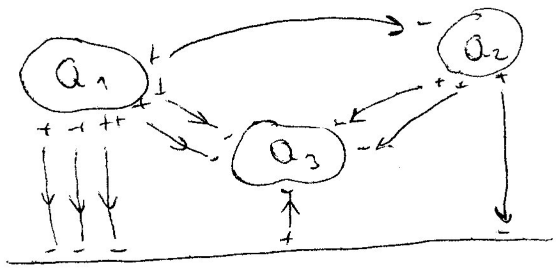
$$Q_1 = c_{11}\varphi_1 + c_{12}\varphi_2 + c_{13}\varphi_3 + c_{12}\varphi_1 + c_{13}\varphi_1 - c_{12}\varphi_1 - c_{13}\varphi_1$$

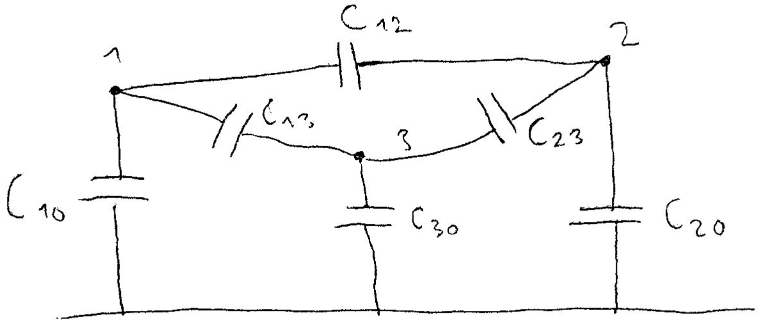
$$Q_1 = \underbrace{(c_{11}+c_{12}+c_{13})}_{C_{10}}\varphi_1 \underbrace{- c_{12}}_{\substack{\text{előjellel együtt} \\ C_{12}}}(\varphi_1-\varphi_2) \underbrace{- c_{13}}_{\substack{\text{előjellel együtt!} \\ C_{13}}}(\varphi_1-\varphi_3)$$

Ezek már ténylegesek, így be tudjuk vezetni kondenzátorokat, amik az egyes elektródákhoz vannak kapcsolva!

$$Q_1 = C_{10}\varphi_1 + C_{12}(\varphi_1-\varphi_2) + C_{13}(\varphi_1-\varphi_3)$$
$$Q_2 = C_{21}(\varphi_2-\varphi_1) + C_{20}\varphi_2 + C_{23}(\varphi_2-\varphi_3)$$
$$Q_3 = C_{31}(\varphi_3-\varphi_1) + C_{32}(\varphi_3-\varphi_2) + C_{30}\varphi_3$$

Helyettesítő kapacitás-hálózatot tudunk az elektródákhoz kapcsolni:




Megmutatják, hogy az egyes elektródák töltéseit milyen módon köti le a szomszéd elektróda töltése.

A kis $c$-k reciprocitása miatt a nagy $C$-k is reciprokok: $C_{ik} = C_{ki}$

Elektródák közti részkapacitások, elektróda és föld (zérus pot. elektróda) között földkapacitás

## 15. ISMERTESSE A STACIONÁRIUS ÁRAM MÁGNESES TERÉRE VONATKOZÓ ÖSSZEFÜGGÉSEKET, A VEKTORPOTENCIÁL BEVEZETÉSÉT!

Alapegyenletek → $\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$ → $\text{rot}\,\text{rot}\,\bar{A} = \mu J$ → $\Delta A = \text{grad}\,\text{div}\,\bar{A} - \text{rot}\,\text{rot}\,\bar{A}$ → Mértékválasztás → megoldás a skalár-paraméteres analógiával ($\bar{A}(r) = \frac{\mu}{4\pi}\int_V \frac{J(s)}{r_{rs}}\,dV_s$ → régi

### 1. ALAPEGYENLETEK:

Olyan eseteket vizsgálunk, amikor időben minden állandó ($\frac{d}{dt} = 0$), és állandó áramok folynak. Ekkor a mágneses térerősségre és indukcióra vonatkozó Maxwell-egyenletek:

$$\text{rot}\,\bar{H} = \bar{J} \qquad \text{div}\,\bar{B} = 0 \qquad \bar{B} = \mu\bar{H} \qquad \mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\frac{Vs}{Am}$$

ahol $\mu$ a közeg permeabilitása, amelyről a továbbiakban feltételezzük, hogy legalább térrészenként állandó.

### 2. VEKTORPOTENCIÁL:

~~Mivel H nem örvénymentes, ezért~~

A $\text{div}\,\bar{B} = 0$ egyenletet ki lehet elégíteni úgy, hogy a $\bar{B}$-t egy vektor rotációjából vezetjük le:

$\bar{B} = \text{rot}\,\bar{A}$, hiszen egy rotációképzésből keletkezett vektor mindig divergenciamentes lesz: $\text{div}\,\text{rot}\,\bar{v} \equiv 0$

Ennek az $\bar{A}$-vektornak a neve vektorpotenciál.

(Emlékeztető: $\text{rot}\,\bar{E} = 0$ egyenletet $\bar{E} = -\text{grad}\,\varphi$, hiszen gradiensképzésből keletkezett vektor mindig örvény (rotáció) mentes.) $\text{rot}\,\text{grad}\,v = 0$

A skalárpotenciál előnyei, pl. a szemléletes energetikai jelentés (térbe helyezett töltés helyzeti energiája a pontban fellépő potenciállal arányos) nincs meg. A skalárpotenciál mérésére műszerek készíthetők (voltmérő), míg a vektorpotenciálnál ez nehéz, gyakorlatban nehezen mérhető.

Helyettesítsünk be a rot $\bar{H} = \bar{J}$ egyenletbe:

rot $\bar{B} = \mu \bar{J} \Rightarrow$ rot rot $\bar{A} = \mu \bar{J}$

- Nézzük meg az alábbi vektoranalitikai azonosságot (vektorra alkalmazott Laplace-kifejezés):

$$\boxed{\Delta \bar{A} \triangleq \text{grad div}\, \bar{A} - \text{rot rot}\, \bar{A}}$$

Descartes-koordinátákban 3 skaláregyenlet:

$A_x$-re, $A_y$-ra, $A_z$-re vonatkozó $\Delta$ kifejezés.

- Mielőtt még behelyettesítenénk, vizsgáljuk meg:

$\bar{B} = \text{rot}\, \bar{A}$ $\quad$ $\bar{A}$-nak csak a rot-ja rögzített

div $\bar{A} = ?$ (A kérdés jogos, hiszen egy vektorteret a rotáció és divergencia együtt határoz meg.) $\bar{A}$ divergenciájának megválasztása a MÉRTÉKVÁLASZTÁS:

$\boxed{\text{div}\, \bar{A} = 0}$ : Coulomb mérték (Itt ez a célszerű, de pl. Hertz-dipólusnál az ún. Lorenz-mérték)

Ekkor:

$$\Delta \bar{A} = \text{grad}\, \underbrace{\text{div}\, \bar{A}}_{0} - \underbrace{\text{rot rot}\, \bar{A}}_{\mu \bar{J}}$$

$$\boxed{\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}} \qquad \left( \Delta \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \right)$$

↳ VEKTORIÁLIS POISSON EGYENLET

$W = \frac{1}{2} \int_V A J \, dV$ mágneses energia

# 3. A VEKTORIÁLIS POISSON EGYENLET MEGOLDÁSA

$$\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J}$$

$\downarrow$

$$\Delta A_x = -\mu J_x$$

$$\Delta A_y = -\mu J_y$$

$$\Delta A_z = -\mu J_z$$

~~Laplace~~ Descartes- koordinátákban:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} = -\mu J_x$$

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial \cancel{y}^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} = -\mu J_y$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} = -\mu J_z$$

Tudjuk hogy a Poisson egyenlet Megoldása:

$$\Delta \varphi = -\frac{\varrho}{\varepsilon} \Rightarrow \varphi(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\varrho(s)}{r_{sp}} dV_s$$

Használjuk fel ezt: ($\frac{1}{\varepsilon} \to \mu$ $\quad \varrho \to J$ $\quad \varphi \to A$ analógia)

$$\left.\begin{aligned} A_x(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_x(s)}{r_{sp}} dV_s \\ A_y(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_y(s)}{r_{sp}} dV_s \\ A_z(P) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J_z(s)}{r_{sp}} dV_s \end{aligned}\right\} \bar{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(s)}{r_{sp}} dV_s$$

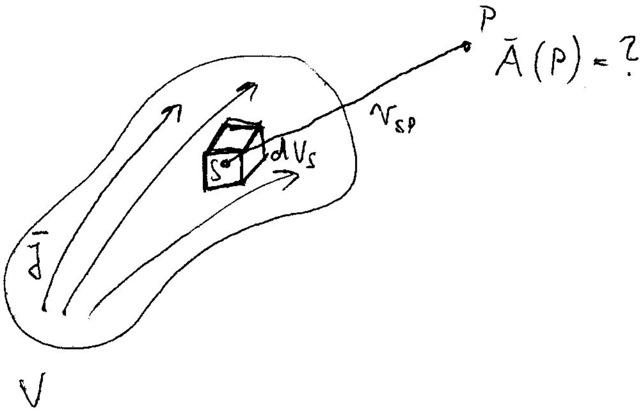
Ha ezeket az $\bar{i}$ $\bar{j}$ $\bar{k}$ egységvektorokkal megszorozzuk és összeadjuk:

$$A_x \cdot \bar{i} + A_y \bar{j} + A_z \cdot \bar{k} = \bar{A}(P)$$

Hasonlóan $\bar{j}$-re: $j_x \cdot \bar{i} + j_y \bar{j} + j_z \bar{k} = \bar{j}(S)$

Ekkor:

$$\boxed{\bar{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{j}(S)}{r_{SP}} \, dV_S}$$




Összefoglalva:

forrás → segédmennyiség → tér

$\rho$ → $\varphi$ → $\bar{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$\bar{j}$ → $\bar{A}$ → $\bar{B} = \mathrm{rot}\,\bar{A}$

# (16.) ISMERTESSE A BIOT-SAVART TÖRVÉNYT, AZ ÖN ÉS KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓ SZÁMÍTÁSÁT!

## 1. BEVEZETÉS

Alkalmazások szempontjából különösen fontos az az eset, amikor a mágneses teret kiskeresztmetszetű vezetőben folyó áram hozza létre. → Vonalmenti ~~vezetőnek tekintjük~~) tekintjük.

## 2. A BIOT-SAVART TÖRVÉNY

A vektoriális Poisson-egyenlet és megoldása:

$$\Delta \bar{A} = -\mu \bar{J} \quad ; \quad \bar{A}(P) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\bar{J}(s)}{r_{PS}} \, dV_s$$

Az általános megoldás specializálása vonalas vezetőre:

$$\boxed{\bar{A}(P) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\bar{l}_s}{r_{PS}}}$$

átadjuk a vektor léjárásolat $d\bar{l}$-re

$$\bar{J}\, dV = \bar{J} A\, dl = \cancel{I\, dl} = J A\, d\bar{l} = I\, d\bar{l}$$

A körintegrál oka: a vezetők zártnak valahol.

Mivel: $\bar{B} = \mathrm{rot}\, \bar{A}$ ;

$$\bar{B}(P) = \mathrm{rot}_P\, \bar{A}(P) = \mathrm{rot}_P \left( \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \frac{d\bar{l}_s}{r_{PS}} \right)$$

Mivel az integrálás az s pont koordinátái, a rotációképzés a p pont koordinátái szerint történik:

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_l \mathrm{rot}_P \frac{d\bar{l}_s}{r_{PS}}$$

Különböző vektoranalitikai megfontolásokkal a [illegible] [illegible] jutunk ⇒ B[illegible] SAVART

Ahhoz hogy a Biot-Savart törvényhez jussunk, meg kell vizsgálni, hogy mi lesz egy skalár és egy vektor szorzatának rotációja.

$$\mathrm{rot}\,(u\,\bar{v}) \equiv u\,\mathrm{rot}\,\bar{v} + (\mathrm{grad}\,u)\times\bar{v}$$

Behelyettesítve:

$$\mathrm{rot}_p\left(\frac{1}{r_{ps}}\cdot \bar{dl}_s\right) = \frac{1}{r_{ps}}\,\mathrm{rot}_p\,\bar{dl}_s + \left(\mathrm{grad}_p \frac{1}{r_{ps}}\right)\times \bar{dl}_s$$

{ $\mathrm{rot}_p\,\bar{dl}_s = 0$, hiszen $\bar{dl}_s$ kizárólag az s pont koordinátáitól függ, míg a rot. képzés (deriválás) p pont koord. szerint történik. }

Továbbá $\mathrm{grad}\,\frac{1}{r_{ps}} = -\frac{1}{r^2}\,\bar{r}_0$, gömbkoordináta rendszerben a gradiensnek az r komponense: r szerinti deriválás, és $\bar{r}_0$ egységvektorral szorzás.
($\bar{r}_0 \equiv \bar{e}_r$ : r irányú egységvektor):

$$\boxed{\mathrm{rot}_p\left(\frac{\bar{dl}_s}{r}\right) = \frac{\bar{dl}_s\times\bar{r}_0}{r^2}}$$

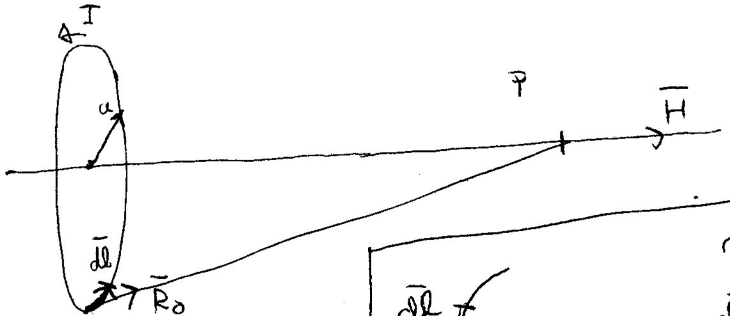
megfordul a kereszt :)

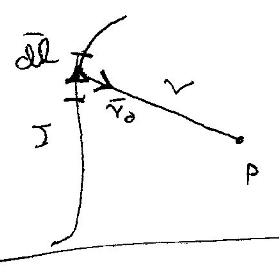
Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe:

$$\bar{B}(P) = \frac{\mu I}{4\pi}\oint_l \frac{\bar{dl}_s\times\bar{r}_0}{r^2} \Rightarrow \boxed{\bar{H}(P) = \frac{I}{4\pi}\oint_l \frac{\bar{dl}_s\times\bar{r}_0}{r^2}}$$

BIOT - SAVART TÖRVÉNY

Például: körvezető áramának mágneses tere:



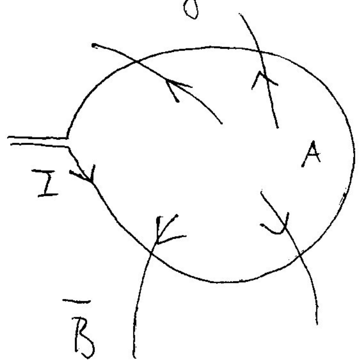




$r_0$: r ir. egységvektor

$\bar{dl}$: áram irányú vektor, vonalelem

## 3. ÖNINDUKCIÓ EGYÜTTHATÓ

Zárt görbének van önindukciós együtthatója.



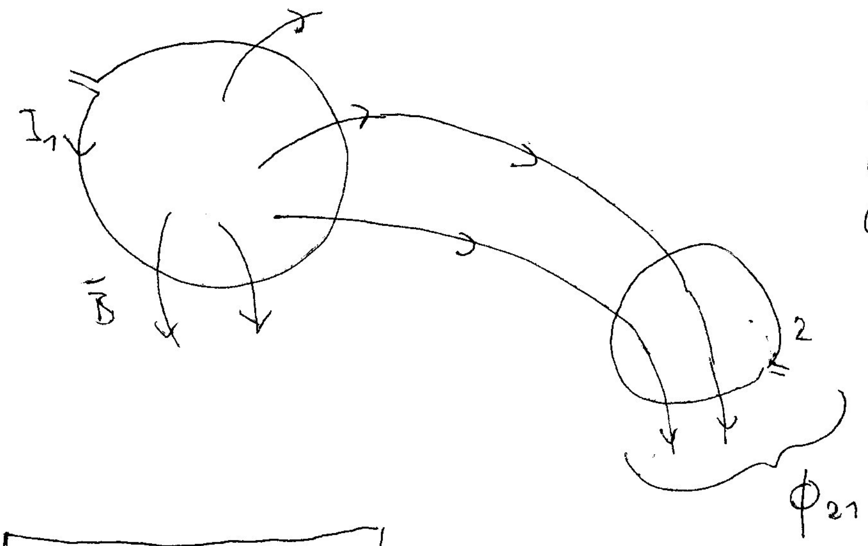

$$\Phi = \int_A \bar{B}\, d\bar{A}$$ (tetszőleges ráfeszített felületre)

$$\boxed{L \triangleq \frac{\Phi}{I}} \qquad \left[\frac{Vs}{A}\right]$$

Ha pl. tekercsről van szó, akkor közelítőleg úgy számolhatunk, hogy egy menetre kiszámítjuk $L$-t, majd szorozzuk a menetszámmal:

$$\Psi = \sum_i \Phi_i$$ : fluxuskapcsolódás

## 4. KÖLCSÖNÖS INDUKCIÓ EH.




$\bar{B}$ indukcióvonalaknak csak egy része megy át a 2-es huroknak. Gondoskodni kell arról, hogy $I_2 = 0$ legyen, hogy biztosak legyünk benne hogy a fluxust kizárólag $I_1$ hozta létre.

$$\boxed{L_{21} \triangleq \frac{\Phi_{21}}{I_1}}$$

indukció : 2 hurkos példa