Feladatmegoldás GNU Octave (Matlab) segítségével

(http://www.octave.org)

---

1. Adva van egy DI, illetve egy FI rendszer impulzusválasza:

DI: $h[k]=2\varepsilon[k]0{,}8^k\cos\left(\frac{\pi}{6}k+0{,}3\right)$

FI: $h(t)=3\delta(t)+\varepsilon(t)\left[2\ e^{-0{,}2t}-5\ e^{-0{,}7t}\right]$

a.) Ábrázoljuk az időfüggvényeket!

– az ábrázolandó tartomány megállapítása:

DI: $0{,}8^k=0{,}01=1\%\quad\Rightarrow\quad k=\frac{\ln 0{,}01}{\ln 0{,}8}=20{,}638$

FI: $\tau_1=\frac{1}{0{,}2}=5\quad>\quad\tau_2=\frac{1}{0{,}7}=1{,}43\quad\rightarrow\quad 5\tau_1=25$

'f1aDI.m'

```
k=0:21;
hk=2*0.8.^k.*cos(pi/6*k+0.3);
title("impulzusvalasz");
xlabel("k");
ylabel("h[k]");
plot(k,hk,"^");
```

'f1aFI.m'

```
t=0:0.1:25;
ht=2*exp(-0.2*t)-5*exp(-0.7*t);
title("impulzusvalasz");
xlabel("t");
ylabel("h(t)");
grid;
plot(t,ht,";exponencialis resz;",
     0,3,"^;Dirac-delta komponens;");
```

b.) Határozzuk meg a rendszerek átviteli függvényét!

DI: $$h[k]=2\,\varepsilon[k]\,0{,}8^{k}\,0{,}5\left(e^{j\frac{\pi}{6}k}e^{j\,0{,}3}+e^{-j\frac{\pi}{6}k}e^{-j\,0{,}3}\right)$$

$$H(z)=\frac{e^{j\,0{,}3}z}{z-0{,}8\,e^{j\frac{\pi}{6}}}+\frac{e^{-j\,0{,}3}z}{z-0{,}8\,e^{-j\frac{\pi}{6}}}=\frac{1{,}91\,z^{2}-1{,}56\,z}{z^{2}-1{,}39\,z+0{,}64}$$

ellenőrzés: 'f1bDI.m'

```
numd=2*real(conv([exp(j*0.3) 0],[1 -0.8*exp(-j*pi/6)]))
dend=conv([1 -0.8*exp(j*pi/6)],[1 -0.8*exp(-j*pi/6)])
pause;
% ---------------------------------------------------------
Sdi=tf(numd,dend,1);          % Control System Toolbox (CST)
[hk2,k2]=impulse(Sdi);        % Csak ellenorzesre,
plot(k,hk,"^",k2,hk2,"*g");% vagy abrazolasra!
```

FI: $h(t) = 3\,\delta(t) + \varepsilon(t)\left[2\ e^{-0{,}2\,t} - 5\ e^{-0{,}7\,t}\right]$

$$H(s) = 3 + \frac{2}{s+0{,}2} - \frac{5}{s+0{,}7} = \frac{3\,s^2 - 0{,}3\,s - 0{,}44}{s^2 + 0{,}9\,s + 0{,}14}$$

ellenőrzés: 'f1bFI.m'

```
numf=[3 -0.3 -0.44];
denf=[1 0.9 0.14];
pause;
% ------- CST ---------------------------
Sfi=tf(numf,denf);
Sfi2=tf([0 -3 0.4],denf); % Dirac nelkul!
[ht2,t2]=impulse(Sfi2);
plot(t,ht,t2,ht2,"ob");
```

c.) Ábrázoljuk a rendszerek pólus-zérus elrendezését!

DI: $$H(z)=1{,}91\,\frac{z(z-0{,}82)}{[z-(0{,}69+j\,0{,}4)][z-(0{,}69-j\,0{,}4)]}$$

'f1cDI.m':

```
rd=roots(numd)
pd=roots(dend)
pause;
pzmap(Sdi); % CST
```

FI: $$H(s)=3\,\frac{(s-0{,}44)(s+0{,}34)}{(s+0{,}7)(s+0{,}2)}$$

'f1cFI.m':

```
rf=roots(numf)
pf=roots(denf)
pause;
pzmap(Sfi); % CST
```

d.) Írjuk fel, és ábrázoljuk az átviteli karakterisztikát!

DI: $$H(e^{j\vartheta}) = H(z)\Big|_{z=e^{j\vartheta}} = \frac{1{,}91\,e^{j2\vartheta} - 1{,}56\,e^{j\vartheta}}{e^{j2\vartheta} - 1{,}39\,e^{j\vartheta} + 0{,}64} = \frac{1{,}91 - 1{,}56\,e^{-j\vartheta}}{1 - 1{,}39\,e^{-j\vartheta} + 0{,}64\,e^{-j2\vartheta}}$$

'f1dDI.m' :

```
[Hteta,teta]=freqz(numd,dend,512,"whole");
plot(teta,abs(Hteta));
pause;
plot(teta,angle(Hteta));
```

(megj: a 'dbode' eljárás sajnos nem felel meg nekünk)

FI: $$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s=j\omega} = \frac{3(j\omega)^2 - 0{,}3\ j\omega - 0{,}44}{(j\omega)^2 + 0{,}9\ j\omega + 0{,}14}$$

'f1dFI.m' :

```
bode(Sfi);      % CST
pause;
nyquist(Sfi);   % CST
```

e.) Számítsuk ki a DI rendszer válaszát az alábbi gerjesztésre, és ellenőrizzük a konvolúció tétel segítségével!

$$u[k]=2\,\varepsilon[k]\,0{,}5^{k} \quad \rightarrow \quad U(z)=\frac{2z}{z-0{,}5}$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{1{,}91\,z-1{,}56}{z^{2}-1{,}39\,z+0{,}64}\cdot\frac{2}{z-0{,}5}$$

'f1eDI.m'

```
[r,p,c]=residue(2*numd,conv(dend,[1 -0.5]))
[abs(r) angle(r)]
[abs(p) angle(p)]
```

$$Y(z)=\frac{-3{,}07\;z}{z-0{,}5}+\frac{3{,}6\;e^{-j0{,}3}\,z}{z-0{,}8\;e^{j\pi/6}}+\frac{3{,}6\;e^{j0{,}3}\,z}{z-0{,}8\;e^{-j\pi/6}}$$

$$y[k]=\varepsilon[k]\left\{-3{,}07\cdot 0{,}5^{k}+7{,}2\cdot 0{,}8^{k}\cos\left(\frac{\pi}{6}k-0{,}3\right)\right\}$$

ellenőrzés ('f1eDIell.m'):

```
k=0:2;
uk=2*0.5.^k;
hk=2*0.8.^k.*cos(pi/6*k+0.3);
yrefk=conv(uk,hk)
yk=-3.07*0.5.^k+7.2*0.8.^k.*cos(pi/6*k-0.3)
```

$$y[0]=h[0]u[0]=3{,}81$$
$$y[1]=h[1]u[0]+h[0]u[1]=4{,}08$$
$$y[2]=h[2]u[0]+h[1]u[1]+h[0]u[2]=2{,}61$$
$$\vdots$$

f.) Számítsuk ki a FI rendszer válaszát az alábbi gerjesztésre, és ellenőrizzük a konvolúciós integrál numerikus kiértékelésével!

$$u(t)=4\,\varepsilon(t) \quad \rightarrow \quad U(s)=\frac{4}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s)=\frac{3s^2-0{,}3\,s-0{,}44}{s^2+0{,}9\,s+0{,}14}\cdot\frac{4}{s}$$

'f1fFI.m' : `[r,p,c]=residue(4*numf,conv(denf,[1 0]))`

$$Y(s)=\frac{-12{,}6}{s}+\frac{10{,}4}{s+0{,}2}+\frac{14{,}2}{s+0{,}7}$$

$$y(t)=\varepsilon(t)\left(-12{,}6+10{,}4\;e^{-0{,}2\,t}+14{,}2\;e^{-0{,}7\,t}\right)$$

ellenőrzés:

$$y(t)=\int_{-0}^{t} h(\tau)u(t-\tau)\,d\tau=\underbrace{\int_{-0}^{t} 3\,\delta(\tau)\cdot 4\;d\tau}_{12}+\int_{-0}^{t}\left(2\;e^{-0{,}2\tau}-5\;e^{-0{,}7\tau}\right)\cdot 4\;d\tau$$

'konvint.m' :

```
function y=konvint(tau)
y=(2*exp(-0.2*tau)-5*exp(-0.7*tau))*4;
```

'f1fFIell.m' :

```
t=[0 0.1 0.2];
yt=-12.6+10.4*exp(-0.2*t)+14.2*exp(-0.7*t)
yreft(1)=12+quad('konvint',0,t(1));
yreft(2)=12+quad('konvint',0,t(2));
yreft(3)=12+quad('konvint',0,t(3));
yreft
```

$y(0)=12 \qquad y(0{,}1)=10{,}86 \qquad y(0{,}2)=9{,}84 \qquad \ldots$

2. *Tekintsük az állapotváltozós leírásával megadott DI, illetve FI rendszert!*

DI: $$\underline{x}[k+1]=\begin{pmatrix} 0 & -0{,}24 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}[k]+\begin{pmatrix} -0{,}24 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}u[k]$$

$$y[k]=\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\underline{x}[k]+1\cdot u[k]$$

FI: $$\underline{x}'(t)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}\underline{x}(t)+\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}u(t)$$

$$y(t)=\begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix}\underline{x}(t)$$

a.) Határozzuk meg a rendszerek sajátértékeit, és vizsgáljuk meg a stabilitást!

DI:

'f2aDI.m' :

```
Ad=[0 -0.24; 1 1]
bd=[-0.24; 1.5]
cD=[0 1]
dd=1
lambdad=eig(Ad)
```

$\lambda_1 = 0{,}4 \quad \lambda_2 = 0{,}6 \quad \Rightarrow$ aszimptotikusan stabil

FI:

'f2aFI.m' :

```
Af=[0 1; -3 -4]
bf=[0; 1]
cf=[1 5]
df=0
lambdaf=eig(Af)
```

$\lambda_1 = -1 \quad \lambda_2 = -3 \quad \Rightarrow$ aszimptotikusan stabil *b.) Határozzuk meg a rendszerek átviteli függvényét!*

DI:

$$H(z)=\underline{c}^{\mathrm{T}}\left(z\,\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right)^{-1}\cdot\underline{b}+d=\ldots=\frac{z^2+0{,}5\,z}{z^2-z+0{,}24}$$

ellenőrzés ('f2bDI.m'):

```
Sdi=ss(Ad,bd,cD,dd,1); % CST
sysout(Sdi,"tf");
```

FI:

$$H(s)=\underline{c}^{\mathrm{T}}\left(s\,\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}\right)^{-1}\cdot\underline{b}+d=\ldots=\frac{5\,s+1}{s^2+4\,s+3}$$

ellenőrzés ('f2bFI.m'):

```
Sfi=ss(Af,bf,cf,df); % CST
sysout(Sfi,"tf");
```

c.) Számítsuk ki a DI rendszer impulzusválaszát, és ellenőrizzük lépésről-lépésre történő behelyettesítéssel!

$$\frac{H(z)}{z}=\frac{z+0,5}{z^2-z+0,24}$$

'f2cDI.m' :

```
[r,p,c]=residue([0 1 0.5],[1 -1 0.24])
```

$$H(z)=\frac{5,5\ z}{z-0,6}-\frac{4,5\ z}{z-0,4} \quad \Rightarrow \quad h[k]=\varepsilon[k]\left(5,5\cdot 0,6^k-4,5\cdot 0,4^k\right)$$

ellenőrzés ('f2cDIell.m'):

```
u=[1 0 0 0 0 0];
x=[0;0];
for k=0:5
  h=5.5*0.6.^k-4.5*0.4.^k;
  y=cD*x+dd*u(k+1);
  disp([h y]);
  x=Ad*x+bd*u(k+1);
end
```

d.) Számítsuk ki a FI rendszer impulzusválaszát, és ellenőrizzük a differenciál-egyenlet numerikus integrálásával!

$$H(s)=\frac{5s+1}{s^2+4s+3}$$ 'f2dFI.m':

```
[r,p,c]=residue([0 5 1],[1 4 3])
```

$$H(s)=\frac{7}{s+3}-\frac{2}{s+1} \quad \Rightarrow \quad h(t)=\varepsilon(t)\left(7e^{-3t}-2e^{-1t}\right)$$

ellenőrzés (előrelépő Euler-módszerrel):

$$\underline{x}(0)=\underline{b} \quad (u=0)$$

$$\underline{x}(t+\Delta t)\approx\underline{x}(t)+\Delta t\cdot\left[\underline{\underline{A}}\,\underline{x}(t)+\underline{b}\,u(t)\right]$$

'f2dFIell.m' :

```
x=bf; u=0; dt=0.1; % dt=0.01 jobb
for t=0:dt:0.2
  h=7*exp(-3*t)-2*exp(-t);
  y=cf*x+df*u;
  disp([h y]);
  x=x+dt*(Af*x+bf*u);
end
```

e.) Számítsuk ki a DI rendszer válaszának gerjesztett összetevőjét az alábbi periodikus gerjesztésre!

$$u[0]=1 \quad u[1]=4 \quad u[2]=3 \quad u[3]=-1 \quad \text{és} \quad u[k+4]=u[k]$$

$$\Rightarrow \quad L=4, \quad \Theta=\frac{\pi}{2}$$

'f2eDI.m' :

```
U=fft([1 4 3 -1])/4;
Uteta=[U(1) 2*U(2) U(3)]
teta=[0 pi/2 pi];
Hteta=freqz([1 0.5 0],[1 -1 0.24],teta) % CST
Yteta=Hteta.*Uteta
[abs(Yteta); angle(Yteta)]
```

$$y[k]=10{,}94+2{,}4\cos\left(\frac{\pi}{2}k+2{,}95\right)+0{,}056\cos(\pi k)$$