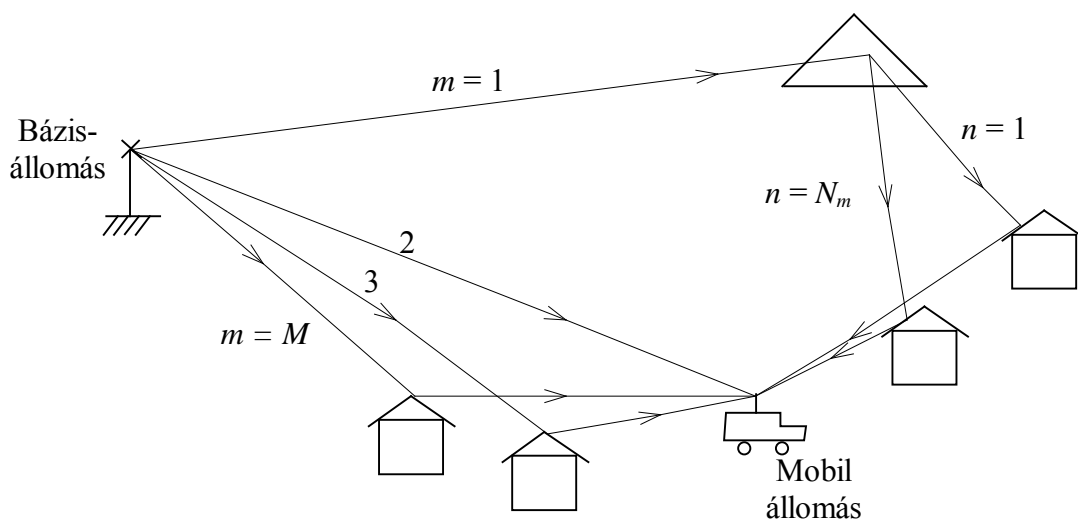


A többutas terjedés fizikai modellje

A mobil rádiórendszerekben központi kérdés a rádiócsatorna megfelelő leírása. Az előző fejezetben megvizsgáltuk miként képezhetjük le az ideális időinvariáns szűrőnek tekinthető rádiócsatornát az alapsávba. Ugyanakkor a rádiócsatorna valós fizikai tulajdonságaiból adódó hatások figyelembe vétele is vizsgálódásunk tárgyát kell képezze. A rádiócsatornában nyilvánvalóan az adó és a vevő között a jel a különféle tereptárgyakon és a talajon való reflexiók következményeképpen egyszerre több úton is terjed. Amennyiben akár a mobil, akár valamelyik tereptárgy mozog, úgy a vevő számára a rádiócsatorna időinvariánsná válik. Ezért ebben a fejezetben tovább közelítve vizsgálatainkat a valós élethez a többutas terjedés fizikai modelljére koncentrálnak.

4.1 Az alapmodell

Minden modell elsődleges célja a fizikai világ azon jelenségeinek egyszerűsített leírása, melyek érdemi hatással bírnak vizsgálatunkra. A mobil rádiócsatorna esetében az alapmodell a bázisállomás és a mobil vevő között a rádiójelet ért hatásokat foglalja magában, ahogy azt a 4.1 ábra mutatja.



4.1 ábra A mobil rádiócsatorna alapmodellje

Az alapmodellben a bázisállomástól ún. fő terjedési útvonalakon halad a jel addig, amíg valamilyen tereptárgynak ütközve szóródik. Ezután a szóródott, ún. mellék terjedési útvonalakon jut - természetesen egyszerre több irányból is - a mobil vevőbe. A jel valamennyi útvonalon az útvonaltól függő csillapítást és késleltetést szenved. A modellben fontos szerepet kap a mobil mozgásából adódó Doppler-csúszásnak nevezett frekvenciaeltolódás, melynek számításához figyelembe kell vennünk a mobil sebességét, a mozgás és a hullámterjedés iránya által bezárt szöget, valamint a vivőfrekvenciát.

Legyen az ekvivalens alapsávi jelünk a következő

$$s_{ekv}(t) = \underbrace{\sqrt{\frac{2E_s}{T}}}_{A \hat{=} 1} a(t) e^{j\varphi(t)},$$

ahol E_s a szimbólumenergia, T a szimbólumidő, $a(t)$ a jel amplitúdója, $\varphi(t)$ a fázisa és a jel amplitúdóját önkényesen, de a kapott eredmények általánosságát semmiben sem korlátozva egynek választjuk. Ekkor a vivőfrekvenciás jel az alábbi módon írható fel

$$s(t) = \text{Re}\{s_+(t)\} = a(t) \cos(2\pi f_0 t + \varphi(t)).$$

Vezessük be a következő jelöléseket

- m fő terjedési útvonal sorszáma ($m=1, \dots, M$)
- n mellékútvonal sorszáma ($n=1, \dots, N_m$)
- $r_{mn}(t)$ az mn útvonalon haladó jel a vevő helyén
- α_{mn} a csillapítási tényező
- τ_{mn} a késleltetés
- f_{mn} a Doppler-csúszás $\frac{f_0 v}{c} \cos \psi_{mn}$
- v a mobil sebessége
- ψ_{mn} a mozgás és a hullámterjedés iránya által bezárt szög
- c a fénysebesség
- f_0 vivőfrekvencia

Az alapmodell és a fenti jelölések alapján az mn útvonalon érkező jel komplex előburkolója az alábbi módon írható fel

$$r_{+mn}(t) = \alpha_{mn} s_{ekv}(t - \tau_{mn}) e^{j2\pi f_0(t - \tau_{mn})} e^{j2\pi f_{mn}t},$$

amiből a mobil vevő helyén a vett jel komplex előburkolója a valamennyi lehetséges útvonalra való összegzés segítségével állítható elő

$$r_+(t) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{mn} s_{ekv}(t - \tau_{mn}) e^{j2\pi f_0(t - \tau_{mn}) + j2\pi f_{mn}t}.$$

Ha az mn útvonalon haladó jel τ_{mn} késleltetése független a mellékútvonaltól, azaz a szóródás után az egyes mellékutakon közel azonos hosszúságú utat tesz meg a vevőig, vagy csak olyan kis mértékben tér el az egyes utakon, hogy a változás a szimbólumidőhöz képest kicsi, akkor az m -dik főútvonalat tartalmazó valamennyi adó-vevő útvonal késleltetése jó közelítéssel

$$T_m = \frac{1}{N_m} \sum_{n=1}^{N_m} \tau_{mn},$$

amiből

$$r_+(t) = \sum_{m=1}^M s_{ekv}(t - T_m) e^{j2\pi f_0 t} \underbrace{\sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{mn} e^{-j2\pi f_0 \tau_{mn} + j2\pi f_{mn} t}}_{z_m(t)}$$

alakban írható fel. Bevezetve a mellékútvonal-független komplex $z_m(t)$ szorzófaktort, valamint alkalmazva a komplex előburkoló és az alapsávi ekvivalens közötti összefüggést, a komplex alapsávi ekvivalensre az alábbi kifejezés adódik

$$r_{ekv}(t) = \sum_{m=1}^M s_{ekv}(t - T_m) z_m(t).$$

4.2 $z_m(t)$ tulajdonságai

A következőkben vizsgáljuk meg a $z_m(t)$ szorzófaktort. $z_m(t)$ komplex szám, melynek általános alakja

$$z_m(t) = x_m(t) + j y_m(t),$$

valós és képzetes része pedig az előzőek figyelembe vételével

$$x_m(t) = \operatorname{Re}\{z_m(t)\} = \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{mn} \cos(2\pi f_{mn} t - 2\pi f_0 \tau_{mn}),$$

$$y_m(t) = \operatorname{Im}\{z_m(t)\} = \sum_{n=1}^{N_m} \alpha_{mn} \sin(2\pi f_{mn} t - 2\pi f_0 \tau_{mn}).$$

Nagyon fontos kiemelni, hogy csatornában α_{mn} , f_{mn} és τ_{mn} időben nem állandók, így egy adott pillanatban valószínűségi változókkal írhatók le. Ha N_m elegendően nagy és a változók függetlenek és azonos eloszlásúak, akkor összegük a centrális határeloszlás tétel miatt Gauss-eloszlás követ. Emiatt $z_m(t)$ valós és képzetes része is Gauss-eloszlású. Ha teljesül, hogy $x_m(t)$ és $y_m(t)$ egyformán nulla várható értékűek és azonos szórásúak, azaz

$$\mathbb{E}[x_m(t)] = \mathbb{E}[y_m(t)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[x_m^2(t)] = \mathbb{E}[y_m^2(t)] = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_m} \mathbb{E}[\alpha_{mn}^2] = \sigma^2,$$

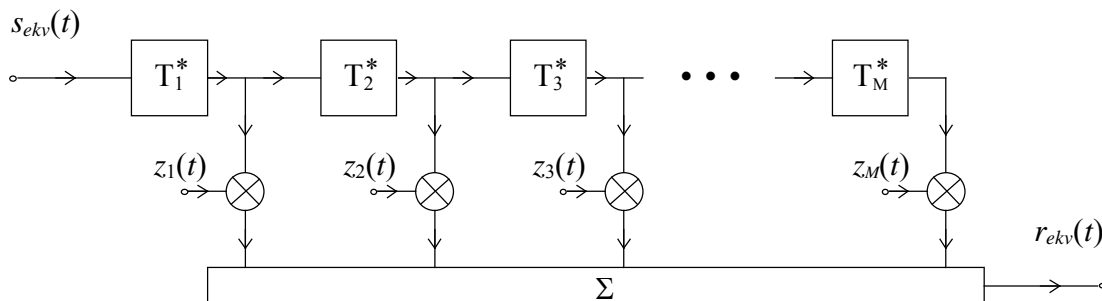
valamint az útvonalfüggő komponensek korrelálatlanok, azaz

$$\left. \begin{aligned} \mathbb{E}[x_m(t) \cdot x_l(t)] &= 0 \\ \mathbb{E}[y_m(t) \cdot y_l(t)] &= 0 \end{aligned} \right\} m \neq l$$

$$\mathbb{E}[x_m(t) \cdot y_l(t)] = 0$$

akkor a csatorna modellje a 4.2 ábrán látható struktúrájú, ahol a T_i^* késleltetési értékek az alábbi rekurzív formulával számíthatók

$$T_1^* = T_1 ; T_i^* = \sum_{j=0}^i T_j^* .$$



4.2 ábra A mobil rádiócsatorna alapsávi ekvivalens modellje

4.3 A mobil csatornák általános jellemzése, a Bello-függvények

Az előző alfejezetben megállapítottuk, hogy a többutas terjedés megfelelő feltételek teljesülése esetén az egyes utakra jellemző késleltetés és egy komplex szorzófaktor segítségével jellemezhetjük. A most következőkben a mobil rádiócsatorna általános leírását mutatjuk be az ún. Bello-függvényekre támaszkodva. Először a Bello-függvények definícióját adjuk meg, majd szemléletes módon értelmezzük őket.

A csatorna kimeneti jele lineáris idővariáns rendszerben az alábbi összefüggéssel adható meg

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau ,$$

ahol $s(t)$ és $r(t)$ az adóhoz és a vevőhöz tartozó komplex alapsávi ekvivalens jelek, tehát a jelölések egyszerűsítése végett a továbbiakban elhagyjuk az ekv alsó indexelést. $h(\tau, t)$ pedig az idővariáns csatorna súlyfüggvénye.

A mobil csatorna általános leírásához használt ún. Bello-függvények rendszere a 4.3 ábrán látható, definíciójuk pedig a következő

$$H(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau ,$$

$$U(\tau, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) e^{-j2\pi \nu t} dt ,$$

$$D(f, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) \cdot e^{-j2\pi \nu t} \cdot e^{-j2\pi f \tau} dt d\tau ,$$

ahol az egyes függvények értelmezése az alábbi

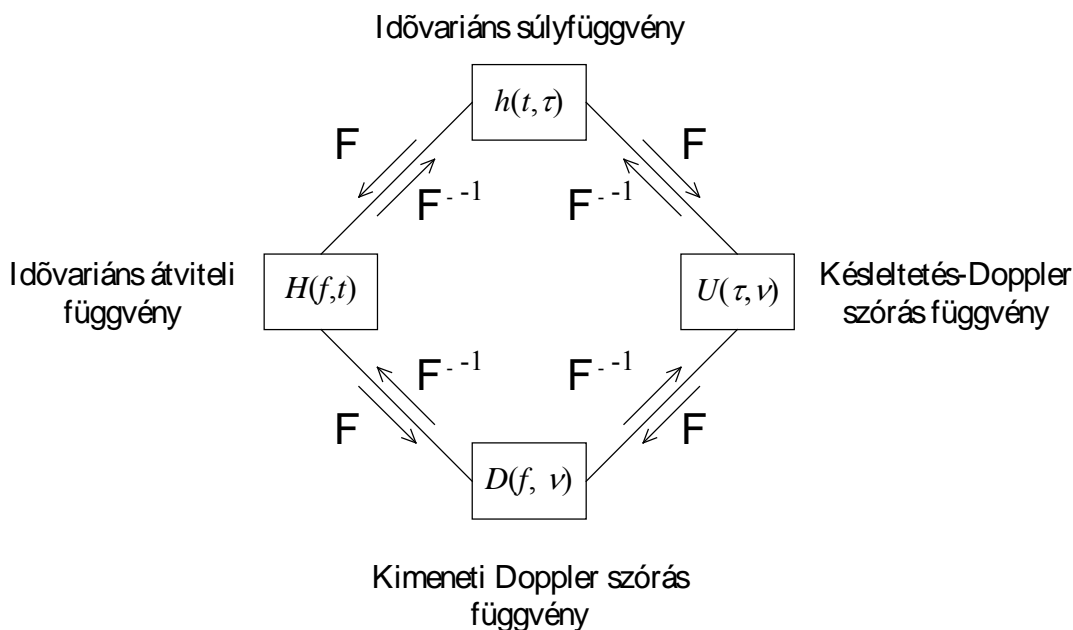
$h(\tau, t)$ **idővariáns súlyfüggvény:** a rendszer t időpillanatban $h(\tau, t)$ súllyal „emlékezik” a bemenő jel $(t-\tau)$ időben felvett értékére (Dirac-delta gerjesztés esetén ez a kimenő jel). Az idővariáns súlyfüggvény az 1.4 ábrán látható.

$H(f, t)$ **idővariáns átviteli függvény:** megadja, hogy a t időpillanatban milyen súlyozással viszi át a rendszer a $e^{j2\pi ft}$ típusú periodikus összetevőket.

$U(\tau, \nu)$ **késleltetés-Doppler-szórás függvény:** felvilágosítást ad arról, hogy késleltetés és Doppler-szórás mentén a bemeneti jel milyen súlyozással vesz részt a kimeneti jel előállításában.

$D(f, \nu)$ **kimeneti Doppler-szórás függvény:** a kimenő jel spektrumát állítja elő az alábbi összefüggés szerint

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(f - \nu, \nu) S(f - \nu) d\nu.$$



4.3 ábra A Bello-függvények rendszere

A Bello-függvények szemléltetéséhez először lássuk be az

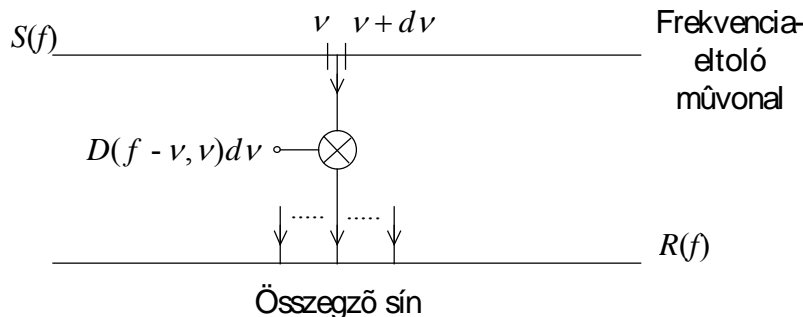
$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} D(f - \nu, \nu) S(f - \nu) d\nu$$

állítás, mely a következő lépésekben történik

$$R(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t) e^{-j2\pi f t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau \cdot e^{-j2\pi f t} dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\rho, \nu) e^{j2\pi\rho t} e^{j2\pi\nu\tau} d\rho d\nu s(t-\tau) d\tau e^{-j2\pi f t} dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\rho, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) e^{-j2\pi[f t - \rho t - \nu\tau]} dt d\tau d\rho d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\rho, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} s(t-\tau) e^{-j2\pi(f-\nu)t} e^{j2\pi\rho\tau} dt d\tau d\rho d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\rho, \nu) \int_{-\infty}^{+\infty} S(f-\nu) e^{j2\pi(\rho+\nu-f)\tau} d\tau d\rho d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} D(\rho, \nu) S(f-\nu) \delta(\rho+\nu-f) d\tau d\rho d\nu = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} D(f-\nu, \nu) S(f-\nu) d\nu.
 \end{aligned}$$

A jelenséget a 4.4 ábrán látható módon úgy lehet értelmezni, hogy az átvitt jel spektruma a Doppler-csúszástól és a bemeneti jel frekvenciájától függő súlyozással adódik össze a kimeneten.



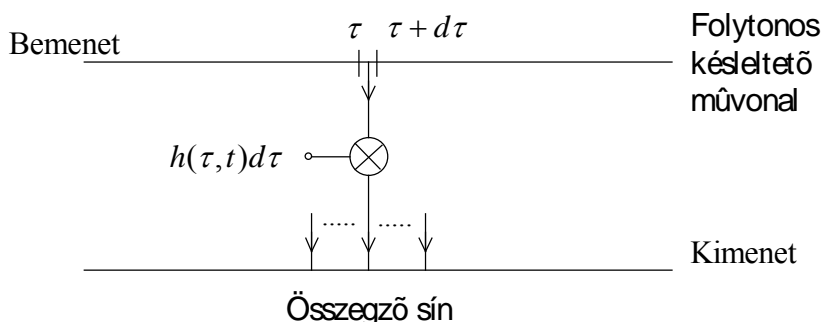
4.4 ábra A lineáris idővariáns csatorna spektruma előállításának szemléltetése

Most pedig értelmezzük a lineáris idővariáns mobil rádiócsatorna kimeneti jelére adott

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau$$

kifejezést. A jelenség jól szemléltethető a 4.5 ábrán látható módon. A csatorna bemenő jelét vezessük egy késleltető művonalra, ahonnan minden $(\tau, \tau + d\tau)$ időközben kivezetjük a késleltetett jelet és megszorozzuk az idővariáns csatorna súlyfüggvényének $d\tau$ -szorosával, majd összegezzük az így kicsatolt jeleket egy összegző sín segítségével. Jól átható, hogy a rendszer t időpillanatban $h(\tau, t)$

súllyal veszi figyelembe a bemenő jel $(t-\tau)$ időben felvett értékét a kimenő jel kialakításakor.



4.5 ábra A lineáris idővariáns csatorna időtartománybeli szemléltetése

Határozzuk meg ezek után a kimeneti jel időfüggő spektrumát. Helyettesítsük a kiindulási képletünkben $h(\tau, t)$ -t a $H(f, t)$ idővariáns átviteli függvény segítségével

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} H(f, t) e^{j2\pi f \tau} s(t - \tau) d\tau df =$$

amiből az integrandusok csoportosításával

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(f, t) \int_{-\infty}^{+\infty} s(t - \tau) e^{j2\pi f \tau} d\tau df =$$

elvégezve a $t - \tau = \sigma$; $d\tau = -d\sigma$; $\tau = t - \sigma$ helyettesítéseket

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} H(f, t) \int_{-\infty}^{+\infty} s(\sigma) e^{j2\pi f (t - \sigma)} d\sigma df =$$

amiből a Fourier-transzformációs szabály ismeretében

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{H(f, t) S(f)}_{R(f, t)} e^{j2\pi f t} df ,$$

azaz az időfüggő spektrum az idővariáns átviteli függvény és a bemenő alapsávi ekvivalens jel Fourier-transzformáltjának ismeretében az

$$R(f, t) = H(f, t) S(f)$$

módon határozható meg.

A késleltetés-Doppler-szórás függvény és a kimeneti jel közötti kapcsolat az alábbi módon határozható meg

$$\begin{aligned} r(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau, t) s(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau, \nu) e^{j2\pi \nu t} d\nu \cdot s(t - \tau) d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi \nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} U(\tau, \nu) s(t - \tau) d\tau d\nu . \end{aligned}$$

Nézzünk egy példát a fenti eredményre! Az idővariáns súlyfüggvény szélessávú csatorna esetén a Doppler-csúszást is figyelembe véve

$$h(\tau, t) = \delta(\tau) e^{j2\pi\nu_0 t}$$

alakú, melynek t -szerinti Fourier-transzformációjával kapjuk a késleltetés-Doppler-szórás függvényt

$$U(\tau, \nu) = \delta(\tau) \delta(\nu - \nu_0).$$

A kimeneti jel ezek alapján konvolúcióval egyszerűen meghatározható

$$r(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j2\pi\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) \delta(\nu - \nu_0) s(t - \tau) d\tau d\nu = s(t) e^{j2\pi\nu_0 t}.$$

Jól látható, hogy a csatorna bemeneti jelének minden komponense ν_0 frekvenciával eltolódik.

Összefoglalva a Bello-függvényekre vonatkozó ismereteinket elmondhatjuk, hogy a Bello-függvények segítségével leírhatjuk a lineáris idővariáns csatorna tulajdonságait. Attól függően, hogy melyik jellemzőre vagyunk kíváncsiak más és más Bello-függvényt alkalmazunk. Például a frekvenciatartományban jelentkező véletlenszerű Doppler-csúszást a kimeneti Doppler-szórás függvény segítségével adhatjuk meg. A Bello-függvények további fontos jellemzője, hogy jól definiált egyértelmű kapcsolat áll fenn közöttük, így bármelyik függvény ismeretében a többi meghatározható.

A továbbiakban csak a $h(\tau, t)$ és a $H(f, t)$ függvényeket fogjuk alkalmazni a véletlenül változó paraméterű csatornák leírására.

4.4 A véletlenül változó paraméterű csatornák jellemzése

A mobil rádiócsatornák esetén a csatornaparaméterek adott időpillanatbeli értékei valószínűségi változók, így a paraméterek időbeli viselkedése sztochasztikus folyamatok segítségével írható le. A sztochasztikus folyamatok jellemzésének egyik gyakori módja a korrelációs függvények alkalmazása. Vezessük be esetünkben az idővariáns súlyfüggvény korrelációs függvényét az alábbi módon

$$R_h(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) = \mathbb{E}[h(\tau_1, t_1) \cdot h^*(\tau_2, t_2)].$$

A várható érték képzés definícióját alkalmazva

$$R_h = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x y f_{h(\tau_1, t_1), h^*(\tau_2, t_2)}(x, y) dx dy,$$

ahol $f(x, y)$ a $h(\tau_1, t_1)$ és $h^*(\tau_2, t_2)$ minták együttes valószínűségi sűrűségfüggvényét jelöli.

A rádiócsatornát az idővariáns súlyfüggvény korrelációs függvényének tulajdonságai alapján az alábbi kategóriákba csoportosítja a szakirodalom, ahol az egyes típusok értelmezéséhez segítséget nyújt az 1.4 ábra.

- **Stacionárius csatornáról** (WSS, Wide Sense Stationary Channel) beszélünk, ha a korrelációs függvény időben csak a $\Delta t = (t_2 - t_1)$ különbségtől függ, azaz

$$R_h(\tau_1, \tau_2, t_1, t_1 + \Delta t) = R_h(\tau_1, \tau_2, \Delta t) = \mathbb{E}[h^*(\tau_1, t)h(\tau_2, t + \Delta t)].$$

- **Korrelálatlan szórású csatornáról** (US Channel, Uncorrelated Scattering Channel) beszélünk, ha

$$R_h(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) = \delta(\tau_2 - \tau_1)P_h(\tau_1, t_1, t_2),$$

azaz a késleltetés változásával a különböző jelutakon a jelek korrelálatlanul terjednek.

- **Stacioner korrelálatlan szórású csatornáról** (WSSUS Channel, Wide Sence Stationary Uncorrelated Scattering Channel) beszélünk, ha a fenti két tulajdonság egyszerre teljesül, azaz

$$\begin{aligned} R_h(\tau_1, \tau_2, t_1, t_2) &= R_h(\tau_1, \tau_2, t, t + \Delta t) = \delta(\tau_2 - \tau_1)P_h(\tau_1, \Delta t) = \\ &= \delta(\Delta t)P_h(\tau, \Delta t) \end{aligned}$$

Az idővariáns átviteli függvény korrelációfüggvénye a fentiek alapján az alábbi alakban adható meg

$$R_H(f_1, f_2, t_1, t_2) = \mathbb{E}[H^*(f_1, t_1) \cdot H(f_2, t_2)],$$

amely a WSSUS csatornában csak a frekvencia- és időkülönbségtől függ, azaz

$$R_H(f_1, f_2, t_1, t_2) = R_H(\Delta f, \Delta t).$$

Most határozzuk meg WSSUS csatorna esetében az idővariáns átviteli függvény korrelációfüggvényét!

$$\begin{aligned} R_H(\Delta f, \Delta t) &= \mathbb{E}[H^*(f, t) \cdot H(f + \Delta f, t + \Delta t)] = \\ &= \mathbb{E}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau, t) e^{j2\pi f \tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho, t + \Delta t) e^{-j2\pi(f + \Delta f)\rho} d\rho\right] = \end{aligned}$$

az integrálás és a várható érték képzés felcserélésével

$$R_H(\Delta f, \Delta t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}[h^*(\tau, t)h(\rho, t + \Delta t)] e^{j2\pi[f\tau - (f + \Delta f)\rho]} d\rho d\tau.$$

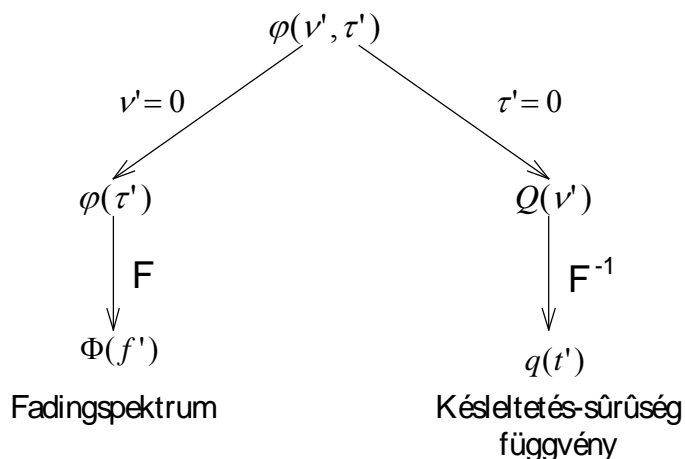
WSSUS csatornáról lévén szó $h^*(\tau, t)$ és $h(\rho, t + \Delta t)$ függetlenek ezért a szorzat várható értéke a várható értékek szorzatára bontható

$$\begin{aligned} R_H(\Delta f, \Delta t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\rho - \tau) P_h(\tau, \Delta t) e^{j2\pi[f(\tau - \rho) + \Delta f\rho]} d\rho d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_h(\tau, \Delta t) e^{-j2\pi\Delta f \tau} d\tau = \mathbf{F} \{P_h(\tau, \Delta t)\}. \end{aligned}$$

Az irodalom az $R_H(\Delta f, \Delta t)$ függvény felét idő-frekvencia autokorrelációs függvénynek nevezi és $\varphi(\Delta f, \Delta t)$ -vel jelöli

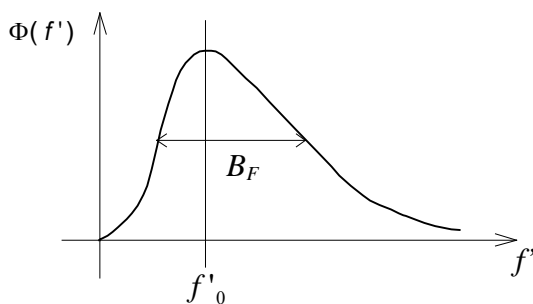
$$\varphi(\Delta f, \Delta t) = \frac{1}{2} R_H(\Delta f, \Delta t).$$

Az egyszerűbb jelölés érdekében legyen $\Delta f = \nu'$ és $\Delta t = \tau'$. Az idő-frekvencia autokorrelációs függvény a 4.6 ábrán látható módon értelmezhető. Amennyiben a minták közötti frekvenciakülönbséget nullának választjuk, azaz $\nu' = 0$ és elvégezzük az idő szerinti Fourier-transzformációt, akkor a fadingspektrumot kapjuk, melyet a 4.7 ábra szemléltet. A fadingspektrum a Doppler-jelenséget jellemzi többutas terjedés esetén. Ilyekor ugyanis a többszörös utak és visszaverődések miatt a mobil mozgásából adódó Doppler-csúszás nem a csatorna bemenő jelének egy konstans frekvenciával való eltolását jelenti, hanem a kimenő jel frekvenciája sávvá szélesedik. Azt, hogy adott pillanatban éppen mekkora a jel frekvenciája egy valószínűségi változóval adhatjuk meg, aminek a fadingspektrum a sűrűségfüggvénye.



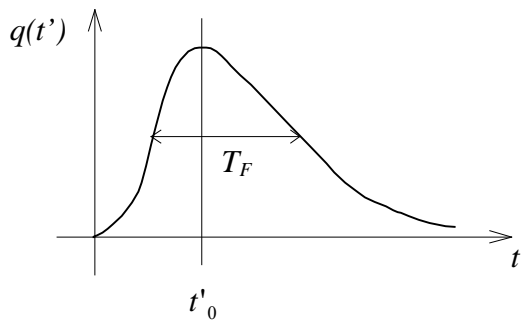
4.6 ábra Az idő-frekvencia korrelációs függvény értelmezése

A 4.7 ábrán f'_0 jelöli a Doppler-csúszás várható értékét és az ettől való átlagos eltérés négyzetének várható értékét, azaz az eloszlás szórását az irodalomban Doppler-szórásnak nevezett B_F mennyiség.



4.7 ábra Fadingspektrum és Doppler-szórás

Az előzőekhez hasonló módon értelmezhető az az eset, amikor a minták közötti időeltérést nullázzuk, azaz $\tau' = 0$. Ekkor az inverz Fourier-transzformáció segítségével a késleltetés sűrűségfüggvényéhez jutunk. Ennek fizikai magyarázata ugyancsak a többszörös utakra és visszaverődésekre vezethető vissza. Ilyenkor ugyanis a csatornán áthaladó jel késleltetése nem konstans, hanem egy valószínűségi változó szerint határozható meg. Ennek a változónak a sűrűségfüggvénye a $q(t')$ késleltetés sűrűségfüggvény, mely a 4.8 ábrán látható.



4.8 ábra Késleltetés sűrűségfüggvény és késleltetés szórás

A 4.8 ábrán t'_0 jelöli az átlagos késleltetést és T_F a késleltetés szórását. Fontos megjegyezni, hogy a késleltetés szórás reciprokát a csatorna koherencia-sávszélességének nevezi a szakirodalom

$$\text{csatorna koherencia sávszélesség} = \frac{1}{T_F}.$$

A következőkben két példát vizsgálunk meg, az egyik az idővariáns korrelálatlan szórású csatorna a másik pedig a szélessávú idővariáns rendszer.

Időinvariáns US csatorna

Időinvariáns esetben a csatorna súlyfüggvénye időfüggetlen, azaz

$$h(\tau, t) = h(\tau).$$

Ebből az átviteli függvényre a Fourier-transzformáció elvégzése után

$$H(f, t) = H(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) e^{-j2\pi f \tau} d\tau$$

adódik, amiből az átviteli függvény autokorrelációs függvénye már egyszerűen számítható

$$R_H(f_1, f_2, t_1, t_2) = R_H(f_1, f_2).$$

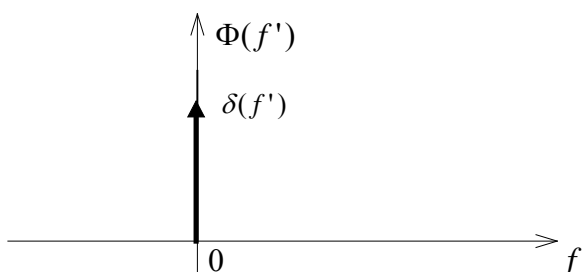
Figyelembe véve a korrelálatlan szórású csatornát az

$$R_H(f_1, f_2) \stackrel{US}{=} R_H(\Delta f) \stackrel{\Delta f = \nu'}{=} 2\varphi(\nu', 0)$$

eredményt kapjuk, amiből a fadingspektrum függvény a korábbiaknak megfelelően Fourier-transzformáció útján kapható meg

$$\Phi(f') = \mathbf{F} \{ \varphi(\nu', 0) |_{\nu'=0} \}.$$

Ez pedig nem más, mint a Dirac-függvény, azaz időinvariáns korrelálatlan szórású csatornában a fadingspektrum várakozásainknak megfelelően egyetlen vonalra szűkül, ahogy az a 4.9 ábrán látható.



4.9 ábra Fadingspektrum időinvariáns korrelálatlan szórású csatornában

A késleltetés sűrűségfüggvény meghatározásához induljuk ki az átviteli függvény autókorrelációs függvényéből, melyről tudjuk, hogy

$$R_H(\Delta f) = \mathbf{E} [H^*(f) \cdot H(f + \Delta f)] =$$

amelybe behelyettesítve az idővariáns súlyfüggvényt

$$= \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h^*(\tau) e^{j2\pi f \tau} d\tau \int_{-\infty}^{+\infty} h(\rho) e^{-j2\pi(f+\Delta f)\rho} d\rho \right].$$

Kihasználva az integrálás és a várható érték képzés felcserélhetőségét

$$R_H(\Delta f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} [h^*(\tau) h(\rho)] \cdot e^{j2\pi(\tau-\rho)f} \cdot e^{-j2\pi\Delta f \rho} d\tau d\rho =$$

amiből figyelembe véve a csatorna korrelálatlan szórását

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau - \rho) P_h(\tau) e^{j2\pi(\tau-\rho)f} e^{-j2\pi\Delta f \rho} d\tau d\rho = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} P_h(\tau) e^{-j2\pi\Delta f \tau} d\tau = \mathbf{F}_{\Delta f} \{ P_h(\tau) \}. \end{aligned}$$

A következő lépésben meghatározzuk a késleltetés sűrűségfüggvény Fourier-transzformáltját

$$Q(\nu') = \frac{1}{2} R_H(\Delta f) |_{\Delta f = \nu'} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\nu'} \{ P_h(\tau) \},$$

amiből

$$q(t') = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{t'}^{-1} \{ \mathbf{F}_{\nu'} \{ P_h(\tau) \} \} = \frac{1}{2} P_h(t')$$

adódik. Vagyis ilyenkor a két korrelációs függvény között az alábbi viszony áll fenn

$$R_H(\Delta f, \Delta t) = \mathbf{F} \{ P_h(\tau, \Delta t) \}.$$

Szélessávú idővariáns hálózat

Szélessávú csatorna esetén az idővariáns átviteli függvény az időfüggést jellemző $h(t)$ és a csatorna emlékezetét leíró $\delta(\tau)$ függvények szorzatára bontható

$$h(\tau, t) = \delta(\tau) h(t),$$

amiből az idővariáns átviteli függvényre

$$H(f, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau) h(t) e^{-j2\pi f \tau} d\tau = h(t)$$

adódik, azaz a csatorna szélessávú mivolta a $H(f, t)$ frekvenciafüggetlenségében nyilvánul meg. Ebből következik, hogy az átviteli függvény autokorrelációs függvénye

$$R_H(f_1, f_2, t_1, t_2) = R_H(t_1, t_2) =$$

amiből figyelembe véve a WSS tulajdonságot

$$\stackrel{\text{WSS}}{=} R_H(\Delta t) \stackrel{\Delta t = \tau'}{=} 2\varphi(0, \tau')$$

eredményt kapjuk az idő-frekvencia autokorrelációs függvényre.

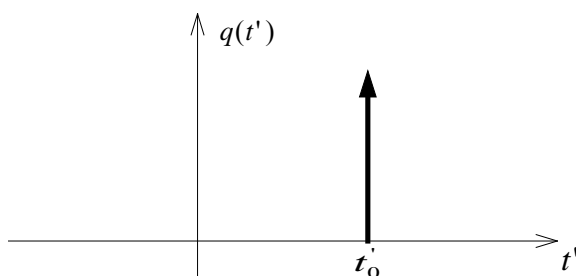
A késleltetés sűrűségfüggvényt a már bevált módon számíthatjuk

$$q(t') = \mathbf{F}_t^{-1} \{ Q(\nu') \}.$$

Behelyettesítve az előbb meghatározott $\varphi(0, \tau')$ -t

$$q(t') = \mathbf{F} \{ \varphi(0, \tau')|_{\tau'=0} \} = \delta(t'_0)$$

a Dirac-függvény kapjuk, vagyis a szélessávú idővariáns csatornában a jel konstans t'_0 késleltetéssel terjed, ahogy az a 4.10 ábrán látható.



4.10 ábra Késleltetés sűrűségfüggvény szélessávú idővariáns csatornában

Vizsgáljuk meg a csatorna fadingspektrumát! Az átviteli függvény autokorrelációs függvényére a megfelelő definíciót alkalmazva

$$R_H(\Delta t) = \mathbf{E} [H^*(t) H(t + \Delta t)],$$

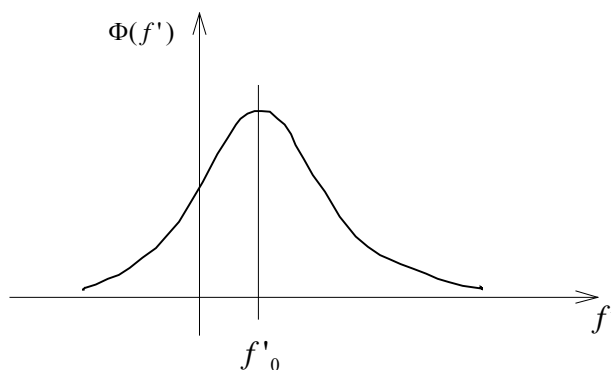
amibe behelyettesítve az átviteli függvényre kapott $H(t) = h(t)$ eredményt

$$R_H(\Delta t) = \mathbb{E}[h^*(t)h(t + \Delta t)] = 2\varphi(0, \Delta t) \stackrel{\Delta t = \tau'}{=} 2\varphi(\tau')$$

adódik. Most pedig a fentiek figyelembe vételével írjuk fel a csatorna fadingspektrumát

$$\Phi(f') = \mathbf{F} \{ \varphi(\tau') \} = \frac{1}{2} \mathbf{F}_{f'} \{ \mathbb{E}[h^*(t)h(t + \tau')] \}.$$

Az eredmény önmagáért beszél. A 4.11 ábrán jól látható, hogy a szélessávú idővariáns csatornában a Doppler-eltolódás egy f'_0 várható érték körül adott valószínűségeloszlás szerint történik.



4.11 ábra Fadingspektrum függvény szélessávú idővariáns csatornában

Láttuk, hogy szélessávú idővariáns csatornában az átviteli függvény $H(f, t) = h(t)$ alakú. Alkalmazzuk 4.1 fejezetben használt $z(t)$ jelölést, azaz

$$H(f, t) = z(t) = x(t) + j y(t),$$

amiből a

$$h(\tau, t) = \delta(\tau) z(t)$$

alakot kapjuk a csatorna súlyfüggvényére, az idő-frekvencia autokorrelációs függvény pedig

$$\varphi(v', \tau') = \frac{1}{2} \mathbb{E}[z^*(t)z(t + \tau')] = \varphi(\tau')$$

s így a fadingspektrum

$$\Phi(f') = \mathbf{F} \{ \varphi(\tau') \}.$$

A szélessávú idővariáns csatorna további elnevezései ezek alapján

- *multiplikatív fadinges csatorna*, mert a fadinget leíró komplex $z(t)$, mely nem más mint a csatorna átviteli függvénye a lineáris rendszerek komplex frekvenciatartománybeli leírásának megfelelően szorozza a csatorna bemenő jelének Fourier-transzformáltját.