Valószínűségszámítás aláíráspótló zárthelyi dolgozat
Műszaki informatika szak
2012. május 14.

1. Bizonyítsa be, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,1$ és $\mathbf{P}(B) = 0,2$, akkor $\mathbf{P}\left(\bar{A} \cdot B\right) \geq 0,1$!

   Megoldás: A Boole-egyenlőtlenségből: $\mathbf{P}\left(\bar{A} \cdot B\right) \geq 1 - \mathbf{P}(A) - \mathbf{P}\left(\bar{B}\right) = 0,1$

2. Egy teherautó 100 láda tojást szállít, mindegyik ládában pontosan 1000 tojással. Szállításkor minden tojás 0,001 valószínűséggel összetörhet (a többitől függetlenül). A megrendelő akkor vesz át egy ládát a szállítótól, ha a ládában lévő összetört tojások száma nem haladja meg a 10-et.
   (*) Menynyi annak a valószínűsége, hogy legfeljebb három ládát nem fognak átvenni?

   Megoldás: $p = \mathbf{P}$ (egy ládában több az összetört tojás mint 10) $=$
   $= \sum\limits_{k=11}^{1000} \binom{1000}{k} (0,001)^k (0,999)^{1000-k}$,
   $\mathbf{P}$ (legfeljebb három ládát nem fognak átvenni) $= \sum\limits_{k=0}^{3} \binom{100}{k} p^k (1-p)^{100-k}$.

3. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 18 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. **(*)** Várhatóan, hány olyan nap lesz, amikor 3-nál több telefon romlik el?

   Megoldás: Jelölje X az egy nap alatt meghibásodott telefonkészülékek számát! Nyilván X Poisson eloszlású. Mivel $\mathbf{P}(X=0) = e^{-\lambda} \approx \frac{18}{360} = \frac{1}{20} \Rightarrow \lambda \approx \ln 20$. Ezért $\mathbf{P}(X \geq 4) = 1 - \sum\limits_{k=0}^{3} \mathbf{P}(X=3) = 1 - \frac{1}{20}\left(1 + \ln 20 + \frac{(\ln 20)^2}{2} + \frac{(\ln 20)^3}{6}\right)$.
   Az $X > 3$ napok várható száma: $360 \cdot \mathbf{P}(X \geq 4)$.

4. A $(0,1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont 1−től való távolságának eloszlásfüggvényét!

   Megoldás: Jelöljük a kiválasztott pontoknak a 1-től vett távolságait x, y és z-vel. A három szám között hat reláció állhat fenn: $x<y<z$; $x<z<y$; $y<x<z$; $z<x<y$; $z<y<x$; $y<z<x$. Mindegyik reláció az egységkocka $\frac{1}{6}$át jelöli ki. Kiszámoljuk, hogy az $x<y<z$ relációnak eleget tévő térrész pontjai közül mekkora térfogatú rész pontjaira áll fenn, hogy $y<t$, ahol $t \in (0,1)$. $\mathbf{P}(Y<t) = 6 \cdot \int\limits_0^t \int\limits_0^y \int\limits_y^1 \mathrm{d}\,z \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y =$
   $6 \cdot \int\limits_0^t \int\limits_0^y (1-y) \,\mathrm{d}\,x \,\mathrm{d}\,y = 6 \cdot \int\limits_0^t y(1-y) \,\mathrm{d}\,y = 3t^2 - 2t^3.$

5. Legyen $X \in N(1,1), Y = \cos(X-1)$. Adjuk meg Y várható értékét és szórásnégyzetét!

Megoldás: Nyilván $X - 1 \in N(0,1)$.
Fel fogjuk használni, hogy $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$ és $\mathbf{E}(X-1)^{2k} = (2k-1)!!$.
$\mathbf{E}Y = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos x \varphi(x)\, dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k)!} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^{2k} \varphi(x)\, dx = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!} =$
$\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6065.$
Az előbbiekhez hasonlóan:
$\mathbf{E}Y^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos^2 x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos 2x \varphi(x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{k!} =$
$\frac{1}{2}\left(1 + e^{-2}\right).$
$\boldsymbol{\sigma}^2 Y = \mathbf{E}Y^2 - (\mathbf{E}Y)^2 = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-1}\right)^2 \approx 0,1997.$