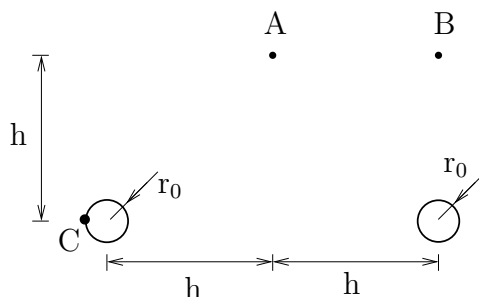


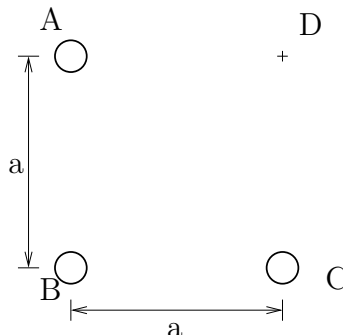
Név :	1. feladat + 2. feladat	
Neptun-kód :	3. feladat	
Hallgató aláírása :	Összesen	

1. feladat A $2h$ távolságban lévő két r_0 sugarú fémhenger közé U feszültséget kapcsolunk. Az A-B pontok közötti feszültség $U_{AB} = -100 \text{ V}$. A közeg levegő. $h = 10 \text{ cm}$, $r_0 = 2 \text{ cm}$.



- Mekkora a hengerek közé kapcsolt U feszültség? (1 pont)
- Mekkora a felületi töltéssűrűség a C pontban? (1 pont)
- Határozza meg a maximális térerősséget! (1 pont)

2. feladat Az ABCD pontok egy $a = 10 \text{ cm}$, oldalú négyzet csúcsai. A-ban, B-ben és C-ben a papír síkjára merőleges, hosszú egyenes vezetők helyezkednek el.



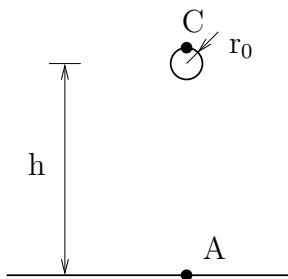
- A-ban és C-ben a papír síkjába befelé $I = 10 \text{ A}$ -es, B-ben kifelé 20 A -es áram folyik. Mekkora a mágneses térerősség a D pontban? (1 pont)
- Csak az A-ban folyik 5 A -es áram. Mekkora fluxust hoz létre a BC kettős vezeték ℓ hosszúságú szakaszának felületén? (A körüljárási irány az a. feladatban adott áramiránnyal azonos.) (1 pont)

3. feladat Válaszoljon röviden az alábbi kérdésekre!

- Írja fel a skaláris Poisson-egyenlet általános megoldását és ábrán szemléltesse az alkalmazott jelöléseket! (1 pont)
- Egy légszigetelésű síkkondenzátorban a villamos térerősség $E = 10 \text{ V/m}$, a lemezek felülete $A = 40 \text{ cm}^2$, távolságuk $d = 0.5 \text{ cm}$. Határozza meg a kondenzátorban tárolt energiát! (1 pont)

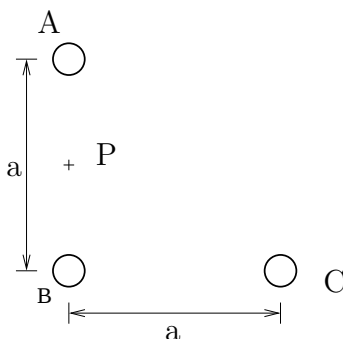
Név :	1. feladat + 2. feladat	
Neptun-kód :	3. feladat	
Hallgató aláírása :	Összesen	

1. feladat A fémsík fölött $h = 20\text{ cm}$ magasságban $r_0 = 1\text{ cm}$ sugarú fémgömb helyezkedik el, a kettő közé U feszültséget kapcsolunk. A térerősség az A pontban $E_A = 10^4\text{ V/m}$. A közeg levegő.



- Határozza meg a feszültséget a gömb és a sík között? *(1 pont)*
- Határozza meg a felületi töltéssűrűséget a C pontban? *(1 pont)*
- Számítsa ki a fellépő maximális térerősséget! *(1 pont)*

2. feladat A, B és C egy egyenlő szárú derékszögű háromszög csúcsai. Mindegyik csúcsban a papír síkjára merőleges, igen hosszú egyenes vezető helyezkedik el. $a = 20\text{ cm}$.

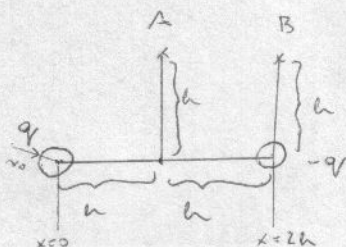


- A-ban és C-ben $I = 5\text{ A}$ áram folyik a papír síkjába befelé, B-ben $I = 5\text{ A}$ folyik kifelé. Határozza meg a mágneses térerősséget a P pontban! *(1 pont)*
- Csak B-ben folyik $I = 5\text{ A}$ -es befelé. Határozza meg az AC vezetópár ℓ hosszúságú szakaszának felületén átmenő fluxust! *(1 pont)*

3. feladat Válaszoljon röviden az alábbi kérdésekre!

- Írja fel a vektoriális Poisson-egyenlet általános megoldását és ábrán szemléltesse az alkalmazott jelöléseket! *(1 pont)*
- Egy ℓ hosszúságú, A keresztmetszetű, N menetű, légtöltésű egyenes tekercs belsejében H, helyfüggetlennek tekinthető mágneses térerősség van. Határozza meg a tekercs energiáját! *(1 pont)*

1. feladat:



Az U potenciálját határozza a két hengeren elhelyezett előjelű, azonos nagyságú szabadon tevékenységű alakúak ki: $q, -q$

Ismerjük ki q -t, ha tudjuk, hogy $(\text{ah}) U_{AB} = -100 \text{ V}$. Ehhez írjuk fel a potenciált az A és a B pontban:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B, \quad \varphi_{\text{henger}} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{r}$$

$$\varphi_A = \varphi_A^+ + \varphi_A^- = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2} \cdot h} - \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{2} \cdot h} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{\sqrt{2} \cdot h}{\sqrt{2} \cdot h} = 0$$

Itt észleljük meg, mert az A pont egyenlő távolságra van a két fémhengerrel.

$$\varphi_B = \varphi_B^+ + \varphi_B^- = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{5} \cdot h} - \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{h} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{h}{\sqrt{5} \cdot h} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{5}}$$

Vagyis:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$$

$$-100 \text{ V} = \frac{-q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$q = -6,91 \cdot 10^{-9} \frac{\text{C}}{\text{m}}$$

a: A hengernek hátra fele fordított U potenciálja a két henger felületén levő potenciálak különbsége:

$$U = \varphi(x=r_0) - \varphi(x=2h-r_0) \left(\frac{q}{2\pi\epsilon} \right)$$

A két henger közötti egyenlő potenciál:

$$\varphi(x) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \ln \frac{1}{x} - \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \frac{1}{2h-x} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{2h-x}{x} \right)$$

$$U = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{2h-r_0}{r_0} \right) - \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{r_0}{2h-r_0} \right) = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{2h-r_0}{r_0} \right)^2 = \frac{q}{\pi\epsilon} \cdot \ln \left(\frac{2h-r_0}{r_0} \right) =$$

$$= \frac{-6,91 \cdot 10^{-9}}{\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \ln \left(\frac{2 \cdot 0,12 - 0,02}{0,02} \right) = -546 \text{ V}$$

b: A felületi töltésműködés megegyezik a D dielektrikus eltéréssel:

$$\text{Henger esetén a térerősség: } E = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

A C pontban a térerősség:

$$E_C = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0} - \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{2h+r_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h+r_0} \right)$$

negatív, mert ellentétes irányba mutat

$D = \epsilon E$, vagyis:

$$\sigma_C = D_C = \frac{q}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{2h+r_0} \right) = \frac{-6,91 \cdot 10^{-9}}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{0,02} - \frac{1}{0,12+0,02} \right) = -5 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{m}^2}$$

c: A maximális térerősség a q-imból felismerhető. A jobboldali q-imból éppen pozitív értéket kapunk:

$$E_{\text{max}} = \frac{-q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{2h-r_0} + \frac{q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r_0} = 6903 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

negatív, mert

a térerősség balra mutat

pozitív, mert egy irányba mutatnak

2. feladat:

a:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

szimmetriából határozzuk meg az irányt, a képletet pedig a nagyságot:

$$|\vec{H}_1| = \frac{I_1}{2a\pi}$$

$$|\vec{H}_2| = \frac{I_2}{2a\pi}$$

$$|\vec{H}_3| = \frac{I_3}{2 \cdot \sqrt{2} \cdot a \pi}$$

$I_1 = I_2$, emellett a szimmetriát kihasználva:

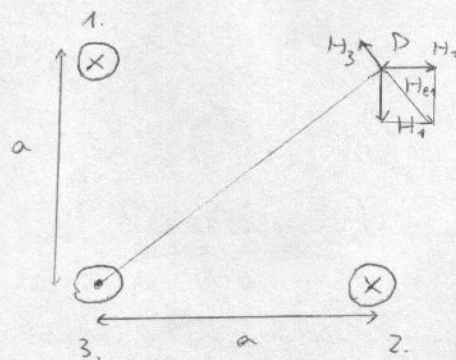
$$|\vec{H}_{el}| = |\vec{H}_1 + \vec{H}_2| = \sqrt{2} \cdot \left(\frac{I_1}{2a\pi} \right)$$

Végül az eredő térerősség nagysága:

$$|\vec{H}_e| = |\vec{H}_{el}| - |\vec{H}_3| = \sqrt{2} \cdot \frac{I_1}{2a\pi} - \frac{I_3}{2\sqrt{2} \cdot a \cdot \pi} = \frac{\sqrt{2} \cdot 10}{2a\pi} - \frac{20}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot a \cdot \pi} = 0$$

b:

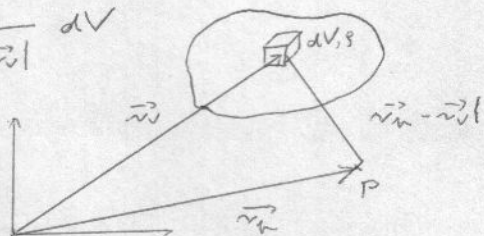
$$\varphi = \ell \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_1}{r_2} = \ell \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi} \cdot \ln \frac{a}{\sqrt{2} \cdot a} = -3,46 \cdot 10^{-7} \text{ V}$$



3. feladat:

a: Az általános megoldás:

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$



Ide egy db. cs ponttöltés van, ahonnan az ismert képletre egyszerűsödik:

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q}{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r}$$

b: A kondenzátor energiája:

Megoldás:

Eredmény

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \frac{A}{d} = 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot \frac{40 \cdot 10^{-6}}{0,5 \cdot 10^{-2}} = 7,08 \cdot 10^{-12} \text{ F}$$

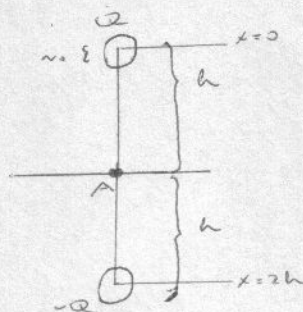
$$E = \frac{U}{d} \rightarrow U = E \cdot d = 10 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 0,05 \text{ V}$$

$$W = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot U = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \cdot 7,08 \cdot 10^{-12} \cdot 0,05^2 = 8,85 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

$$W = \frac{1}{2} \int E \cdot D dV = \frac{1}{2} \int E \cdot \epsilon_0 \cdot E dV = \frac{1}{2} \cdot \epsilon_0 \cdot E^2 \cdot \underbrace{A \cdot d}_{dV} = 8,85 \cdot 10^{-15} \text{ J}$$

1. feladat:

Az alábbi alakítások át a helyettesítő töltések módszerével:



A feszültség határára $+Q$ töltés kerül a fémgömbre, a helyettesítő töltések módszerét használva megjelöljük egy $-Q$ töltés is.

Első lépésként határozzuk meg Q -t:

A két gömböt összekötés exponensen a térerősség:

$$E(x) = E^{+Q} + E^{-Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{x^2} + \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{(2h-x)^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2h-x)^2} \right)$$

hiszt, mert egy irányba mutatnak

$$E_A = E(x=h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \right) = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$E_A = 10^6 \frac{V}{m}$$

$$10^6 = \frac{Q}{2\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{h^2}$$

$$Q = 10^6 \cdot h^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot \epsilon = 10^6 \cdot 0,2^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} = 2,22 \cdot 10^{-8} C$$

a: A feszültséghez keressük meg a potenciálfüggvényt:

$$\phi(x) = \phi^{+Q} + \phi^{-Q} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{x} - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{2h-x} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2h-x} \right)$$

$$U = \phi(x=0) - \phi(x=2h) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{2h-0} \right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h} \right)$$

0, mert a fémgömb 0 potenciálba került

$$U = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{2h-0} \right) = \frac{2,22 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}} \cdot \left(\frac{1}{0,2} - \frac{1}{2,2-0,2} \right) = 19487 V$$

b: A felületi töltésműködés az megegyezik a dielektrikus elddával:

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2h-x)^2} \right)$$

$$D(x) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(2h-x)^2} \right)$$

$$\sigma = D_C = D(x=0) = \frac{Q}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{0^2} + \frac{1}{(2h+0)^2} \right) = \frac{2,22 \cdot 10^{-8}}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{(0,2)^2} + \frac{1}{(2,2+0,2)^2} \right) = 1,76 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^2}$$

c: A maximális térerősség a gömbök az alsó peremén van:

$$E_{max} = E(x=0) = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \left(\frac{1}{0^2} + \frac{1}{(2h-0)^2} \right) = \frac{2,22 \cdot 10^{-8}}{4\pi \cdot \epsilon} \cdot \left(\frac{1}{0,2^2} + \frac{1}{(2,2-0,2)^2} \right) = 2 \cdot 10^6 \frac{V}{m}$$

2. feladat

a:

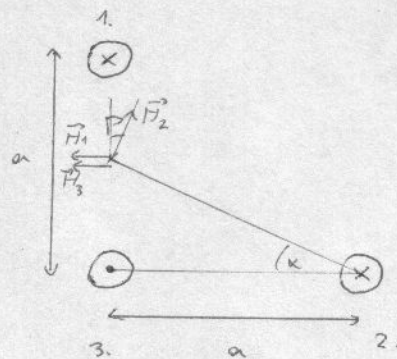
$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi r} \rightarrow H = \frac{I}{2\pi r}$$

Írásiértékkel határozzuk meg az irányt, a képletet pedig a nagyságot.

$$|\vec{H}_1| = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{I}{a\pi}$$

$$|\vec{H}_2| = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{I}{\sqrt{5}a\pi}$$

$$|\vec{H}_3| = \frac{I}{2\pi} \cdot \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{I}{a\pi}$$



$$\alpha = 26,565^\circ$$

Az eredő vektornak külön határozzuk meg a függőleges és a vízszintes összetevőit:

$$|\vec{H}_{\text{függ}}| = |\vec{H}_2| \cdot \cos \alpha = \frac{I}{\sqrt{5}a\pi} \cdot \cos \alpha = 3,183 \frac{A}{m}$$

$$|\vec{H}_{\text{víz}}| = |\vec{H}_1| + |\vec{H}_3| - |\vec{H}_2| \cdot \sin \alpha = \frac{I}{a\pi} + \frac{I}{a\pi} - \frac{I}{\sqrt{5}a\pi} \cdot \sin \alpha = 14,32 \frac{A}{m}$$

Vagyis az eredő vektor nagysága:

$$|\vec{H}_e|^2 = |\vec{H}_{\text{függ}}|^2 + |\vec{H}_{\text{víz}}|^2 = 3,183^2 + 14,32^2 = 215,3 \frac{A^2}{m^2}$$

$$|\vec{H}_e| = 14,67 \frac{A}{m}$$

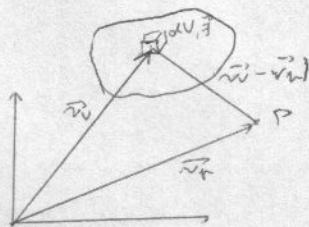
b:

$$\psi = \ell \cdot \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi} \cdot \ln \frac{r_1}{r_2} = \ell \cdot \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5}{2\pi} \cdot \ln \frac{a}{a} = 0$$

3. feladat:

$$a: \Delta \vec{A} = -\mu \cdot \vec{J}$$

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV$$



b:

$$W = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{B} dV = \frac{1}{2} \int_V \mu_0 \cdot H^2 dV = \frac{1}{2} \mu_0 \cdot H^2 \cdot A \cdot \ell$$