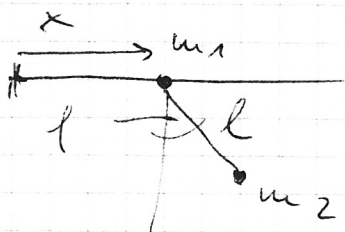


2. feladat



$$\frac{m_1}{2} \dot{x}^2$$

$$x = l \cdot \sin \theta \quad \left(\dot{x} + l \dot{\theta} \cos \theta \right)^2 + \left(l \dot{\theta} \sin \theta \right)^2$$

ez a seb. ngyvete

$$\dot{x}^2 + 2l \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + l^2 \dot{\theta}^2$$

3. feladat

$$F(u) = \iint_R \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2} \, dx \, dy$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2} \cdot 2u_x (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2} + \frac{\partial}{\partial y} \dots = 0$$

$$0 = u_{xx} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-1/2} - u_x \frac{1}{2} (1 + u_x^2 + u_y^2)^{-3/2} (2u_x u_{xx} + 2u_y u_{yx}) + \dots$$

$$u_{xx} (1 + u_x^2 + u_y^2) - u_{xx} u_x^2 - u_x u_y u_{xy} + \dots = 0$$

$$u_{xx} (1 + u_y^2) + u_{yy} (1 + u_x^2) = 2u_x u_y u_{xy}$$

4. feladat

$$m h'' = -Dh - mg + m \quad | m \leq 1$$

$$h' = v$$

$$v(t) = \int_{t_0}^t \left(-\frac{Dh}{m} - g + \frac{m}{m} \right) dt + v_0$$

$$h(t) = h_0 + \int_{t_0}^t v(t) dt \quad \int_{t_0}^{t_1} 1 dt \rightarrow \text{min}$$

$$H = p_1 v + p_2 \left(-\frac{Dh}{m} - g + \frac{v}{m} \right) - 21$$

$$p_0' = H_t = 0$$

$$p_1' = -H_v = + \frac{D}{m} p_2$$

$$p_2' = -H_w = -p_1$$

$$Dh(t_1) + mg = 0$$

$$u'(t_1) = 0$$

$$\begin{pmatrix} Dh + mg \\ m \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -L_1 & -L_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (p_1(t_1), p_2(t_1))$$

$$p_1(t_1) = -L_1$$

$$p_2(t_1) = -L_2$$

$$p_0(t_1) = 0$$

5. pladat

$$(1 - 2x^2) e^{-x^2} \quad \text{Fourier tr}$$

$$e^{-\pi x^2} \xrightarrow{\wedge} e^{-\pi t^2}$$

$$-2\pi x e^{-\pi x^2} \xrightarrow{\wedge} (2\pi i t) e^{-\pi t^2}$$

$$-2\pi (1 - 2\pi x^2) e^{-\pi x^2} \xrightarrow{\wedge} -4\pi^2 t^2 e^{-\pi t^2}$$

$$x \quad \frac{x}{s} \quad s = \sqrt{\pi}$$

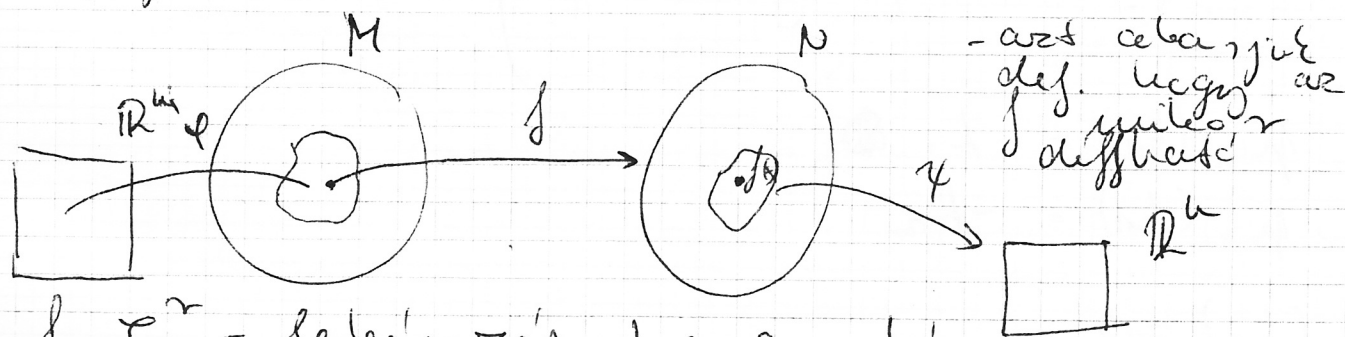
$$-2\pi \left(1 - 2\pi \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^2\right) e^{-\pi \left(\frac{x}{\sqrt{\pi}}\right)^2} \xrightarrow{\wedge} \\ \longrightarrow -4\pi^{5/2} (\sqrt{\pi} t)^2 e^{-\pi (\sqrt{\pi} t)^2}$$

$$-\frac{1}{2\pi} (1 - 2x^2) e^{-x^2} \xrightarrow{\wedge} 2\pi^{5/2} t^2 e^{-\pi^2 t^2}$$

- ha holin. szorz. a fourier tr.
egy differenciálón szabadj. van.

Leképezések differenciálhatósága

Definíció: Sima leképezések



\$f\$ \$C^r\$-leképezés, ha a le-
képezésen bármely körülmények között az elemeket
(leképezés helyi leképezést kapunk)

\$f\$ \$C^r\$-leképezés ha bármely
\$\phi\$ térképre \$M\$-nek és \$\psi\$ térképre \$N\$-nek,
\$\psi \circ f \circ \phi^{-1}\$ ez egy \$C^r\$ leképezés.

Az összes ilyen leképezések halmaza
egy jelöljük: \$C^r(M, N)\$

A \$C^\infty\$ leképezéseket sima leképezéseknek
nevezünk

$A \in C^r(M; \mathbb{R})$ element C^r für -stück
weiter

M - en éitel merétt valós éiteléu

$C^\infty(M; \mathbb{R})$ elemei a soma f.v.-ek

If f is $\mathcal{C}^r$ then f^{-1} is $\mathcal{C}^r$ if and only if f is a $\mathcal{C}^r$ -diffeomorphism.

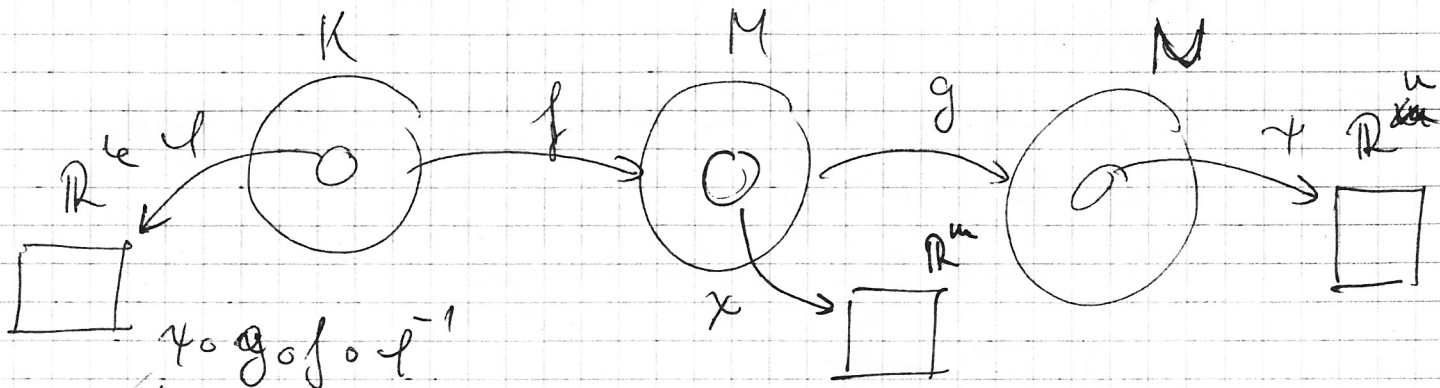
$$f \in \mathcal{C}^r(M, N) \quad f^{-1} \in \mathcal{C}^r(N, M)$$

Na M és N között van síma diffeomorfizmus,
akkor M és N diffeomorfok.

(as Egypt et a modit ra hoilas.
Egypt. le leket here mi, bogi ar

Te'ell: Ha K, M és N differenciálható
 sokaságok, $f: K \rightarrow M$, $g: M \rightarrow N$
 C^r leképezések, $f \circ g: K \rightarrow N$ is
 C^r leképezés

Bizonnités:



~~Wiederholung~~ e^r bezeichnen e ?

→ ha art belästigt als
besten weg

$$\cancel{\varphi} \circ g \circ \chi^{-1} \circ (\chi \circ f \circ \varphi^{-1}) = \varphi \circ g \circ (\chi^{-1} \circ \chi) \circ f \circ \varphi^{-1}$$

φ^{-1} φ^{-1} φ
 leképezés leképezés leképezés
 összetett leképezés leképezés

identitás

→ ez mindig φ^{-1} -leképezés

Példa:

(1) $f: \vec{x} \mapsto \frac{2\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|^2}$

- egy vektorkör nyílt körrel
ahogy kör. az egységgömbre képez, úgy hogy a képe négyfelére
- ez a leképezés diffeomorfizmus az $\mathbb{R}^n$ $K_1(0)$ egységgömbre $\mathbb{R}^n$ -re, az inverze

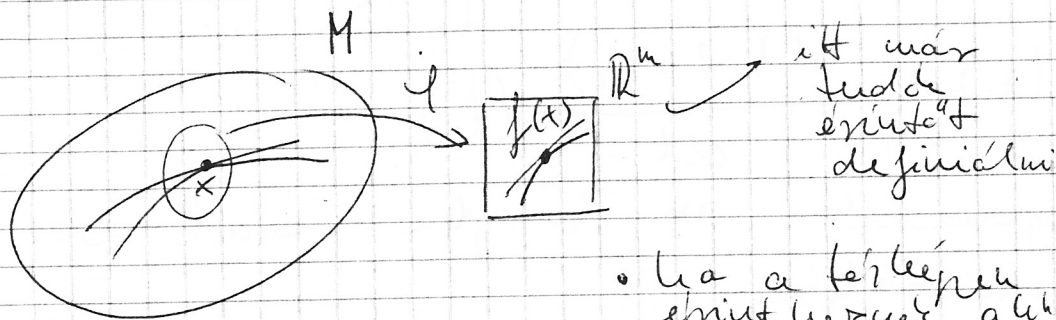
$$y \mapsto \frac{y}{1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

(2) $g: x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$

- szimmetria diffeomorfizmus a körön belül képez a körre egységgömbre $K_1(0) \setminus \{0\}$
- befordítja a gömböt, gömbbelülről való felülről
- az inverze saját maga

$$y \mapsto \frac{y}{\|y\|^2}$$

(3) $f \circ g$ leképezés diffeomorfizmusa
 $K_1(C)$ képejének $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ -ra

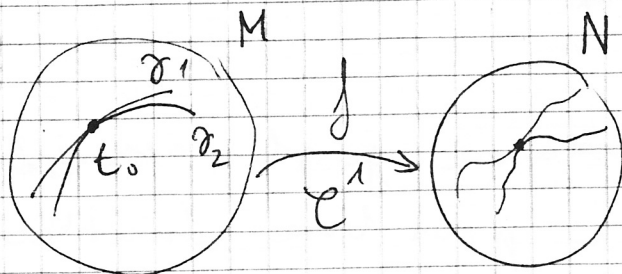


• ha a képleten érintkezés akkor a sokas. is érintke.

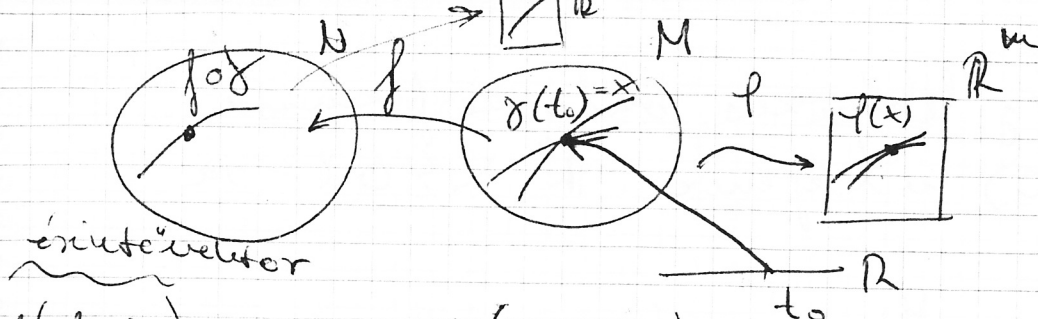
M sima sokaság, $\gamma_1, \gamma_2: \mathbb{R} \rightarrow M$
 C^1 görbék - re azt mondjuk, hogy
 az $x = \gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ pontban
 érintkeznek, ha $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ és
 van olyan φ képleten az x egy
 környezetén, hogy ~~az érintővektorok~~

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma_1)}{dt}(t_0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_2)}{dt}(t_0)$$

- a képleten lévő érintővektorok
 ugyanazok



Ha γ_1 és γ_2 érintkeznek t_0 -ban, akkor
 $y = f(x)$ jelöléssel az $f \circ \gamma_1$ és
 $f \circ \gamma_2$ érintkeznek t_0 -ban, az
 $y = f(x)$ pontban.



érintővektor

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(t_0) = \frac{d(\varphi \circ \gamma_i)}{dt}(t_0)$$

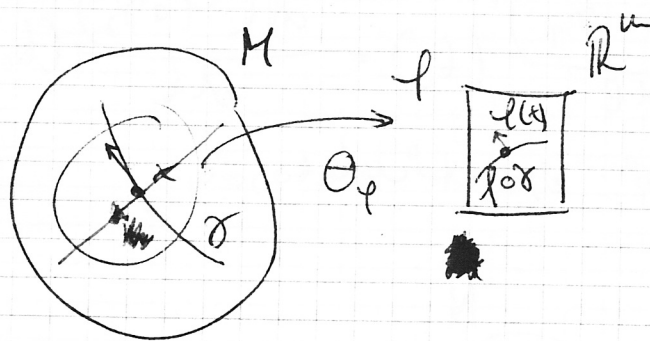
- ugyanahhoz az irányba mennek az érintővektorai

$$d(\varphi \circ \gamma_i) = d((\gamma \circ \varphi^{-1}) \circ \gamma_i)$$

$$= (\varphi \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \cdot \frac{d(\gamma \circ \gamma_i)}{dt}$$

lineáris leképezés

Érintővektorok



- az érintővektor mindazon görb. összességének elben a pontban érintővektorai
- egymással érintő görb. összege, reprezent. az a vektort képz. kével.

Egy M sima sokaság egy érintővektora, egy $x \in M$ pontban az az $\mathbb{R}^1$ -beli $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M$ görbék összessége, amelyekre

a $\gamma(0) = x$ és érintkeznek a
 0 -ban. Az M sokaság x -beli
 érintővektorainak a halmazát
 $T_x M$ -et jelöljük.

Azt az érintővektort amely a
 γ -hoz tartozik egy adott
 görvélhez, $\gamma'(0)$ -val jelöljük.

$$\text{A } \Theta_x = \gamma'(0) \mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

leképezés kölcsönösen egyértelműen képezi
 le $T_x M$ -et $\mathbb{R}^n$ -re.

Az inverz leképezés a $h \in \mathbb{R}^n$
 vektorhoz a

$$(1) \quad \gamma(t) = \varphi^{-1}(\varphi(x) + th)$$

$$\frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \frac{d(\varphi(x) + th)}{dt}(0) = h$$

$$\text{A } \Theta_x^{-1}(h_1) + \Theta_x^{-1}(h_2) = \Theta_x^{-1}(h_1 + h_2)$$

$$\text{A } \Theta_x^{-1}(h) = \Theta_x^{-1}(\varphi(h))$$

definícióval $T_x M$ -et elláthatjuk egy
 vektortér struktúrával.

Ha φ egy másik térkép, amelynek az
 értékelési tartománya tartalmazza
 x -et, akkor ezzel a ~~relációval~~ relációval

$$(1) \quad \Theta_x \circ \Theta_x^{-1} : h \mapsto \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

$$= \frac{d((\varphi \circ \varphi^{-1})(\varphi(x) + th))}{dt}(0)$$

$$= \cancel{\gamma} (\gamma \circ \varphi^{-1})'(\varphi(x)) \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

- az, ahol az egyet.

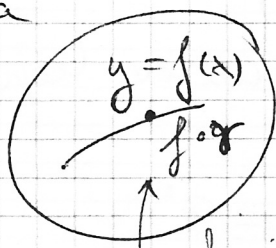
Ez ~~meg~~ bijektív leképezés

↳ tartja az összead. és a skal. multiplikat.

A derivált az érintő derék körébe lehet.

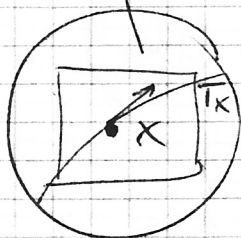
Az érintő leképezés

N síma



f síma

M síma



Legyenek N és M síma sokaságok

$f: M \rightarrow N$ síma leképezés, $x \in M$

$y = f(x)$. Egy

$\gamma'(0) \in T_x M$ érintővektorhoz rendeljük hozzá az $(f \circ \gamma)'(0) \in T_y N$ vektort

felüljött az a leképezést $T_x M \rightarrow T_y N$

$T_x f$. Ez az f érintő leképezése

az x pontban. Ez nem függ a

γ reprezentáns választásától.

Megmutatjuk, hogy $T_x f$ lineáris

ha φ az x -hez, ψ az y -hez

létezik, akkor $F = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$

$$\frac{d(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})}{dt}(0) = F'(\varphi(x)) \frac{d(\varphi \circ \gamma)}{dt}(0)$$

így, mivel Θ_x és Θ_x lineáris
 leképezés leképezés, a $T_x f = \Theta_x^{-1} \circ F'(f(x)) \circ \Theta_x$
 is lineáris, sőt a rangja
 megegyezik $F'(f(x))$ rangjával, ezt
 $\text{rg } T_x f$

Tétel: K, M, N sima sokaságok,
 $f: K \rightarrow M$, $g: M \rightarrow N$ sima
 leképezések $x \in K$ és $y = f(x)$. Ekkor
 $T_x (g \circ f) = T_y g \circ T_x f$

(a láncszabály a sokaságok
 is érvényes marad)

Az érintővektort mint funkcionálok

M sima sokaság, $X = \gamma'(0) \in T_x M$.

Minden M -en értelmezett sima
 f függvényhez (valós értéket)
 a "leíró" számot rendel

$$f \mapsto \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$$

amit Xf -t jelölünk. Ez csak

az X érintővektortól függ.

Kétféleképpen ha $L, \beta \in \mathbb{R}$ és f, g
 sima függvények, akkor

$$X(Lf + \beta g) = LXf + \beta Xg$$

$$\text{és } X(fg) = f(x)Xg + g(x)Xf$$

Ez is lehetne definíció

Meg lehet mutatni, hogy két érintővektor pontosan akkor egyenlő, ha minden függvényre ugyan egy hatnak ezek koordinátái

Legyen most $1 = (1^1 \dots 1^n)$ egy x -ben értelmezett térkép, és $X^1, X^2 \dots X^n$ a X érintővektor koordinátái a $\Theta_x^{-1}(e_i)$ $i=1, 2 \dots n$ bázisban (az a $T_x M$ érintő φ -hez tartozó természetes bázisa)

Ekkor

$$\begin{aligned} Xf &= \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) = \\ &= \frac{d(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)}{dt}(0) = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(\varphi(x)) \cdot \frac{d\varphi^i \circ \gamma}{dt}(0) = \end{aligned}$$

hiszen a koordinátákat

$$= \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}(\varphi(x))$$

X nagybetűs jelölése:

$$X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

Az érintő leképezés lokális koordinátákban

M, N

$f, x \in M, y = f(x)$

$\varphi = (\varphi^1 \dots \varphi^n)$ x -ben

$\psi = (\psi^1 \dots \psi^n)$ y -ben

Ekkor $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ erre az

érintővektora az $Y = (T_x f)X =$

$$= \sum_{j=1}^n Y^j \frac{\partial}{\partial \psi^j}$$

ahol az $Y^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} (\varphi(x)) X^i$

↑
egy más névvektor-projektör

miel $F = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ jelöléssel

az $F: (\varphi^1 \dots \varphi^n) \rightarrow (\psi^1 \dots \psi^n)$

derivált mátrixa

$$\frac{\partial \psi^j}{\partial \varphi^i} (\varphi(x))$$

Speciálisan, ha $M = N$ és

f az identitás akkor ez a
koordináta cseré mátrixa

Érintőnyaláb

- az érintőterek diszjunkt uniója

$$\bigcup_{x \in M} T_x M \text{ érintőnyaláb}$$

- érintőterek serege, melyekben az x pontot figyelembe

Immerré, szubmerré, szubimmerré, beágyazás

M és N síma sokaságok, $f: M \rightarrow N$ síma leképezés. Ha $T_x f$ kölcsönösen egyértelmű minden $x \in M$ -re, akkor f immerré

$\rightarrow$ a deriv. mindig teljes egyért.

Ha $T_x f$ a $T_{f(x)} N$ -re képez, akkor f szubmerré

$\uparrow$
a rangmeghatározással
ezt le lehet határozni

Ha $T_x f$ rangja minden $x \in M$ -re ugyanannyi, akkor f szubimmerré.

Ha az f immerré és maga az f és f^{-1} is kölcsönösen egyértelmű és folytonos, akkor az f beágyazás

Pelda $x \mapsto (x, 0)^T$ a deriváltm.
 minden pontban: $(1, 0)^T$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (L) = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{lineáris } L\text{-be} \\ \text{vagy lineáris vektorokat} \\ \text{rendel}$$

ez egy izomorfia

- a számegyenes a sík részalmanach-
 kétféleképpen
- leágyazás (inverz függvény)

Pelda - síkbeli vektorok az
 első koordinátát vetítik

$$(x, y) \mapsto x \quad (1, 0)$$

deriváltm.
 x szerinti és y
 szerinti deriv.

- 2 dimenz. vektortérhez 1 dimenz.
 vekt. rendel

$$(1, 0) \begin{pmatrix} L \\ \beta \end{pmatrix} = (L) \quad \text{szukkurzio}$$

- β változtat. a kép nem változik,
 nem teljes. egy feltétel

Pelda

$$(x, y) \mapsto (x, 0, 0)$$

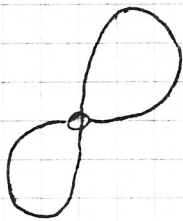
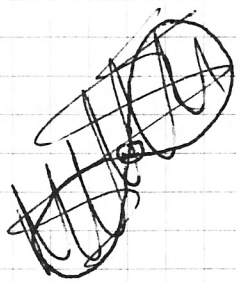
$$\begin{pmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \\ 0, 0 \end{pmatrix}$$

ez a mátrixa

$\rightarrow$ ennek mindig
 ugyanannyi a
 rangja, szukkurzio

Példa

$$]0, 2\pi[\ni t \mapsto (\sin t, \sin 2t)$$



- immerszió

- ugyanazt az
érintőket nem lehet
fel léktetni

- folytonos

NEM lesz
hágyazás

DE az inverze nem
lesz az!

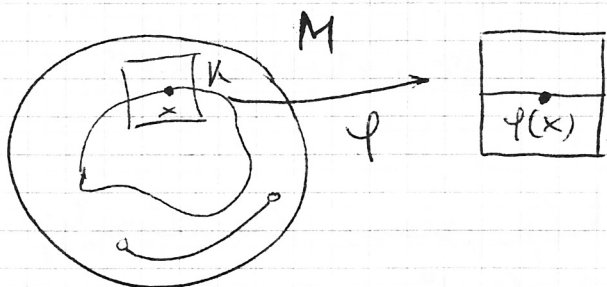
Példa

$$x \mapsto (\cos x, \sin x)$$

immerszió

nem kétesen egyértelmű

Részsohaság



- minden pont körül lehet egy olyan
környék, ahol az a pont
kiegyenesedhet, a részhalma
egyenesedik ki

Egy M sohaság egy K részhalma
az M egy k dimenziós részsohasága,
ha minden $x \in K$ -hoz van olyan

φ képlettel felírták az $\mathbb{A}^n$ -on,
 hogy a φ által leképezve az
 $U \cap K$ -nak

$$\varphi(U \cap K) = \{ (\varphi^1, \varphi^2, \dots, \varphi^m) \in \varphi(U) = \varphi^{k+1} = \varphi^{k+2} = \dots = \varphi^m = 0 \}$$

$$U = \dim(U)$$

Egy nyílt részhalmaz már mindig
 részsokaság

Tétel: Egy részsokaságok egytlen
 olyan felírták sima atlasz létezik,
 amelyre az identikus leképezés
 K -nak M -re leágyazás. Megfordítva,
 ha $f: K \rightarrow M$ leágyazás, akkor
 az $f(K)$ egy részsokas., amely
 diffeomorf K -val.

Whitney tétele: Minden

n -dimenziós sokaság leágyazható
 $\mathbb{R}^{2n+1}$ -be részsokaságként

Tétel: Legyen $f: M \rightarrow N$ egy
 szubimmersi, $x \in M$ és $y = f(x)$.
 Ekkor $f^{-1}(y)$ egy zárt részsokaság
 M -ben, és $T_x(f^{-1}(y))$ a
 $T_x f$ magja (nulltere)

Példák Az S_n gömb felelet
 az $x \rightarrow \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$
 képezéssel az 1 öskéire

$$x \rightarrow \|x\|^2, x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

Egy M dimenziós simán sokaságon
 értelmezett $x \rightarrow X(x) \in T_x M$
 képezést vektormezőnek nevezzük

Kijelölve ha X, Y vektormezők, f függvény,
 $\lambda \in \mathbb{R}$, akkor $X+Y$, λX és fX is
 vektormezők. A X vektormező
simán minden f sima függvényre

$x \rightarrow X(x)$ f sima függvény M -en.
 Ezt a függvényt X f -el jelöljük

$\nearrow$
 függvény a
 pontok

Megmutatható, hogy pontosan
 akkor lesz sima vektormező,
 ha van, mely φ testére

$$X(x) = \sum_{i=1}^n X^i(x) \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

a lecsod.
 pontok
 pontok
 vektorok

$\nearrow$
 φ^i lecsod.
 szerinti par.
 deriv.
 (ezek alkotják a
 vektorbázist)

az ilyen előállításban
szempont X^i koordinátafüggvények
sindék.

Sima vektormezők Lie-zárójel

Legyen M egy m dimenziós
sima sokaság, X, Y pedig
sima vektormezők M -en.

Megmutatható, hogy létezik
(és csak egy) $[X, Y]$ vektormező
amelyre bármely f sima függvényre
 $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$

Mivel $Yf, X(Yf), Xf$ és $Y(Xf)$
sima függvények, $[X, Y]$ sima
vektormező

Ekkor

$$X(x)f = \sum_{i=1}^m X^i(x) \frac{\partial f}{\partial x^i}, \text{ így}$$

~~$$Y(Xf) =$$~~

$$Y(Xf) = \sum_{i=1}^m Y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sum_{j=1}^m X^j \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) =$$

$$= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m Y^i X^j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$$

$$[X, Y] f = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^j \frac{\partial X^i}{\partial x^i} \right) \frac{\partial f}{\partial x^j}$$

Lie-algebra

Egy V vektortérre K felett egy
az $(x, y) \mapsto [x, y]$ kétváltozós
művelettel Lie-algebravá alakít
lehet, ha

(1) első változóban lineáris

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha [x, z] + \beta [y, z]$$

(2) antiszimmetrikus

$$[x, y] = -[y, x]$$

$$(3) [[x, y], z] + [[z, x], y] + [[y, z], x] = 0$$

Jacobi azonosság minden $x, y, z \in V$ -re

Tétel: Szintén vektortérre a
Lie-művelettel Lie-algebra lehet
alkotni

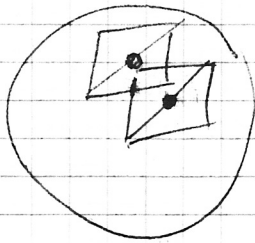
2011.12.08

- az $\mathfrak{g}$ algebra egy vektortér alálve
az van vezetve egyenlő (EJ-jellel)

Iránymező" ~~szóval~~ teljes integrál

Legyen M egy m dimenziós sima sokaság,
 $0 \leq k \leq m$ (term. szám m között)

Egy $S: x \rightarrow S_x$ által leírt rendeltetést,
ahol az S_x a $T_x M$ egy k dimenziós
altér, k iránymezőnek nevezzük.
(k dimenziós disztribúciót is
így lehet nevezni)

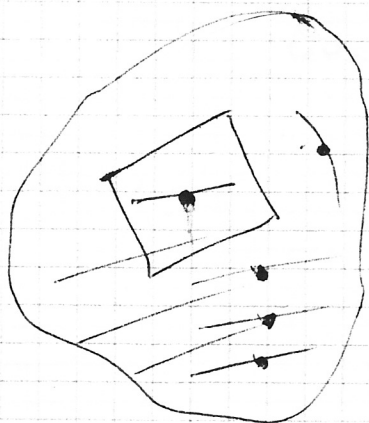


Egy k -iránymezőre azt mondjuk, hogy
sima iránymező, ha az $\mathfrak{g}$ teljesül, hogy
bármely $x \in M$ -hez van olyan
 U környezet x -nek és $X_1, X_2, \dots, X_k$
sima vektormezők, hogy
 $X_1(y), X_2(y), \dots, X_k(y)$ bázis a
 $T_y M$ -ben minden $y \in U$ -ra

Egy S sima k -iránymezőre legyen
 $\mathcal{E}(S)$ az összes olyan sima X
vektormező halmaza amelyekre $X(x) \in S_x$,
ha $x \in M$, ez az S -hez tartozó diff-

Kunciól rendszer. Könnyű belátni,
 hogy $E(S)$ -ből nem vezet ki a
 függvényre való sorozat, az összeadás,
 míg a lokálisan mégis vektorensemble
 összeadása sem.

Egy síma $\mathbb{C}$ iránymezőt involutívnak
nevezünk ha a Lie-zárójel
 képzés sem vezet ki belőle.



Ha egy $\mathbb{C}$ -dimenziós K síma sokaság
 egy $f: K \rightarrow M$ immersionja a
 $T_x f$ érintőképzésnek alkalmazva

$$T_x K \rightarrow (T_x f)(T_x K) = S_{f(x)}$$

minden $x \in K$ -ra. Akkor

azt mondjuk, hogy a (K, f) pár

az S egy teljes integrálja,

az $f(K)$ halmaz a teljes integrál

képe. Ha az M sokaság minden pontja

rajta van egy teljes integrál képnél,

akkor az S iránymező teljesen integ-
 rálható!

Frobenius tétele.

Egy S síma $\mathbb{R}^3$ "iránymező"
pontosan akkor ~~teljesen~~ teljesen integrálható,
ha ~~az~~ $\mathcal{E}(S)$ involutív.

Teljesítés.

1. Mutassuk meg, hogy síma 1-
"iránymező" mindig teljesen integrálható.

$\mathbb{R}^3$ -ban szokásos koordinátákban
legyen $X(x) = X^1(x) \frac{\partial}{\partial x^1} + X^2(x) \frac{\partial}{\partial x^2} + X^3(x) \frac{\partial}{\partial x^3}$
egy síma vektormező, amely sehol
sem tűnik el.

↳ mindhárom koordináta
egysége nem nulla

~~és~~ $S_x = X(x)^\perp$ ← ortogonális komplementum
'első' szorzattal. Mutassuk meg,
hogy S az pontosan akkor
involutív ha $X \perp \text{rot } X$.

1. feladat

vekt. feladatok:

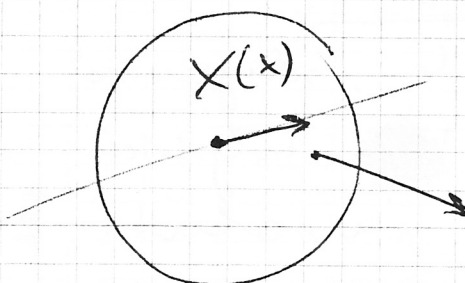
- vektorm. det n. másikkal. nagy.
- térvektormező aie sorj. képletével.

- teljes integrálh. - görbék sűrűségét kétféle
- mind. pontban ki van jelölve
egy irány

↳ megadhatjuk vektormezővel.

- megadjuk egy X vektormezőt.

$$X(x) \neq 0$$



- fel kell venni $Y(x)$ és $Z(x)$ vektormezőket
és azokat kell a Lie deriváltat

$$Y(x) = \cancel{C(x)} X(x)$$

← a konstans függ a
pozíciótól

$$Z(x) = D(x) X(x)$$

$$[Y, Z] = \cancel{C(x)} [C(x) X(x), D(x) X(x)] = (*)$$

művelet
a vekt-
mezők
között

↑ ha vesszük a Lie-deriváltat
akkor az is ugyanaz az
írányba mutat

↓ egy haszná-
latát
szedhetünk

felhasználva azt az azonosságot:

$$[U, fV] = f[U, V] + (Uf)V$$

$$(*) = D(x) [C(x) X(x), X(x)] + ((C(x) X(x)) D(x)) X(x) =$$

← ezt megfordítjuk
negatív előjel helyén!

$$= -D(x) [X(x), C(x) X(x)] + ((C(x) X(x)) D(x)) X(x) =$$

$$= -D(x) \underbrace{(C(x) [X(x), X(x)] + (X(x) C(x)) X(x))}_{\text{fő}} + \underbrace{((C(x) X(x)) D(x)) X(x)}_{\text{fő}}$$

- az eredmény egy fu. sz. vektormező

2. feladat

- olyan $Y \perp X$ és $Z \perp X$ keresése

- bebizonyítani $Y \langle Z, X \rangle + Z \langle Y, X \rangle = 0$

(valamint ötlet kihozatala)

• skalárszorzás, csak az $\mathbb{R}^3$ miatt van

$$\sum_{i,j=1}^n g_{i,j}(x) X_{(x)}^i Y_{(x)}^j = \langle X, Y \rangle$$