VIK, Műszaki Informatika
ANALÍZIS (2)

Differenciálegyenletek

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.
Kónya Ilona

2007. február

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Bevezetés

Differenciálegyenlet: valamely függvény, annak független változói és az egyes független változók szerinti deriváltjai között állapít meg összefüggést.
Közönséges differenciálegyenlet: a függvény egyváltozós.

Parciális differenciálegyenlet: a függvény többváltozós (mi ezzel nem foglalkozunk).

n-edrendű differenciálegyenlet: a fellépő legmagasabb rendű derivált n-edrendű.

Implicit alak:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$$

Explicit alak:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)})$$

Lineáris differenciálegyenlet:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)\, y^{(i)}(x) = f(x)$$

2. Elsőrendű differenciálegyenlet

2.1. Definíció.

Elsőrendű implicit differenciálegyenletnek nevezzük az olyan egyenletet, amelyben az y, y' és x szimbólumok szerepelnek, (amelyeket persze más betükkel is jelölhetünk), és az y' semmiképp se hiányzik az egyenletből. Ezt úgy írhatjuk fel, hogy:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.1}$$

Ha ebből az egyenletből az y' kifejezhető, akkor *elsőrendű explicit differenciálegyenletről* beszélünk:

$$y' = f(x, y) \tag{2.2}$$

Tehát (2.1) általánosabb, mint (2.2).

Az adott x_0, y_0 esetén jutunk az

$$y' = f(x, y), \qquad y(x_0) = y_0 \tag{2.3}$$

Cauchy problémához.

2.2. Definíció.

a) Azt mondjuk, hogy a $\varphi : (a,b) \mapsto \mathbb{R}$, $(a < b)$ <u>differenciálható</u> függvény, *megoldásfüggvénye* a (2.2) differenciálegyenletnek, ha

$$\varphi'(x)) = f(x, \varphi(x)), \qquad \forall\, x \in (a,b) \tag{2.4}$$

A φ függvény grafikonját *megoldásgörbének* nevezzük:

$$\{(x,y) : \quad y = \varphi(x),\ x \in (a,b)\} \tag{2.5}$$

Az összes megoldásfüggvény halmazát *általános megodásnak nevezzük.* Ha ezek közül csak egyet tekintünk, például a Cauchy feladat megoldását, akkor *partikuláris megoldásról* beszélünk.

b) Azt mondjuk, hogy a φ *megoldásfüggvénye a (2.3) Cauchy problémának*, ha van olyan (a,b) intervallum $(a < b)$, hogy

$$\varphi'(x) = f(x, \varphi(x)), \quad \forall\, x \in (a,b), \quad \text{ahol } x_0 \in (a,b) \text{ és } \varphi(x_0) = y_0 \tag{2.6}$$

φ-nek a grafikonja az *(2.3) Cauchy probléma megoldásgörbéje.*

Megjegyezzük, hogy egy megoldásfüggvény mindig valamely nem üres, nyílt intervallumon van értelmezve, és ott minden pontban differenciálható. Vannak olyan differenciálegyenlet tankönyvek is, amelyek nem kívánják meg, hogy a megoldások minden ponban deriválhatók legyenek. Azt azonban felteszik, hogy "nulla összhosszúságú" halmaz kivételével legyenek differenciálhatók a φ megoldások. Ilyenkor azt mondják, hogy φ majdnem mindenütt differenciálható az (a,b)-ben.

2.1. Illusztráció.

Mutassuk meg, hogy az

$$y' = y - 2$$

differenciálegyenletnek megoldása az

$$y = 2 + e^{(x+c)}, \quad \text{ahol } x \in (-\infty, \infty) \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$$

esetén , vagyis a teljes számegyenesen értelmezett függvénycsalád tagjai mind megoldások! Ellenőrizzük azt is, hogy az azonosan kettővel egyenlő függvény is megoldás.

Megoldás.

Mivel $y' = e^{(x+c)}$, és $y - 2 = e^{(x+c)}$, azért tetszőleges $x, c \in \mathbb{R}$ esetén fennáll az egyenlőség.

Az azonosan 2-vel egyenlő konstans függvény deriváltja nulla, és $2 - 2 = 0$, így $y \equiv 2$ megoldás.

2.2. Illusztráció.

a.) Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$ differenciálegyenletet!

b.) Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $y(1) = 0$ kezdetiérték problémát!

Megoldás.

a.) Az $y = \operatorname{arctg} x + c$, $c \in \mathbb{R}$ az általános megoldás, amelynek elemei értelmezettek a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

b.) Ezek közül az $y = \operatorname{arctg} x - \pi/4$ adja az $(1, 0)$ kezdetiértékhez tartozó megoldásgörbét.

Vegyük észre, hogy minden ponton halad át megoldásgörbe, és mind a $(-\infty, \infty)$ intervallumon vannak értelmezve.

2.3. Illusztráció.

Oldjuk meg az $y' = \dfrac{1}{x}$ differenciálegyenletet!

Megoldás.

A

$$\varphi(x) = \ln x + c_1,\ \ x > 0 \qquad \text{és a} \qquad \varphi(x) = \ln(-x) + c_2,\ \ x < 0$$

függvények a megoldások, ahol c_1, c_2 tetszőleges valós konstansok.

Ha az $x_0 = e$, $y_0 = -2$ kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy $x > 0$, így a $-2 = \ln e + c_1$ -ből $c_1 = -3$ adódik. Ezért

$$\varphi(x) = \ln x - 3$$

adja a megoldásfüggvényt.

Ha pedig az $x_0 = -e$, $y_0 = 7$ kezdetiérték problémát akarjuk megoldani, akkor feltehetjük, hogy $x < 0$, így a $7 = \ln(-(-e)) + c_2$ -ből $c_2 = 6$ adódik, ezért

$$\varphi(x) = \ln(-x) + 6$$

a megoldásfüggvény.

A rövidebb írásmód kedvéért az általános megoldást $\varphi(x) = \ln|x| + c$ alakban szoktuk leírni, ami alatt az $\ln|x| + c$ függvény valamely (a, b) intervallumra való leszűkítését értjük, például a $(-\infty, 0)$ vagy a $(0, \infty)$ intervallumra való leszűkítését. A 0-t tartalmazó (a, b) intervallumra nem lehet úgy leszűkíteni, hogy differenciálható függvényhez jussunk. A fenti két kezdetiérték probléma megoldása:

$$\varphi(x) = \ln|x| - 3\,, \qquad \text{illetve} \qquad \varphi(x) = \ln|x| + 6$$

alakokban is írható. Ilyenkor az értelmezési tartományok nincsenek kiírva, de értelemszerűen az első esetben $x > 0$, a másodikban $x < 0$.

2.4. Illusztráció.

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x),\ x \in (\alpha, \beta)$ differenciálható, és kielégíti az

$$x^3 y^3 = 3x^2 + c, \quad c \in \mathbb{R} \tag{2.7}$$

implicit egyenletet, akkor megoldása az alábbi differenciálegyenletnek:

$$x y^2 y' + y^3 - 2/x = 0 \tag{2.8}$$

Megoldás.

Az y helyett $\varphi(x)$-et gondolunk és differenciáljuk az (2.7) implicit egyenlet mindkét oldalát x szerint, a c paramétert konstansnak tekintve:

$$3x^2 y^3 + x^3 3y^2 y' = 6x\,,$$

amiből $3x^2$-tel való osztással megkapjuk a kívánt differenciálegyenletet. (Megjegyezzük, hogy $x = 0$ esetén φ nem elégíti ki az (2.7) implicit egyenletet sem.)
Ilyenkor (2.7) -et nevezzük a (2.8) *differenciálegyenlet implicit alakú megoldásának.* Sokszor meg kell elégednünk a megoldások implicit alakjával.

2.5. Illusztráció.

a.) Bizonyítsa be, hogy ha az $y = y(x)$ differenciálható függvény kielégíti az

$$x^2 + x\,y^2 - 2\,x^2\,y + 2\,y^2 \;=\; 0 \tag{2.9}$$

implicit függvénykapcsolatot, akkor $y = y(x)$ megoldása a

$$\left(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\right)\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \;=\; \left(4\,x\,y - 2\,x - y^2\right) \tag{2.10}$$

differenciálegyenletnek.

b.) Bizonyítsa be, hogy ha az $x = x(y)$ differenciálható függvény kielégíti a (2.9) implicit függvénykapcsolatot, akkor kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\left(2\,x\,y - 2\,x^2 + 4\,y\right) \;=\; \left(4\,x\,y - 2\,x - y^2\right)\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \tag{2.11}$$

c.) Mi a tanulság?

Megoldás.

a.) Tehát most az

$$x^2 + x\, y^2(x) - 2\, x^2\, y(x) + 2\, y^2(x) \;=\; 0$$

implicit egyenletet kell x szerint deriválni. Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$2\, x + y^2(x) + x\; 2\, y(x)\; y'(x) - 4x\; y(x) - 2\, x^2\; y'(x) + 4\; y(x)\; y'(x) \;=\; 0$$

Innen pedig $y'(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ cserével és rendezéssel adódik az állítás.

b.) Ebben az esetben az y a független változó, ezért az

$$x^2(y) + x(y)\; y^2 - 2\, x^2(y)\; y + 2\, y^2 \;=\; 0$$

egyenletet most az y független változó szerint kell deriválni:

$$2x(y)\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\, y^2 + x(y)\; 2y - 4\, x(y)\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\, y - 2\, x^2(y) + 4y \;=\; 0$$

Ebből rendezéssel kapjuk (2.11)-et.

c.) $\qquad y' = f(x,y)\,, \quad$ azaz $\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y)$

esetén az inverzfüggvényre vonatkozó differenciálegyenlet:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{f(x,y)}\,, \qquad\qquad f(x,y) \neq 0$$

ahol most y jelöli a független változót.

Ⓜ A fentiekből következően a (2.10) és (2.11) differenciálegyenletek közös alakja:

$$\big(2\, x\, y - 2\, x^2 + 4\, y\big)\; \mathrm{d}y \;=\; \big(4\, x\, y - 2\, x - y^2\big)\; \mathrm{d}x$$

A megoldásnál tudnunk kell, hogy melyik a független változó. Mi megállapodunk abban, hogy esetünkben mindig az x lesz a független változó, ha nincs ezzel ellentétes állítás.

2.6. Illusztráció.

Oldjuk meg az differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{1}{xy} \tag{2.12}$$

Megoldás.

A megoldásgörbék valamelyik síknegyedben vannak, ugyanis $x \neq 0$, $y \neq 0$ miatt nem metszhetik a tengelyeket. A megoldásoknak ki kell elégíteniük az

$$yy' = 1/x, \quad \text{azaz} \quad 2yy' = 2/x, \quad \text{azaz} \quad (y^2)' = 2/x$$

differenciálegyenletet. Tehát

$$y^2 = 2 \ln|x| + c\,, \qquad c \in \mathbb{R} \tag{2.13}$$

a megoldások implicit alakja.

Legyen $c = 2\ln\tilde{c}$, ekkor

$$y^2 = 2 \ln|x| + 2 \ln\tilde{c}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

amelyet kényelmesebben

$$y^2 = 2 \ln(|x|\,\tilde{c})\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

azaz

$$e^{(y^2/2)} = |x|\,\tilde{c}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,, \tag{2.14}$$

amelyből x -et fejezhetjük ki, mint az y függvényét, vagyis a megoldásfüggvények inverzeiről beszélhetünk kényelmesen:

$$x = \pm\,\frac{1}{\tilde{c}}\,e^{(y^2/2)}\,, \qquad \tilde{c} \in \mathbb{R}^+\,,$$

vagyis

$$x = k\,e^{(y^2/2)}\,, \qquad k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,,\ y \neq 0 \tag{2.15}$$

A (2.15) formula minden $y \in \mathbb{R}$ -re értelmezett, de a mi esetünkben $y \neq 0$ lehet csak a (2.12) miatt. Ha a differenciálegyenletet kell megoldanunk és a megoldásfüggvényekkel kapcsolatban semmi más feladatunk sincs, akkor a (2.13) implicit függvénykapcsolat megtalálásával a feladatot megoldottnak tekinthetjük.

Feladatok

2.1. Feladat.

Mutassuk meg, hogy az adott függvények megoldásai a feltüntetett differenciálegyenleteknek:

a)

$$y = -2\,e^{-2x} + \frac{1}{3}\,e^x; \qquad y' + 2y = e^x$$

b)

$$y = x\sqrt{1 - x^2}, \qquad 0 < x < 1\,;$$

$$y\,y' = x - 2x^3$$

2.2. Feladat.

Mutassuk meg, hogy az alábbi differenciálegyenleteknek a feltüntetett paraméteresen adott görbék megoldásgörbéi:

a)

$$x + y\,y' = 0\,;$$
$$x = \cos t\,, \qquad y = \sin t\,, \qquad t \in (0, \pi)$$

b)

$$(1 + xy)\,y' + y^2 = 0\,;$$
$$x = te^t\,, \qquad y = e^{-t}\,, \qquad t < -1$$

c)

$$(y')^2 + e^{y'} = x\,;$$
$$x = t^2 + e^t\,, \qquad y = \frac{2}{3}\,t^3 + (t-1)\,e^t\,, \qquad t > 0$$

2.3. Feladat.

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ differenciálható és kielégíti a megadott implicit egyenletet, akkor megoldása a a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

a)

$$x^2 + y^2 - x^6 + y^4 = c\,; \qquad y\,y'\,(1 + 2y^2) = 3\,x^5 - x$$

b)

$$y^2 + 6x = 9\,, \qquad y > 0\,;$$
$$y\,(y')^2 + 2x\,y' = y$$

c)

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} - \ln\sqrt{x^2 + y^2} = 0\,, \qquad x > 0\,;$$
$$(x - y)\,y' = x + y$$

2.4. Feladat.

Mutassuk meg, hogy ha az $y = \varphi(x)$, $x \in (\alpha, \beta)$ kielégíti a megadott integrálegyenletet, akkor megoldása a a feltüntetett differenciálegyenletnek is:

a)

$$y = e^x \int_0^x e^{t^2}\,dt \,+\, 3\,e^x\,, \qquad x \in (-\infty, \infty)\;;$$
$$y' - y = e^{x + x^2}$$

b)

$$y = x \int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt\,; \qquad x > 0\,;$$

$$xy' = y + x\,\sin x$$

c)

$$y = x \int\limits_1^x \frac{e^t}{t}\,dt\,, \qquad x > 0\,;$$

$$x\,y' - y = x\,e^x$$

Útmutatás:
Ha az integrandus függvény folytonos, akkor az integrálszámítás II. alaptétele szerint az $y = \varphi(x)$ differenciálható. A b) feladatot úgy kell érteni, hogy az integrandus függvény 0 pontbeli szakadását megszüntettük, felhasználva, hogy $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 1$.

3. Szétválasztható változójú differenciálegyenletek

(szeparálható, szeparábilis)

A szétválasztható változójú differenciálegyenletek speciális alakú elsőrendű differenciálegyenletek.

$$y' = f(x)\cdot g(y), \qquad f \in C^0_{(a,b)},\ \ g \in C^0_{(c,d)} \tag{3.1}$$

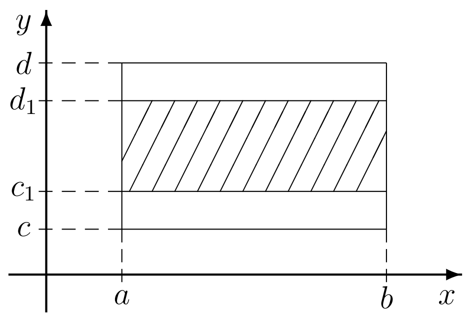
Keressük azt az $y = y(x)$ függvényt, amelyre:

$$y'(x) \equiv f(x)\cdot g(y(x)) \qquad \forall\, x \in (a,b)\text{-re.}$$

1.) Ha $g(y_0) = 0$ $\left(y_0 \in (c,d)\right)$, akkor $y \equiv y_0$ megoldás.
(Egyensúlyi helyzet, mivel $y' \equiv 0$.)

2.) Ha $(c_1, d_1) \subset (c,d)$-ben $g(y) \neq 0$, akkor (3.1) ekvivalens (3.2)-vel:

$$\frac{y'}{g(y)} = f(x) \tag{3.2}$$



Ha $y = y(x)$, ($y(x_0) = y_0$) megoldása (3.2)-nek, akkor

$$\frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,, \qquad \forall\, x \in K_{x_0,\delta} \tag{3.3}$$

Legyen $H(y)$ az $\dfrac{1}{g(y)} = h(y)$ egy primitív függvénye (c_1, d_1)-en, tehát

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{g(y)}$$

($\dfrac{1}{g}$ folytonossága miatt $\exists\, H$).
Legyen $F(x)$ az $f(x)$ egy primitív függvénye (a, b)-n, tehát

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

(f folytonossága miatt $\exists\, F$).
Látjuk, hogy (3.3) az alábbi alakú

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(H(y(x))\Big) \;=\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(F(x)\Big)\,,$$

amiből

$$H(y(x)) = F(x) \,+\, C\,. \tag{3.4}$$

Mivel $y(x_0) = y_0$, ezért

$$H(y(x_0)) = F(x_0) \,+\, C \quad \longrightarrow \quad C = H(y(x_0)) - F(x_0)\,,$$

tehát C egyértelműen megadható.
Megfordítva, ha (3.4) valamilyen C-vel teljesül, akkor mindkét oldalt x szerint deriválva

$$h\,(y(x))\; y'(x) = f(x)\,, \qquad \text{vagyis} \qquad \frac{y'(x)}{g(y(x))} = f(x)\,,$$

tehát $y(x)$ megoldása (3.1)-nek.
Összefoglalva: F és H meghatározásával az ismeretlen $y = y(x)$ függvényre a

$$H(y) = F(x) + C \tag{3.5}$$

implicit függvénykapcsolatot kapjuk. Ezt írhatjuk

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

alakban is.
Megjegyezzük, hogy H szigorúan monoton $\left(H'(y) \, \big(= h(y) \big) \neq 0 \right)$, ezért elvileg y kifejezhető (3.5)-ből.

Néhány példa:

3.1 Pl. $\boxed{\quad y' = \dfrac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y}\,, \qquad y(0) = 0 \quad}$

$$y' = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\operatorname{sh} 2x}{\operatorname{ch} 3y} \quad \Longrightarrow \quad \int \operatorname{ch} 3y \, \mathrm{d}y = \int \operatorname{sh} 2x \, \mathrm{d}x$$

Elvégezve a kijelölt integrálásokat kapjuk az általános megoldást:

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x + C}} \qquad \left(y = \frac{1}{3} \operatorname{arsh} \left(\frac{3}{2} \operatorname{ch} 2x + C \right) \right)$$

Az $y(0) = 0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldás:

$$\frac{1}{3} \operatorname{sh} 0 = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 0 + C, \quad \text{vagyis} \quad 0 = \frac{1}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad C = -\frac{1}{2}$$

Tehát

$$\underline{\underline{\frac{1}{3} \operatorname{sh} 3y = \frac{1}{2} \operatorname{ch} 2x - \frac{1}{2}}}$$

3.2 Pl. $\boxed{\quad y' = -\dfrac{x}{y}\,, \qquad y > 0\,,\ \text{vagy}\ y < 0 \quad}$

$$y' = -\frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y} \quad \Longrightarrow \quad \int y \, \mathrm{d}y = \int -x \, \mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást kapjuk az általános megoldást:

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{x^2 + y^2 = C \qquad (\, y > 0, \text{ vagy } y < 0\,)}}$$

3.3 Pl. $\boxed{\quad x\, y' = y^2 - y \quad}$

$y \equiv 0\,,\quad y \equiv 1$ megoldás.
Ha $y \neq 0$ és $y \neq 1$, azaz $y \in (-\infty, 0)$, vagy $y \in (0, 1)$, vagy $y \in (1, \infty)$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y(y-1)} = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x \qquad \Longrightarrow \qquad \int \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} \right) \mathrm{d}y = \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást:

$$\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = \ln|x| + C \quad\Longrightarrow\quad \mathrm{e}^{\ln\left|\frac{y-1}{y}\right|} = \mathrm{e}^{\ln|x|}\cdot \mathrm{e}^{C}$$

$K = \mathrm{e}^C$ választással:

$$\left|1-\frac{1}{y}\right| = K\cdot|x| \quad\Longrightarrow\quad 1-\frac{1}{y} = \pm K\cdot x\,,\ \text{ahol}\quad K>0.$$

De mivel $y\equiv 1$ is megoldás, $K=0$ is lehetséges. Így a differenciálegyenlet megoldása:

$$\underline{\underline{y=\frac{1}{1-Cx}\,,\quad C\in\mathbb{R}}} \qquad \left(\text{persze } y=\frac{1}{1+Cx} \text{ alak is jó}\right).$$

Ezekhez a megoldásokhoz hozzá kell venni az $\underline{\underline{y\equiv 0}}$ megoldást is.
(Az $y\equiv 1$ megoldás $C=0$ választással adódik, mint láttuk.)

3.4 Pl. $\boxed{y'\sin x = y\,\ln y\,,\qquad x\neq k\pi \quad \text{és}\quad y>0}$

$y\equiv 1$ megoldás. Ha $y\neq 1$:

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{y\ln y} = \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{\frac{1}{y}}{\ln y}\,\mathrm{d}y = \int\frac{\frac{1}{2}\,\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$

Elvégezve az integrálást kapjuk a megoldást:

$$\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + \ln C_1 = \ln\left(C_1\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow\quad |\ln y| = C_1\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,,\quad C_1>0$$

$$\Longrightarrow\quad \ln y = C\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,,\quad C>0 \text{ vagy } C<0\,.$$

Mivel $y\equiv 1$ is megoldás, azért $C=0$ is lehet. Összegezve kapjuk, hogy

$$\ln y = C\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}\,,\quad C\in\mathbb{R}$$

Ezt az alábbi alakban is írhatjuk:

$$\underline{\underline{y=\mathrm{e}^{C\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,,\quad C\in\mathbb{R}}}$$

3.5 Pl. $\boxed{x\,y' + 2\,y = 0,\qquad y(3) = -1}$

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\int \frac{2}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{és } y \equiv 0 \text{ is megoldás. (Most nem jó a kezdeti feltétel miatt.)}$$

$$\ln|y| = -2\ln|x| + \ln K,\ K > 0 \implies \left(y = \frac{\pm K}{x^2} \quad \text{és} \quad y \equiv 0\right)$$

$$\text{Tehát a megoldás:} \qquad y = \frac{C}{x^2}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Az $y(3) = -1$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$-1 = \frac{C}{3^2} \implies C = -9: \quad \underline{\underline{y = -\frac{9}{x^2}}}$$

Feladatok

3.1. Feladat.

Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket illetve a hozzájuk tartozó Cauchy problémákat:

a) α) $y' = x\,e^x$,

β) $y' = x\,e^x, \qquad y(-\ln 5) = 1$

b) α) $y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}$,

β) $y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(0) = -1$

γ) $y' = \dfrac{e^{2x}}{y^2}, \qquad y(\ln 2) = 3$

c) α) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x}$

β) $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x} \qquad y(-1) = -2$

3.2. Feladat.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket!

1.) $y' = \dfrac{y-1}{y}\cos^2 x\ \sin^3 x\,, \quad y > 0$

2.) $y' = \dfrac{y^2 - 4}{x^2 + 4}$

3.) $y' = \dfrac{y^2-4}{y\,(x^2+2x+4)}\,, \quad y>0$

4.) $y' = \dfrac{y^2+4}{y^2-3}\, x\, \sqrt[3]{1+2x^2}\,, \quad y>\sqrt{3}$

5.) $y' = \dfrac{\operatorname{sh}^6 2y}{\operatorname{ch} 2y}\, \sqrt[5]{3+8x}$

6.) $y' = (2y+1)^6\, \ln 3x\,, \quad x>0\,,\; y>-\dfrac{1}{2}$

7.) $y' = \dfrac{x}{y}\, \mathrm{e}^{2x^2+3y}\,, \quad y>0$

8.) $y' = \dfrac{(2x+1)\,\mathrm{e}^{3x-2}}{y\,\mathrm{e}^{5y^2}}\,, \quad y>0$

4. Homogén és inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Ahhoz, hogy a címet megértsük, átismételjük ismereteinket a lineáris tér és az általános értelemben vett lineáris függvény (amit szoktak homogén lineáris függvénynek is nevezni) fogalmakat. Már most megjegyezzük, hogy az inhomogén jelző tagadást foglal magában és a lineáris tulajdonság hiányára utal.

4.1. Definíció.

Az $\mathcal{L}$ teret *lineáris térnek* nevezzük az $\mathbb{R}$ valós számtest felett, ha értelmezett benne egy összeadás művelet és a valós skalárral való szorzás, továbbá ezekre teljesülnek a szokásos műveleti azonosságok.

Pontosabban megfogalmazva, $\mathcal{L}$ az összeadásra ($+$-ra) nézve kommutatív csoportot alkot és $\forall\, l, l_1, l_2 \in \mathcal{L}$ és $\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén teljesülnek a következő (4.1) és (4.2) azonosságok.
A skalárral való szorzás tulajdonságai:

$$\begin{aligned} &\text{ha } l\in\mathcal{L}, \quad \alpha l\in\mathcal{L}, \quad \alpha l = l\alpha, \quad 1l=l, \quad (\alpha\beta)\,l = \alpha\,(\beta l),\\ &(\alpha+\beta)\,l = \alpha l+\beta l, \quad \alpha\,(l_1+l_2) = \alpha l_1+\alpha l_2\,,\ \forall\, l_1,l_2\in\mathcal{L} \end{aligned} \tag{4.1}$$

A kommutatív csoport tulajdonságai:

$$\begin{gathered} \text{ha } l_1,l_2\in\mathcal{L}, \ \text{ akkor } \ l_1+l_2\in\mathcal{L}\,,\\ l_1+(l_2+l_3) = (l_1+l_2)+l_3\,, \quad \forall\, l_1,l_2,l_3\in\mathcal{L}\\ \exists\, 0\in\mathcal{L}: \quad l_1+0 = 0+l_1 = l_1\,, \quad \forall\, l_1\in\mathcal{L}\,,\\ \forall\, l\in\mathcal{L} \text{ esetén } \exists -l\in\mathcal{L}: \ l+(-l) = (-l)+l = 0,\\ \text{és} \quad l_1+l_2 = l_2+l_1\,, \quad l_1,l_2\in\mathcal{L}. \end{gathered} \tag{4.2}$$

4.2. Definíció.

Ha egy f függvény értékét az $l_1 + l_2$ helyen tagonként számolhatjuk ki, továbbá a konstans kiemelhető a függvényből, akkor a függvényt lineárisnak nevezzük.

Tehát az $f : \mathcal{L}_1 \mapsto \mathcal{L}_2$ függvényt *lineáris függvénynek* (operátornak, leképezésnek, stb.) nevezzük, ha

a) $\mathcal{L}_1$ lineáris tér,

b)

$$f(l_1 + l_2) = f(l_1) + f(l_2), \qquad \forall\, l_1, l_2 \in \mathcal{L}_1, \tag{4.3}$$

c)

$$f(\alpha l) = \alpha f(l), \qquad \forall\, l \in \mathcal{L}_1 \text{ és } \forall\, \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4.4}$$

Könnyen látható, hogy ilyenkor az $\mathcal{L}_2$ képtér is lineáris tér. Másrészt, ha n_0 az $\mathcal{L}_1$ tér nulleleme, akkor $f(n_0)$ az $\mathcal{L}_2$ tér nulleleme.

4.1. Illusztráció.

a) A síkvektorok tere, valamint a térvektorok tere egy-egy lineáris teret alkot. (Ezért szokás a lineáris teret vektortér néven is emlegetni.) Nyilvánvaló, hogy a valósszámok $\mathbb{R}$ tere is lineáris tér.

b) Az $[a, b]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények $\mathbb{C}^0_{[a,b]}$ tere, vagy az akárhányszor differenciálható függvények $\mathbb{D}^\infty_{(a,b)}$ tere szintén példák lineáris térre. Mindkét esetben az azonosan nulla függvény a nullelem, egyik esetben az $[a, b]$, másik esetben az (a, b) intervallumon értelmezve.

4.2. Illusztráció.

a) Az $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ valós függvények közül az $f(x) = mx$ lineáris függvény.
(A $g(x) = mx + b$, $b \neq 0$ nem lineáris a 4.2 Definició értelmében. Ezért a nyomaték kedvéért szokták a 4.2 Definició szerinti lineáris függvényt *homogén lineáris függvénynek* is nevezni.)

b) Az $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ valós kétváltozós függvények közül az

$$f(x, y) = ax + by\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

lineáris függvény. Ugyanis az $\underline{\mathbf{x}} = (x, y)$ és az $\underline{\mathbf{a}} = (a, b)$ jelölést használva kapjuk, hogy skaláris szorzatról van szó: $f(\underline{\mathbf{x}}) = \underline{\mathbf{a}} \cdot \underline{\mathbf{x}}$, amire teljesül a (4.3) és a (4.4) tulajdonság.

4.3. Definíció.

Ha a 2.1 Definicióban F az y és y' szimbólumoknak lineáris függvénye, akkor jutunk homogén lineáris implicit differenciálegyenlethez:

$$a(x)\, y' + b(x)\, y = 0 \tag{4.5}$$

Feltételezve, hogy $a(x) \neq 0$, oszthatunk vele és így

$$(H) \qquad \boxed{\text{y' + g(x) y = 0}} \tag{4.6}$$

alakú differenciálegyenlethez jutunk. (4.6)-ban feltesszük, hogy g folytonos valamely $[\alpha,\beta]$ intervallumon, ekkor (4.6)-ot *homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezzük és (H) -val jelöljük.

Homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

4.1. Tétel.

a) Ha φ és ψ is megoldásai (4.6) differenciálegyenletnek, akkor $\varphi+\psi$ is megoldása (4.6)-nak. Ha egy φ függvény megoldása a (4.6) differenciálegyenletnek, akkor ennek a φ függvénynek a konstansszorosai is megoldások. Ezt röviden úgy mondhatjuk, hogy a (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.

b)
$$y' + g(x)\,y = 0, \qquad y(x_0) = y_0 \tag{4.7}$$
kezdetiérték problémának $\forall\, x_0 \in (\alpha,\beta)\,,\, y_0 \in \mathbb{R}$ esetén van az (α,β) intervallumon értelmezett megoldása. (Ezt, a megoldás létezését garantáló állítást egzisztencia tételnek nevezzük.)

c) Ha φ és ψ is a (α,β) intervallumon értelmezett megoldásai a (4.7) kezdetiérték problémának, (vagyis grafikonjaik ugyanazon az (x_0,y_0) ponton haladnak át), akkor
$$\varphi(x) = \psi(x) \quad \forall x \in (\alpha,\beta)\,.$$
(Ezt, a megoldás egyértelműségét garantáló állítást unicitás tételnek nevezzük.)

d) A (4.6) homogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet megoldásai egydimenziós lineáris teret alkotnak, tehát a megoldások megadhatók egy seholse nulla φ elem konstansszorosaként.

Bizonyítás.

a) Ha φ és ψ is megoldásai (4.6) differenciálegyenletnek, akkor
$$\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)\,, \tag{4.8}$$
$$\psi'(x) + g(x)\,\psi(x) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)\,. \tag{4.9}$$
Összeadva (4.8)-at és (4.9)-et:
$$\varphi'(x) + \psi'(x) \;+\; g(x)\;(\varphi(x)+\psi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)\,.$$
amiből:
$$(\varphi(x)+\psi(x))' \;+\; g(x)\;(\varphi(x)+\psi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)\,.$$
Tehát $\varphi+\psi$ is megoldása (4.6)-nak.
Ha egy φ függvény megoldása a (4.6) differenciálegyenletnek, akkor (4.8)-ból c-vel való szorzással kapjuk:
$$c\,(\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in (\alpha,\beta)\,,$$

amit átalakítva:

$$(c\,\varphi(x))' + g(x)\,(c\,\varphi(x)) = 0, \quad \forall\, x \in\, (\alpha, \beta)\,.$$

Tehát a φ függvénynek a konstansszorosai is megoldásai a (4.6)-nak.

b)

$$\begin{array}{ll} y' + g(x)\cdot y = 0 & \text{(szeparábilis differenciálegyenlet)} \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -g(x)\cdot y & y \equiv 0 \text{ megoldás} \end{array}$$

Ha $y \neq 0$:
$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} \;=\; -\int g(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Jelöljük g primitív függvényét G-vel! (G létezik g folytonossága miatt.) Ekkor

$$\ln|y| \;=\; -G(x) + C_1$$

$$|y| \;=\; \mathrm{e}^{C_1}\,\mathrm{e}^{-G(x)} = K\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad K > 0$$

$$\left.\begin{array}{ll} y > 0: & y = K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ y < 0: & y = -K\,\mathrm{e}^{-G(x)} \\ & \quad (K > 0) \\ \text{és} & y \equiv 0 \text{ is megoldás.} \end{array}\right\} \Longrightarrow y = C\,\mathrm{e}^{-G(x)}\,, \quad C \in \mathbb{R}$$

az általános megoldás.
A megoldást azon az (α, β) intervallumon kaptuk meg, ahol g folytonos.

Ha $y(x_0) = y_0 \quad \Longrightarrow \quad y_0 = C\,\mathrm{e}^{-G(x_0)}$-ból C egyértelműen meghatározható.

c) Nem bizonyítjuk.

d) $y = C\,\mathrm{e}^{-G(x)}$, $C \in \mathbb{R}$-ből látható, hogy valóban

$$y = C\,\varphi(x)$$

alakú az általános megoldás. Azt is látjuk, hogy $\varphi(x)$ seholse nulla.

■

4.3. Illusztráció.
Oldjuk meg az $y' + (\sin x)\,y = 0$ homogén differenciálegyenletet!

Megoldás.

A 4.1 tétel d) állítása szerint egy $y \neq 0$ megoldást keresünk, ezért y-nal oszthatunk:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int -\sin x\;\mathrm{d}x\,,$$

amiből:

$$\ln y = \cos x\,, \qquad \text{azaz} \qquad y = e^{\cos x} \quad \text{egyik, nem nulla megoldás.}$$

Ezért a 4.1 tétel d) állítása alapján a differenciálegyenlet általános megoldása

$$y_H = C\, e^{\cos x}, \qquad x, C \in \mathbb{R}.$$

Inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenlet

Tekintsük most az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x) \tag{4.10}$$

differenciálegyenletet, amelyet $f(x) \not\equiv 0$ esetén *inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenletnek* nevezünk és (I)-vel jelölünk. Itt is feltesszük, hogy g és f folytonos az (α, β) intervallumon.
A (4.10) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenlet:

$$(H) \qquad y' + g(x)\, y = 0 \tag{4.11}$$

4.2. Tétel.
a) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet $y_{I\text{ált}}$ általános megoldása felírható a (4.11) homogén differenciálegyenlet $y_{H\text{ált}}$ általános megoldása és a (4.10) lineáris inhomogén differenciálegyenlet valamely y_p partikuláris megoldása összegeként, tehát:

$$\boxed{y_{I\text{ált}} = y_{H\text{ált}} + y_p}\,.$$

b) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x)$$

inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása mindig megtalálható a konstans variálás módszerével.

c) Az

$$(I) \qquad y' + g(x)\, y = f(x) \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\,, \quad \text{és} \quad y(x_0) = y_0 \tag{4.12}$$

inhomogén lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdetiérték feladat egyértelműen oldható meg $\forall\, x_0 \in (\alpha, \beta)\,, y_0 \in \mathbb{R}$ esetén.

Bizonyítás.

a) Először egy segédtételt bizonyítunk be.

4.2.1. Segédtétel

Ha (I)-nek két megoldását megtaláltuk, akkor ezeknek a megoldásoknak a különbsége megoldása az

$$(H) \qquad y' + g(x)\, y = 0$$

homogén differenciálegyenletnek.

Ugyanis

$$(I) \qquad y_1'(x) + g(x)\, y_1(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,,$$

és

$$(I) \qquad y_2'(x) + g(x)\, y_2(x) = f(x), \quad \forall\, x \in (\alpha, \beta)\,,$$

akkor a két egyenlet különbségéből kapjuk:

$$y_1'(x) + g(x)\, y_1(x) - (y_2'(x) + g(x)\, y_2(x)) = f(x) - f(x) = 0, \quad \forall x \in (\alpha, \beta)\ .$$

Tehát:

$$(y_1(x) - y_2(x))' + g(x)\, (y_1(x) - y_2(x)) = 0\,,$$

azaz $y_1(x) - y_2(x)$ megoldása a (4.11) homogén differenciálegyenletnek. Ezért nevezzük (4.11)-et a (4.10) inhomogén problémához tartozó homogén differenciálegyenletnek.

Jelöljük az $(y_1(x) - y_2(x))$ különbséget $y_H(x)$-szel, ekkor: $y_1(x) = y_H(x) + y_2(x)$. Ebből már következik a tétel állítása:

$$y_{I\text{ált}} = y_{H\text{ált}} + y_p\,,$$

vagyis a (4.10) inhomogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása egyenlő a hozzá tartozó (4.11) homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldása plusz a (4.10) inhomogén lineáris differenciálegyenlet egyik partikuláris megoldása.

$y_1 := y_{I\text{ált}}\,, \quad y_2 := y_p$ választással:

$$y_1 - y_2 = y_{H\text{ált}}$$

az összes lehetséges megoldása (H)-nak

egy konkrét megoldása (I)-nek

tetszőleges megoldása (I)-nek

(I)-nek nem lehet más megoldása, csak ami ebből y_1-re kijön, midőn y_H helyén (H) minden lehetséges megoldását szerepeltetjük.

b) Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az állandó variálásának módszerével

$$y_p = c(x)\,\varphi(x)$$

alakban keressük, ahol φ (H) egy seholse nulla megoldása, tehát $\varphi'(x) + g(x)\,\varphi(x) = 0$.
y_p-nek az (I)-be való behelyettesítéssel megmutatjuk, hogy létezik ilyen alakú megoldás.
Deriváljuk y_p-t: $y_p' = c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)$
Behelyettesítünk (I)-be:

$$(c'(x)\cdot\varphi(x) + c(x)\cdot\varphi'(x)) \;+\; g(x)\cdot(c(x)\cdot\varphi(x)) \;=$$

$$= c'(x)\cdot\varphi(x) \;+\; c(x)\cdot \underbrace{(\varphi'(x) + g(x)\cdot\varphi(x))}_{\equiv 0,\ \text{mivel } \varphi \text{ a (H) megoldása}} = c'(x)\cdot\varphi(x) = f(x)$$

Ebből

$$c'(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

adódik. Mivel ez folytonos, ezért létezik primitív függvénye, tehát c mindig meghatározható integrálással. Mivel csak egy y_p kell, tehát elég egyetlen $c(x)$-et találni (az integrálási állandó 0-nak választható).

c) Nem bizonyítjuk.

4.1. Pl. $\boxed{y' - \dfrac{y}{x} = x\,\mathrm{e}^x\,, \qquad y(1) = 5\,, \quad y(x) = ?}$

Minden olyan tartományban, melyben $x \neq 0$ a differenciálegyenlet egyértelműen megoldható.

(H): $\quad y' - \dfrac{y}{x} = 0 \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{y}{x}\,, \qquad y \equiv 0$ megoldás
Ha $y \neq 0$:

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Most is elég egyetlen, nem nulla megoldás, ezért

$$\Longrightarrow \quad \ln y = \ln x\,, \qquad \text{így } \ y = x$$

Tehát a homogén egyenlet általános megoldása: $\quad y_{H\text{ált}} = C\,x\,, \quad C \in \mathbb{R}$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldásának keresése:

$$y_p = c(x)\,x\,, \qquad y_p' = c'(x)\,x + c(x)$$

Behelyettesítve (I)-be:

$$\text{(I)} \qquad c'(x)\,x + \underbrace{c(x) - \frac{c(x)\,x}{x}}_{=0} = x\,\mathrm{e}^x$$

Innen:

$$c'(x) = \mathrm{e}^x \quad \Longrightarrow \quad c(x) = \mathrm{e}^x + \text{ konst.}$$

Mivel egyetlen y_p megoldást keresünk, konst=0 választható, így $\quad y_p = x\,\mathrm{e}^x$.

Az inhomogén egyenlet általános megoldása: $\quad \underline{\underline{y_{I\text{ált}} = C\,x + x\,\mathrm{e}^x \qquad (C \in \mathbb{R})}}$

Az y(1)=5 kezdetiérték probléma megoldása:

$$5 = C + \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad C = 5 - \mathrm{e} \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = (5-\mathrm{e})x + x\mathrm{e}^x}}$$

4.1. Feladat.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

1.) $y\mathrm{e}^{2x} - (1+\mathrm{e}^{2x})\,y' = 0$

2.) $y' - \dfrac{1}{x\ln x}y = x\ln x\,, \qquad y(\mathrm{e}) = \dfrac{\mathrm{e}^2}{2}$

3.) $y' - \dfrac{y}{x} - 2x^2 = 0\,, \qquad y(1) = -1$

4.) $y' + \dfrac{y}{1+x} = \dfrac{1+2x}{1+x}\,, \qquad y(0) = 2$

5.) $y' + \dfrac{y}{x} = \mathrm{e}^x + \dfrac{3\mathrm{e}^x}{x}$

6.) $y' - \dfrac{3}{x}y = 2$

7.) $y' + \dfrac{2}{x}y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{2}\,, \qquad y(1) = 0$

8.) $y' + \dfrac{2}{x}y = 3\,, \qquad y(1) = 2$

9.) $y' - \dfrac{3}{x}y = x^4$

10.) $y' + \dfrac{2}{x}y = 3x^2\,, \qquad y(1) = 4$

11.) $y' + 2y\,\mathrm{sh}\,x = \mathrm{sh}\,x$

12.) $y' + \dfrac{y}{x} = \left(\dfrac{1}{x} + 2\right)\mathrm{e}^{2x}\,, \qquad x > 0$

13.) $y' + 2xy = 4x$

14.) $y' - 3y = x^2 + 1$

15.) $xy' - y = \mathrm{e}^x\,(x^2 + x^3)$

16.) $y' + ay = \mathrm{e}^{5x}\,, \qquad a \neq 0$

17.) $y' + ay = \mathrm{e}^{mx}\,, \qquad a \neq 0$

5. Új változó bevezetése

1.) Szétválasztható változójúra visszavezethető differenciálegyenletek:

(a) $y' = \varphi(x,y) = f\left(\dfrac{y}{x}\right) \qquad u := \dfrac{y}{x} \qquad \left(u(x) = \dfrac{y(x)}{x}\right)\,, \quad x \neq 0$

$$y = u\cdot x$$
$$y' = u'\cdot x + u\cdot 1$$

A helyettesítés elvégzése után az alábbi szétválasztható változójú differenciálegyenlethez jutunk:

$$u'\,x + u = f(u)$$
$$u'\,x = f(u) - u = g(u)$$
$$u' = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u)\cdot\frac{1}{x}$$

(b) $y' = f(ax+by) \quad (a, b \in \mathbb{R})$

$$u := a\,x + b\,y$$
$$y = \frac{1}{b}\,u - \frac{a}{b}\,x$$
$$y' = \frac{1}{b}\,u' - \frac{a}{b}$$

A helyettesítés után kapott egyenlet:

$$\frac{1}{b}\,u' - \frac{a}{b} = f(u)\,,$$

mely szintén szétválasztható változójú differenciálegyenlet.

2.) Egyéb helyettesítések: ezeknél megadjuk, hogy mivel helyettesítünk.

Példák:

5.1. Pl. $\boxed{\quad y' = \dfrac{2y^2+x^2}{xy} \qquad x \neq 0,\;\; y \neq 0\quad}$

$$y' = 2\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \qquad u := \frac{y}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad y = u\cdot x,\;\; y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 2u + \frac{1}{u}$$
$$u'x = u + \frac{1}{u}$$
$$u' = \frac{u^2+1}{u}\;\frac{1}{x}$$
$$\frac{1}{2}\int \frac{2u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$
$$\frac{1}{2}\ln\left(u^2+1\right) = \ln|x| + C$$
$$\ln\left(u^2+1\right) = \ln x^2 + 2C$$
$$u^2 + 1 = x^2\cdot \underbrace{\mathrm{e}^{2C}}_{:=K>0}$$
$$\frac{y^2}{x^2} + 1 = Kx^2$$

$$\underline{\underline{y^2 = Kx^4 - x^2}} \qquad K > 0$$

5.2. Pl. $\boxed{x^2y' + xy = x^2 + y^2 \qquad y(1) = 2}$

$$y' = \frac{x^2 + y^2 - xy}{x^2}$$

$$y' = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 - \frac{y}{x} \qquad x \neq 0 \qquad (\text{Most } x > 0)$$

$$u := \frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad y = ux \quad \Longrightarrow \quad y' = u'x + u$$

$$u'x + u = 1 + u^2 - u$$

$$u'x = 1 + u^2 - 2u$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{(1-u)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{(1-u)^{-1}}{-1} = \ln|x| + C \qquad |x| = x \text{ most, mivel } x \in K_{1,\delta}$$

$$\frac{1}{1-u} = C + \ln x$$

Visszahelyettesítve:

$$\underline{\underline{1 - \frac{y}{x} = \frac{1}{C + \ln x}}}$$

$$y(1) = 2: \qquad 1 - 2 = \frac{1}{C} \quad \Longrightarrow \quad C = -1 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = x\left(1 - \frac{1}{-1 + \ln x}\right)}}$$

5.3. Pl. $\boxed{y' = \mathrm{e}^{2y+x} - \frac{1}{2} \qquad y(0) = 0}$

$$u := 2y + x \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{u}{2} - \frac{x}{2} \quad \Longrightarrow \quad y' = \frac{u'}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{u'}{2} - \frac{1}{2} = \mathrm{e}^u - \frac{1}{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u' = 2\mathrm{e}^u$$

$$\int \mathrm{e}^{-u}\,\mathrm{d}u = \int 2\,\mathrm{d}x$$

$$-\mathrm{e}^{-u} = 2x + C$$

$$\mathrm{e}^{-2y-x} = -2x + C \qquad y(0) = 0: \quad 1 = C$$

Tehát a kezdeti feltételt kielégítő megoldás implicit alakja:

$$e^{-2y-x} = -2x + 1$$

Ebből most a megoldás explicit alakja is könnyen felírható:

$$-2y - x = \ln(1 - 2x)$$

$$\underline{\underline{y = -\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1 - 2x)}}$$

5.4. Pl. Alkalmazzuk az $u(x) = y^3(x)$ helyettesítést, és oldjuk meg a

$$3xy' - 2y = x^3 y^{-2}$$

differenciálegyenletet!

$$u = y^3\,, \qquad u' = 3y^2 \cdot y'\,, \qquad y' = \frac{u'}{3y^2}$$

A differenciálegyenlet átalakítva:

$$3y'y^2 - \frac{2}{x}y^3 = x^2$$

Elvégezve a helyettesítést:

$$u' - \frac{2}{x}u = x^2 \qquad \text{(lineáris elsőrendű d.e.)}$$

$$\vdots$$

$$u_{há} = Ce^{-\int -\frac{2}{x}\,dx} = Ce^{\ln x^2} = Cx^2$$

$$u_{ip} = c(x)x^2 \quad \Longrightarrow \quad u'_{ip} = c'x^2 + c \cdot 2x$$

$$c'x^2 + c \cdot 2x - \frac{2}{x} \cdot cx^2 = x^2$$

$$c'(x) = 1 \quad \Longrightarrow \quad c(x) = x$$

$$u_{ip} = x^3$$

$$u_{iá} = Cx^2 + x^3$$

$$y^3 = Cx^2 + x^3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{\underline{y = \sqrt[3]{C \cdot x^2 + x^3}}}$$

5.5. Pl. $y(xy + 1) + x(1 + xy + x^2y^2)y' = 0 \qquad u = xy$

$$u' = 1 \cdot y + xy' \quad \Longrightarrow \quad xy' = u' - y \quad \Longrightarrow \quad xy' = u' - \frac{u}{x}$$

$$\frac{u}{x}(u+1)+(1+u+u^2)\left(u'-\frac{u}{x}\right)=0$$

$$\vdots$$

$$u'\,\frac{1+u+u^2}{u^3}=\frac{1}{x}$$

$$\int (u^{-3}+u^{-2}+u^{-1})\,\mathrm{d}u=\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

$$\frac{u^{-2}}{-2}+\frac{u^{-1}}{-1}+\ln|u|=\ln|x|+C$$

$$\underline{\underline{-\frac{1}{2x^2y^2}-\frac{1}{xy}+\ln|xy|=\ln|x|+C}}$$

5.6. Pl. $\boxed{y'\left(\frac{y^2-1}{y^2}\right)=-2x\left(x^2+y+\frac{1}{y}\right)\qquad z=x^2+y+\frac{1}{y}}$

$$z=x^2+y+\frac{1}{y}\quad\Longrightarrow\quad z'=2x+y'-\frac{y'}{y^2}\quad\Longrightarrow\quad y'\,\frac{y^2-1}{y^2}=z'-2x$$

Behelyettesítve:

$$z'-2x=-2xz\quad\Longrightarrow\quad z'+2xz=2x\qquad \text{lineáris elsőrendű d.e.}$$

$$\ldots\quad z_{i\acute{a}}=z_{h\acute{a}}+z_{ip}=C\mathrm{e}^{-x^2}+1$$

Visszahelyettesítve:

$$\underline{\underline{x^2+y+\frac{1}{y}=C\mathrm{e}^{-x^2}+1}}$$

5.1. Feladat.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet a megadott helyettesítéssel!

1.) $4x-3y+y'(2y-3x)=0\qquad u=\frac{y}{x}$

2.) $(1-2x-2y)\,y'=x+y+1\qquad u=x+y$

3.) $y'+\frac{y}{x}=x^2\,y^4\qquad u=y^{-3}$

4.) $y'+2xy=2x\,y^3\qquad u=y^{-2}$

5.) $5(1+x^2)\,y'=2xy+\frac{(1+x^2)^2}{y^4}\qquad u=y^5$

6.) $(x^2y^2-1)\,y'+2x\,y^3=0 \qquad u=\dfrac{1}{xy}$

7.) $y'=\dfrac{y^2}{x^2}-2\,\dfrac{y}{x} \qquad u=\dfrac{y}{x}$

8.) $3\,y'-\dfrac{2}{x}\,y=\dfrac{x^2}{y^2} \qquad u=y^3$

9.) $y'=\dfrac{2x+y}{y-x}, \quad x>0 \qquad u=\dfrac{y}{x}$

10.) $xy'\,\mathrm{sh}\,y-\mathrm{ch}\,y=x^2\,\mathrm{sh}\,x \qquad u=\mathrm{ch}\,y$

11.) $xy'\sin y+\cos y=1 \qquad u=\cos y$

12.) $\dfrac{1+y'}{x+y}=\dfrac{1+\ln^2(x+y)}{1+x^2} \qquad y(0)=\mathrm{e} \qquad u=\ln(x+y)$

13.) $xy'\cos(x+y)=\sin^2(x+y)-x\cos(x+y)-1 \qquad u=\sin(x+y)$

6. Iránymező, izoklinák, grafikus megoldás

Tegyük fel, hogy az $y=\varphi(x)\,,\ x\in(\alpha,\beta)$ megoldása az $y'=f(x,y)$ differenciálegyenletnek. Ekkor

$$\varphi'(x)\;=\;f\left(x,\varphi(x)\right)\,,\quad \forall\,x\in(\alpha,\beta)\,.$$

Ha φ átmegy az (x_0,y_0) ponton, akkor $\varphi(x_0)=y_0$ és

$$\varphi'(x_0)\;=\;f\left(x_0,\varphi(x_0)\right)=f(x_0,y_0)\,.$$

Tehát, ha az (x_0,y_0) koordinátákat behelyettesítjük a differenciálegyenlet jobb oldalába, akkor az így kapott $f(x_0,y_0)$ érték megadja az (x_0,y_0) ponton átmenő megoldásgörbe érintőegyenesének a meredekségét. ($\mathrm{tg}\,\alpha=f(x_0,y_0)$)

Tegyük fel, hogy minden (x_0,y_0) pontban megrajzolunk egy $f(x_0,y_0)$ meredekségű vonaldarabkát, amit **vonalelemnek** nevezünk. Az így kapott tér az **iránymező**.
Minden $y'=f(x,y)$ differenciálegyenlethez tartozik egy iránymező. A megoldásgörbéknek illeszkedniük kell ehhez az iránymezőhöz, vagyis a megoldásgörbét minden pontjában érinti az iránymező valamely vonaleleme.

6.1. Pl. $\boxed{y'=\dfrac{y}{x}\,, \quad x\neq 0 \quad \text{(Az } y \text{ tengely pontjaihoz nincs rendelve irány.)}}$

Az $y = mx$ egyenes pontjaihoz a differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli: $\operatorname{tg}\alpha = m$.
Tehát most a vonalelemek párhuzamosak a szóban forgó ponthoz mutató helyvektorral.
A megoldásgörbének minden pontban érintenie kell a megfelelő vonalelemet.

D1 ábra

A megoldások leolvashatók az iránymezőből: $y = c\,x\,,\ x > 0$, vagy $y = c\,x\,,\ x < 0$.
(Valóban: $\ln|y| = \ln|x| + \ln|c| \implies y = c\,x\,,\ x \neq 0$ és $y \equiv 0\,,\ x \neq 0.$)

Izoklina: azon pontok halmaza, melyekhez az $y' = f(x,y)$ differenciálegyenlet ugyanazt az irányt rendeli,tehát az izoklina pontjaiban a vonalelemek párhuzamosak. Ennek megfelelően az izoklinák egyenlete:

$$f(x,y) = K\,, \quad K \in \mathbb{R}$$

6.2. Pl.

$$y' = x - y^2$$

a.) Írja fel az izoklinák egyenletét!
Mely pontokban van a megoldásoknak lokális szélsőértéke és milyen a szélsőérték jellege?

b.) Tekintsük a differenciálegyenlet $(1,-2)$ ponton átmenő megoldását! (Belátható, hogy van ilyen: egzisztencia tétel.)
Van-e ennek a megoldásfüggvénynek inflexiója az $(1,-2)$ pontban?

a.) Izoklinák: $x - y^2 = K$ (parabolák)

A lokális szélsőérték létezésének szükséges feltétele: $y' = 0$.
Tehát a $K = 0$-hoz tartozó izoklina pontjaiban lehet lokális szélsőérték:

$$x - y^2 = 0 \implies x = y^2$$

parabola pontjai jönnek szóba. (Az $x = y^2$ izoklinát a megoldásgörbék vízszintesen metszik.)
Az $y' = x - y^2$ differenciálegyenlet mindkét oldalát x szerint deriváljuk:

$$y'' = 1 - 2yy'$$

Az $x = y^2$ parabola pontjaiban $y' = 0$ és így: $y'' = 1 > 0$

$\implies$ Az $x = y^2$ parabola pontjaiban $y' = 0$ és $y'' > 0$, tehát a megoldásfüggvényeknek lokális minimuma van.

b.) $y' = x - y^2 \implies y'(1) = 1 - (-2)^2 = -3$
$y'' = 1 - 2yy' \implies y''(1) = 1 - 2(-2)(-3) = -11 \neq 0$

Nem teljesül az inflexiós pont létezésének szükséges feltétele $\implies$ nincs itt inflexió.

6.3. Pl.

Milyen lokális tulajdonsága van az $$y' = x^3 + y^3 - 9$$ differenciálegyenlet $(2,1)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

Az $y'(x) = x^3 + y^3(x) - 9$ egyenletben x helyére 2 kerül. $(y(2) = 1)$

$y'(2) = 2^3 + 1^3 - 9 = 0 \implies$ lokális szélsőérték lehet

A differenciálegyenlet mindkét oldalát x szerint deriváljuk és itt is elvégezzük az $x = 2$ helyettesítést:

$y'' = 3x^2 + 3y^2 \cdot \underbrace{y'}_{=0}$ $\quad y''(2) = 12 > 0 \implies y(2) = 1$ lokális minimum érték.

6.4. Pl.

Az $y = \varphi(x)$ átmegy az $x_0 = 2$; $y_0 = 4$ ponton, és kielégíti az $$y^2 y' = x(64 - y^3) + x - 2$$ differenciálegyenletet. Milyen lokális tulajdonsága van ennek a megoldásgörbének a $(2,4)$ pontban?

Az x helyére 2-t, az y helyére 4-et helyettesítve kapjuk:

$$4^2\, y'(2) = 2(64 - 4^3) + 2 - 2,$$

amiből $y'(2) = 0$. Deriváljuk x szerint a fenti implicit differenciálegyenletet:

$$2yy'y' + y^2y'' = (64 - y^3) + x(-3y^2)y' + 1.$$

Az x helyére 2-t, az y helyére 4-et és az y' helyére 0-át helyettesítve kapjuk:

$$0 + 16y''(2) = 0 + 2(-3 \cdot 0) + 1\,,$$

amiből $y''(2) = \dfrac{1}{16} > 0$.

$y(x)$-nek $x = 2$-ben lokális minimuma van $(\, y'(2) = 0\,;\; y''(2) > 0\,)$, a minimum értéke: 4.

6.5. Pl. Az $y = \varphi(x)$, $x \in K_{2,\delta}$ megoldása az

$$y' = 2\,(x-2)^2 + 5\,y^2\,, \qquad y(2) = -1$$

kezdetiérték problémának.

a.) Határozzuk meg a $\varphi'(2)$, $\varphi''(2)$, $\varphi'''(2)$ értékeket!

b.) Van-e lokális szélsőértéke φ-nek $x_0 = 2$-ben?

c.) Írjuk fel a φ függvény $x_0 = 2$ bázispontú harmadfokú Taylor polinomját!

M

$$\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 + 5\,\varphi^2(x)\,, \qquad \varphi(2) = -1$$

Mivel a jobb oldal differenciálható, azért a bal oldal is. Tehát létezik $\varphi''(x)$, $x \in K_{2,\delta}$. Hasonlóan kaphatjuk, hogy φ akárhányszor differenciálható $K_{2,\delta}$-ban.

a.) $\varphi'(x) = 2\,(x-2)^2 + 5\,\varphi^2(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi'(2) = 2\,(2-2)^2 + 5\,\underbrace{\varphi^2(2)}_{=(-1)^2=1} = 5$

$\varphi''(x) = 4\,(x-2) + 5\cdot 2\,\varphi(x)\,\varphi'(x) \quad \Longrightarrow \quad \varphi''(2) = 4\,(2-2) + 10\cdot(-1)\cdot 5 = -50$

$\varphi'''(x) = 4 + 10\varphi'(x)\varphi'(x) + 10\varphi(x)\varphi''(x) \Longrightarrow \varphi'''(2) = 4 + 10\cdot 5\cdot 5 + 10\cdot(-1)\cdot(-50) = 754$

b.) Mivel $\varphi'(2) = 5 \neq 0 \quad \Longrightarrow$ nincs lokális szélsőérték $x_0 = 2$-ben. (Szükséges feltétel nem teljesül).

c.) $T_3(x) = -1 + 5\,(x-2) - \dfrac{50}{2!}\,(x-2)^2 + \dfrac{754}{3!}\,(x-2)^3$

6.1. Feladat.

1.)

$$y' = x^2 + 2y^2$$

A differenciálegyenlet megoldása nélkül válaszoljunk a következő kérdésekre!

(a) Mely pontokban párhuzamosak a megoldások az $y = 2x$ egyenessel?

(b) Lehet-e lokális szélsőértéke a megoldásoknak?

(c) Írja fel az $y(0) = 0$ kezdeti érték problémához tartozó megoldásgörbe $x_0 = 0$ körüli harmadfokú Taylor polinomját!

2.)
$$y' + y^2 + x^2 + 1 = 0$$

Írja fel az izoklinák egyenletét! Van-e a megoldásoknak lokális szélsőértéke?
Vizsgálja meg a megoldásgörbék pozitív síknegyedbe ($x > 0, \quad y > 0$) eső részeit monotonitás szempontjából!
Számítsa ki az $x_0 = 0, \quad y_0 = 0$ ponton átmenő megoldás első és második deriváltját az x_0 pontban!

3.) Milyen lokális tulajdonsága van az

$$y' = y^4 - x^3 + 2x - 15$$

differenciálegyenlet $(-1, 2)$ ponton átmenő megoldásának az adott pontban?

4.)
$$y' = (y^2 - 4)x + x - 1$$

(a) A sík mely pontjaiban párhuzamos az iránymező az $y = -x$ egyenessel? Vázoljuk ezeket a pontokat és jelöljünk be három vonalelemet!

(b) Milyen lokális tulajdonsága van az $x_0 = 1, \quad y_0 = 2$ ponton átmenő megoldásnak az adott pontban? (Ha egyáltalán van ilyen megoldás.)

5.)
$$y' = x^2 + y^2 - 12$$

(a) Vázoljuk az izoklinákat, jelöljük be a vonalelemek irányát!

(b) Mely pontokban van lokális maximuma, illetve lokális minimuma a megoldásgörbéknek?

7. Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek

$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)\, y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\, y' + a_0(x)\, y$

(H): $L[y] = 0$ (homogén egyenlet)
(I): $L[y] = f(x)$ (inhomogén egyenlet)

Ha $f, a_0, \ldots, a_{n-1} \in C^0_{(a,b)}$, akkor $\forall\, y^{(k)}(x_0) = y_{0,k}$, ahol $k = 0, 1, \ldots, n-1$, $x_0 \in (a, b)$ kezdetiérték probléma egyértelműen oldható meg.

Ⓣ Ha y_1, y_2 megoldása (I)-nek, akkor $y_1 - y_2$ megoldása (H)-nak.

Ⓑ HF.: az elsőrendűhöz hasonlóan.

Ⓣ Következmény:

$$y_{iá} = y_{há} + y_{ip}$$

7.1. A homogén egyenlet általános megoldása

Ⓣ (H) megoldásai lineáris teret alkotnak.

Ⓑ Belátjuk, hogy ha Y_1, Y_2 megoldása (H)-nak, akkor $Y_1 + Y_2$ és $C \cdot Y_1$ is az.

$$\begin{array}{rl} & Y_1^{(n)} + a_{n-1}(x)\,Y_1^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,Y_1' + a_0(x)\,Y_1 \equiv 0 \\ + & \left(Y_2^{(n)} + a_{n-1}(x)\,Y_2^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,Y_2' + a_0(x)\,Y_2 \equiv 0\right) \\ \hline & (Y_1+Y_2)^{(n)} + a_{n-1}(x)\,(Y_1+Y_2)^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)\,(Y_1+Y_2)' + a_0(x)\,(Y_1+Y_2) \equiv 0 \end{array}$$

Tehát valóban $L[Y_1 + Y_2] \equiv 0$. Hasonlóan lehet megmutatni, hogy $L[Y_1] \equiv 0$-ból következik $L[C \cdot Y_1] \equiv 0$.
Ebből már következik, hogy (H) megoldásai lineáris teret alkotnak.

∎

Ⓣ (H) megoldásainak tere n dimenziós. (¬B)

Ha tehát megadunk n db lineárisan független megoldást, akkor

$$y_{há} = \sum_{i=1}^{n} C_i\, Y_i(x)$$

Ⓓ $f_1, f_2, \ldots, f_n$ függvények lineárisan függetlenek $x \in I$-n, ha

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, f_i(x) \equiv 0,\ x \in I \quad \text{a.cs.a., ha } \lambda_i = 0,\ i = 1, \ldots, n$$

Ⓓ Az $f_1, \ldots, f_n$ függvények legyenek az x változónak legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható függvényei. A

$$\underline{\underline{W}}(x) = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

mátrixot Wronski-féle mátrixnak, a belőle képzett determinánst *Wronski-féle determináns*nak nevezzük.

Legyen $f_1, \ldots, f_n$ legalább $(n-1)$-szer folytonosan differenciálható I-n:

a.) az I-n $|\underline{\underline{W}}| \not\equiv 0 \quad \Longrightarrow \quad f_1, \ldots, f_n$ lineárisan függetlenek I-n b.) $\quad\quad\quad\quad\quad\quad \not\Leftarrow$

Pl.: $f_1(x) = x^3\,,\ f_2(x) = |x|^3$ lineárisan függetlenek $(-\infty, \infty)$-en, de

$$|\underline{\underline{W}}| = \begin{vmatrix} x^3 & |x|^3 \\ 3x^2 & \begin{cases} 3x^2 \\ -3x^2 \end{cases} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

(Kevésbé fontos számunkra:

c.) $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan összefüggő $\quad \Longrightarrow \quad |\underline{\underline{W}}| \equiv 0.$)

De igaz a következő tétel:

T $L[Y_i] \equiv 0\,,\ x \in I\,,\ \ i = 1, \ldots, n\,,$ tehát $Y_1, \ldots, Y_n$ a homogén egyenlet megoldásai I-n :
$Y_1, \ldots, Y_n$ lineárisan függetlenek $\quad \Longleftrightarrow \quad |\underline{\underline{W}}(x)| \neq 0\,,$ ha $x \in I$.
(Tehát ilyenkor érvényes a megfordított, egyben erősebb állítás is.) $\quad (\neg$B)

Hogyan kereshetünk n darab lineárisan független megoldást a homogén egyenlethez?

7.1.1. A homogén egyenlet általános megoldása függvény együtthatós esetben

Ezzel nem foglalkozunk.

7.1.2. A homogén egyenlet általános megoldása konstans együtthatós esetben

$$y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \cdots + a_1\,y' + a_0\,y = 0 \qquad a_i \in \mathbb{R}\,, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

$y = \mathrm{e}^{\lambda x},\ \lambda \in \mathbb{R}$ próbafüggvénnyel kísérletezünk:

$$y' = \lambda\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad y'' = \lambda^2\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \ldots, \qquad y^{(k)} = \lambda^k\,\mathrm{e}^{\lambda x}, \qquad \ldots, \qquad y^{(n)} = \lambda^n\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$

Behelyettesítve (H)-ba:

$$\underbrace{(\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda + a_0)}_{\text{karakterisztikus polinom}}\,\mathrm{e}^{\lambda x} = 0\,, \qquad\qquad \mathrm{e}^{\lambda x} \neq 0$$

A következő, ún. karakterisztikus egyenletet kapjuk:

$$\lambda^n + a_{n-1}\,\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\,\lambda + a_0 = 0$$

Ennek n db gyöke van, de lehetnek többszörös gyökök és komplex gyökök is. Mivel állandó együtthatós a polinom, a komplex gyökök csak konjugált párban fordulhatnak elő. A különböző esetek:

1.) A különböző valós gyökökhöz tartozó $e^{\lambda_i x}$, $e^{\lambda_j x}$ $(i \neq j)$ függvények lineárisan függetlenek.

2.) Ha pl. λ_1 k-szoros gyök (belső rezonancia), akkor is van hozzá k db lineárisan független megoldás: $e^{\lambda_1 x}$, $x e^{\lambda_1 x}$, $x^2 e^{\lambda_1 x}, \ldots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$ $(\neg B)$

3.) Az előző állítások akkor is igazak, ha a gyökök komplexek. De így nem valós megoldást kapnánk.
Az alábbiakban felhasználjuk az Euler formulát:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$$

Pl. $\qquad e^{2+j3} = e^2\, e^{j3} = e^2\,(\cos 3 + j \sin 3)$

Tehát $\qquad \mathrm{Re}\, e^{2+j3} = e^2 \cos 3\,, \qquad \mathrm{Im}\, e^{2+j3} = e^2 \sin 3$

És most nézzük a konjugált komplex gyökök esetét!

Pl.: $\qquad \lambda_1 = \alpha + j\beta\,, \qquad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = \alpha - j\beta$:

$Y_1 = e^{\lambda_1 x} = e^{(\alpha + j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j\beta x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x)$

$Y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{(\alpha - j\beta)x} = e^{\alpha x} e^{j(-\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x)$

Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$$\left.\begin{aligned} Y_1^* &:= \tfrac{Y_1+Y_2}{2} = e^{\alpha x}\cos\beta x \left(= \mathrm{Re}\, e^{\lambda_1 x}\right) \\ Y_2^* &:= \tfrac{Y_1-Y_2}{2j} = e^{\alpha x}\sin\beta x \left(= \mathrm{Im}\, e^{\lambda_1 x}\right) \end{aligned}\right\}$$

Ezek is lineárisan függetlenek.
Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t.

Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.

(Többszörös komplex gyökök esetén Y_1^*, Y_2^* szorzandó x-szel, x^2-tel, x^3-nel, stb.)

Példák:

7.1. Pl. $\boxed{y''' - 2y'' - 3y' = 0}$

A karakterisztikus egyenlet és annak megoldásai:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = -1\,,\ \lambda_3 = 3$$

Tehát a lineárisan független megoldások: e^{0x}, e^{-x}, e^{3x}

A homogén egyenlet általános megoldása pedig ezek lineáris kombinációja:

$$y_H = C_1\, e^{0x} + C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{3x} = C_1 + C_2\, e^{-x} + C_3\, e^{3x}\,, \qquad C_1,\, C_2,\, C_3 \in \mathbb{R}$$

7.2. Pl. $\boxed{y''' + 2y'' + y' = 0}$

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 2\lambda + 1) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = -1$$

$$y_H = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + C_3\,x\,\mathrm{e}^{-x}$$

7.3. Pl. $\boxed{y''' + 4y'' + 13y' = 0}$

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 13\lambda = \lambda\,(\lambda^2 + 4\lambda + 13) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2 + 3j,\ \lambda_3 = -2 - 3j$$

$$y_H = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}\cos 3x + C_3\,\mathrm{e}^{-2x}\sin 3x$$

7.4. Pl. $\boxed{y^{(5)} - 2y^{(4)} + 2y''' - 4y'' + y' - 2y = 0}$

$$\lambda^5 - 2\lambda^4 + 2\lambda^3 - 4\lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda^2 + 1)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 2,\ \ \lambda_2 = \lambda_3 = j,\ \ \lambda_4 = \lambda_5 = -j \quad \text{(belső rezonancia)}$$

Mivel $\mathrm{e}^{jx} = \cos x + j\sin x$, ezért $\mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{jx} = \cos x$, $\mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{jx} = \sin x$ lineárisan független valós megoldások és még ezek x-szeresei is, így az általános megoldás:

$$y_H = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\cos x + C_3\,\sin x + C_4\,x\,\cos x + C_5\,x\,\sin x =$$

$$= C_1\,\mathrm{e}^{2x} + (C_2 + C_4\,x)\,\cos x + (C_3 + C_5\,x)\,\sin x$$

7.1. Feladat.

Írjon fel olyan legalacsonyabbrendű valós konstans együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek megoldásai:

a.) $\mathrm{e}^{x},\ \mathrm{e}^{-x},\ \mathrm{e}^{2x}$

b.) $\mathrm{e}^{x},\ x\mathrm{e}^{x},\ x^2\mathrm{e}^{x}$

c.) $x^2\mathrm{e}^{-x},\ x^3\mathrm{e}^{2x}$

d.) $\mathrm{e}^{2x}\sin x,\ \mathrm{e}^{2x}\cos x$

e.) $\mathrm{e}^{2x}\sin 3x,\ \mathrm{e}^{-3x}$

f.) $\mathrm{e}^{2x}\sin x,\ x^2\mathrm{e}^{2x}\sin x,\ 1$

g.) tetszőleges másodfokú polinom, $\sin x$

7.2. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása

7.2.1. Állandók variálása

A módszer minden jobb oldali f függvénynél alkalmazható, azonban elég nehézkes. Speciális f-re lesz jobb módszerünk is. Az állandók variálását csak a másodrendű esetre mutatjuk meg.

Legyen adott az $a(x)\,y'' + b(x)\,y' + c(x)\,y = f(x)$-hez tartozó homogén differenciálegyenlet megoldása:

$$y_H = C_1\,Y_1(x) + C_2\,Y_2(x)$$

Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását az alábbi alakban keressük:

$$c\cdot \Big|\quad y_{ip} := \underline{c_1(x)\,Y_1(x)} + \underline{\underline{c_2(x)\,Y_2(x)}}$$

$$b\cdot \Big|\quad y_{ip}' = \underline{c_1\,Y_1'} + \underline{\underline{c_2\,Y_2'}} + \underbrace{c_1'\,Y_1 + c_2'\,Y_2}_{:=0}$$

Alulhatározott feladat (majd meglátjuk, hogy jogos a felvétel).

$$a\cdot \Big|\quad y_{ip}'' = c_1'\,Y_1' + \underline{c_1\,Y_1''} + c_2'\,Y_2' + \underline{\underline{c_2\,Y_2''}}$$

Behelyettesítve (I)-be (c_1, c_2, c_1', c_2'-re rendezzük):

$$c_1(\underbrace{aY_1'' + bY_1' + cY_1}_{=0,\ \text{mert}\ L[Y_1]\equiv 0}) + c_2(\underbrace{aY_2'' + bY_2' + cY_2}_{=0,\ \text{mert}\ L[Y_2]\equiv 0}) + aY_1'c_1' + aY_2'c_2' = f(x)$$

c_1', c_2'-re az alábbi egyenletrendszert kapjuk:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{W}}} \begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

$|\underline{\underline{W}}| \neq 0$, mert Y_1, Y_2 lineárisan függetlenek és $L[y] = 0$ megoldásai $\Longrightarrow$ az egyenletrendszer egyértelműen oldható meg c_1', c_2'-re:

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 \\ Y_1' & Y_2' \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{f(x)}{a} \end{bmatrix}$$

c_1', c_2' folytonossága miatt létezik c_1, c_2. (Integrációs állandó nem kell.)
Példát gyakorlaton mutatunk.

7.2.2. Kísérletezés (Ansatz)

Csak speciális zavaró függvény (a jobb oldalon álló f) esetén alkalmazható és csak állandó (konstans) együtthatójú lineáris differenciálegyenletnél!

Ha az állandó együtthatójú inhomogén lineáris differenciálegyenlet jobb oldalán álló f függvény:

a.) $K\mathrm{e}^{\alpha x}$

b.) $P_m(x) = a_m x^m + \cdots + a_0$

c.) $K_1 \sin \alpha x$

d.) $K_2 \cos \beta x$

függvények valamelyike, akkor a partikuláris megoldást az alábbi alakban kereshetjük:

a.) $y_{ip} = A\mathrm{e}^{\alpha x}\,, \qquad A$ ismeretlen

b.) $y_{ip} = Q_m(x) = B_m x^m + \cdots + B_0\,, \qquad B_0, \ldots, B_m$ ismeretlen

c.) $y_{ip} = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x\,, \qquad A, B$ ismeretlen

d.) $y_{ip} = A \sin \beta x + B \cos \beta x\,, \qquad A, B$ ismeretlen

A próbafüggvényben szereplő — még határozatlan — állandókat tartalmazó kisérletező függvényt elegendően sokszor differenciálva és az inhomogén differenciálegyenletbe behelyettesítve az egyenlő együtthatók módszerével (a megfelelő tagok együtthatóinak összehasonlításával) tudjuk meghatározni.

Ha a feltételezés helyes volt, akkor annyi független lineáris egyenletet kapunk az ismeretlen együtthatókra, ahány ismeretlenünk van. (Tehát pontosan 1 megoldás van.)

Ha a jobb oldali f függvényben az előző függvények összege, szorzata szerepel, akkor a kísérletező függvényeket is össze kell adni.

Külső rezonancia:

A módszer nem vezet eredményre, ha a kísérletező függvény, vagy annak egy tagja szerepel a homogén egyenlet megoldásai között. Ilyenkor x-szel szorozzuk ezt a tagot mindaddig, amíg megszűnik a rezonancia.

7.5. Pl. $\boxed{y'' - 3y' + 2y = (\mathrm{e}^{3x}) + (x^2 + x)}$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0 \qquad y_H = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{x}$$

$$\begin{array}{r|l} 2\cdot & y_{ip} := (A\mathrm{e}^{3x}) + (Bx^2 + Cx + D) \\ -3\cdot & y_{ip}' = 3A\mathrm{e}^{3x} + 2Bx + C \\ 1\cdot & y_{ip}'' = 9A\mathrm{e}^{3x} + 2B \end{array}$$

$$(9A - 9A + 2A)\mathrm{e}^{3x} + x^2(2B) + x(2C - 6B) + (2D - 3C + 2B) = \mathrm{e}^{3x} + x^2 + x$$

$$2A = 1 \qquad A = \frac{1}{2}$$

$$2B = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{B = \frac{1}{2}}$$

$$2C - 6B = 1 \quad \Longrightarrow \quad 2C = 4 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{C = 2}$$

$$2D - 3C + 2B = 0 \qquad 2D = 6 - 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{D = \frac{5}{2}}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} + \frac{1}{2}e^{3x}}}$$

7.6. Pl. $\boxed{y'' - 3y' + 2y = (x) + (e^x)}$

$$y_H = C_1 e^{2x} + C_2 e^x \qquad \text{(Lásd fent.)}$$

$$\begin{array}{r|lll} 2\cdot & y_{ip} := (Ax + B) + (Ce^x) & & \\ -3\cdot & y'_{ip} = & A & + Ce^x \\ 1\cdot & y''_{ip} = & & Ce^x \end{array}$$

$$x(2A) + (2B - 3A) + (\underbrace{2C - 3C + C}_{=0})e^x = x + e^x \qquad (\,0 \neq 1 \;\; \text{külső rezonancia})$$

Helyesen:

$$\begin{array}{r|llll} 2\cdot & y_{ip} := & (\,Ax + B) + (Cxe^x) & & \\ -3\cdot & y'_{ip} = & +A & +Cxe^x & +Ce^x \\ 1\cdot & y''_{ip} = & & +Cxe^x & +Ce^x + Ce^x \end{array}$$

$$x(2A) + (2B - 3A) + xe^x(\underbrace{2C - 3C + C}_{=0}) + e^x(-3C + 2C) = x + e^x$$

$$2A = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{A = \frac{1}{2}}$$

$$2B - 3A = 0 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{B = \frac{3}{2}A = \frac{3}{4}}$$

$$-C = 1 \qquad \underset{\sim\sim\sim}{C = -1}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 e^{2x} + C_2 e^x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} - xe^x}}$$

7.7. Pl. $\boxed{y'' - y = (x^2 - x + 1) + (e^x)}$

$$\lambda^2 - 1 = 0 \qquad y_H = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$\begin{array}{r|l} -1\cdot & y_{ip} := (Ax^2 + Bx + C) + (Dx\mathrm{e}^x) \\ 0\cdot & y'_{ip} = \quad +2Ax + B + \quad Dx\mathrm{e}^x \quad + D\mathrm{e}^x \\ 1\cdot & y''_{ip} = \quad\quad +2A \quad + Dx\mathrm{e}^x \; + D\mathrm{e}^x + D\mathrm{e}^x \end{array}$$

$$-Ax^2 - Bx + (2A - C) + x\mathrm{e}^x(-D + D) + \mathrm{e}^x \cdot 2D = x^2 - x + 1 + \mathrm{e}^x$$

$$A = -1 \qquad B = 1 \qquad C = 2A - 1 = -3 \qquad D = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-x} - x^2 + x - 3 + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x}}$$

7.8. Pl. $\boxed{y'' - 2y' + y = 6\mathrm{e}^x}$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \qquad y_H = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x \qquad \text{(belső rezonancia)}$$

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & y_{ip} := Ax^2\mathrm{e}^x \qquad \text{(külső rezonancia)} \\ -2\cdot & y'_{ip} = 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x \\ 1\cdot & y''_{ip} = 2A\mathrm{e}^x + 2Ax\mathrm{e}^x + 2Ax\mathrm{e}^x + Ax^2\mathrm{e}^x \end{array}$$

$$x^2\mathrm{e}^x(\underbrace{A - 2A + A}_{=0}) + x\mathrm{e}^x(\underbrace{-4A + 4A}_{=0}) + 2A\mathrm{e}^x = 6\mathrm{e}^x \qquad A = 3$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1\mathrm{e}^x + C_2x\mathrm{e}^x + 3x^2\mathrm{e}^x}}$$

7.9. Pl. $\boxed{y'' + 8y' + 25y = \mathrm{e}^{-4x}}$

$$\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 100}}{2} = \frac{-8 \pm j6}{2} = -4 \pm j3$$

Mivel $\mathrm{e}^{(-4+j3)x} = \mathrm{e}^{-4x}(\cos 3x + j\sin 3x)$, a homogén egyenlet általános megoldása:

$$y_H = C_1\,\mathrm{e}^{-4x}\cos 3x + C_2\,\mathrm{e}^{-4x}\sin 3x$$

$$\begin{array}{r|l} 25\cdot & y_{ip} := A\mathrm{e}^{-4x} \qquad \text{(nincs külső rezonancia!)} \\ 8\cdot & y'_{ip} = -4A\mathrm{e}^{-4x} \\ 1\cdot & y''_{ip} = 16A\mathrm{e}^{-4x} \end{array}$$

$$(25A - 32A + 16A)\mathrm{e}^{-4x} = \mathrm{e}^{-4x} \qquad 9A = 1 \qquad A = \frac{1}{9}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 \mathrm{e}^{-4x} \cos 3x + C_2 \mathrm{e}^{-4x} \sin 3x + \frac{1}{9} \mathrm{e}^{-4x}}}$$

7.10. Pl. $\boxed{y'' + 5y' + 6y = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3}$

$$\lambda^2 + 5\lambda + 6 = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$y_H = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x} \qquad (y_{ip} = A\mathrm{e}^{-2x} \text{ nem jó, mert külső rezonancia van.})$$

$$6 \cdot \Big| \quad y_{ip} := x \cdot A\mathrm{e}^{-2x} = \underline{Ax\mathrm{e}^{-2x}}$$

$$5 \cdot \Big| \quad y'_{ip} = A\mathrm{e}^{-2x} - \underline{2Ax\mathrm{e}^{-2x}}$$

$$1 \cdot \Big| \quad y''_{ip} = -2A\mathrm{e}^{-2x} - 2A\mathrm{e}^{-2x} + \underline{4Ax\mathrm{e}^{-2x}}$$

$$x\mathrm{e}^{-2x}(\underbrace{6A - 10A + 4A}_{=0}) + \mathrm{e}^{-2x}(5A - 4A) = 2\mathrm{e}^{-2x} \qquad \underline{A = 2}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}}$$

$$y(0) = 0 \qquad 0 = C_1 + C_2 \qquad C_1 = -C_2$$

$$y'(0) = 3 \qquad y' = -2C_1\mathrm{e}^{-2x} - 3C_2\mathrm{e}^{-3x} + 2\mathrm{e}^{-2x} - 4x\mathrm{e}^{-2x}$$

$$3 = -2C_1 - 3C_2 + 2 \qquad C_2 = -1 \qquad C_1 = 1$$

$$\underline{\underline{y = \mathrm{e}^{-2x} - \mathrm{e}^{-3x} + 2x\mathrm{e}^{-2x}}}$$

7.11. Pl. $\boxed{y'' + y = (-4\cos x) + (x) \qquad y(0) = 2, \quad y'(0) = 2}$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm j \qquad y_H = C_1 \cos x + C_2 \sin x$$

$$1 \cdot \Big| \quad y_{ip} := (\underline{Ax\cos x} + \underline{\underline{Bx\sin x}}) + (Cx + D) \qquad \text{(külső rezonancia)}$$

$$\Big| \quad (y'_{ip} = A\cos x - Ax\sin x + B\sin x + Bx\cos x + C)$$

$$1 \cdot \Big| \quad y''_{ip} = -A\sin x - A\sin x - \underline{Ax\cos x} + B\cos x + B\cos x - \underline{\underline{Bx\sin x}}$$

$$x\cos x(A - A) + x\sin x(B - B) + \cos x \cdot (2B) + \sin x \cdot (-2A) + Cx + D = -4\cos x + x$$

$$2B = -4 \qquad \underline{B = -2} \qquad -2A = 0 \qquad \underline{A = 0} \qquad \underline{C = 1} \qquad \underline{D = 0}$$

$$\underline{\underline{y_{iá} = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x\sin x + x}}$$

$$y(0) = 2 \qquad 2 = C_1$$

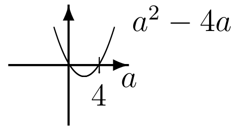
$$y'(0) = 2 \qquad y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x - 2\sin x - 2x\cos x + 1$$

$$2 = C_2 + 1 \qquad C_2 = 1$$

$$\underline{\underline{y = 2\cos x + \sin x + x(1 - 2\sin x)}}$$

7.12. Pl. $\boxed{\text{Tetszőleges } a \in \mathbb{R}\text{-re oldja meg az alábbi differenciálegyenletet: } y'' + ay' + ay = 0}$

$$\lambda^2 + a\lambda + a = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4a}}{2}$$



a.) $0 < a < 4 \quad (a^2 - 4a < 0) \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}$

$y = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\, x\right) + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \sin\left(\frac{1}{2}\sqrt{4a - a^2}\, x\right)$

b.) $a = 0$ ill. $a = 4 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2}$ belső rezonancia

$y = C_1 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x} \cdot x$

c.) $a < 0$ vagy $a > 4 \quad (a^2 - 4a > 0) \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a}$

$y = C_1 \mathrm{e}^{(-\frac{a}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a})x} + C_2 \mathrm{e}^{(-\frac{a}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 4a})x}$

7.2. Feladat.

1.) $y''' + 3y'' + 2y' = 0$

2.) $y''' - 4y'' + 5y' = 0$

3.) $y'' - 6y' + 9y = 0 \qquad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

4.) $y'' + 4y = x$

5.) $y'' + y = 2\sin x \cos x \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

6.) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$

7.) $y^{(4)} + 4y'' = \cos x$ Adja meg az összes periodikus megoldást!

8.) $y'' + 4y = 2\sin x \cos x$

9.) $y'' + \alpha y' + 3y = 0$
Milyen α érték mellett lesz a differenciálegyenlet minden megoldásfüggvénye olyan, hogy $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = 0$?

10.) $y'' - 4y = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

11.) $y'' + y' = \mathrm{e}^{\alpha x}, \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

12.) $y' - 5y = 2\mathrm{e}^{5x}$

13.) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$

14.) $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' = x + 1$

15.) $y^{(4)} - 2y'' + y = 2e^{x}$

8. Elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x + 3y + 1 \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y + e^t \end{aligned} \right\} \qquad \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix}$$

Ez egy kétváltozós elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszer, ahol t a független változó, x, y pedig az ismeretlen függvények. A fenti mátrixos alakot röviden jelölhetjük:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} + \underline{f}(t)}\ ,$$

ahol

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

Konstans együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}\ +\ \underline{f}(t)} \qquad \left(\ \underline{f}(t) \not\equiv \underline{0}\ \right) \quad ,$$

ahol $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es, adott, konstans elemű mátrix.
A fenti differenciálegyenlet-rendszerhez tartozik egy homogén differenciálegyenlet-rendszer.

Homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer:

$$\boxed{\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}}$$

Az egyváltozós lineáris differenciálegyenlethez hasonlóan itt is igaz, hogy az inhomogén általános megoldása megegyezik a homogén általános megoldása plusz az inhomogén egy partikuláris megoldása:

Ⓣ $$\underline{x}_{Iált} = \underline{x}_{Hált} + \underline{x}_{Ip}$$

Ⓜ Az inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy partikuláris megoldása sok esetben próbafüggvény-rendszerrel történhet. mi az inhomogén esettel nem foglalkozunk.

Ⓣ A homogén megoldástere lineáris tér, dimenziója n, ahol $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es mátrix.

Ⓣ Ha λ sajátértéke $\underline{\underline{A}}$-nak és $\underline{s}$ egy a λ-hoz tartozó sajátvektor ($\underline{\underline{A}}\ \underline{s} = \lambda\ \underline{s}$), akkor

$$\underline{x} \ = \ e^{\lambda t}\underline{s} \quad \text{megoldása az} \quad \dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x} \quad (H)$$

differenciálegyenlet-rendszernek.

Ⓑ

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t}s_1 \\ e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix}^{\bullet} = \begin{bmatrix} \lambda e^{\lambda t}s_1 \\ \lambda e^{\lambda t}s_2 \\ \vdots \\ \lambda e^{\lambda t}s_n \end{bmatrix} = \lambda e^{\lambda t}\underline{s} = e^{\lambda t}\boxed{\lambda\underline{s}} = e^{\lambda t}\boxed{\underline{\underline{A}}\,\underline{s}} = \underline{\underline{A}}e^{\lambda t}\underline{s} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$$

Ⓣ

Ha az $\underline{\underline{A}}$ $n \times n$-es konstans elemű mátrixnak n darab különböző sajátértéke $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \dots\ ,$ λ_n és az ezekhez tartozó egy-egy megfelelő sajátvektor $\underline{s}_1,\ \underline{s}_2,\ \dots\ ,\ \underline{s}_n$, akkor az

$$\dot{\underline{\mathrm{x}}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{\mathrm{x}} \qquad (\mathrm{H})$$

általános megoldása felírható

$$\underline{x} = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{s}_2 + c_3 e^{\lambda_3 t}\underline{s}_3 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t}\underline{s}_n$$

alakban, ahol $c_1,\ c_2,\ \dots\ ,\ c_n$ tetszőleges konstansok (valós számtest felett vagy komplex számtest felett is igaz az állítás.)

8.1. Pl.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (H)$$

Karakterisztikus polinom: $\quad det(\underline{\underline{A}} - \lambda\underline{\underline{E}}) = 0$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{matrix} \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0 \\ \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 6 \end{matrix}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}})\underline{s} = 0 \qquad \overset{\lambda=2}{\Longrightarrow} \qquad \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ez egy közönséges lineáris egyenletrendszer, ami Gauss módszerrel megoldható.
$s_{12} = 0$, s_{11} és s_{13} közül az egyik tetszőleges, így a $\lambda_1 = 2$-höz tartozó egyik sajátvektor:

$$\underline{s_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan kapható $\lambda_2 = 3 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

és $\qquad \lambda_3 = 6 \quad \Longrightarrow \quad \underline{s_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Így a homogén egyenlet általános megoldása:

$$\underline{x}_{H\acute{a}lt} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_3 e^{6t} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \\ y &= c_2 e^{3t} - 2c_3 e^{6t} \\ z &= -c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} + c_3 e^{6t} \end{aligned}$$

ahol c_1, c_2, c_3 tetszőleges valós konstansok

8.2. Pl.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x + 9y \\ \dot{y} &= x + 2y \end{aligned} \qquad\qquad \dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 9 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2 - 9 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{gathered} (2-\lambda)^2 = 9 \\ 2-\lambda = \pm 3 \\ \lambda_1 = 5 \quad \lambda_2 = -1 \end{gathered}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{11} = 3 \quad s_{12} = 1 \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{21} = 3 \quad s_{22} = -1 \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_{Hált} = c_1\, e^{5t} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2\, e^{-t} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{rcrcr} x & = & 3c_1e^{5t} & + & 3c_2e^{-t} \\ y & = & c_1e^{5t} & - & c_2e^{-t} \end{array} \quad \text{, ahol } c_1,\, c_2 \in \mathbf{R}$$

8.3. Pl.

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 2 & -16 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\left|\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}\right| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -16 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Karakterisztikus polinom: $(2-\lambda)^2 + 16 = 0 \quad \Longrightarrow$

$$\begin{gathered} (2-\lambda)^2 = -16 \\ 2-\lambda = \pm 4i \\ \lambda_1 = 2+4i,\ \lambda_2 = 2-4i \end{gathered}$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} -4i & -16 \\ 1 & -4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{11} = 4i \quad s_{12} = 1 \quad \underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Hasonlóan megkaphatjuk, hogy

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_2 \underline{\underline{E}})\underline{s}_2 = \underline{0} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} 4i & -16 \\ 1 & 4i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad s_{21} = -4i \quad s_{22} = 1 \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} -4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Mivel a két sajátérték egymás konjugáltja, ezért a két sajátvektor is egymás konjugáltja. Így $\underline{s}_2$ meghatározására nem lett volna szükség.

λ_1 és $\underline{s}_1$ segítségével felírhatjuk a komplex megoldást:

$$\underline{x}_{komplex\ megoldás} = e^{(2+4i)t} \begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix} = e^{2t}\, (\cos 4t + i \sin 4t) \begin{bmatrix} 4i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Itt is igaz, hogy, ha $\underline{x}$ megoldása az $\underline{\dot{x}} = \underline{\underline{A}}\ \underline{x}$ valós együtthatós differenciálegyenlet-rendszernek, akkor $\mathrm{Re}\ \underline{x}$ és $\mathrm{Im}\ \underline{x}$ is megoldások és lineárisan függetlenek.

$$\mathrm{Re}\ \underline{x} = \begin{bmatrix} e^{2t}(-4)\sin 4t \\ \\ e^{2t}\cos 4t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix} \quad \text{valós megoldás, báziselem}$$

$$\mathrm{Im}\ \underline{x} = \begin{bmatrix} e^{2t}4\cos 4t \\ \\ e^{2t}\sin 4t \end{bmatrix} = e^{2t} \begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix} \text{valós megoldás, előbbitől független báziselem.}$$

A megoldástér dimenziója 2, ezért a valós általános megoldás a Re $\underline{x}$ és Im $\underline{x}$ lineár kombinációja.

$$\underline{x}_{Hált} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} -4\sin 4t \\ \\ \cos 4t \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} 4\cos 4t \\ \\ \sin 4t \end{bmatrix} \text{ valós alakú megoldás}$$

Megjegyezzük, hogy λ_2 és $\underline{s}_2$-ből ugyanehhez az általános megoldáshoz jutnánk.

Pl.

Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert:
$\dot{x}_1 = x_1$ $\dot{x}_2 = x_2 + x_3$ $\dot{x}_3 = 3x_3$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \underline{x} \quad (= \underline{\underline{A}}\,\underline{x})$$

$$\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{E}}) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$$

$\lambda_{1,2} = 1$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} c &= 0 \\ a &:= t \\ b &:= u \end{aligned}$$

$$\underline{s} = \begin{bmatrix} t \\ u \\ 0 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tehát van két lineárisan független sajátvektor: $\underline{s}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\lambda_3 = 3$

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} a &= 0 \\ -2b + c &= 0 \end{aligned}$$

Ebből például $\underline{s}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

A megoldás:

$$\underline{x}(t) = c_1\, \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2\, \mathrm{e}^{t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3\, \mathrm{e}^{3t} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

vagy más alakban:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1\mathrm{e}^t \\ c_2\mathrm{e}^t + c_3\mathrm{e}^{3t} \\ 2c_3\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

Például az $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ kezdetiérték probléma megoldása:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 + c_3 \\ 2c_3 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad c_1 = 1\,,\ c_2 = 2\,,\ c_3 = 1$$

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^t \\ 2\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{3t} \\ 2\mathrm{e}^{3t} \end{bmatrix}$$

9. Egzisztencia és unicitás tétel

$$\underbrace{\Big(y'(x) = f(x, y(x)); \quad y(x_0) = y_0\Big)}_{\text{differenciálegyenlet}} \equiv \underbrace{\left(y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\right)}_{\text{integrálegyenlet}} \quad (f \text{ folyt.})$$

(Ui.: $y'(x) = \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,\mathrm{d}x\right)' = f(x, y(x)), \quad y(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \ldots = y_0$)

Az utóbbi integrálegyenletből jön az ötlet, hogy a matematikában több területen is eredményesen használt fokozatos közelítések módszerével $\left(y_n(x) = y_0 + \int_{x}^{x_0} f(x, y_{n-1}(x))\,\mathrm{d}x\right)$ próbálkozzunk.

9.1. Picard féle szukcesszív approximáció

$Q = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ (zárt!)

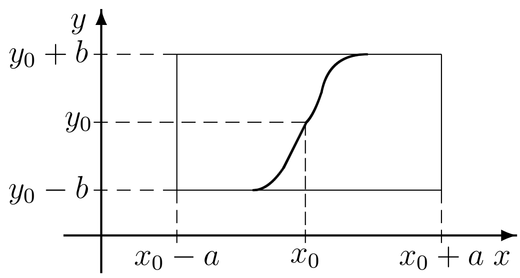
$f : D \to \mathbb{R};\ D \subset \mathbb{R}^2,\ Q \subset D$

Ha $f, f'_y \in C^0_Q$, akkor a

$\varphi_0(x) = y_0$

$\vdots$

$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \varphi_{n-1}(t))\,\mathrm{d}t$



rekurzíve meghatározott függvénysorozathoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $\varphi_n \rightrightarrows \varphi \quad K_{x_0,\delta}$-n és φ megoldása az $y' = f(x,y);\ y(x_0) = y_0$ kezdetiérték problémának. $(\varphi'(x) \equiv f(x, \varphi(x)))$
(Ha φ^* is megoldás lenne $K_{x_0,\delta}$-ban, akkor $\varphi^*(x) \equiv \varphi(x) \quad \forall\, x \in K_{x_0,\delta}$.)

Következmény:

9.2. Egzisztencia és unicitás tétel

Ha f, f'_y folytonos a Q (zárt) téglalapon $(f, f'_y \in C^0_Q)$, akkor $\exists\, K_{x_0,\delta}$, amelyben az

$$y' = f(x,y); \quad y(x_0) = y_0$$

kezdetiérték problémának egy és csakis egy megoldása van. $\quad(\neg$B)
(A tétel bizonyítása a szukcesszív approximáció módszerét használja fel. Így nem csupán a megoldás létezésének kérdését intézi el, hanem lehetőséget ad ezen megoldás közelítő kiszámítására is (konstruktív bizonyítás).)

Pl.

$$y' = x^2 + y^2 \quad y(0) = 0 \implies y = 0 + \int_0^x (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^x \big(t^2 + \varphi^2_{n-1}(t)\big)\ \mathrm{d}t$$

$$\varphi_0(x) \equiv 0$$

$$\varphi_1(x) = \int_0^x (t^2 + 0^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^x = \frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right]_0^x = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7}$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x (t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{9\cdot 7}\right)^2)\,\mathrm{d}t = \dots = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{9\cdot 7} + \frac{2\cdot x^{11}}{3\cdot 9\cdot 7\cdot 11} + \frac{x^{15}}{9\cdot 7\cdot 15}$$

$(\varphi'_3 \not\equiv x^2 + \varphi_3^2$ Visszahelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy bár φ_3 nem elégíti ki a differenciálegyenletet, de pl. $K_{0,\frac{1}{10}}$-ben a bal oldal és a jobb oldal eltérése már kicsi.)
(Lásd Derive segédlet.)