Felsőbb Matematika 1. ZH 2011-10-24

1. Írjuk fel az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 2 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

mátrix
(a) szinguláris felbontását és
(b) QR-felbontását, valamint az
(c) oszlopterére való merőleges vetítés mátrixát! *(5 pont)*

Megoldás. Mivel $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = 49\mathbf{I}_2$, ezért $\mathbf{\Sigma}_1 = 7\mathbf{I}_2$ és a redukált szinguláris felbontás $\mathbf{A} = (\frac{1}{7}\mathbf{A})(7\mathbf{I}_2)\mathbf{I}_2$. A szinguláris felbontáshoz még ki kell egészíteni az $\mathbf{U}_1$ és $\mathbf{\Sigma}_1$ mátrixokat (az $\mathbf{U}$ harmadik oszlopa megkapható például egy vektori szorzással):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2/7 & 6/7 & 3/7 \\ 3/7 & 2/7 & -6/7 \\ 6/7 & -3/7 & 2/7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Hasonló okból a QR-felbontás $\mathbf{A} = (\frac{1}{7}\mathbf{A})(7\mathbf{I})$. Az $\mathbf{A}$ oszlopterére való merőleges vetítés mátrixa

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^T\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^T = \frac{1}{49}\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 40 & 18 & -6 \\ 18 & 13 & 12 \\ -6 & 12 & 45 \end{bmatrix}$$

2. Legyen

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki az $\mathrm{e}^{\mathbf{A}}$ mátrixot! *(4 pont)*

3. Számítsuk ki az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \\ 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

mátrix LDU-felbontását! Hasonló-e az $\mathbf{A}$ mátrix az így kapott $\mathbf{D}$-hez? *(3 pont)*

Megoldás.

$$\mathbf{A} = \mathbf{LDU} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A sajátértékek 2, -1, -10, tehát nem hasonló!

4. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer legkisebb normájú optimális megoldását! *(3 pont)*

$$\begin{aligned} x \quad\; + \; z &= 4 \\ y + \; z &= 4 \\ x + y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Megoldás. Az $\mathbf{A} = \mathbf{BR}$ bázisfelbontás:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Innen a pszeudoinverz kiszámolható az $\mathbf{A}^+ = \mathbf{R}^+\mathbf{B}^+ = \mathbf{R}^\top(\mathbf{R}\mathbf{R}^\top)^{-1}(\mathbf{B}^\top\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^\top$ képlettel:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}^+ = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

így az optimális megoldás:

$$\frac{1}{9}\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

5. Döntsük el, hogy az

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 9 \\ 8 & 0 & 7 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

mátrixok közül melyik primitív! *(3 pont)*

Megoldás. A mátrixok gráfját fölrajzolva látjuk, hogy csak $\mathbf{B}$ reducibilis, így $\mathbf{B}$ nem is primitív. A $\mathbf{C}$ mátrix irreducibilis és a főátlóján van pozitív elem, ezért primitív. A $\mathbf{D}$ mátrix helyett logikai mátrixokkal számolva:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Tehát innen is látható, hogy $\mathbf{D}^5 > \mathbf{O}$, vagyis $\mathbf{D}$ primitív.

6. Invertálható-e az alábbi mátrix, ha α, β és γ három tetszőleges valós szám? *(2 pont)*

$$\begin{bmatrix} \pi & \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \sin\alpha & \pi & \cos\alpha & \cos\beta \\ \sin\beta & \sin\alpha & \pi & \cos\alpha \\ \sin\gamma & \sin\beta & \sin\alpha & \pi \end{bmatrix}$$

7. Legyenek az $m \times n$-es $\mathbf{A}$ mátrix pozitív szinguláris értékei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_r$. Határozzuk meg az $(m+n) \times (m+n)$-es $\mathbf{X}$ mátrix sajátértékeit, ha

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{O}_m & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^\top & \mathbf{O}_n \end{bmatrix},$$

ahol a blokkmátrix főátlójában négyzetes zérusmátrixok állnak. *(5* pont)*