Bevezetés a számításelméletbe I.

2. zárthelyi

2019. december 6.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x} - \underline{y}, \underline{z} - \underline{w}, \underline{x} + \underline{y} + \underline{z} + \underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+2)x_3 + (p+3)x_4 &= p+6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

4. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját az x valós paraméter minden értékére.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

6*. Legyen V az $\mathbb{R}^k$ egy altere, C egy $k \times n$-es, A pedig egy $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V-beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

Minden feladat 10 pontot ér, a munkaidő 90 perc. A 100%-os eredményhez elegendő 50 pontot elérni a 60-ból, az összpontszám 50 pont feletti részét IMSc pontként könyveljük el.

A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

Bevezetés a számításelméletbe I.
második zárthelyi — pontozási útmutató
2019. december 6.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Tudjuk, hogy az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben. Határozzuk meg az $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ vektorok által generált altér dimenzióját.

* * * * *

Megmutatjuk, hogy az $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ vektorrendszer a kérdéses altér (nevezzük V-nek) bázisa, amiből következik, hogy V dimenziója 3, hiszen van 3 elemű bázisa. (2 pont)
Ehhez azt kell igazolnunk, hogy $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ független és generátorrendszere V-nek. (1 pont)
Az, hogy $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ generátorrendszere V-nek, azonnal következik a generált altér definíciójából. (1 pont)
A függetlenség igazolásához írjuk fel $\underline{x}-\underline{y}, \underline{z}-\underline{w}, \underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}$ egy lineáris kombinációját az α, β, γ együtthatókkal és vizsgáljuk meg, hogy ez mikor lehet $\underline{0}$. (1 pont)
Az

$$\alpha(\underline{x}-\underline{y}) + \beta(\underline{z}-\underline{w}) + \gamma(\underline{x}+\underline{y}+\underline{z}+\underline{w}) = \underline{0}.$$

egyenlőségben a zárójeleket felbontva, majd átrendezve

$$(\alpha+\gamma)\underline{x} + (\gamma-\alpha)\underline{y} + (\beta+\gamma)\underline{z} + (\gamma-\beta)\underline{w} = \underline{0}$$

adódik. (2 pont)
Mivel az $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}, \underline{w}$ vektorok lineárisan függetlenek (hiszen bázist alkotnak $\mathbb{R}^4$-ben), ez csak akkor lehetséges, ha $\alpha+\gamma=0$, $\gamma-\alpha=0$, $\beta+\gamma=0, \gamma-\beta=0$. (2 pont)
Ebből azonnal adódik, hogy $\alpha=\beta=\gamma=0$, így a kérdéses vektorok egy lineáris kombinációja csak akkor lehet a nullvektor, ha mindhárom együttható 0, így az előadáson tanult tétel szerint a vektorok függetlenek. (1 pont)

2. Döntsük el, hogy a p valós paraméter mely értékeire van megoldása az alábbi egyenletrendszernek. Ha van megoldás, adjuk is meg az összeset.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 6 \\ 2x_1 + 6x_2 + (p+2)x_3 + (p+3)x_4 &= p+6 \\ 3x_1 + 7x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

* * * * *

A második és a harmadik egyenlet sorrendjének cseréje nem változtatja meg a megoldáshalmazt (de egyszerűsíti a megoldást). (0 pont)
A cserét követően Gauss-eliminációval az egyenletrendszert az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & p+2 & p+3 & p+2 \end{array}\right)$$

alakra hozzuk. (2 pont)
Ha $p \neq -2$, akkor a harmadik sort $(p-2)$-vel osztva folytatjuk az eliminációt, (1 pont)
melynek végén az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3\frac{p+3}{p+2} & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{p+3}{p+2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{p+3}{p+2} & 1 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakhoz jutunk. (2 pont)
Innen a megoldás $x_4 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = 2 + 3\frac{p+3}{p+2}\alpha, x_2 = -\frac{p+3}{p+2}\alpha, x_3 = 1 - \frac{p+3}{p+2}\alpha$. (1 pont)
Ha $p = -2$, akkor a harmadik oszlopban nem lesz vezéregyes, a negyedikben viszont igen (1 pont)
és az eliminációt folytatva az

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

redukált lépcsős alakot kapjuk. (2 pont)
A megoldás ekkor tehát $x_3 = \alpha \in \mathbb{R}, x_1 = 5 - 3\alpha, x_2 = \alpha - 1, x_4 = 0$. (1 pont)

3. Számítsuk ki a jobbra látható determináns értékét a determináns definíciója szerint. (A megoldásban tehát ne használjunk semmilyen, a determinánsra vonatkozó tételt vagy azonosságot, pusztán a definícióra alapozva határozzuk meg az értékét.)

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 7 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 3 & 3 & 9 \\ 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

* * * * *

Megmutatjuk, hogy a determináns definíciójában szereplő, előjelesen összeadandó szorzatok között egyetlen nemnulla szorzat szerepel. (1 pont)
Ha ugyanis nemnulla szorzatot szeretnénk kiválasztani, akkor a negyedik sorból csak a 6-ot választhatjuk, így az ötödik sorból az 5-öt már nem, csak a 2-t választhatjuk (mert a második oszlopból már vettünk elemet). Hasonlóan folytatva, a második sorból csak a 2-t, ezért az elsőből csak az 1-et, végül a harmadikból csak az első oszlopban szereplő 3-at választhatjuk, így csakugyan egyetlen nemnulla szorzatot kapunk, a $6 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 3$-at. (3 pont)
Ehhez az egyetlen nemnulla szorzathoz tartozó permutáció az 5,3,1,2,4 (hiszen az első sorból az ötödik elemet vettük, a másodikból a harmadikat, stb.). (2 pont)
Ennek a permutációnak az inverziószáma 6 (mivel 6 inverzióban álló pár van: $(5,3)$, $(5,1)$, $(5,2)$, $(5,4)$, $(3,1)$, $(3,2)$). (2 pont)
Mivel az inverziószám páros, ezért a szorzathoz tartozó előjel: +, (1 pont)
a determináns értéke tehát 72. (1 pont)

4. A jobbra látható A mátrixra teljesül, hogy $A^3 = E$ (ahol E a 3×3-as egységmátrix).

a) Határozzuk meg A determinánsát.

b) Határozzuk meg A inverzének jobb alsó elemét.

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 13 & 13 \\ 1 & 3 & 2 \\ -8 & -13 & -12 \end{pmatrix}$$

* * * * *

a) Mivel $A^3 = E$, a determinánsok szorzástétele szerint $\det A^3 = \det A^2 \det A = (\det A)^3$, így $(\det A)^3 = \det A^3 = \det E = 1$, (2 pont)
ahonnan $\det A = 1$. (1 pont)
b) A-nak létezik inverze, hiszen a determinánsa nem 0, de az inverz létezésére persze a feladat szövegéből is következtethetünk. (0 pont)
Mivel $A \cdot A^2 = A^2 \cdot A = A^3 = E$, A inverze az A^2 mátrix. (Aki csak az $A \cdot A^2 = A^3 = E$ vagy az $A^2 \cdot A = A^3 = E$ egyenlőséget mutatja meg, attól 1 pontot vonjunk le, aki ezek közül az egyiket is hiányosan igazolja, attól 2-t, végül aki csak kimondja, de nem igazolja az $A^{-1} = A^2$ állítást, attól 3-at.) (5 pont)
$A^{-1} = A^2$ jobb alsó eleme $-8 \cdot 13 + (-13) \cdot 2 + (-12) \cdot (-12) = 14$. (2 pont)

Természetesen a determináns és az inverz jobb alsó eleme is meghatározható az $A^3 = E$ egyenlőséget figyelmen kívül hagyva, egyszerűen Gauss-eliminációval. Az a) feladat esetén 1 vagy 2 számolási hibáért 1 pontot, ennél több számolási hibáért 2 pontot vonjunk le. Elvi hiba esetén természetesen szigorúbban járjunk el. A determináns persze máshogy is kiszámítható, amennyiben ez órán tanult eszközökkel történik, akkor az is maximum pontot ér (hibátlan megvalósítás esetén). Órán kívüli eszközök (pl. Sarrus-szabály) csak kellő indoklás esetén használhatók.

b) A

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 13 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -8 & -13 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixban az első és a második sort megcserélve az egyenletrendszer megoldáshalmaza nem változik meg. (Erre a megállapításra azért van szükség, mert ez a lépés nem része magának a Gauss-eliminációnak, ha azt végeznénk, akkor az első sor 9-cel osztása lenne az első lépés.) (1 pont)

Az

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 9 & 13 & 13 & 1 & 0 & 0 \\ -8 & -13 & -12 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

kibővített együtthatómátrixot Gauss-eliminációval az

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{9}{14} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 11 & 13 & 14 \end{array}\right)$$

lépcsős alakra hozzuk, (3 pont)
ahonnan az inverz jobb alsó eleme leolvasható, hiszen az utolsó sor a Gauss-elimináció hátralevő részében már nem változik, (3 pont)
a keresett szám tehát a 14. (0 pont)

Ha valaki az inverz megadásával fejezi be a feladatot és nem adja meg a jobb alsó elemet (de az persze a megadott inverzből leolvasható), attól a pontozásnak megfelelően nem kell pontot levonni. Mint láttuk, a feladat megoldásához nem kell magát az inverzet kiszámítani, elég annak az utolsó sorát megállapítani, sőt, mivel annak is csak az utolsó eleme a kérdés, elég a Gauss-eliminációt a jobb oldali rész utolsó oszlopával végezni. Számolási hibákért darabonként 1 pontot vonjunk le, ha azonban a hiba a lépcsős alak megállapítása után, az inverz második vagy harmadik sorának kiszámításakor történik, akkor ne vonjunk le érte pontot. Aki megállapítja, hogy a jobb oldalon valójában elég az utolsó oszloppal dolgozni, attól a többi oszlop számítása során elkövetett számolási hibákért se vonjunk le pontot. Elírásért, ha attól a feladat nem lett könnyebb, egyáltalán ne vonjunk le pontot.

5. Határozzuk meg a jobbra látható mátrix rangját az x valós paraméter minden értékére.

$$A = \begin{pmatrix} x & x & 1 & x & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

* * * * *

Első megoldás. A rangot Gauss-eliminációval állapítjuk meg: az nem lesz más, mint a lépcsős alakban a vezéregyesek száma. (1 pont)

Ha $x = 0$, akkor minimális számolás után megkapjuk a vezéregyeseket az első három oszlopban, a negyedik sort pedig (mivel csupa 0-ból áll) törölni kell (kétféle lépcsős alakot is kaphatunk, mert a második vezéregyes létrehozásakor a második sort a harmadikkal és a negyedikkel is kicserélhetjük). A rang ilyenkor tehát 3. (1 pont)

Ha $x \neq 0$, akkor osztunk x-szel, majd az első sort levonjuk a másodikból és a negyedikből. Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{1}{x} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

alakot ölt, (1+1 pont)

vagyis a második sor -1-gyel szorzása után megvan a második vezéregyes is. (1 pont)

A második sort a harmadikból kivonva az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\frac{1}{x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-\frac{1}{x} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (1 pont)

Ha $\frac{1}{x} \neq 1$, vagyis $x \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1-\frac{1}{x})$-szel osztva létre tudjuk hozni a harmadik vezéregyest is, (1 pont)

majd a harmadik sor $(x-\frac{1}{x})$-szeresét a negyedikből levonva és a negyedik (csupa 0) sort törölve megkapjuk az

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{1}{x} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{x}-1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lépcsős alakot, ilyenkor a rang tehát 3. (2 pont)

Ha viszont $\frac{1}{x} = 1$, vagyis $x = 1$, akkor a harmadik és a negyedik sor is csupa 0, a kapott lépcsős alakban ekkor tehát két vezéregyes lesz, ilyenkor a rang 2. (1 pont)

Összefoglalva: az derült ki, hogy ha $x = 1$, akkor a rang 2, különben pedig 3. (0 pont)

Második megoldás. Ismét Gauss-eliminációt használunk, de előtte felcseréljük az első és a második sort, ez a rangot (pl. a sorrang definíciója miatt, amiben a sorok sorrendje lényegtelen) nem változtatja meg. (Ha valaki a Gauss-elimináció keretében cseréli ki ezt a két sort, akkor elvileg indokolnia kéne, hogy a rang miért nem változik, de ennek hiányáért ne vonjunk le pontot.) (1 pont)

A lépcsős alakban keressük a vezéregyesek számát, (1 pont)

ehhez az első sor x-szeresét levonjuk a második sorból, az egyszeresét pedig a negyedik sorból. (1 pont)

Ekkor a mátrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & x & 1-x & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & x-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

alakot ölt. Az elimináció folytatása előtt megcseréljük a második és a harmadik sort, ez a rangot nem fogja megváltoztatni (e megjegyzés hiányáért ne vonjunk le pontot). (1 pont)
Ekkor a második vezéregyes rendelkezésre áll, (1 pont)
most a második sor x-szeresét kell levonni a harmadikból és az egyszeresét a negyedikből. Így az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

mátrixot kapjuk. (1 pont)
Ha $x \neq 1$, akkor a harmadik sort $(1-x)$-szel osztva létre tudjuk hozni a harmadik vezéregyest is, (1 pont)
majd a harmadik sor $(x-1)$-szeresét a negyedikből levonva és a negyedik (csupa 0) sort törölve megkapjuk az

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

lépcsős alakot, ilyenkor a rang tehát 3. (2 pont)
Ha $x = 1$, akkor a harmadik és a negyedik sor is csupa 0, a kapott lépcsős alakban ekkor tehát két vezéregyes lesz, ilyenkor a rang 2. (1 pont)

Természetesen a rang más eljárásokkal is megkapható, érdemes lehet például megfigyelni, hogy a negyedik és az ötödik oszlop törölhető, mivel a lineárisan független oszlopok maximális számát nem befolyásolják (lévén azonosak a második, illetve az első oszloppal). Ha valaki csak ennyit állapít meg (helyes indoklással) az 2 pontot kapjon.

6*. Legyen V az $\mathbb{R}^k$ egy altere, C egy $k \times n$-es, A pedig egy $n \times n$-es mátrix. Tegyük fel továbbá, hogy a $C \cdot A$ mátrix minden oszlopa V-beli, de a C mátrixnak van olyan oszlopa, ami nem eleme V-nek. Mutassuk meg, hogy ekkor $\det A = 0$.

* * * * *

Tegyük fel indirekten, hogy $\det A \neq 0$, ekkor A-nak létezik inverze. (1 pont)
$(CA)A^{-1} = C(AA^{-1}) = CE = C$ (3 pont)
a mátrixszorzás asszociativitása miatt. (1 pont)
Az előadásról tudjuk, hogy az XY mátrix oszlopai az X mátrix oszlopainak lineáris kombinációi. (2 pont)
Ezt az $X = CA$, $Y = A^{-1}$ szereposztásban alkalmazva azt kapjuk, hogy C oszlopai a CA oszlopainak lineáris kombinációi. (2 pont)
Ebből az alterek lineáris kombinációra való zártsága miatt következik, hogy ha CA minden oszlopa V-beli, akkor C minden oszlopa is V-beli, ami ellentmond a feladatbeli feltételnek, tehát ellentmondásra jutottunk. (1 pont)