Valószínűségszámítás vizsgadolgozat
Mérnök informatikus szak
2010. január 28.
Megoldás

1. A_i : i fejet dobtunk, $i = 1, 2, 3, 4$; B : 2 hatost dobtunk
   $\mathbf{P}(B) = \sum_{i=1}^{4} \mathbf{P}(B \mid A_i)\,\mathbf{P}(A_i)$ (2 pont)
   $\mathbf{P}(B \mid A_1) = 0$ (0.5 pont)
   $\mathbf{P}(B \mid A_2) = \left(\frac{1}{6}\right)^2$ (0.5 pont)
   $\mathbf{P}(B \mid A_3) = \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \frac{5}{6}$ (1 pont)
   $\mathbf{P}(B \mid A_4) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^2$ (1 pont)
   $\mathbf{P}(A_2) = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\mathbf{P}(A_3) = \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\mathbf{P}(A_4) = \left(\frac{1}{2}\right)^4$ (2 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A_3 \mid B) &= \frac{\mathbf{P}(B \mid A_3)\,\mathbf{P}(A_3)}{\mathbf{P}(B)} && \text{(2 pont)} \\ &= \frac{\frac{1}{4}\frac{5}{72}}{\frac{121}{16\cdot 216}} = \frac{60}{121} && \text{(1 pont)} \end{aligned}$$

2. $F_{\frac{1}{X}}(u) = \frac{u-5}{3}$, ha $u \in (5, 8)$ (1 pont)

$$\begin{aligned} F_X(t) &= \mathbf{P}(X < t) = \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} > \frac{1}{t}\right) && \text{(1 pont)} \\ &= 1 - \mathbf{P}\left(\frac{1}{X} < \frac{1}{t}\right) = 1 - F_{\frac{1}{X}}\left(\frac{1}{t}\right) && \text{(1 pont)} \\ &= 1 - \frac{\frac{1}{t} - 5}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3t} \end{aligned}$$

   $f_X(t) = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3t}\right)' = \frac{1}{3t^2}$ (1-1 pont)
   ha $\frac{1}{8} < t < \frac{1}{5}$ különben 0. (1 pont)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(X) &= \int t f_X(t)\,dt = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{5}} t \frac{1}{3t^2}\,dt && \text{(1 pont)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\ln\frac{1}{5} - \ln\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{8}{5} && \text{(1 pont)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\left(X^2\right) &= \int t^2 f_X(t)dt = \int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{5}} t^2 \frac{1}{3t^2}dt \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{40} \qquad \text{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

$\sigma^2 X = \mathbf{E}\left(X^2\right) - \left(\mathbf{E}\left(X\right)\right)^2$ (1 pont)

3. A : a palackban 0.6 liternél kevesebb van; R : régi üzemben palackozták; U : új üzemben palackozták

   $\mathbf{P}\left(A\right) = \mathbf{P}\left(A \mid R\right)\mathbf{P}\left(R\right) + \mathbf{P}\left(A \mid U\right)\mathbf{P}\left(U\right)$ (2 pont)

   $\mathbf{P}\left(R\right) = 0.3$, $\mathbf{P}\left(U\right) = 0.7$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}\left(A \mid R\right) &= \mathbf{P}\left(X < 0.6\right) = F_X(0.6) = \Phi_{0.7,0.2}(0.6) \quad \text{(2 pont)} \\
&= \Phi\left(\frac{0.6-0.7}{0.2}\right) \quad \text{(2 pont)} \\
&= \Phi\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\right) \quad \text{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

   Hasonlóan:

   $\mathbf{P}\left(A \mid U\right) = \mathbf{P}\left(Y < 0.6\right) = F_Y(0.6) = \Phi_{0.7,0.05}(0.6) = \Phi\left(\frac{0.6-0.7}{0.05}\right) = \Phi\left(-2\right) = 1 - \Phi\left(2\right)$ (2 pont)

   Tehát $\mathbf{P}\left(A\right) = 0.3\left(1-\Phi\left(\frac{1}{2}\right)\right) + 0.7\left(1-\Phi\left(2\right)\right) = 1 - 0.3\Phi\left(\frac{1}{2}\right) - 0.7\Phi\left(2\right)$ (1 pont)

4. $cov(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y$ (2 pont)

   $\mathbf{E}X$ és $\mathbf{E}Y$ meghatározásához szükség van a vetületi sűrűségfüggvényekre.

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f_{X,Y}(x,y)dy \quad \text{(0.5 pont)} \\
&= \int_x^{\infty} 2e^{-x-y}dy \quad \text{(0.5 pont)} \\
&= 2e^{-2x}, \quad \text{(1 pont)}
\end{aligned}
$$

   azaz $X \in E(2)$, így $\mathbf{E}X = \frac{1}{2}$ (1 pont)

   $f_Y(y) = \int_0^y 2e^{-x-y}dx = 2e^{-y} - 2e^{-2y}$ (1 pont)

   $\mathbf{E}Y = \int y f_Y(y)dy = \int_0^{\infty} 2ye^{-y}dy - \int_0^{\infty} 2ye^{-2y}dy = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (1 pont)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}XY &= \int\int xyf_{X,Y}dxdy = \int_0^\infty \int_0^y 2xye^{-x-y}dxdy \quad \text{(0.5 pont)}\\
&= \int_0^\infty \left(\left[-2xye^{-x}e^{-y}\right]_0^y + \int_0^y 2ye^{-x}e^{-y}dx \right) dy \quad \text{(0.5 pont)}\\
&= \int_0^\infty \left(-2y^2e^{-2y} - 2ye^{-2y} + 2ye^{-y}\right) dy \quad \text{(0.5 pont)}\\
&= \left[y^2e^{-2y}\right]_0^\infty - \int_0^\infty 2ye^{-2y}dy - \int_0^\infty 2ye^{-2y}dy + \int_0^\infty 2ye^{-y}dy \quad \text{(0.5 pont)}\\
&= 0 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + 2 = 1 \quad \text{(0.5 pont)}
\end{aligned}
$$

Tehát $cov(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{4}$ (0.5 pont)

5. Likelihood-fv: $L(\mathbf{x},\vartheta) = \Pi_{i=1}^n \mathbf{P}\left(X_i = x_i\right) = \Pi_{i=1}^n \frac{\vartheta^{x_i}}{x_i!}e^{-\vartheta}$ (2 pont)

   Loglikelihood-fv: $l(\mathbf{x},\vartheta) = -n\vartheta + \ln\vartheta \cdot \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n \ln(x_i!)$ (2 pont)

   Ezt kell maximalizálni: $0 = l'(\mathbf{x},\vartheta) = -n + \frac{1}{\vartheta}\sum_{i=1}^n x_i$ (2 pont)

   Vagyis a paraméter maximum likelihood becslése $\hat{\vartheta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$. (1 pont)

   A becslés torzítatlan, ha $\mathbf{E}\hat{\vartheta} = \vartheta$ (1 pont)

   Azonos eloszlású valószínűségi változók átlagának várható értéke a közös várható érték. (1 pont)

   Poisson-eloszlás várható értéke a paraméter, jelen esetben ϑ, (1 pont)

   tehát torzítatlan a becslés.

6. Nagy számok törvényének Bernoulli-féle gyenge alakja (5 pont)

   Bizonyítása (5 pont)