1. feladat (6+10=16 pont)
a) Mondja ki és igazolja a rendőrelvet!
b) Adja meg az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{n^3+2n+3}{2n^2+n-2}}$$

sorozat határértékét.

Mo. *a*) Ha $a_n \leq b_n \leq c_n$, és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} b_n{=}A$, mert $\forall\varepsilon > 0$ esetén $\exists N_1, N_2$, hogy $n \geq N_1$ esetén $A-\varepsilon < a_n < A+\varepsilon$ és $n \geq N_2$ esetén $A-\varepsilon < c_n < A+\varepsilon$, így $n \geq \max(N_1, N_1)$ esetén $A-\varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < A+\varepsilon$.

b) A rendőrelv alapján $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$, mert ($n \geq 2$ esetén)

$$1 \longleftarrow \frac{\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{3}} = \sqrt[n]{\frac{n^3}{2n^2+n^2}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3+2n+3}{2n^2+n-2}} \leq \sqrt[n]{\frac{n^3+2n^3+3n^3}{n^2}} = \sqrt[n]{n}\,\sqrt[n]{6} \longrightarrow 1$$

---

2. feladat (4+10 =14 pont)
a) Ismertesse a l'Hospital-szabályt.
b) Hol és milyen típusú szakadása van az $f(x) = \dfrac{e^{3x^2} - \cos(2x)}{x^2 - x}$ függvénynek?

Mo. *a*) Analízis 1 jegyzet, 4.4 fejezet.

b) A függvény folytonos függvények összetétele, így a nevező zérushelyeit ($x = 0$ és $x = 1$) leszámítva folytonos $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{6xe^{3x^2} + 2\sin(2x)}{2x-1} = 0$, így a függvénynek az $x = 0$ pontban megszüntethető szakadása van .
$\lim\limits_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$, így a függvénynek az $x = 1$ pontban másodfajú szakadása van .

---

3. feladat (10 pont)
Megfelelő helyettesítéssel számolja ki az $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Mo. Az $y = \sqrt[3]{x}$ helyettesítéssel $x = y^3$ tehát az integrál

$$\int \frac{1}{\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt[3]{x} + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{3y^2}{y^2 - 2y + 1}\,\mathrm{d}y = \int 3 + \frac{6}{y-1} + \frac{3}{(y-1)^2}\,\mathrm{d}y =$$

$$= 3y + 6\ln|y-1| - \frac{3}{y-1} + c = 3\sqrt[3]{x} + 6\ln|\sqrt[3]{x} - 1| - \frac{3}{\sqrt[3]{x} - 1} + c$$

---

4. feladat (10 pont)
Írja föl azt a legalacsonyabb rendű homogén lineáris, állandó (valós) együtthatós differenciálegyenletet, melynek megoldása az $y(x) = 3e^{-x}\sin(3x) + 5x$ függvény! Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását is!

Mo. $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$ egyszeres , $\lambda_{3,4} = 0$ kétszeres gyöke a karakterisztikus egyenletnek, ami így: $\lambda^2((\lambda+1)^2+9) = \lambda^4+2\lambda^3+10\lambda^2$, vagyis a differenciálegyenlet $y^{(4)}+2y^{(3)}+10y'' = 0$, az általános megoldás pedig $y = c_1e^{-x}\cos(3x)+c_2e^{-x}\sin(3x)+c_3x+c_4$.

---

5. feladat (4+7=11 pont)
a) Írja fel a ch függvény Taylor-sorát, és annak konvergenciasugarát.
b) Határozza meg a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}\cdot x^{2n+3}$ függvénysor összegfüggvényét $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

Mo. *a*) $\displaystyle \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén .

b) $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{(2n)!}\cdot x^{2n+3} = x^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{3}x)^{2n}}{(2n)!} = x^3\operatorname{ch}(\sqrt{3}x).$$

---

6. feladat (7+14=21 pont)
a) Adjon elégséges feltételt arra, hogy egy kétváltozós függvénynek egy (x_0, y_0) pontban lokális maximuma, illetve minimuma van!
b) Keresse meg az $f(x,y) = xy(3x-2y+1)$ függvény lokális szélsőértékeit!

Mo. *a*) Analízis 2. jegyzet, 3.105. Tétel
b) $f'_x(x,y) = y(3x-2y+1)+3xy = 0$ ($y = 0$ vagy $6x-2y+1 = 0$) és $f'_y(x,y) = x(3x-2y+1)-2xy = 0$ ($x = 0$ vagy $3x-4y+1 = 0$). Az egyenletrendszer megoldásai tehát $(0,0)$, $\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{1}{3},0\right)$, $\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right)$. $f''_{xx} = 6y$, $f''_{xy} = 6x-4y+1$, $f''_{yy} = -4x$. Az origóban a Hesse-determináns $0\cdot 0-(1)^2 = -1$, a $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ pontban $3\cdot 0-(-1)^2 = -1$ és a $\left(-\frac{1}{3},0\right)$ pontban $0\cdot(4/3)-(-1)^2 = -1$, így ezek közül egyik pontban sincs lokális szélsőérték. Az $\left(-\frac{1}{9},\frac{1}{6}\right)$ pontban $f''_{xx}f''_{yy}-(f''_{xy})^2 = 1\cdot\frac{4}{9}-\left(-\frac{1}{3}\right)^2 > 0$, tehát $f''_{xx} > 0$ miatt ebben a pontban lokális minimuma van a függvénynek .

---

7. feladat (4+14=18 pont)
a) Mondja ki a Dirichlet-tételt!
b) Határozza meg a 2π szerint periodikus, $x \in (-\pi,+\pi]$ esetén az $f(x) = x+|x|$ képlettel definiált függvény Fourier-sorát, és annak összegét!

Mo. *a*) Analízis 2. jegyzet, 2.170. Tétel.

b) $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \pi$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin(kx)}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{2((-1)^k-1)}{k^2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(kx)}{k}\,\mathrm{d}x = \frac{2(-1)^{k+1}}{k} \end{aligned}$$

a Fourier-sor és összege tehát

$$\Phi(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2((-1)^k-1)}{k^2\pi}\cos(kx) + \frac{2(-1)^{k+1}}{k}\sin(kx)\right) = \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \neq (2k+1)\pi \\ \pi, & \text{ha } x = (2k+1)\pi \end{cases}$$