Lineáris algebra I.

Kovács Zoltán

Előadásvázlat
(2003)

Tartalomjegyzék

1. fejezet

A szabadvektorok vektortere

1. Szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása

Középiskolai tanulmányainkban *vektor* alatt a tér vagy sík *szabadvektor*át értettük, azaz egy vektor irányított szakasz volt, de nem téve különbséget az egymásba eltolással átvihető irányított szakaszok között. (Azaz, ha nagyságuk, irányításuk és irányuk megegyezik.) A lineáris algebra tárgyban (mint ahogyan általában a felsőbb matematikában) a *vektor* egy olyan absztrakt fogalom, mely sokkal általánosabb, mint a szabadvektor. (Erre a tárgyalásunk második fejezetében térünk vissza.)

$$\boxed{\text{vektor} \neq \text{szabadvektor} \neq \text{irányított szakasz}}$$

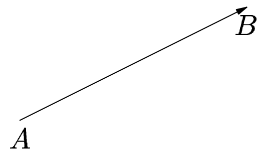
A szabadvektorok elmélete tehát a geometriához kapcsolódik, s a szabatos felépítést is a *Geometria* c. tárgyunkban adjuk meg. A lineáris algebra tárgyban nagymértékben támaszkodunk a középiskolás geometriai ismeretekre, mindenekelőtt az eltolás tulajdonságaira.

Először néhány geometriai jelölést vezetünk be. A tér pontjainak halmazát $\mathcal{E}$ jelöli.
AB vagy $d(A, B)$— Az A és B pontok távolsága.
$\overline{AB}$ — A és B végpontokkal rendelkező szakasz.
$\overleftrightarrow{AB}$ — A-t és B-t tartalmazó egyenes.
$\overrightarrow{AB}$ — A kezdőpontú és B-t tartalmazó félegyenes.

Megjegyezzük még, hogy ebben a tárgyban az egybeeső egyeneseket is párhuzamosaknak nevezzük.

1.1. Definíció. *Irányított szakasz*on egy $(P, Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$ rendezett pontpárt értünk. (P, Q)-nak P a *kezdőpont*ja, Q a *végpont*ja. Ha az (A, B) irányított szakasz a (P, Q) irányított szakaszba eltolással átvihető, akkor azt mondjuk, hogy (A, B) *ekvivalens* (P, Q)-val és ezt úgy jelöljük, hogy $(A, B) \sim (P, Q)$. Az (A, B) *irányított szakasz* szemléltetése: 1.1. ábra.

1.2. Tétel. *Az irányított szakaszok ekvivalenciája ekvivalenciareláció, azaz: 1.* $(A, B) \sim (A, B)$,
2. $(A, B) \sim (C, D) \implies (C, D) \sim (A, B)$,
3. $(A, B) \sim (C, D) \wedge (C, D) \sim (E, F) \implies (A, B) \sim (E, F)$;

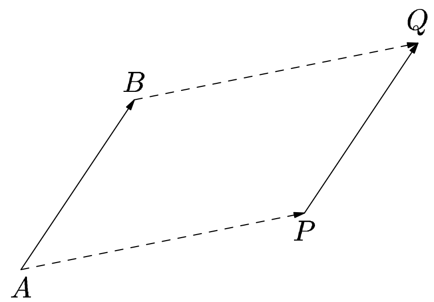


$(A,B) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E}$

1.1. ábra. Az irányított szakasz szemléltetése.

további teljesül, hogy
4. $(A,B) \sim (P,Q) \implies (A,P) \sim (B,Q)$.

Bizonyítás: Az első három tulajdonság a definíció nyilvánvaló következménye. A 4. állítás onnan következik, hogy ha $(A,B) \sim (P,Q)$, akkor $APQB$ paralelogramma (esetleg elfajuló) melynek szemközti oldalpárjai párhuzamosak és egybevágók. □



1.2. ábra. $(A,B) \sim (P,Q) \implies (A,P) \sim (B,Q)$.

1.3. Definíció. Definiáljuk a tér irányított szakaszain az alábbi, $\sim$-el jelölt relációt. $(A,B) \sim (P,Q)$, ha (A,B) (P,Q)-ba eltolással átvihető. Ez a reláció ekvivalenciareláció, mely ekvivalenciaosztályait *szabadvektorok*nak nevezzük. Azaz, ha A és B pontok, akkor az (A,B) *reprezentánsú* szabadvektor:

$$\overrightarrow{AB} = \{\, (P,Q) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \mid (A,B) \sim (P,Q) \,\}\,.$$

Az összes szabadvektorok halmazát $\mathbb{V}$-vel jelöljük.

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor $\|\overrightarrow{AB}\|$ *hossz*án AB-t értjük. Ez a definíció független a reprezentáns választásától.

Az összes olyan irányított szakaszok, melyek kezdő- és végpontja megegyezik, egy szabadvektort reprezentálnak. Ezt a szabadvektort *nullvektor*nak nevezzük. Jele: $\mathbf{0}$.

*

$\mathbb{V}$ elemeinek jelölésekor olykor nem utalunk reprezentánsra, ilyenkor $\mathbb{V}$ elemeit **kövér** kisbetűkkel, írásban pedig aláhúzott kisbetűkkel is jelöljük: $\mathbf{a} \in \mathbb{V}$, $\underline{a} \in \mathbb{V}$.

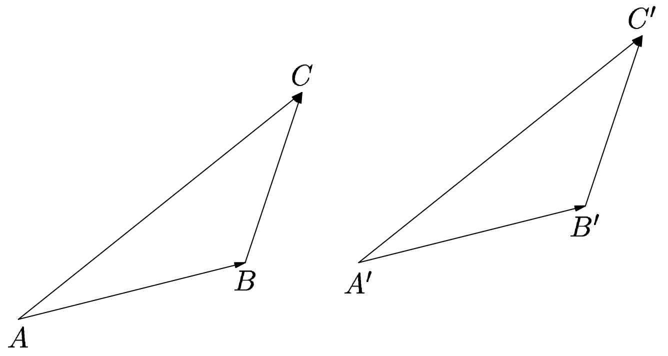
1.4. Definíció. Az (A, B)-vel reprezentált $\mathbf{a}$ illetve a (B, C)-vel reprezentált $\mathbf{b}$ szabadvektor $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ összegén az (A, C)-vel reprezentált szabadvektort értjük. Azaz

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

A szabadvektorok összegét definiáló előbbi összefüggést *háromszögszabály*nak is nevezik.

1.5. Tétel. *A szabadvektorok összege független a reprezentánsok választásától.*

Bizonyítás: Ld. 1.3. ábra. Azt kell tehát bizonyítani, hogy ha $(A, B) \sim (A', B')$ és $(B, C) \sim (B', C')$, akkor $(A, C) \sim (A', C')$. A $\sim$ reláció 3. és 4. tulajdonságát használjuk ki (megelőző tétel): $(A, B) \sim (A', B') \implies (A, A') \sim (B, B')$; $(B, C) \sim (B', C') \implies (B, B') \sim (C, C')$. $(A, A') \sim (B, B') \wedge (B, B') \sim (C, C') \implies (A, A') \sim (C, C') \implies (A, C) \sim (C, C')$. □



1.3. ábra. A szabadvektorok összege független a reprezentánsok választásától.

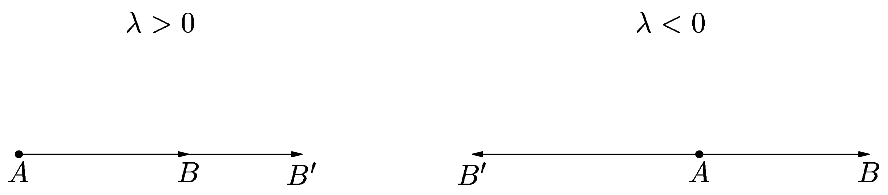
1.6. Tétel. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| \leq \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$. $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| + \|\mathbf{b}\|$, *akkor és csakis akkor teljesül, ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *olyan szabadvektorok, hogy közös kezdőpontból induló reprezentánsaik végpontjai a közös kezdőpontból induló ugyanazon félegyenesre illeszkednek. Ha* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *közös kezdőpontból induló reprezentánsaik végpontjai a közös kezdőpontból induló ellentétes félegyenesekre illeszkednek, akkor* $\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\| = \big|\|\mathbf{a}\| - \|\mathbf{b}\|\big|$.

Bizonyítás: Az állítás a háromszög egyenlőtlenség és a az összeadás definíciójának közvetlen következménye. □

1.7. Definíció. Az (A, B) reprezentánsú szabadvektor λ valós számmal (skalárral) való szorzatán nullvektort értünk, ha $\lambda = 0$ vagy $A = B$, míg ha $\lambda \neq 0$, akkor azt az (A, B') reprezentánsú szabadvektort, amelyre $AB' = |\lambda| \cdot AB$ és $B' \in \overrightarrow{AB}$, ha $\lambda > 0$ illetve $B' \in \overleftrightarrow{AB} \setminus \overrightarrow{AB}$, ha $\lambda < 0$.

Megjegyzés. Egyszerűen látható, hogy a definíció független a reprezentáns választásától

Egy (P, Q) reprezentánsú $\mathbf{v}$ szabadvektor és $\lambda \in \mathbb{R}$ skalár szorzatát a következőképpen is megkaphatjuk. Legyen $\delta_\lambda : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$, $X \mapsto X'$ tetszőleges centrumú, λ előjeles arányú középpontos hasonlóság. Ekkor $\lambda\mathbf{v}$-t (P', Q') reprezentálja. (1.4. ábra.)



1.4. ábra. Szabadvektor szorzása skalárral.

A definíció közvetlen következménye az alábbi állítás:

1.8. Tétel. $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\|$. *Ha egy nemzéró szabadvektort osztunk a hosszával (azaz szorozzuk a hossza reciprokával), akkor az így kapott szabadvektor hossza 1.* (Az 1 hosszúságú szabadvektorokat egységvektoroknak nevezzük, jelölésük gyakran: $\mathbf{v}^0$.)

1.9. Tétel. *A szabadvektorok összeadása és skalárral való szorzása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:* $(\mathbb{V}, +)$ *kommutatív csoport (Abel csoport), továbbá*

(1) $$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b},$$

(2) $$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a},$$

(3) $$(\lambda\mu)\mathbf{a} = \lambda(\mu\mathbf{a}),$$

(4) $$1\mathbf{a} = \mathbf{a}.$$

Bizonyítás: Az összeadás tulajdonságait közvetlen geometriai módszerekkel is beláthatjuk (megtalálható pl. a Hajós könyvben: 30.2, 30.3.)

A skalárral való szorzás tulajdonságai:

$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}$: Egy tetszőlegesen rögzített centrumú λ előjeles arányú középpontos hasonlóságnál az X pont képét jelölje X'. Tekintsük a szabadvektorok egy-egy tetszőleges reprezentánsát: $(A, B) \in \mathbf{a}$, $(B, C) \in \mathbf{b}$. Ekkor

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \lambda(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) = \lambda\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \lambda\overrightarrow{AB} + \lambda\overrightarrow{BC} = \lambda\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b}.$$

$(\lambda+\mu)\mathbf{a} = \lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$: Nullvektorra az állítás triviális. Legyen a továbbiakban $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$! Ha λ és μ azonos előjelűek, akkor $(\lambda+\mu)\mathbf{a}$, továbbá $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ közös kezdőpontból induló reprezentánsainak végpontjai ugyanarra a félegyenesre illeszkednek. Továbbá

$$\|(\lambda+\mu)\mathbf{a}\| = |\lambda+\mu| \cdot \|\mathbf{a}\| = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \|\mathbf{a}\|.$$

Másrészt 1.6. alapján:

$$\|\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{a}\| = \|\lambda\mathbf{a}\| + \|\mu\mathbf{a}\| = |\lambda| \cdot \|\mathbf{a}\| + |\mu| \cdot \|\mathbf{a}\| = (|\lambda| + |\mu|) \cdot \|\mathbf{a}\|.$$

Ez azt jelenti, hogy $(\lambda+\mu)\mathbf{a}$ továbbá $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ közös kezdőpontból induló reprezentánsainak végpontjai ugyanazon a félegyenesen, a kezdőponttól ugyanakkora távolságra vannak.

Legyen λ és μ előjele különböző. Ismét 1.6.-ra hivatkozva:

$$\|\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}\| =$$
$$\big|\|\lambda\mathbf{a}\|-\|\mu\mathbf{a}\|\big| = \big||\lambda|\cdot\|\mathbf{a}\|-|\mu|\cdot\|\mathbf{a}\|\big| = \big||\lambda|-|\mu|\big|\cdot\|\mathbf{a}\| = |\lambda+\mu|\cdot\|\mathbf{a}\| = \|(\lambda+\mu)\mathbf{a}\|,$$

tehát $(\lambda+\mu)\mathbf{a}$ hossza és $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ hossza megegyezik. Legyen $\lambda\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, és reprezentáljuk az $(\lambda+\mu)\mathbf{a}$, $\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{a}$ szabadvektorokat az $\overleftrightarrow{OA}$ egyenesen! Mindkét szabadvektor reprezentánsának végpontja attól függően illeszkedik $\overrightarrow{OA}$-ra vagy $\overrightarrow{OA}$ ellentétes félegyenesére, hogy $|\lambda|\geq|\mu|$ vagy $|\lambda|\leq|\mu|$, amivel az állítást bizonyítottuk.

$(\lambda\mu)\mathbf{a}=\lambda(\mu\mathbf{a})$: Legyen $\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$! $\lambda(\mu\mathbf{a})$ végpontjának meghatározásához A-ra előbb egy O centrumú μ előjeles arányú középpontos hasonlóságot, majd egy O centrumú λ előjeles arányú középpontos hasonlóságot kell alkalmaznunk. Ez ugyanazt jelenti, mintha A-ra egy O centrumú, $\lambda\cdot\mu$ arányú középpontos hasonlóságot hajtanank végre, mert közös centrumú λ ill. μ előjeles arányú középpontos hasonlóságok szorzata ugyanolyan centrumú, $\lambda\cdot\mu$ előjeles arányú középpontos hasonlóság.

$1\mathbf{a}=\mathbf{a}$ triviális. □

A továbbiakban $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$-t (ahol $-\mathbf{b}=(-1)\cdot\mathbf{b}$ a $\mathbf{b}$ additív inverze) $\mathbf{a}-\mathbf{b}$-nek írjuk.

2. Vektorrendszerek függetlensége, bázis

2.1. Definíció. Szabadvektorok egy $(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ vektorrendszerének az $(\alpha_1,\ldots,\alpha_k)$ skalárokkal való *lineáris kombinációján* az

$$\alpha_1\mathbf{a}_1+\ldots+\alpha_k\mathbf{a}_k$$

szabadvektort értjük.

Az $(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ vektorrendszert *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha a tér bármely vektora legfeljebb egyféleképpen állítható elő lineáris kombinációjukként. Szabadvektorok egy véges vektorrendszerét *lineárisan függő*nek nevezünk, ha nem lineárisan független.

2.2. Tétel. *Szabadvektorok egy véges rendszere akkor és csakis akkor lineárisan független, ha a zérusvektor csak triviálisan, azaz csak csupa nulla együtthatóval kombinálható belőlük. Szabadvektorok egy véges rendszere akkor és csakis akkor lineárisan függő, ha a zérusvektor triviálistól különböző módon is kombinálható belőlük.*

Bizonyítás: Ha a vektorrendszer lineárisan független, akkor bármely szabadvektor, s így a zérusvektor is legfeljebb egyféleképpen kombinálható belőlük. Mivel a triviális kombináció mindig zérusvektort ad, így ez az egyetlen olyan lineáris kombináció, melynek eredménye a zérusvektor.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az $(\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k)$ vektorrendszerből a zérusvektor csak triviálisan kombinálható. Ha a tér valamely szabadvektorára

$$\mathbf{v} \;=\; \alpha_1\mathbf{a}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{a}_k$$

$$\mathbf{v} = \beta_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{a}_k$$

egyaránt teljesül, akkor a két relációt kivonva:

$$\mathbf{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{a}_1 + \cdots + (\alpha_k - \beta_k)\mathbf{a}_k.$$

Innen a feltételünk miatt $\alpha_i = \beta_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ következik.

A másik állítás az előzőnek tisztán logikai következménye (kontrapozíció). □

Szabadvektorok lineáris függőségének szép geometriai jelentése van:

2.3. Következmény. *Szabadvektorok egy* $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ *vektorrendszere akkor és csakis akkor lineárisan függő, ha van olyan valódi (azaz nem csak egyetlen pontból álló), de esetleg degenerált oldalt is tartalmazó zárt töröttvonal, amelynek szakaszai rendre az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k$ *reprezentánsait tartalmazó egyeneseken vannak.*

2.4. Tétel. *Szabadvektorok egy véges rendszere akkor és csakis akkor lineárisan függő, ha valamelyikük lineárisan kombinálható a többiből.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy az $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ vektorrendszer valamelyik vektora lineárisan kombinálható a többiből! (Az egyszerűség kedvéért legyen ez $\mathbf{a}_k$!)

$$\mathbf{a}_k = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}.$$

Ezt rendezve:

$$\mathbf{0} = -\mathbf{a}_k + \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_{k-1}\mathbf{a}_{k-1}.$$

A jobb oldalon a zérusvektor olyan lineáris kombinációja van, melyben szerepel -1 mint együttható, azaz ez a lineáris kombináció triviálistól különböző.

Másodjára tegyük fel, hogy az előbbi vektorrendszer lineárisan függő, azaz a zérusvektor triviálistól különbözően is kombinálható belőlük:

$$\mathbf{0} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{a}_k,$$

miközben az együtthatók között van zérustól különböző. Legyen ez a zérustól különböző együttható pl. α_k. Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{a}_k$ kifejezhető a többi szabadvektor segítségével:

$$\mathbf{a}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\mathbf{a}_1 - \cdots - \frac{\alpha_{k-1}}{\alpha_k}\mathbf{a}_{k-1}.$$

□

2.5. Tétel. *(A lineáris függőség geometriai jelentése.) Egy szabadvektor önmagában akkor és csakis akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha nullvektor. Két szabadvektor akkor és csakis akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha egy egyenesen reprezentálhatók. Három szabadvektor akkor és csakis akkor alkot lineárisan függő rendszert, ha egy síkon reprezentálhatók. A szabadvektorok bármely legalább négytagú vektorrendszere lineárisan függő.*

Bizonyítás: A zéróvektort tetszőleges számmal szorozva zéróvektort kapunk, tehát az egyetlen zéróvektorból álló vektorrendszer lineárisan függő. Legyen $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$, de $\alpha \neq 0$. Ekkor $|\alpha| \cdot \|\mathbf{a}\| = 0$, ami csak úgy lehet, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

A továbbiakban tegyük fel, hogy a megadott vektorrendszerben nincs lineárisan függő részrendszer. (Ha van, akkor az állítások triviálisak.)

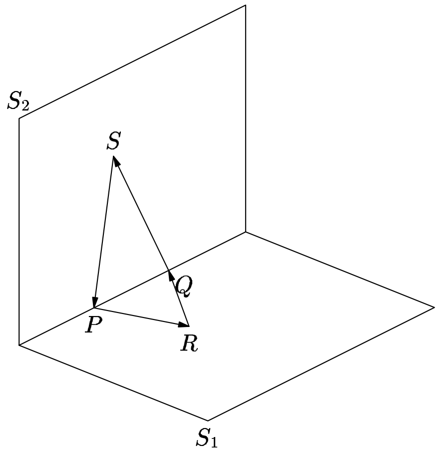
Ha két vektor közös egyenesen reprezentálható, akkor ezen egyenes $P \neq Q$ pontjaira PQP nyilván megfelelő töröttvonal.

Megfordítva, legyen a kéttagú vektorrendszer lineárisan függő. A kétoldalú nemelfajuló töröttvonal két csúcspontot tartalmaz. Az ezekre illeszkedő egyenesen mindkét szabadvektor reprezentálható.

Legyen három vektor közös síkban reprezentálható! Ebben a síkban jelöljük ki az egyik szabadvektor reprezentánsát: (P, Q). P-n keresztül húzzunk párhuzamost a második, míg Q-n keresztül a harmadik szabadvektorral. Mivel feltettük, hogy az utóbbi két vektor lineárisan független, ezért a két egyenes metszi egymást egy M (síkbeli) pontban. $PQMP$ a keresett töröttvonal.

A megfordítás onnan következik, hogy háromoldalú zárt töröttvonalnak három csúcsa van, melyekre illeszkedő síkban mindhárom vektor reprezentálható.

Legyen $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d})$ szabadvektorok négytagú vektorrendszere. S_1 legyen olyan sík, melyben



1.5. ábra. Nincs négy lineárisan független szabadvektor.

$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, míg S_2 olyan sík, melyben $(\mathbf{c}, \mathbf{d})$ reprezentálhatók (1.5. ábra). A két sík metszésvonalán jelöljük ki a $P \neq Q$ pontokat. P-keresztül húzzunk párhuzamost $\mathbf{a}$-val (a egyenes), Q-n keresztül $\mathbf{b}$-vel (b egyenes). $a \cap b = M \in S_1$. Q-n keresztül húzzunk párhuzamost $\mathbf{c}$-vel (c egyenes), P-n keresztül $\mathbf{d}$-vel (d egyenes.) $c \cap d = N \in S_2$. $PMQNP$ a keresett töröttvonal. $\square$

2.6. Tétel. *Bármely három lineárisan független szabadvektorból álló vektorrendszerből a tér tetszőleges vektora egyértelműen kombinálható.*

Ha adott két lineárisan független szabadvektor, akkor ezekből mindazon vektorok egyértelműen lineárisan kombinálhatók, melyek velük egy síkban reprezentálhatók.

Bizonyítás: A lineáris függetlenség miatt a tér bármely szabadvektora legfeljebb egyféleképpen kombinálható 3 lineárisan független szabadvektorból. Azt kell belátnunk, hogy legalább egyféleképpen is.

Legyen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ a tér 3 lineárisan független szabadvektora, $\mathbf{v}$ pedig a tér tetszőleges vektora. Ekkor $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{v})$ lineárisan függő rendszer az előző tétel miatt, tehát belőlük a zérusvektor triviálistól különbözően is kombinálható:

$$\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k} + \beta\mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

A β együttható biztosan zérótól különböző, ellenkező esetben ugyanis az $(\mathbf{i}\mathbf{,j}, \mathbf{k})$ vektorrendszerből a zérusvektor triviálistól különbözően is kombinálható lenne. Ha $\beta \neq 0$, akkor $\mathbf{v}$ kifejezhető a $(\mathbf{i}\mathbf{,j}, \mathbf{k})$ lineáris kombinációjaként:

$$\mathbf{v} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\mathbf{i} - \frac{\alpha_2}{\beta}\mathbf{j} - \frac{\alpha_3}{\beta}\mathbf{k}.$$

A második állítást analóg módon bizonyítjuk. □

2.7. Definíció. A térben szabadvektorok háromtagú lineárisan független rendszerét *bázis*nak nevezünk. Legyen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ egy bázis. Egy $\mathbf{v}$ szabadvektornak erre a bázisra vonatkozó *koordinátáin* azt az egyértelmű (v_1, v_2, v_3) számhármast értjük, melyre

$$v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k} = \mathbf{v}.$$

2.8. Tétel. *(Műveletek és koordináták kapcsolata.) Legyen $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ bázis a szabadvektorok terében, $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ két tetszőleges vektor, melyek koordinátái az előző bázisra vonatkozóan (x_1, x_2, x_3) és (y_1, y_2, y_3). Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$ tetszőleges skalár! Ekkor $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ koordinátái $(x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3)$; $\alpha\mathbf{x}$ koordinátái pedig $(\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)$.*

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}+\mathbf{y} &= (x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) + (y_1\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + y_3\mathbf{k}) = \\ &= (x_1 + y_1)\mathbf{i} + (x_2 + y_2)\mathbf{j} + (x_3 + y_3)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Továbbá:

$$\begin{aligned} \alpha\mathbf{x} &= \alpha(x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}) = \\ &= \alpha x_1\mathbf{i} + \alpha x_2\mathbf{j} + \alpha x_3\mathbf{k}. \end{aligned}$$

□

3. Szabadvektorok skaláris szorzata

A középiskolából is ismert skaláris szorzat bevezetéséhez és tanulmányozásához szükségünk lesz az (egyenesre ill. irányra) vonatkozó merőleges vetítés fogalmára, s mindenek előtt vektorok szögének definiálására.

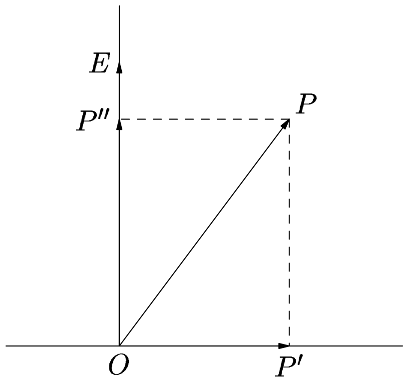
3.1. Definíció. Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok közös kezdőpontból induló reprezentánsai legyenek (O, A) és (O, B). Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ *szögén* derékszöget értünk, ha a vektorok valamelyike nullvektor, egyébként az $AOB\sphericalangle$ szöget. (Mely szög független a reprezentánsok választásától). Két vektort *merőleges*nek mondunk, ha szögük derékszög. Egy vektort merőlegesnek mondunk egy síkra, ha van a síkra merőleges reprezentánsa.

3.2. Tétel. *(Szabadvektor felbontása adott szabadvektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.) Legyen* $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$ *tetszőlegesen rögzített szabadvektor. A tér bármely* $\mathbf{x}$ *vektorához egyértelműen léteznek olyan* $\mathbf{x}^{||}$*-vel és* $\mathbf{x}^{\perp}$*-el jelölt vektorok, hogy*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + \mathbf{x}^{\perp}, \; \textit{ahol} \; \mathbf{x}^{||} \| \mathbf{e} \; \textit{és} \; \mathbf{x}^{\perp} \perp \mathbf{e}.$$

Az $\mathbf{x}^{||}$ vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$ vektorral *párhuzamos összetevőjének*, míg az $\mathbf{x}^{\perp}$ vektort az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$ vektorra *merőleges összetevőjének* mondjuk. $\mathbf{x}^{||}$-re használjuk még az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$-re vonatkozó *merőleges vetület*e elnevezést is.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. A felbontás létezését egyszerű geometriai úton könnyen bizonyíthatjuk. Legyen $(O, P) \in \mathbf{x}$, $(O, E) \in \mathbf{e}$, S legyen az O pontra illeszkedő, s $\overleftrightarrow{OE}$ -re merőleges sík, P' a P merőleges vetülete S-re, P'' pedig $\overleftrightarrow{OE}$ -re: ld. 1.6. ábra.



1.6. ábra. Szabadvektor felbontása adott szabadvektorral párhuzamos és arra merőleges komponensekre.

$$\mathbf{x} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{P'P} = \overrightarrow{OP'} + \overrightarrow{OP''}$$

nyilván megfelelő felbontás, tehát $\mathbf{x}^{||} = \overrightarrow{OP''}$, $\mathbf{x}^{\perp} = \overrightarrow{OP'}$.

A felbontás egyértelműsége. Tegyük fel, hogy

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1 = \mathbf{x}_2 + \mathbf{y}_2 \qquad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \| \mathbf{e}, \quad \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2 \perp \mathbf{e}.$$

Ekkor:

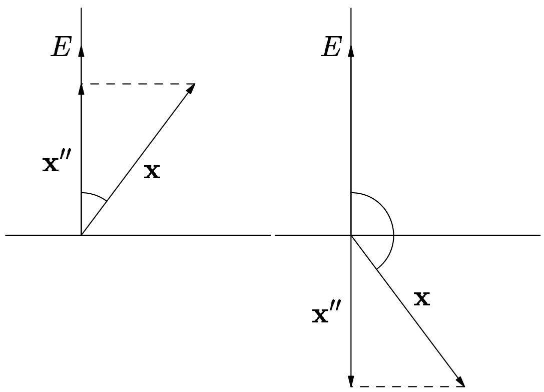
$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2.$$

Mivel a bal oldalon $\mathbf{e}$-vel párhuzamos, ugyanakkor a jobb oldalon arra merőleges vektor áll, ezért mindkét oldal nullvektor, ahonnan következik az állítás. $\square$

3.3. Definíció. Legyen $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$, az $\mathbf{x} \in \mathbb{V}$ vektor $\mathbf{e}$-vel párhuzamos össztevője $\mathbf{x}^{\|}$. Legyen $\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$ az a szám, melyre $\mathbf{x}^{\|} = \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^0$. A $\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$ számot az $\mathbf{x}$ vektor $\mathbf{e}$-re vonatkozó merőleges vetülete *előjeles hossz*ának nevezzük.

3.4. Tétel. $\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}\| \cdot \cos\varphi$*, ahol* φ *az* $\mathbf{x}$ *és* $\mathbf{e}$ *szöge.*

Bizonyítás: A 1.7 ábra alapján könnyen látható. □



1.7. ábra.

3.5. Tétel. *Legyen* $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$*. A* $\pi_{\mathbf{e}} \colon \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ *leképezés additív és homogén, azaz* $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{V}$*:*

$$\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y});$$

továbbá

$$\pi_{\mathbf{e}}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha \cdot \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}).$$

Bizonyítás: Az additivitás:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^0 + \mathbf{x}^{\perp} \\ \mathbf{y} &= \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y}) \cdot \mathbf{e}^0 + \mathbf{y}^{\perp}. \end{aligned}$$

Adjuk össze a két sort:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y}))\, \mathbf{e}^0 + (\mathbf{x}^{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}).$$

Mivel $\mathbf{x}^{\perp} \perp \mathbf{e}$ és $\mathbf{y}^{\perp} \perp \mathbf{e}$, ezért $\mathbf{x}^{\perp}$ és $\mathbf{y}^{\perp}$ ugyanabban az $\mathbf{e}$-re merőleges síkban reprezentálhatók, tehát ezek összege is ebben a síkban reprezentálható. Megállapíthatjuk tehát, hogy $(\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y}))\, \mathbf{e}^0 \| \mathbf{e}$, míg $(\mathbf{x}^{\perp} + \mathbf{y}^{\perp}) \perp \mathbf{e}$, tehát az $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ vektort az $\mathbf{e}$-vel párhuzamos és arra merőleges összetevőre bontottuk. Azaz

$$\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) + \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{y}).$$

A homogenitás:

$$\mathbf{x} = \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^0 + \mathbf{x}^{\perp}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt α-val:

$$\alpha\mathbf{x} = \alpha\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^0 + \alpha\mathbf{x}^{\perp}.$$

Itt $\alpha\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}^0 \| \mathbf{e}$, továbbá $\alpha\mathbf{x}^{\perp} \perp \mathbf{e}$, azaz az $\alpha\mathbf{x}$ vektort $\mathbf{e}$-vel párhuzamos, s arra merőleges összetevők összegére bontottuk. Tehát $\pi_{\mathbf{e}}(\alpha\mathbf{x}) = \alpha\pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$. □

3.6. Definíció. *Az* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *szabadvektorok* belső szorzat*án vagy* skaláris szorzat*án azt az* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$*-vel jelölt számot értjük, amely egyenlő* $\mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *hosszának és két vektor által bezárt szög cosinusának a szorzatával.*

Vektorok skaláris szorzatának jelölésére használatos még a $\mathbf{ab}$ (pont nélkül), a $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, illetve a $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ jelölés is. A definíció közvetlen következménye az alábbi tétel:

3.7. Tétel. $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{V}$*:* $\|\mathbf{v}\|^2 = \mathbf{vv}$*. Az* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *és* $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ *szabadvektorok által bezárt* φ *szögre fenáll, hogy* $\cos\varphi = \dfrac{\mathbf{a}\boldsymbol{b}}{\|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|}$*, továbbá fenáll az ún. Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség:*

$$|\mathbf{ab}| \leq \|\mathbf{a}\|\|\mathbf{b}\|,$$

ahol egyenlőség akkor és csakis akkor teljesül, ha $\boldsymbol{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *lineárisan függők. Két vektor akkor és csakis akkor merőleges egymásra, ha skaláris szorzatuk zérus.*

3.8. Tétel. $\mathbf{ab} = \pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a}) \cdot \|\mathbf{b}\|$*. Ha* $\mathbf{e}$ *egységvektor, akkor* $\mathbf{ae} = \pi_{\mathbf{e}}(\mathbf{a})$.

Bizonyítás: Következik 3.4.-ból. □

3.9. Tétel. *Vektorok belső szorzása — azaz a*

$$\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}, \ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{ab}$$

belsőszorzat függvény — rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal. Minden $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{c}$ *vektor és* λ *szám esetén*

(1) Szimmetrikus:

$$\mathbf{ab} = \mathbf{ba}$$

(2) Mindkét változóban additív:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \boldsymbol{b}\mathbf{c}, \ \mathbf{a}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{ab} + \boldsymbol{a}\mathbf{c}$$

(3) Mindkét változóban homogén:

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \lambda(\mathbf{ab}), \ \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda\mathbf{ab}$$

(4) Pozitív definit:

$$\mathbf{aa} \geq 0, \mathbf{aa} = 0 \iff \boldsymbol{a} = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás: (1): Az $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ vektorok φ szöge a definíció szerint nyilván ugyanaz, mint a $\mathbf{b}$ és $\mathbf{a}$ vektorok szöge.

$$\mathbf{ab} = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \cos\varphi = \|\mathbf{b}\| \cdot \|\mathbf{a}\| \cdot \cos\varphi = \mathbf{ba}.$$

(2): Az (1) miatt elegendő az egyik oldali, mondjuk a baloldali additivitást belátni.

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\mathbf{c} = \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \cdot \|\mathbf{c}\| = (\pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{a}) + \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{b})) \cdot \|\mathbf{c}\| = \pi_{\mathbf{c}}\mathbf{a} \cdot \|\mathbf{c}\| + \pi_{\mathbf{c}}(\mathbf{b}) \cdot \|\mathbf{c}\| = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}.$$

(3): Elegendő csak az egyik oldali homogenitást ellenőrizni.

$$(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = \pi_{\mathbf{b}}(\lambda\mathbf{a})\|\mathbf{b}\| = \lambda\pi_{\mathbf{b}}(\mathbf{a})\|\mathbf{b}\| = \lambda \cdot \mathbf{ab}.$$

(4) következik 3.7.-ból. □

3.10. Definíció. *A szabadvektorok vektorterében egy bázist* ortonormált*nak mondunk, ha egymásra merőleges egységvektorok alkotják.*

3.11. Tétel. *Létezik ortonormált bázis.*

Bizonyítás: Legyen $(\mathbf{i}, \mathbf{j})$ két egymásra merőleges egységvektor. Reprezentáljuk ezt a két vektort egy síkban, s tekintsünk egy olyan egységvektort, mely erre a síkra merőleges egyenesen reprezentálható. (Geometriailag látható, hogy két ilyen vektor van; ezek közül kell az egyiket kiválasztani.) Jelölje ezt a vektort $\mathbf{k}$! $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ egymásra merőleges egységvektorokból álló bázis.

□

Az ortonormáltság definíciójából látható, hogy

$$\mathbf{ii} = 1, \ \mathbf{ij} = 0, \ \mathbf{jj} = 1, \ \mathbf{jk} = 0, \ \mathbf{kk} = 1, \ \mathbf{ik} = 0.$$

3.12. Tétel. *Egy $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ ortonormált bázist alapulvéve az $\boldsymbol{a} = \alpha_1\boldsymbol{i} + \alpha_2\boldsymbol{j} + \alpha_3\boldsymbol{j}$ és az $\boldsymbol{a}' = \alpha_1'\boldsymbol{i} + \alpha_2'\boldsymbol{j} + \alpha_3'\boldsymbol{j}$ vektorok belső szorzata*

$$\mathbf{aa}' = \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \alpha_3\alpha_3'.$$

3.13. Tétel. *Alkalmazzuk a belső szorzás műveleti tulajdonságait, valamint az előbbi megjegyzést:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{aa}' &= (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k})(\alpha_1'\mathbf{i} + \alpha_2'\mathbf{j} + \alpha_3'\mathbf{k}) \\
&= \alpha_1\alpha_1'\mathbf{ii} + \alpha_1\alpha_2'\mathbf{ij} + \alpha_1\alpha_3'\mathbf{ik} + \\
&= \alpha_2\alpha_1'\mathbf{ji} + \alpha_2\alpha_2'\mathbf{jj} + \alpha_2\alpha_3'\mathbf{jk} + \\
&= \alpha_3\alpha_1'\mathbf{ki} + \alpha_3\alpha_2'\mathbf{kj} + \alpha_3\alpha_3'\mathbf{kk} = \\
&= \alpha_1\alpha_1' + \alpha_2\alpha_2' + \alpha_3\alpha_3'
\end{aligned} \tag{3.13}$$

3.14. Tétel. *Ha* $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ *ortonormált bázis a szabadvektorok vektorterében, akkor tetszőleges* $\mathbf{v} \in \mathbb{V}$ *vektor egyértelműen előállítható a következő alakban:*

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (\mathbf{v}\boldsymbol{j})\boldsymbol{j} + (\mathbf{v}\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}.$$

Bizonyítás: Jelölje $\mathbf{v}$ koordinátáit az $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ortonormált bázisra v_1, v_2, v_3, azaz

$$\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Szorozzuk az előbbi egyenlőség mindkét oldalát skalárisan $\mathbf{i}$-vel:

$$\begin{aligned} \mathbf{vi} &= v_1 \cdot \mathbf{ii} + v_2 \cdot \mathbf{ji} + v_3 \cdot \mathbf{ki} = \\ &= v_1. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk a második és harmadik koordinátát. □

4. Külső szorzás, vegyes szorzás

A skaláris szorzás két szabadvektorhoz *számot* rendel. Egy másik szorzástípus két szabadvektorhoz *szabadvektort* rendel, ez az ún. vektoriális, vagy külső szorzás. Ennek először *szemléletes fogalmát* adjuk meg, mely egy fizikai szabályra, a jobbkézszabályra támaszkodik. A továbbiakban tisztázzuk majd a vektoriális szorzás olyan bevezetését is, mely fizikai fogalmakra nem támaszkodik. Bevezetünk még egy harmadik szorzást, az ún. vegyes szorzást, ez három vektorhoz rendel számot.

4.1. Definíció. (A vektoriális szorzás *szemléletes* fogalma.) $\mathbb{V}$-ben adott *külső szorzás*on, vagy *vektoriális szorzás* on egy olyan

$$\times : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}, \ (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \mathbf{a} \times \mathbf{b}$$

műveletet értünk, mely eleget tesz az alábbi tulajdonságoknak:

1. Ha a tényezők lineárisan függők, akkor a szorzat értéke nullvektor. Egyébként:
2. Az $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ szorzat mindkét tényezőjére merőleges.
3. $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ megegyezik $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ egy pontból induló reprezentánsai által kifeszített paralelogramma területével: $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = \|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.
4. Jobbkézszabály: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ egy pontból iduló reprezentánsai úgy következnek,mint a jobbkéz (hüvelyk, mutató, középső) ujja. (Miközben a középső ujj a tenyérre merőlegesen áll.)

A harmadik tulajdonság egyszerűen átfogalmazható a következőképpen:

4.2. Tétel. (Lagrange azonosság.) $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{ab})^2$.

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{ab})^2 &= \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \cdot \cos^2 \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \\ &= (\|\mathbf{a}\| \cdot \|\mathbf{b}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{ab}))^2 = (\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|)^2. \end{aligned}$$

□

Másod- és harmadrendű determinánsok

Mielőtt rátérünk a vektoriális szorzás olyan bevezetésére, mely a jobbkézszabályt nem használja, szükségünk lesz néhány algebrai jellegű segédeszközre.

4.3. Definíció. Legyenek $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. 2×2-es *determináns*on a

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c$$

számot értjük.

Legyenek $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$. 3×3-as *determináns*on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \cdot \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \cdot \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

számot értjük.

4.4. Tétel. *A* 3×3*-as determináns kiszámítása* Sarrus szabállyal.

$$\ldots$$

4.5. Definíció. Legyen rögzítve $\mathbb{V}$-ben egy $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ ortonormált bázis. A $\mathcal{B}$*-re vonatkozó vektoriális szorzat*on a $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \mapsto \stackrel{\text{jel.}}{=} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \cdot \mathbf{k} \stackrel{\text{jel.}}{=} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

leképezést értjük, ahol $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ és $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$.

A $\mathcal{B}$*-re vonatkozó vegyes szorzat*on a $\mathbb{V} \times \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$,

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) \mapsto \stackrel{\text{jel.}}{=} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c})$$

leképezést értjük.

*

Hangsúlyozzuk, hogy a bevezetett két szorzás definíciója pillanatnyilag függ a rögzített ortonormált bázistól. Később belátjuk, hogy valójában csak az előjel függ a bázistól, azaz mindkét szorzás előjeltől eltekintve egyértelmű.

Először azt látjuk be, hogya definiált vektoriális szorzás a jobbkézszabálytól eltekintve visszaadja a vektoriális szorzás szemléletes fogalmát.

4.6. Tétel. *1.* $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$*, azaz* $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ *merőleges mind* $\mathbf{a}$*-ra, mind* $\mathbf{b}$*-re.*
2. Teljesül a Lagrange-azonosság: $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{ab})^2$.

Bizonyítás: A definíció szerint ki kell számolni. □

4.7. Tétel. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \mathbf{a}$ *és* $\mathbf{b}$ *lineárisan függők.*

Bizonyítás: Az állítás nyilván igaz, ha $\mathbf{a}$ vagy $\mathbf{b}$ valamelyike zérusvektor. Egyébként:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0} \iff \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\| = 0 \iff \|\mathbf{a}\|^2 \cdot \|\mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{ab})^2,$$

használva a Lagrange azonosságot. Ez utóbbi reláció csak akkor állhat fönn, ha $\cos^2(\sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 1 \iff \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0 \vee \sphericalangle(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \pi$. □

4.8. Tétel. *A szabadvektorok vektoriális szorzása rendelkezik az alábbi tulajdonságokkal:* $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}$ *vektorokra és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *skalárra:*

(1) Ferdén szimmetrikus:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a},$$

(2) Mindkét változójában lineáris:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c},\ (\alpha\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b}),$$
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c},\ \mathbf{a} \times (\alpha\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Bizonyítás: Legyen $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$. Az első tulajdonság bizonyításához használjuk ki a 2×2-es determináns alábbi, könnyen ellenőrizhető tulajdonságát:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}.$$

Tehát:

$$\mathbf{b} \times \mathbf{a} = \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} =$$
$$= -\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} - \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} = -\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

A linearitást szintén egyszerű determináns-tulajdonságok alapján látjuk be:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c+e & d+f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ e & f \end{vmatrix};$$

illetve:

$$\begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}.$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_3 + c_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 \end{vmatrix}\mathbf{k} =$$
$$\ldots$$

□

4.9. Tétel. *Vonatkozzon a vektoriális szorzás az* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *ortonormált bázisra. Ekkor:*

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \qquad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \qquad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Bizonyítás: Egyszerű számolás. □

4.10. Tétel. *Vonatkozzon a vegyes szorzás az* $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *ortonormált bázisra. Legyen*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{j} \\ \mathbf{b} &= b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{j} \\ \mathbf{c} &= c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{j}. \end{aligned}$$

Ekkor

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Bizonyítás: Ki kell számolni. □

4.11. Tétel. *A vegyes szorzás mindhárom változóban lineáris.*

Bizonyítás: Következik a vektoriális szorzat és a skaláris szorzat bilineáris tulajdonságából. □

4.12. Tétel. *A vegyes szorzás alternáló, azaz*

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| &= |\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}| = |\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}| \\ |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| &= -|\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}| = -|\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| = -|\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}|. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Először azt vegyük észre, hogy ha a vegyes szorzatban két tényező ugyanaz, akkor a vegyes szorzat értéke 0.

Térjünk rá az alternálás bizonyítására! $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = |\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}|$ következik a vektoriális szorzás ferde szimmetriájából.

$$0 = |\mathbf{a}, \mathbf{b} + \mathbf{c}, \mathbf{b} + \mathbf{c}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}| + |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| + |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}| + |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{c}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| + |\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}|.$$ □

4.13. Tétel. $|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = 0$ *akkor és csakis akkor teljesül, ha* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *lineárisan függő vektorrendszer.*

Ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *lineárisan független vektorrendszer, akkor* $\big||\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}|\big|$, *megegyezik* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ *egy pontból induló reprezentánsai által kifeszített paralelepipedon térfogatával.*

Bizonyítás: Ha $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ lineárisan függő vektorrendszer, akkkor valemelyik lineárisan kombinálható a többiből, pl. $\mathbf{c} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$. Ekkor

$$|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}| = |\mathbf{a}, \mathbf{b}, \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}| = \alpha|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}| + \beta|\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{b}| = 0.$$

Legyenek most $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ lineárisan függetlenek:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \pi_{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}(\mathbf{c}) \cdot \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|.$$

$\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ a paralelepipedon egyik lapja területe, $\pi_{(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}(\mathbf{c})$ pedig előjeltől eltekintve pontosan a hozzá tartozó magasság. □

4.14. Tétel. (A vektoriális szorzás meghatározottsága.) *A vektoriális és vegyes szorzás vonatkozzon a rögzített* $\mathcal{B} = (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ *ortonormált bázisra. Ha* $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ *tetszőleges ortonormált bázis, akkor* $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| = \pm 1$*, továbbá ha*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{r} \\ \mathbf{b} &= \beta_1 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v} + \beta_3 \mathbf{r}, \end{aligned}$$

akkor

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{r} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

Azaz a különböző ortonormált bázisokra vonatkozó vektoriális szorzatok legfeljebb előjelben különböznek.

Bizonyítás: Az első állítás onnan következik, hogy egy ortonormált bázis egy pontból induló reprezentánsai által kifeszített paralelepipedon speciálisan egységkocka.

A következő lépésben azt látjuk be, ha $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| = 1$, akkor a következő szorzótábla érvényes:

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{u} \arrow[dr] & \\ \mathbf{r} \arrow[ur] & & \mathbf{v} \arrow[ll] \end{tikzcd},$$

azaz

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{r} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{u} = \mathbf{v};$$

míg $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| = -1$ esetén

$$\begin{tikzcd} & \mathbf{u} \arrow[dl] & \\ \mathbf{r} \arrow[rr] & & \mathbf{v} \arrow[ul] \end{tikzcd},$$

azaz

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{r}, \quad \mathbf{v} \times \mathbf{r} = -\mathbf{u}, \quad \mathbf{r} \times \mathbf{u} = -\mathbf{v}.$$

Csak annyit látunk be, hogy $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| = 1$ esetén $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \mathbf{r}$ teljesül, a többi állítás igazolása analóg. Mivel $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ bázis:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v} + \gamma \mathbf{r}.$$

Szorozzuk mindkét oldalt skalárisan rendre $\mathbf{r}$-el, $\mathbf{u}$-val, $\mathbf{v}$-vel: $\gamma = 1$, $\alpha = 0$, $\beta = 0$.

Legyen $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| = 1$. $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kiszámításához használjuk ki a vektoriális szorzás linearitását és az előbbi szorzótáblát:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1 \mathbf{u} + \alpha_2 \mathbf{v} + \alpha_3 \mathbf{r}) \times (\beta_1 \mathbf{u} + \beta_2 \mathbf{v} + \beta_3 \mathbf{r}) = \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{u} \times \mathbf{u} + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{u} \times \mathbf{v} + \alpha_1 \beta_3 \mathbf{u} \times \mathbf{r} + \\ &+ \alpha_2 \beta_1 \mathbf{v} \times \mathbf{u} + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{v} \times \mathbf{r} + \\ &+ \alpha_3 \beta_1 \mathbf{r} \times \mathbf{u} + \alpha_3 \beta_2 \mathbf{r} \times \mathbf{v} + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{r} \times \mathbf{r} = \\ &= (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{r} - (\alpha_1 \beta_3 - \alpha_3 \beta_1) \mathbf{v} + (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{u} = \end{aligned}$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{r} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

□

4.15. Definíció. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{V}$-t egy *irányítás*sal láttuk el, ha a két vektoriális szorzás közül kijelöltük az egyiket. (Azaz rögzítettünk egy ortonormált bázist, s a vektoriális szorzás erre vonatkozik.)

Egy $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ lineárisan független vektorhármast *jobbsodrású*nak vagy *jobbrendszer*nek nevezünk, ha $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| > 0$, *balsodrású*nak vagy *balrendszer*nek, ha $|\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r}| < 0$.

Felhívjuk a figyelmet, hogy a jobbsodrás előbbi definíciója nem támaszkodik a jobbkézszabályra, s nem is alkalmas arra, hogy a jobbkezet és a balkéztől matematikai módon megkülönböztessük. A most definiált jobbsodrás *fizikailag* pusztán annyit jelent, hogy amilyen kéz szabályát követi az irányítást definiáló rögzített ortonormált bázis, ugyanolyan szabályt követ $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ is. (Tehát ha a rögzített ortonormált bázis történetesen „balkézszabályt” követ, akkor a jobbsodrás éppen azt jelenti, hogy $(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{r})$ is balkézszabályt követ.)

4.16. Tétel. *Ha az* $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ *vektorrendszer lineárisan független, akkor* $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ *jobbsodrású.*

Bizonyítás: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 > 0.$ □

4.17. Tétel. $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{V}$ *szabadvektorokra fenáll az ún. kifejtési szabály:*

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{ac} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c};$$

és az ún. Jacobi azonosság:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}.$$

Bizonyítás: Mindkét állítást be lehet úgy látni, hogy ortonormált bázis felvétele után koordinátákkal kiszámítjuk mindkét oldalt. Ez a hosszadalmas számolás azonban teljesen elkerülhető a Jacobi azonosságnál, s lényegesen egyszerűsíthető a kifejtési szabálynál. Kezdjük a kifejtési szabállyal. Ha **b** és **c** lineárisan függők, akkor $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$, s így a bal oldalon $\mathbf{0}$ áll. A függőség miatt **b** és **c** közül egyik a másiknak skalárszorosa, pl. $\mathbf{c} = t\mathbf{b}$. Számítsuk ki a jobb oldalt:

$$\mathbf{ac} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = t \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{b} - t \cdot \mathbf{ab} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Legyenek most **b** és **c** lineárisan függetlenek. Vegyünk fel úgy $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ pozitív ortonormált bázist, hogy $\mathbf{c} = \gamma_3\mathbf{k}$, **k** és **j** ugyanabban a síkban legyen reprezentálható, mint **c** és **b**, tehát

$$\mathbf{b} = \beta_2\mathbf{j} + \beta_3\mathbf{k}.$$

Ebben a bázisban fejezzük ki **a**-t:

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}.$$

Ezek után

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}) \times (\beta_2 \gamma_3)\mathbf{i} = -\alpha_2 \beta_2 \gamma_3 \mathbf{k} + \alpha_3 \beta_2 \gamma_3 \mathbf{j}.$$

A jobb oldal:

$$\begin{aligned} &\mathbf{ac} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} = \\ &= \alpha_3 \gamma_3 \mathbf{b} - (\alpha_2 \beta_2 + \alpha_3 \beta_3)\mathbf{c} = \\ &= \alpha_3 \gamma_3 \beta_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \gamma_3 \beta_3 \mathbf{k} - \alpha_2 \beta_2 \gamma_3 \mathbf{k} - \alpha_3 \beta_3 \gamma_3 \mathbf{k} = \alpha_3 \gamma_3 \beta_2 \mathbf{j} - \alpha_2 \beta_2 \gamma_3 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

A Jacobi azonossághoz alkalmazzuk a kifejtési szabályt:

$$\begin{gathered} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \\ = \mathbf{ac} \cdot \mathbf{b} - \mathbf{ab} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{ba} \cdot \mathbf{c} - \mathbf{bc} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{cb} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{ca} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}. \end{gathered}$$

□

4.18. Tétel. *Legyen* $\mathbf{e}$ *egységvektor. Az* $\mathbf{x}$ *vektor* $\mathbf{e}$ *vektorra merőleges összetevője*

$$\mathbf{x}^{\perp} = (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e}.$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk a kifejtési tételt:

$$(\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e} = -\mathbf{e} \times (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) = -\mathbf{ex} \cdot \mathbf{e} + \mathbf{ee} \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}^{||} + \mathbf{x},$$

azaz

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^{||} + (\mathbf{e} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{e},$$

tehát a jobb oldali második tag valóban $\mathbf{x}^{\perp}$. □

5. Egyenesek és síkok

5.1. Definíció. $\mathcal{E}$ egy O pontjának rögzítése után a $P \in \mathcal{E}$ pont *helyzetvektor*án a $\overrightarrow{OP} \in \mathbb{V}$ szabadvektort értjük. O-t *origó*nak is mondjuk.

5.2. Definíció. Egy egyenes *irányvektor*án az egyenesen reprezentálható nem zéróvektort értünk.

5.3. Tétel. (Az egyenes paraméteres előállítása.) *Origó rögzítése után egy egyenes pontjainak helyzetvektorai és csakis ezek előállíthatók*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{v} \qquad t \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

alakban, ahol $\mathbf{x}_0$ *az egyenes egy pontjának helyzetvektora,* $\mathbf{v}$ *pedig az egyenes egy irányvektora. Megfordítva, ha* $\mathbf{x}_0$ *és* $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ *adottak, akkor* $(*)$ *egy egyenes pontjai helyzetvektorainak halmazát állítja elő.*

Bizonyítás: Legyen adott az e egyenes, melynek egy irányvektora $\mathbf{v}$, az X_0 pontjának helyzetvektora pedig $\mathbf{x}_0$. $X \in e \iff \overrightarrow{XX_0}$ az egyenesen reprezentálható vektor. Ez pontosan azt jelenti, hogy $\mathbf{v}$ és $\overrightarrow{XX_0}$ lineárisan függők, vagyis az egyik a másiknak skalárszorosa. Mivel $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ ezért $\overrightarrow{XX_0} = t\mathbf{v}$ bizonyosan fennáll valamely $t \in \mathbb{R}$-re. Tehát

$$X \in e \iff \overrightarrow{XX_0} = \overrightarrow{XO} + \overrightarrow{OX_0} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = t\mathbf{v}.$$

Megfordítva, legyen $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OX_0}$, $(X_0, X_1) \in \mathbf{v}$. Ekkor az első rész állítása szerint, az $\overleftrightarrow{X_0X_1}$ egyenes paraméteres előállítása $(*)$. □

5.4. Tétel. (A sík paraméteres előállítása.) *Origó rögzítése után tetszőleges sík pontjainak helyzetvektorai és csakis ezek előállíthatók*

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{w} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R} \tag{$*$}$$

alakban, ahol $\mathbf{x}_0$ a sík egy tetszőleges pontjának helyzetvektora, $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ a síkon reprezentálható lineárisan független vektorok. Megfordítva, tetszőlegesen adott $\mathbf{x}_0$ és lineárisan független $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ szabadvektorok mellett $(*)$ egy sík pontjainak helyzetvektorai halmazát állítja elő.

Bizonyítás: Tekintsük az α síkot, $X_0 \in \alpha$, továbbá legyenek $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ az α síkban reprezentálható lineárisan független vektorok. $X \in \alpha \iff \overrightarrow{X_0X}$ az α síkban reprezentálható, azaz $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \overrightarrow{X_0X}$ lineárisan függők, azaz valamelyikük kifejezhető a másik kettő lineáris kombinációjaként. Mivel $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ lineárisan függetlenek, ezért $\overrightarrow{X_0X}$ biztosan kifejezhető $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineáris kombinációjaként, ami pontosan azt jelenti, hogy léteznek olyan $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ skalárok, hogy $(*)$ teljesül.

Megfordítva, legyenek adva $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, és ráadásul $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ lineárisan függetlenek. Reprezentáljuk a vektorokat a következőképpen:

$$(O, X_0) \in \mathbf{x}_0,\ (X_0, X_1) \in \mathbf{v},\ (X_0, X_2) \in \mathbf{w}.$$

Az X_0, X_1, X_2 pontok nem kollineárisak, ellenkező esetben ugyanis $\mathbf{v}$ és $\mathbf{w}$ egy egyenesen lennének reprezentálhatók. Erre a három pontra egyértelműen illeszkedik tehát egy sík, melyet jelöljön α. Az első állítas alapján α paraméteres előállítása pontosan $(*)$. □

5.5. Definíció. Egy sík *normálvektor*án egy síkra merőleges nem zéróvektort értünk.

5.6. Tétel. (A sík Hesse féle egyenlete.) *Origó rögzítése után tetszőleges sík pontjainak helyzetvektorai és csakis ezek kielégítik az*

$$\mathbf{n}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0 \tag{$*$}$$

összefüggést, ahol $\mathbf{x}_0$ a sík egy tetszőleges pontjának helyzetvektora, $\mathbf{n}$ pedig a sík egy normálvektora. Megfordítva, tetszőlegesen adott $\mathbf{x}_0$-ra és $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$-ra $(*)$ egy sík egyenlete.

Bizonyítás: Az adott α sík X_0 pontjának helyzetvektora legyen $\mathbf{x}_0$, egy normálvektora $\mathbf{n}$. $X \in \alpha \iff \overrightarrow{X_0X} \perp \mathbf{n} \iff \overrightarrow{X_0X} \cdot \mathbf{n} = 0$, ami pontosan $(*)$-ot jelenti.

Megfordítva, adott $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{x}_0 = \overrightarrow{OX_0}$ esetén tekintsük az

$$\alpha = \{X \in \mathcal{E} | \overrightarrow{X_0X} \perp \mathbf{n}\}$$

halmazt. Legyen n az $\mathbf{n}$ irányvektorú, O-ra illeszkedő egyenes. Az $\overrightarrow{X_0X} \perp \mathbf{n}$ feltétel azt jelenti, hogy vagy $X_0 = X$, vagy $\overleftrightarrow{X_0X} \perp n$. Mivel az n egyenesre az X_0 pontban állított merőlegesek mind egy síkban vannak és ez a sík az n egyértelmű X_0-ra illeszkedő normálsíkja, ezért megállapíthatjuk, hogy a megkonstruált α halmaz sík. Ennek az egyenlete az első állítás szerint pontosan a megadott egyenlet. $\square$

6. Térelemek távolsága és szöge

Hajós: 24.§, 25.§.

2. fejezet

Vektorterek

7. A vektortér definíciója

7.1. Definíció. Legyen $\mathbb{F}$ egy test, $(V,+)$ Abel csoport. Ha értelmezve van egy

$$\mathbb{F} \times V \to V,\ (\alpha, v) \mapsto \alpha v$$

leképezés úgy, hogy $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ és $\forall v, w \in V$:

$$\begin{aligned} \alpha(v+w) &= \alpha v + \alpha w \\ (\alpha+\beta)v &= \alpha v + \beta v \\ (\alpha\beta)v &= \alpha(\beta v) \\ 1v &= v, \end{aligned}$$

akkor azt mondjuk, hogy V *vektortér* $\mathbb{F}$ felett. $\mathbb{F}$ elemeit *skalárok*nak, V elemeit pedig *vektorok*nak nevezzük. A vektortér definíciójában szereplő 4 tulajdonságot gyakran vektortér axiómáknak is mondjuk.

Ügyeljünk arra, hogy a test additív neutrális elemét és V neutrális elemét össze ne keverjük – mindkettőt ugyanúgy, 0-val jelöljük! Ebben a jegyzetben kizárólag $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, vagy $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

A vektortérfogalom hasznosságát az mutatja, hogy nagyon sok, gyakran előforduló struktúra kielégíti a definíciót:

Példa. A szabadvektorok vektortere: $\mathbb{V}$ vektortér $\mathbb{R}$ felett.

Példa. Egy tetszőleges pont (*origó*) rögzitése után a klasszikus euklideszi ponttér (azaz $\mathcal{E}$) is vektortérré tehető $\mathbb{R}$ felett. Jelölje a rögzített pontot O! Két pont összegét(!) értelmezzük a következőképpen: $P+Q=R$, ha $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OR}$, továbbá egy pont számmal való szorzata(!): $\alpha P = Q$, ha $\alpha\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$. Az így kapott vektorteret gyakran $\mathcal{E}_O$-val jelöljük, s a *kötöttvektorok vektorterének* mondjuk.

Példa. Legyen $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ test. $\mathbb{F}$ vektortér önmaga fölött, ahol a skalárral való szorzás a testben értelmezett szorzás. Speciálisan $\mathbb{C}$ $\mathbb{C}$ felett, $\mathbb{R}$ $\mathbb{R}$ felett.

Példa. $\mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ felett is vektortér.

Példa. A *skalár n-esek tere:* $(\mathbb{F}^n, +)$ vektortér $\mathbb{F}$ felett, ahol az összeadás és skalárral való szorzás komponensenként van értelmezve.

Példa. Az összes komplex (valós) együtthatós polinomok $\mathcal{P}$ halmaza $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$) felett, ahol az összeadást és a skalárral való szorzást az algebra tárgyban értelmeztük.

Példa. A legfeljebb n-edfokú komplex (valós) együtthatós polinomok $\mathcal{P}^n$ tere.

Példa. Az $\mathbb{R}$-en értelmezett összes valós értékű függvények vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. (Két függvény összegét és skalárszorosát az analízis tárgyban értelmeztük.)

Példa. Az ún. *triviális vektortér* egyetlen elemből a zéróvektorból áll. Legyen $O = \{0\}$ tetszőleges egyelemű halmaz, $\mathbb{F}$ tetszőleges test. O-ban az összeadást, ill. a skalárral való szorzás értelmezzük az egyedüli lehetséges módon: $0 + 0 = 0$, $\alpha 0 = 0$.

Példa. Legyen $(V, \mathbb{R})$ valós vektortér. $(V \times V, \mathbb{C})$ vektortér, ha az összeadást és skalárral való szorzást a következőképpen értelmezzük:

$$\begin{aligned} (a_1, a_2) + (b_1, b_2) &= (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \\ (\alpha + i\beta)(a_1, a_2) &= (\alpha a_1 - \beta a_2, \alpha a_2 + \beta a_1). \end{aligned}$$

(Képzeljünk (a_1, a_2) helyébe formálisan $a_1 + ia_2$-t, így könnyű megjegyezni a skalárral való szorzás definícióját.) Ezt a vektorteret a V *komplexifikáltjának* mondjuk.

7.2. Tétel. *Legyen V vektortér az $\mathbb{F}$ test felett. Ekkor teljesülnek a következők. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$, $\forall v, w \in V$:*

$$\begin{aligned} 0v &= 0 \\ (-1)v &= -v, \text{ ahol } -v \text{ a } v \text{ additív inverze } V\text{-ben} \\ \alpha 0 &= 0 \\ \alpha v = 0 &\implies \alpha = 0 \text{ vagy } v = 0 \end{aligned}$$

Bizonyítás: A következő gondolatsor minden egyenlőségénél valamelyik vektortér axiómát használjuk, kivéve az utolsó előtti egyenlőséget, ahol azt használjuk, hogy 0 a test additív neutrális eleme.

$$0v + v = 0v + 1v = (0 + 1)v = 1v = v,$$

tehát:

$$v = 0v + v.$$

Adjuk hozzá mindkét oldalhoz v additív inverzét, azaz $-v$-t:

$$0 = (0v + v) + (-v) = 0v + (v + (-v)) = 0v + 0 = 0v.$$

A második állításnál már az előbb bizonyított formulát is használjuk:

$$v + (-1)v = 1v + (-1)v = (1 - 1)v = 0v = 0,$$

azaz v additív inverze valóban $(-1)v$.

A harmadik állításra rátérve:

$$\alpha 0 = \alpha(v - v) = \alpha v - \alpha v = 0.$$

Végezetül az utolsó állítás. Tegyük fel, hogy $\alpha v = 0$, és $\alpha \neq 0$. Belátjuk, hogy ekkor csak $v = 0$ teljesülhet.

$$v = 1v = \left(\frac{1}{\alpha}\alpha\right) v = \frac{1}{\alpha}(\alpha v) = \frac{1}{\alpha}0 = 0.$$

$\square$

7.3. Definíció. A $W \subset V$ nemüres részhalmazt a V vektortér *alterének* nevezzük, ha teljesül, hogy

$$\forall v, w \in W \text{ és } \alpha \in \mathbb{F}: \ v + w \in W \text{ és } \alpha v \in W.$$

$O \subset V$ és $V \subset V$ a V *triviális alterei.*

Mivel W nemüres, ezért van benne egy $v \in W$ vektor, tehát $0w = 0$ is W-ben van. Az összeadás és a skalárral való szorzás nem vezet ki W-ből, továbbá az összeadás és a skalárral való szorzás tulajdonságai öröklődnek, azaz kimondhatjuk az alábbi tételt:

7.4. Tétel. *Egy vektortér altere maga is vektortér ugyanazon test felett (az öröklött összeadással és skalárral való szorzással.)*

Példa. A szabadvektorok $\mathbb{V}$ vektorterében rögzítsünk egy $\boldsymbol{v}$ vektort. Legyen

$$W_1 = \{t \cdot \boldsymbol{v} \mid t \in \mathbb{R}\},$$

$$W_2 = \{\boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{w} \perp \boldsymbol{v}\}.$$

Igazoljuk, hogy W_1 és W_2 altér a szabadvektorok vektorterében. Ezeknek az altereknek egyszerű geometriai jelentése van: ha rögzítünk $\mathcal{E}$-ben egy pontot (origó) és W_1 ill. W_2 elemeit az origóból kiindulva reprezentáljuk, akkor a reprezentánsok végpontjai egy origóra illeszkedő egyenest ill. síkot alkotnak.

Példa. Legyen $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ rögzített vektor. Legyen

$$W = \{(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = 0\}.$$

W altér $\mathbb{R}^n$-ben.

Példa. Az összes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények terében a folytonos függvények alteret alkotnak.

7.5. Tétel. *Legyenek U és W alterei a V vektortérnek. Ekkor $U \cap W$ szintén altér, amit U és W* metszet*ének nevezünk. Jelölje továbbá $U + W$ a következő vektorhalmazt:*

$$U + W = \{u + w | u \in U,\ w \in W\}\,.$$

Ekkor $U + W$ szintén altér, amit az U és W összeg*ének nevezünk.*

Bizonyítás: $U \cap W \neq \emptyset$, mert a zéróvektor mindkét altérben benne van. Teljesüljön, hogy $x, y \in U \cap W$. Ekkor $x, y \in U \wedge x, y \in W$, azaz $x + y,\ \alpha x \in U \wedge x + y,\ \alpha x \in W$, ami azt jelenti, hogy $x + y,\ \alpha x \in U \cap V$.

$U + W$ tartalmazza a 0 vektort, mert $0 + 0 = 0$. Teljesüljön, hogy $u_1 + w_1 \in U + W$ és $u_2 + w_2 \in U + W$. Ekkor

$$(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W,$$

továbbá

$$\alpha(u_1 + w_1) = \alpha u_1 + \alpha w_1 \in U + W.$$

□

8. Lineáris kombinációk, bázis, dimenzió

8.1. Definíció. Legyen V vektortér $\mathbb{F}$ felett, $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ vektorok, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ skalárok. Az

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_k v_k \in V$$

vektort a $v_1, \ldots, v_k$ vektorok $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ skalárokkal való *lineáris kombinációjának* nevezzük.

8.2. Tétel. (A lineáris kombináció tranzitív tulajdonsága.) *Ha egy vektortér z vektora lineárisan kombinálható az $x_1, \ldots, x_r$ vektorokból, továbbá minden i-re x_i lineárisan kombinálható az $y_1, \ldots, y_s$ vektorokból, akkor z lineárisan kombinálható az $y_1, \ldots, y_s$ vektorokból is.*

Bizonyítás: Legyen

$$z = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i,$$

továbbá

$$\forall i\ (1 \leq i \leq r):\ x_i = \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} y_j.$$

Ekkor

$$z = \sum_{i=1}^{r} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \sum_{j=1}^{s} \gamma_{ij} y_j = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} \beta_i \gamma_{ij} y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{s}\sum_{i=1}^{r}\beta_i\gamma_{ij}y_j = \sum_{j=1}^{s}\left(\sum_{i=1}^{r}\beta_i\gamma_{ij}\right)y_j$$

ami valóban az $y_1, \ldots, y_s$ vektorok lineáris kombinációja. □

8.3. Tétel. *Egy V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ rögzített vektorainak összes lineáris kombinációi alteret alkotnak V-ben.* Ezt az alteret, melyet $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ jelöl, a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok által *generált altér*nek, vagy a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok *lineáris lezárt*jának nevezzük.

Bizonyítás: $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k) = W$ nyilván nemüres, mert például a

$$0v_1 + \cdots + 0v_k = 0$$

vektort tartalmazza. Továbbá

$$\begin{aligned}(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) + (\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k) &= \\ = \ (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)v_k.\end{aligned}$$

Bebizonyítottuk, hogy két W-beli vektor összege szintén W-beli. A W-ből vett vektor skalárszorosa:

$$\alpha(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k) = \alpha\beta_1 v_1 + \cdots + \alpha\beta_k v_k \in W.$$

□

8.4. Definíció. A V vektortér $v_1, \ldots, v_k$ vektorrendszerét a V

- *generátorrendszer*ének nevezzük, ha V bármely vektora legalább egyféleképpen lineárisan kombinálható belőlük;
- *lineárisan független vektorrendszer*ének nevezzük, ha bármely vektor legfeljebb egyféleképpen kombinálható belőlük;
- *bázis*ának nevezzük, ha bármely vektor pontosan egyféleképpen kombinálható belőlük.

Ha egy véges vektorrendszer nem lineárisan független, akkor *lineárisan függő*nek nevezzük. Ha $v_1, \ldots, v_k$ bázis akkor tehát tetszőleges $v \in V$ vektorhoz egyértelműen léteznek olyan $\alpha_1, \ldots \alpha_k$ skalárok, hogy

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Az $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ skalár n-est a v vektor $v_1, \ldots, v_n$ bázisra vonatkozó *koordinátáinak* nevezzük.

Megjegyzés. Az definíciót megelőző tételben véges sok vektor lineáris lezártjáról beszéltünk. A fogalmat ki lehet terjeszteni tetszőleges $W \subset V$ részhalmaz esetére: W lineáris lezártja a W-beli vektorokkal képzett összes véges lineáris kombinációk halmaza. Az így értelmezett $\mathcal{L}W$ halmaz szintén a V altere. Erre szintén mondhatjuk, hogy a W által van generálva. A továbbiakban a generátorrendszer elnevezést mindig csak véges vektorrendszerre használjuk, és ezt hangsúlyozandó gyakran véges generátorrendszerről beszélünk. Megemlítjük, hogy nem minden vektortér végesen generált (azaz nem minden vektortérnek létezik véges generátorrendszere), de **a továbbiakban csak olyan vektorterekről lesz szó, amelyek véges sok vektorral generálhatóak.** Megállapodunk abban, hogy az üres vektorrendszer által generált vektortér a O, melyet tehát 0 számú vektorral generált vektortérnek tekintünk.

8.5. Tétel. *Egy V vektortér $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszere akkor és csakis akkor lineárisan függő, ha a zérusvektor nemtriviálisan is kombinálható belőlük, azaz: léteznek olyan $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ skalárok, hogy van közöttük zérustól különböző, és*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k = 0.$$

Bizonyítás: Ha $v_1, \dots, v_k$ lineárisan függő rendszert alkotnak, akkor definíció szerint van olyan vektor, amely legalább kétféleképpen kombinálható belőlük:

$$\gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_k v_k = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k,$$

és az együtthatók között vannak különbözők. Rendezve:

$$(\gamma_1 - \beta_1) v_1 + \cdots + (\gamma_k - \beta_k) v_k = 0.$$

Mivel van olyan i, hogy $\gamma_i \neq \beta_i$, ezért a baloldali együtthatók között van zérótól különböző.

Megfordítva, ha a zéróvektor triviálistól különbözően is kombinálható a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszerből, akkor a zérusvektor legalább kétféleképpen kombinálható, mert triviálisan minden vektorrendszerből kombinálható a zéróvektor. □

8.6. Tétel. *Egy V vektortér $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszere akkor és csakis akkor lineárisan független, ha a zérusvektor csak triviálisan kombinálható belőlük, azaz, ha*

$$\alpha_1 v_1 + \cdots \alpha_k v_k = 0 \textit{ akkor } \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0.$$

Bizonyítás: Az előző állítás kontrapozíciójáról van szó. □

8.7. Tétel. *A bázis nem más, mint*

- *lineárisan független generátorrendszer;*
- *maximális független vektorrendszer (azaz tetszőleges vektort hozzávéve már nem független);*
- *minimális generátorrendszer (azaz tetszőleges vektort elvéve, már nem lesz generátorrendszer).*

Bizonyítás: Az első állítás közvetlenül a definíció következménye.

Legyen most $e_1, \dots, e_n$ bázis, v tetszőleges vektor. Belátjuk, hogy $e_1, \dots, e_n, v$ már nem lineárisan független. Valóban, mivel $e_1, \dots, e_n$ bázis, ezért a v vektor lineárisan kombinálható belőlük:

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n,$$

illetve teljesül

$$v = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n + 0v$$

is. Másrészt v az $e_1, \dots, e_n, v$ vektorrendszerből másképpen is kombinálható:

$$v = 0e_1 + \dots + 0e_n + 1v, .$$

A v vektornak tehát kétféle lineáris kombinációját is megadtuk: $e_1, \dots, e_n, v$ már nem lineárisan független vektorrendszer.

Végezetül a harmadik állítás. A bizonyítás indirekt. Az előbbi bázisból tetszőleges vektort, például e_n-et vegyük el, s tegyük fel, hogy még mindig bázist kapunk. Az e_n vektor tehát lineárisan kombinálható belőlük:

$$e_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1}.$$

Ez azt jelenti, hogy az eredeti bázisban az e_n vektornak kétféle lineáris kombinációja is van:

$$e_n = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_{n-1} e_{n-1} + 0e_n,$$

és

$$e_n = 0e_1 + \ldots + 0e_{n-1} + 1e_n.$$

Ez ellentmondás. □

8.8. Tétel. *A $v_1, \dots, v_k$ vektorok akkor és csakis akkor lineárisan függők, ha valamelyikük lineárisan kombinálható a többiből*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer valamelyik tagja lineárisan kombinálható a többi vektorból. Legyen ez pl. v_1. Tehát

$$v_1 = \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k.$$

Rendezve:

$$-1v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots + \alpha_k v_k = 0.$$

Ez a zéróvektor nemtriviális lineáris kombinációja, mert az együtthatók között szerepel -1.

Megfordítva, tegyük fel, hogy a $v_1, \dots, v_k$ vektorrendszer lineárisan függő. Ez azt jelenti, hogy a zérusvektort nemtriviálisan is lehet lineárisan kombinálni belőlük:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0,$$

és az együtthatók között van zérustól különböző, pl. α_1. Ekkor

$$v_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 - \dots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} v_k,$$

azaz a zérustól különböző együtthatóval rendelkező tag lineárisan kombinálható a többiből. □

8.9. Következmény. *Ha egy vektorrendszer tartalmazza a zérusvektort, akkor az lineárisan függő.* — Valóban, a zérusvektor csupa 0 együtthatóval lineárisan kombinálható a többi vektorból.

8.10. Tétel. *A $v_1, \dots, v_k$ zérusvektort nem tartalmazó vektor k-as akkor és csakis akkor lineárisan függő, ha valamelyik vektora lineárisan kombinálható a megelőző vektorokból.*

Bizonyítás: Ha a v_i vektor $(1 \leq i \leq k)$ lineárisan kombinálható a megelőző tagokból:

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1},$$

akkor lineárisan kombinálható a $v_1, \dots, \hat{v}_i \dots v_k$ vektorrendszerből is (a kalap a vektor hiányát jelenti):

$$v_i = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_{i-1} v_{i-1} + 0 v_{i+1} + \ldots + 0 v_k,$$

tehát a vektorrendszer valamely tagja lineárisan kombinálható a többiből. Ez az előző tétel szerint azt jelenti, hogy a vektorrendszer lineárisan függő.

Most tegyük fel, hogy a $v_1, \dots, v_n$ vektorrendszer lineárisan függő. Ekkor a zérusvektor triviálistól különbözően is kombinálható belőlük:

$$\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0.$$

Az együtthatók között van nullától különböző, a legnagyobb indexű nullától különböző együttható legyen α_i. Tehát

$$\alpha_{i+1} = \ldots = \alpha_k = 0,$$

(vagy esetleg egyetlen együttható sem nulla, ekkor az utolsó nullától különböző együttható α_k). Ekkor v_i lineárisan kombinálható a megelőzőekből:

$$v_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i} v_1 - \cdots - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} v_{i-1}.$$

□

8.11. Tétel. (Kicserélési tétel.) *Egy k vektorral generált vektortér minden lineárisan független vektorrendszere legfeljebb k tagú.*

Bizonyítás: Legyen $a_1, \dots, a_k$ generátorrendszer, $b_1, \dots, b_l$ pedig lineárisan független vektorrendszer. Azt állítjuk, hogy $l \leq k$. Feltehetjük, hogy $a_i \neq 0$. (Ha mégis, akkor ezt a vektort elhagyva még mindig generátorrendszert kapunk.) Tekintsük a

$$b_l, a_1, \dots, a_k \qquad *$$

vektorrendszert. Ez lineárisan függő vektorrendszer, mert b_l lineárisan kombinálható az $a_1, \dots, a_k$ generátorrendszerből. Ez a vektorrendszer zérusvektort nem tartalmaz, tehát valamelyik tagja lineárisan kombinálható a megelőzőekből. Legyen ez a vektor a_i. Hagyjuk el ezt a vektort az előbbi vektorrendszerből:

$$b_l, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k, \qquad **$$

(a kalap a vektor hiányát jelenti.) Mivel $*$ mindegyik vektora lineárisan kombinálható $**$ vektoraiból, ezért a lineáris kombináció tranzitív tulajdonságát használva adodik, hogy $**$ is generátorrendszer.

Most $**$ vektoraihoz balról vegyük hozzá b_{l-1}-et:

$$b_{l-1}, b_l, a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_k. \qquad \overset{*}{**}$$

Az előző gondolatmenet megismételhető, tehát $\overset{*}{**}$ lineárisan függő, ezért valamelyik vektora lineárisan kombinálható az előtte levő vektorokból. Ez a vektor nem lehet b_l, mert a $b_1, \dots, b_l$ vektorrendszer lineárisan független a feltevés szerint. Ezért valamely a_j vektort tudjuk kombinálni a megelőző vektorokból. Elhagyva a $\overset{*}{**}$ vektorrendszerből ezt a vektort, még mindig generátorrendszert kapunk. Az eljárást tovább folytatva a $b_1, \dots, b_l$ vektorrendszer vektorait sorra ki tudjuk cserélni az $a_1, \dots, a_k$ vektorrendszer valamely vektorával. Ezért az a_s vektorok nem fogyhatnak el hamarabb, mint a b_r vektorok, ami pontosan a kívánt állítás. $\square$

8.12. Következmény. *Egy k vektorral generált vektortérben minden $k+1$ tagú vektorrendszer lineárisan függő.*

8.13. Tétel. *Egy k vektorral generált vektortérnek létezik legfeljebb k tagú bázisa, s minden bázisa azonos tagszámú.*

Bizonyítás: $a_1, \dots, a_k$ legyen generátorrendszer. Először hagyjuk el belőle az esetleg előforduló nullvektorokat, így egy legfeljebb k tagú generátorrendszerhez jutunk:

$$a_1, \dots, a_s \ (s \leq k). \qquad *$$

Ha a $*$ vektorrendszer lineárisan független, akkor ez bázis, s a bizonyítás kész. Ha lineárisan függő vektorrendszerrel állunk szemben, akkor van olyan a_i vektor $*$-ban, mely a többiből kifejezhető. Ezt elhagyva a kapott

$$a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, a_s \qquad **$$

vektorrendszer még mindig generátorrendszer a lineáris kombináció tranzitív tulajdonságát használva: $*$ minden vektora lineárisan kombinálható $**$-ból. Az eljárást addig folytatjuk, míg lineárisan független vektorrendszerhez (lineárisan független generátorrendszerhez) nem jutunk. Az eljárás megszakad legkésőbb akkor, amikor egyetlen vektor marad, mert egyetlen nemnullvektor lineárisan független rendszert alkot. Van tehát legfeljebb k tagú bázis.

Hátra van még annak belátása, hogy bármely két bázis azonos tagszámú. Legyen $\mathcal{A} = (a_1, \dots, a_r)$ illetve $\mathcal{B} = (b_1, \dots, b_s)$ két bázis ugyanabban a végesen generált vektortérben. Tekintsük először $\mathcal{A}$-t generátorrendszernek, $\mathcal{B}$-t pedig lineárisan független vektorrendszernek. Alkalmazva a kicserélési tételt: $s \leq r$. Most fordítva, tekintsük $\mathcal{B}$-t generátorrendszernek, $\mathcal{A}$-t lineárisan független vektorrendszernek: $r \leq s$. Ez azt jelenti, hogy $r = s$. $\square$

8.14. Definíció. Egy végesen generált V vektortér *dimenzió*ján bázisainak közös tagszámát értjük, s ezt $\dim V$-vel jelöljük. A O triviális vektortér dimenzióján definíció szerint 0-t értünk. Az $\mathcal{L}(v_1, \ldots, v_k)$ dimenzióját a $(v_1, \ldots, v_k)$ vektorrendszer *rang*jának nevezzük.

Példa. A szabadvektorok vektortere 3 dimenziós vektortér.

Példa. A skalár n-esek $\mathbb{R}^n$ tere n dimenziós vektortér, s benne bázis a következő vektorrendszer:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ezt a bázist $\mathbb{R}^n$ *kanonikus bázis*ának nevezzük.

Példa. $\mathcal{P}$ nem végesen generált, míg a legfeljebb n-edfokú polinomok $\mathcal{P}^n$ tere $n+1$ dimenziós. Benne bázis:

$$1, x, x^2, \ldots, x^n$$

A bázissal kapcsolatosan megfogalmazhatunk néhány további egyszerű állítást.

8.15. Tétel. *Legyen W az n dimenziós V vektortér n dimenziós altere. Ekkor $W = V$.*

Bizonyítás: W bázisa egyben V bázisa, mert n tagú lineárisan független vektorrendszer. □

8.16. Tétel. *Legyen V n dimenziós vektortér, $r < n$ pozitív egész és $v_1, \ldots, v_r$ lineárisan független vektorrendszer V-ben. Ekkor léteznek olyan $v_{r+1}, \ldots, v_n$ vektorok, hogy $v_1, \ldots, v_n$ bázis V-ben.*

Bizonyítás: $v_1, \ldots, v_r$ nem lehet bázis, mert $r < n$. Ez azt jelenti, hogy ez a vektorrendszer nem maximális lineárisan független rendszer, azaz bővíthető úgy egy v_{r+1} vektorral, hogy még mindig lineárisan független vektorrendszert kapjunk. Ha $r + 1 = n$, akkor a bizonyítással készen vagyunk, mert $v_1, \ldots, v_n$ n tagú lineárisan független vektorrendszer egy n dimenziós vektortérben. Ha $r + 1 \neq n$, akkor ismételjük meg az előző gondolatmenetet, míg n tagú lineárisan független vektorrendszert kapunk. □

8.17. Tétel. *Egy n dimenziós vektortér minden altere legfeljebb n dimenziós vektortér.*

Bizonyítás: Ha a szóban forgó $W \subset V$ altér csak a zéróvektort tartalmazza, akkor ennek a dimenziója definíció szerint 0. Tegyük fel, hogy $W \neq O$. Ekkor W-ben van nemzéró vektor, amelyet bővítsünk W-ben maximális független vektorrendszerré (esetleg már a felvett nemzéró vektor is maximális független vektorrendszer). Ez véges sok vektor hozzávételével megtehető mert W vektorai egyben V vektorai is, s V-ben legfeljebb n lineárisan független vektor vehető fel. Tehát W is végesen generált, s bázisa legfeljebb n tagú. □

8.18. Tétel. *Egy V vektortér bármely két V_1 és V_2 alterére:*

$$\dim(V_1 \cap V_1) + \dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2.$$

Bizonyítás: Gyakorlat. Legyen $\dim V_1 = n_1$, $\dim V_2 = n_2$, $\dim(V_1 \cap V_2) = m$. Legyen $e_1, \dots, e_m$ $V_1 \cap V_2$ bázisa. Ezek a vektorok V_1-ben és V_2-ben is benne vannak. Egészítsük ki ezt a vektorrendszert először V_1 bázisává:

$$e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_k \ (k + m = n_1),$$

illetve V_2 bázisává:

$$e_1, \dots, e_m, b_1, \dots, b_l \ (l + m = n_2).$$

Azt látjuk be, hogy

$$e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l$$

bázis $V_1 + V_2$-ben. (Ez valóban az állítást jelenti, mert: $m + (k + m + l) = (k + m) + (l + m)$.)

Először azt látjuk be, hogy

$$e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l \qquad *$$

generátorrendszer $V_1 + V_2$-ben. Valóban $V_1 + V_2$ minden vektora felbontható egy V_1-beli v_1 és egy V_2-beli v_2 vektor összegére. v_1 lineárisan kombinálható a $e_1, \dots, e_m, a_1, \dots, a_k$ vektorokból, v_2 pedig lineárisan kombinálható az $e_1, \dots, e_m, b_1, \dots, b_l$ vektorokból. Tehát $v_1 + v_2$ lineárisan kombinálható a $*$ vektorrendszerből.

Hátra van annak belátása, hogy a $*$ vektorrendszer lineárisan független. Állítsuk elő a zérusvektort $*$ lineáris kombinációjaként!

$$0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l. \qquad \square$$

Legyen

$$b = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l \in V_2 \qquad \dagger$$

$\square$ miatt $b \in V_1$ is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $b \in V_1 \cap V_2$, azaz lineárisan kombinálható a következőképpen is:

$$b = \nu_1 e_1 + \dots + \nu_m e_m. \qquad \ddagger$$

Kivonva a $\dagger$-ból $\ddagger$-ot:

$$0 = \beta_1 b_1 + \dots + \beta_l b_l - (\nu_1 e_1 + \dots + \nu_m e_m)$$

adódik. Itt a nullvektort bázisból kombináltuk, tehát mindegyik kombinációs együttható 0:

$$\beta_1 = \ldots = \beta_l = \nu_1 = \ldots = \nu_m = 0.$$

Írjuk vissza az eredményt $\square$-ba:

$$0 = \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_k a_k + \gamma_1 e_1 + \dots + \gamma_m e_m.$$

$a_1, \dots, a_k, e_1, \dots, e_m$ azonban lineárisan független rendszer, tehát $\square$-ben valamennyi kombinációs együttható 0. A nullvektort $*$-ból tehát csak triviálisan tudtuk kombinálni ami azt jelenti, hogy $*$ lineárisan független rendszer. $\square$

9. Alterek direkt összege

9.1. Definíció. Akkor mondjuk, hogy a V vektortér a $V_1, \dots, V_k$ altereinek a direkt összege, ha V-nek minden v vektora előáll egy és csakis egyféleképpen

$$v = v_1 + \cdots + v_k$$

alakban, ahol $v_1 \in V_1, \dots, v_k \in V_k$. Jelölése: $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$.

9.2. Tétel. *A V vektortér akkor és csakis akkor direkt összege a $V_1, V_2, \dots, V_m$ altereinek, ha ezen alterek (tetszőleges) bázisainak egyesítése V bázisa.*

Bizonyítás: Előadáson csak két összeadandóra, egyszerűbb jelölésekkel. (Ekkor nincs szükség kettős indexekre, lehet más betűt használni. Teljesüljön először, hogy

$$V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_m, \tag{9.2}$$

továbbá V_i dimenziója legyen s_i. $e_{11}, \dots, e_{1s_1}$ legyen V_1,...,$e_{m1} \dots, e_{ms_m}$ pedig V_m bázisa. Először belátjuk, hogy

$$e_{11} \dots, e_{ms_m}$$

generátorrendszere V-nek. Legyen $x \in V$ tetszőleges vektor. 9.2 miatt x előáll V_i-ből vett vektorok összegeként:

$$x = x_1 + \cdots + x_m, \text{ ahol } x_i \in V_i.$$

Tehát:

$$\begin{aligned} x = x_1 + \cdots + x_m &= \\ = \quad & \alpha_{11}e_{11} + \cdots + \alpha_{1s_1}e_{1s_1} + \\ & + \alpha_{21}e_{21} + \cdots + \alpha_{2s_2}e_{2s_2} + \\ \vdots \quad & \\ & + \alpha_{m1}e_{m1} + \cdots + \alpha_{ms_m}e_{ms_m}, \end{aligned}$$

azaz beláttuk, hogy a bázisok egyesítése generátorrendszer.

Most belátjuk, hogy a bázisok egyesítése lineárisan független rendszer is. Kombináljuk ehhez a vektorokból a zérusvektort:

$$\beta_{11}e_{11} + \cdots + \beta_{1s_1}e_{1s_1} + \cdots + \beta_{m1}e_{m1} + \cdots + \beta_{ms_m}e_{ms_m} = 0.$$

Itt

$$\begin{aligned} y_1 = \beta_{11}e_{11} + \cdots + \beta_{1s_1}e_{1s_1} \quad &\in \quad V_1 \\ &\vdots \\ y_m = \beta_{m1}e_{m1} + \cdots + \beta_{ms_m}e_{ms_m} \quad &\in \quad V_m, \end{aligned}$$

és
$$y_1 + \cdots + y_m = 0.$$

9.2 miatt azonban a zóróvektort a V_i alterekből vett vektorok összegeként egyértelműen lehet felírni, azaz $y_i = 0$, tehát minden $\beta_{i\ldots}$ együttható zéró. Ez a kívánt lineáris függetlenséget jelenti.

Megfordítva, tegyük fel, hogy az
$$\mathcal{A} = \{e_{11}, \ldots, e_{1s_1}; \ldots; e_{m1}, \ldots, e_{ms_m}\}$$

vektorrendszer a $V_1, \ldots, V_m$ bázisainak egyesítése (az előbbiekben alkalmazott jelölések szerint), és $\mathcal{A}$ egyben V bázisa is. Ekkor minden $x \in V$ egyértelműen felírható

$$\begin{aligned} x &= \alpha_{11}e(11) + \cdots + \alpha_{1s_1}e_{1s_1} + \alpha_{21}e_{21} + \cdots + \alpha_{2s_2}e_{2s_2} + \cdots \alpha_{m1}e_{m1} + \cdots + \alpha_{ms_m}e_{ms_m} = \\ &= x_1 + \cdots + x_m \end{aligned}$$

alakban, ahol

$$\begin{aligned} \alpha_{11}e_{11} + \cdots + \alpha_{1s_1}e_{1s_1} &= x_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{m1}e_{m1} + \cdots + \alpha_{ms_m}e_{ms_m} &= x_m. \end{aligned}$$

Azaz minden $x \in V$ vektort előállítottunk $V_1, \ldots, V_m$-ből vett vektorok összegeként. Tekintsünk egy
$$x = x'_1 + \cdots + x'_m \text{ ahol } x'_i \in V_i$$

összeget. Ekkor

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha'_{11}e_{11} + \cdots + \alpha'_{1s_1}e_{1s_1} \\ &\vdots \\ x'_m &= \alpha'_{m1}e_{m1} + \cdots + \alpha'_{ms_m}e_{ms_m}, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} x &= \alpha'_{11}e(11) + \cdots + \alpha'_{1s_1}e_{1s_1} + \alpha'_{21}e_{21} + \cdots + \alpha'_{2s_2}e_{2s_2} + \cdots \alpha'_{m1}e_{m1} + \cdots + \alpha'_{ms_m}e_{ms_m} = \\ &= x_1 + \cdots + x_m. \end{aligned}$$

Ezt 9.2-el összehasonlítva $\alpha_{ij} = \alpha'_{ij}$, aza $x_i = x'_i$ adódik. □

9.3. Következmény. $V = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k \implies \dim V_1 + \cdots + \dim V_k = \dim V$.

9.4. Tétel. *Egy vektortér akkor és csakis akkor n dimenziós, ha n számú egydimenziós alterének direkt összege.*

Bizonyítás: Ha a V vektortér n számú egydimenziós alterének direk összege, akkor ezen alterekből vett bázisok egyesítése az előző tétel miatt V bázisa is, tehát V n dimenziós. Megfordítva, legyen $e1, \ldots, e_n$ bázis V-ben. Ekkor

$$V = \mathcal{L}(e_1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{L}(e_n)$$

triviálisan teljesül, hiszen ez pontosan azt jelenti, hogy V tetszőleges vektora egyértelműen előáll az $e_1, \ldots, e_n$ vektorok lineáris kombinációjaként. □

9.5. Tétel. *Ha A és B alterei a V vektortérnek, akkor $V = A \oplus B$ ekvivalens azzal, hogy $A + B = V$ és $A \cap B = O$.*

Bizonyítás: Először tegyük fel, hogy teljesül $A \oplus B = V$. $A + B \subset V$ azért teljesül, mert A és B V részhalmazai, $V \subset A + B$ pedig azért, mert $V = A \oplus B$ garantálja, hogy minden V-beli vektor felbontható A-ból és B-ből vett vektorok összegére. Tehát $A + B = V$. Ha $x \in A$ és $x \in B$, akkor

$$x = x + 0 = 0 + x$$

s a felbontás egyértelműsége miatt $x = 0$. Beláttuk, hogy $A \cap B = O$.

Megfordítva, teljesüljön most, hogy $A+B = V$, $A \cap B = O$. $A+B = V$ miatt minden V-beli vektor előállítható A-ból vett és B-ből vett vektorok összegére, csak a felbontás egyértelműségét kell belátni. Legyen most

$$\begin{aligned} x &= a + b, \text{ ahol } a \in A,\ b \in B, \\ x &= a' + b' \text{ ahol } a' \in A,\ b' \in B. \end{aligned}$$

A két relációt kivonva egymásból:

$$0 = a - a' + b - b' \implies a - a' = b' - b.$$

$a - a' \in A$, mert két A-beli vektor különbsége, $b' - b \in B$, mert két B-beli vektor különbsége. Azonban $A \cap B = O$, tehát

$$a - a' = 0 \implies a = a',\ b' - b = 0 \implies b = b',$$

tehát a felbontás egyértelmű. □

9.6. Tétel. *Egy végesen generált vektortér minden altere direkt összeadandó, azaz mindegyik altérhez létezik olyan altér, hogy direkt összegeben kiadják az eredeti vektorteret.*

Bizonyítás: Legyen A altér a V vektortérben. Legyen $a_1, \ldots, a_r$ A bázisa. Mivel ez V-ben lineárisan független rendszer, ezért kiegészíthető V bázisává valamely $b_1, \ldots, b_s$ vektorrendszerrel. Legyen $B = \mathcal{L}(b_1, \ldots, b_s)$. Mivel az A és B egy bázisának egyesítése V bázisát adja, ezért $A \oplus B = V$. □

10. Lineáris sokaság, faktortér

10.1. Definíció. Legyen H altere a V vektortérnek, továbbá $v \in V$ tetszőleges vektor. A

$$v + H = \{v + h \mid h \in H\}$$

halmazt H *iránytérű lineáris sokaság*nak nevezzük. A $v + H$ lineáris sokaságot gyakran a H altér *eltoltjának* is mondjuk.

Példa. Egyenesek és síkok: legyen $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{V}$ tetszőleges szabadvektor, $\boldsymbol{v} \in \mathbb{V}$ nem nullvektor. Az

$$\{\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{v} | t \in \mathbb{R}\}$$

halmaz lineáris sokaság, irányterének bázisa $\boldsymbol{x}_0$. Legyen $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{V}$ tetszőleges szabadvektor, $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{V}$ lineárisan független szabadvektorok. Az

$$\{\boldsymbol{x}_0 + \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} | \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

halmaz lineáris sokaság, iránytere $\mathcal{L}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

10.2. Tétel. *Legyen H altere a V vektortérnek. Értelmezzük V-ben a következő, $\sim$-el jelölt relációt: $x \sim y$, ha $x - y \in H$. Azt állítjuk, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, továbbá az ekvivalenciaosztályok pontosan a H iránytérű lineáris sokaságok.*

Bizonyítás: $\sim$ reflexív: $x \sim x$, mert $x - x = 0 \in H$. $\sim$ szimmetrikus: $x \sim y \implies x - y \in H \implies -(x - y) = y - x \in H \implies y \sim x$. $\sim$ tranzitív: $x \sim y \wedge y \sim z \implies x - y \in H \wedge y - z \in H \implies (x - y) + (y - z) = x - z \in H \implies x \sim z$. Beláttuk, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció.

Most belátjuk, hogy egy $x \in V$ vektor által reprezentált ekvivalenciaosztály pontosan $x + H$. Először belátjuk, hogy minden $x + H$-ból vett vektor ekvivalens x-hez. Valóban, legyen $x + h \in x + H$. Ekkor $(x + h) - x = h \in H$. Legyen most egy y-al jelölt vektor x-hex ekvivalens! Ekkor $h = y - x \in H$, azaz $y = x + h \in x + h$. □

10.3. Következmény. Tételünkből következik, hogy minden egyes $x \in V$ vektor pontosan egy H iránytérű lineáris sokaságban van benne ($H \subset V$ rögzített altér.) Ilyenmódon a zéróvektor is csak egy H iránytérű lineáris sokaságban van benne, $0 + H = H$-ban. Ez az egy H iránytérű lineáris sokaság altér. Megállapodunk abban, hogy egy H iránytérű lineáris sokaság vektorait az illető lineáris sokaság reprezentánsainak is mondjuk, hiszen az előző tétel szerint a lineáris sokaságok tekinthetők egy ekvivalenciareláció ekvivalenciaosztályainak.

10.4. Definíció. *Egy lineáris sokaság* dimenzió*ján irányterének dimenzióját értjük.*

10.5. Definíció. A $a + H$ és $b + H$ közös iránytérű lineáris sokaságok *összeg*én az $(a + b) + H$ lineáris sokaságot értjük. A $a + H$ lineáris sokaság α *skalárral való szorzat*án pedig a $(\alpha a) + H$ lineáris sokaságot.

10.6. Tétel. *A lineáris sokaságok összege és skalárral való szorzata független a reprezentánsok választásától.*

Bizonyítás: Legyen $a' \in a+H$, $b' \in b+H$, azt állítjuk, hogy $(a+b)+H = (a'+b')+H$. Ehhez azt kell belátni, hogy az $a+b$ és $a'+b'$ vektorok különbsége H-ban van. Valóban:

$$(a+b)-(a'+b') = (a-a')+(b-b') \in H.$$

Hasonlóan, belátjuk, hogy $(\alpha a)+H = (\alpha a')+H$.

$$\alpha a - \alpha a' = \alpha(a-a') \in H$$

□

10.7. Tétel. *Egy V vektortér H altere szerint vett összes lineáris sokaságok halmaza vektortér az összeadás és skalárral való szorzásra nézve. Ezt a vektorteret a V vektortér H altér szerint vett* faktorterének *mondjuk, és V/H-val jelöljük.*

Bizonyítás: Könnyű látni, hogy $(V/H,+)$ Abel csoport, csak annyit jegyzünk meg, hogy V/H zéróeleme H, $a+H$ additív inverze pedig $-a+H$.

Ellenőrízzük a vektortér axiómakat! (Megjegyezzük, hogy az alábbi egyszerű levezetésekben mindig tisztázzuk az összeadásjel jelentését, mert a $+$ jel többféle értelemben is szerepel!)

$$\alpha\left((a+H)+(b+H)\right) = \alpha\left((a+b)+H\right) = (\alpha(a+b))+H = (\alpha a+\alpha b)+H = (\alpha a)+H+(\alpha b)+H.$$

$$(\alpha+\beta)(a+H) = ((\alpha+\beta)a)+H = (\alpha a+\beta a)+H = (\alpha a)+H+(\beta a)+H.$$

$$(\alpha\beta)(a+H) = (\alpha\beta a)+H = (\alpha(\beta a))+H = \alpha\left((\beta a)+H\right) = \alpha\left(\beta(a+H)\right).$$

$$1(a+H) = (1a)+H = a+H.$$

□

10.8. Tétel. *Legyen H egy végesen generált V vektortér altere. Ekkor*

$$\dim V/H = \dim V - \dim H.$$

Bizonyítás: Legyen $(x_1,\ldots,x_m)$ H egy bázisa. Egészítsük ki ezt a vektorrendszert V bázisává az $x_{m+1},\ldots,x_n$ vektorokkal. Azt állítjuk, hogy a

$$x_{m+1}+H,\ldots,x_n+H$$

vektorrendszer V/H bázisa. Először belátjuk ezen vektorok lineáris függetlenségét. Kombináljuk belőlük V/H nullvektorát:

$$\alpha_{m+1}(x_{m+1}+H)+\ldots+\alpha_n(x_n+H) = H.$$

A skalárral való szorzás és az összeadás definíciója szerint

$$(\alpha_{m+1}x_{m+1}+\ldots+\alpha_n x_n)+H = H,$$

azaz $\alpha_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_n x_n \in H$. Innen következik, hogy valamennyi együttható 0, hiszen a $\alpha_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_n x_n$ vektor H egy direkt komplementerében és H-ban is benne van, tehát csak zéróvektor lehet.

Belátjuk, hogy

$$x_{m+1} + H, \ldots, x_n + H$$

V/H generátorrendszere. Legyen $x + H \in V/H$ tetszőleges lineáris sokaság. V megadott bázisával x lineárisan kombinálható:

$$x = (\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_m x_m) + (\alpha_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_n x_n).$$

Az első zárójelben levő tag H-ból való, tehát

$$x \sim (\alpha_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_n x_n),$$

vagy lineáris sokaságokra áttérve:

$$x + H = (\alpha_{m+1}x_{m+1} + \ldots + \alpha_n x_n) + H = \alpha_{m+1}(x_{m+1} + H) + \ldots + \alpha_n(x_n + H),$$

ami a bizonyítandó állítás. $\square$

3. fejezet

Mátrixok, lineáris egyenletrendszerek és determinánsok

11. Műveletek mátrixokkal

11.1. Definíció. Legyenek $n, m \in \mathbb{N}$, $n, m \geq 1$ rögzített egészek, továbbá az a_{ij} skalárok ($i = 1, \dots, m$ és $j = 1 \dots, n$) egy rögzített test elemei. (Ez a test nálunk leggyakrabban $\mathbb{R}$, vagy esetleg $\mathbb{C}$) Az

$$(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{m1}, \dots, a_{mn})$$

rendezett skalár $m \cdot n$-est, amit m sorban és n oszlopban a következő alakban írunk fel:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$m \times n$ *típusú mátrix*nak nevezzük. Az összes $m \times n$ típusú mátrixok halmazát $\mathcal{M}_{m \times n}$ jelöli. Az előbbi mátrixot röviden $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m \times n}$ jelöli. Az

$$\begin{pmatrix} a_{1r} \\ a_{2r} \\ \vdots \\ a_{mr} \end{pmatrix}$$

$m \times 1$ típusú mátrixot az előbbi mátrix r-edik oszlopának nevezzük ($r = 1, \dots, n$), míg az

$$\begin{pmatrix} a_{s1} & a_{s2} & \dots & a_{sn} \end{pmatrix}$$

$1 \times n$ típusú mátrixot az s-edik sorának. Az a_{ij} elem tehát a mátrix i-edik sorának j-edik eleme. Az egyetlen oszlopból álló mátrixot *oszlopmátrix*nak, vagy *oszlopvektor*nak, míg az egyetlen sorból álló mátrixot *sormátrix*nak vagy *sorvektor*nak nevezzük. Egy skalárt tekinthetünk 1×1

típusú mátrixnak. Ha a mátrix oszlopainak a száma megegyezik a mátrix sorai számával, akkor *négyzetes mátrix*ról beszélünk. Egy $n \times n$ típusú négyzetes mátrix *fődiagonálisá*nak, vagy *főátlójának* nevezzük az $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$ skalár n-est. Ezek az elemek a mátrix egyik „geometriai" átlójában vannak:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

A másik átlót *mellékátló*nak is hívjuk. Ha egy mátrix mindegyik eleme 0, akkor azt *zérómátrix*nak nevezzük. A zérómátrixot is 0 jelöli. Gyakran hasznos az A mátrix i. sorának j. elemét A_{ij}-vel is jelölni.

A paragrafus további részében műveleteket értelmezünk mátrixokkal.

11.2. Definíció. Legyenek $(a_{ij}) = A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $(b_{ij}) = B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ azonos típusú mátrixok. Ezek *összege* az az ugyanilyen típusú $A + B \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix, mely i-edik sorának j-edik eleme megegyezik $a_{ij} + b_{ij}$-vel. Úgy is fogalmazhatunk, hogy az azonos típusú mátrixokat komponensenként adjuk össze.

Legyen c tetszőleges skalár, $(a_{ij}) = A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. A $cA \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix az az ugyanilyen típusú mátrix, mely i-edik sorának j-edik eleme megegyezik ca_{ij}-vel.

11.3. Tétel. *$\mathcal{M}_{m\times n}$ $n \cdot m$ dimenziós vektortér $\mathbb{F}$ fölött. Azaz $(\mathcal{M}_{m\times n}, +)$ kommutatív csoport, melyben a zéróelem a zérómátrix, az A mátrix additív inverze a $-A = -1 \cdot A$ mátrix. A skalárral való szorzásra pedig teljesülnek az alábbi tulajdonságok:*

$$\begin{aligned} \alpha(A+B) &= \alpha A + \alpha B \\ (\alpha+\beta)A &= \alpha A + \beta A \\ (\alpha\beta)A &= \alpha(\beta A) \\ 1A &= A \end{aligned}$$

Bizonyítás: A mátrixok összeadásának és skalárral való szorzásának definíciója alapján valamennyi tulajdonság visszavezethető a testbeli megfelelő műveleti tulajdonságra.

$\mathcal{M}_{m\times n}$-ben egy bázist úgy kapunk, hogy tekintjük azt a különböző $m \cdot n$ darab mátrixot melyek mindegyike egyetlen 1-est tartalmaz, a többi mátrixelem nulla. (Kanonikus bázis.) □

11.4. Definíció. Legyen $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix. Ennek $A^t = (b_{ji})$-vel jelölt *transzponált*ja az az $A^t \in \mathcal{M}_{n\times m}$ mátrix, melyre $b_{ji} = a_{ij}$. Azaz A^t j-edik sorának elemei rendre megegyeznek A j-edik oszlopának elemeivel. Egy mátrixot *szimmetrikus*nak nevezünk, ha megegyezik a transzponáltjával, míg *ferdén szimmetrikus*nak, ha $A^t = -A$

Könnyen beláthatók a transzponálás alábbi egyszerű tulajdonságai:

11.5. Tétel.

$$\begin{aligned}(A+B)^t &= A^t + B^t \\ (\lambda A)^t &= \lambda A^t\end{aligned}$$

A következő mátrix művelet a szorzás.

11.6. Definíció. Legyen $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B \in \mathcal{M}_{n\times s}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ns} \end{pmatrix}.$$

Az $AB \in \mathcal{M}_{m\times s}$ *szorzatmátrix*ot úgy definiáljuk, hogy annak i-edik sorának k-adik eleme

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{jk} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}.$$

A definíció átfogalmazása a következő tétel:

11.7. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ és $B \in \mathcal{M}_{n\times s}$. Ha A sorvektorait $A_1, \dots, A_m$ illetve B oszlopvektorait $B^1, \dots, B^s$ jelöli, akkor*

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & \cdots & A_1B^s \\ \vdots & & \vdots \\ A_mB^1 & \cdots & A_mB^s \end{pmatrix}.$$

11.8. Definíció. $n \times n$-es I_n-el vagy ha nem okoz félreértést csak I-vel jelölt *egységmátrix* alatt olyan $n \times n$ típusú mátrixot értünk, melynek i-edik sorának j-edik eleme aszerint 0 vagy 1, hogy $i \neq j$ vagy $i = j$. Azaz

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Az egységmátrix jelölésére használjuk az alábbi szimbólumut, az ún. *Kronecker deltát* is: Legyen

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad i = j \\ 0, & \text{ha} \quad i \neq j. \end{cases}$$

Az egységmátrix tehát: $I_n = (\delta_{ij})$.

Ha A négyzetes mátrix, akkor képezhető AA, amelyet A^2 is jelöl. Hasonlóan képezhető A^n tetszőleges pozitív egészre. A^0 alatt az A-val azonos típusú egységmátrixot értjük.

11.9. Tétel. *Legyenek A, B, C mátrixok, λ tetszőleges skalár. Ekkor ha a műveletek elvégezhetőek, akkor érvényes a disztributív szabály:*

$$A(B+C) = AB + AC,$$

érvényes az asszociatív szabály

$$(AB)C = A(BC),$$

továbbá

$$A(\lambda B) = \lambda(AB).$$

Bizonyítás: A mátrixszorzás disztributivitása. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}$.

$$\begin{aligned}
&(A(B+C))_{ik} = \\
&= \sum_j a_{ij}(b_{jk} + c_{jk}) = \sum_j (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}c_{jk}) = \\
&= \sum_j a_{ij}b_{jk} + \sum_j a_{ij}c_{jk} = (AB)_{ik} + (AC)
\end{aligned}$$

Az asszociativitás: Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n\times r}$, $C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{r\times s}$.

$$\begin{aligned}
&((AB)C)_{ik} = \sum_{j=1}^{r} (AB)_{ij}\, c_{jk} = \\
&= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj} \right) c_{jk} = \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il}b_{lj}c_{jk} \right).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(A(BC))_{ik} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}(BC)_{lk} = \\
&= \sum_{l=1}^{n} a_{il} \left(\sum_{j=1}^{r} b_{lj}c_{jk} \right) = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{r} a_{il}b_{lj}c_{jk} \right).
\end{aligned}$$

Mindkét esetben ugyanazon indexű mátrixelemek szorzatának összegét kaptuk meg.

A harmadik tulajdonság:

$$(A(\lambda B))_{ik} = \sum_j a_{ij}(\lambda B)_{jk} = \sum_j a_{ij}(\lambda b_{jk}) = \lambda \sum_j a_{ij}b_{jk} = \lambda\,(AB)_{ik}\,.$$

□

Az asszociatív szabály egyszerű következménye, hogy ha r, s nemnegatív egészek, és A négyzetes mátrix, akkor

$$A^r A^s = A^s A^r = A^{r+s}.$$

Könnyű konkrét példát adni arra, hogy általában nem érvényes a mátrixszorzás kommutativitása, még négyzetes mátrixok esetén sem.

11.10. Tétel. *Legyenek A és B olyan mátrixok, hogy AB szorzatuk definiált legyen. Ekkor*

$$(AB)^t = B^t A^t.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} \left((AB)^t\right)_{ik} &= (AB)_{ki} = \sum_j a_{kj} b_{ji} \\ \left(B^t A^t\right)_{ik} &= \sum_j B^t_{ij} A^t_{jk} = \sum_j b_{ji} a_{kj}. \end{aligned}$$

□

11.11. Definíció. Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Ha létezik olyan $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, hogy

$$AB = BA = I_n$$

(ahol I_n az $n\times n$-es egységmátrix), akkor azt mondjuk, hogy A invertálható, s *inverz*e a B mátrix.

11.12. Tétel. *Ha egy négyzetes mátrix invertálható, akkor inverze egyértelmű.*

Bizonyítás: Tegyük fel, hogy az A négyzetes mátrixnak B_1 és B_2 is inverze. Ekkor

$$AB_1 = I.$$

Szorozzuk mindkét oldalt balról B_2-vel:

$$(B_2 A) B_1 = B_2.$$

A baloldali zárójelben az egységmátrix szerepel, tehát $B_1 = B_2$. □

Az A invertálható mátrix egyértelmű inverzére a A^{-1} jelölést alkalmazzuk.

A későbbiekben majd belátjuk, hogy mátrixok esetén a jobboldali inverz egyben baloldali inverz is, azaz inverz is (ha létezik.)

11.13. Tétel. *Ha az $A_1, \ldots, A_n$ azonos típusú négyzetes mátrixoknak van inverze, akkor van a szorzatmátrixnak is, és:*

$$(A_1 \cdots A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdots A_1^{-1}$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned} &(A_1 \cdots A_{n-1} A_n)(A_n^{-1} A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = \\ &\quad = (A_1 \cdots A_{n-1})(A_n A_n^{-1})(A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = (A_1 \cdots A_{n-1})(A_{n-1}^{-1} \cdots A_1^{-1}) = \ldots = I. \end{aligned}$$

Analóg módon számítjuk ki a másik oldali szorzást. □

11.14. Tétel. *Invertálható négyzetes mátrix esetén az inverzképzés és a transzponálás művelete felcserélhető, azaz:*

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}.$$

Bizonyítás: Szorzással ellenőrízzük, hogy A^t inverze valóban az (A^{-1}) mátrix. Használjuk fel a szorzatmátrix transzponáltjára vonatkozó összefüggést!

$$(A^t)(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = I^t = I.$$

A másik oldalról analóg módon. □

12. A Gauss elimináció, elemi mátrixok

12.1. Definíció. Egy mátrixon végrehajtott *(elemi) sor/oszlopművelet*en vagy másképpen *elemi sor/oszlop átalakítás*on a következő műveletek valamelyikét értjük:

- egy sor/oszlop skalárszorosának hozzáadása egy másik sorhoz/oszlophoz,
- két sor/oszlop felcserélése,
- egy sor/oszlop szorzása egy nemzéró skalárral.

Két mátrix *sorekvivalens*, ha egyik a másikból véges sok elemi sorátalakítással megkapható. Analóg módon definiálunk mátrixok oszlopekvivalenciáját.

12.2. Tétel. *Ha az A' mátrix az A mátrixból elemi sor- vagy oszlopművelettel származott, akkor van olyan elemi sor- vagy oszlopművelet, melyet végrehajtva A'-ből visszakapjuk A-t.*

Bizonyítás: Jelölje az A $i.$ sorát A_i. Adjuk hozzá például az A mátrix $i.$ sorának c-szeresét az $j.$ sorhoz ($i \neq j$, oszlopokra a bizonyítás analóg.) Az új mátrix $i.$ sora változatlanul A_i, míg $j.$ sora $A_j + cA_i$. Most adjuk hozzá az új mátrix $i.$ sorának $-c$-szeresét a $j.$ sorhoz. Visszakapjuk az eredeti mátrixot.

Két sor (oszlop) cseréje után felcserélve ugyanezen indexű sorokat (oszlopokat), visszakapjuk az eredeti mátrixot.

Ha egy sort (oszlopot) egy $c \neq 0$ számmal szoroztuk, akkor ugyanezen indexű sort (oszlopot) szorozzuk $\frac{1}{c}$-vel. Így szintén visszakapjuk az eredeti mátrixot. □

12.3. Definíció. Egy mátrix egy sorának *vezető eleme* a sor első zérustól különböző eleme (azaz a legkisebb oszlopindexű zérustól különböző elem), ha van ilyen.

Egy mátrixot *lépcsős alakú*nak nevezünk, ha rá teljesülnek az alábbi tulajdonságok:

- A zérótól különböző elemet is tartalmazó sorok megelőzik a csak zéróból álló sorokat.
- Ha két közvetlenül egymást követő nem csupa zéróból álló sort tekintünk, akkor a másodikban a vezető elem nagyobb oszlopindexű, mint a megelőző sor vezető eleme.

A lépcsős mátrixot speciálisan *trapéz alakú*nak nevezzük, ha a közvetlenül egymás után következő sorokban a vezető elemek oszlopindexe 1-ben különbözik.

Egy négyzetes mátrixot *háromszög alakúnak*, vagy felső diagonális mátrixnak nevezünk, ha teljesül, hogy

$$a_{ij} = 0, \text{ ha } i > j,$$

azaz a főátló alatti elemek mind nullák.

Példa. Példák.

...

Megjegyzés. Lépcsős mátrixból oszlopcserékkel mindig elérhető trapéz alakú mátrix.

12.4. Tétel. *Minden mátrix sorekvivalens egy lépcsős mátrixszal.*

Bizonyítás: A következő bizonyításban leírt eljárást nevezik *Gauss eliminációnak.* Válasszuk ki azt a legkisebb oszlopindexű oszlopot, amelyben van zérótól különböző elem. Ha ez nem az első oszlop, akkor ez azt jelenti, hogy ettől az oszloptól balra csak zéróelem van a mátrixban, tehát elemi sorátalakítások során ezek az oszlopok nem változnak. Az egyszerűség kedvéért ezeket az oszlopokat elhagyjuk. Ekkor az első oszlopban van zérótól különböző elem. Sorcserével elérhető, hogy ez az elem az első sorban legyen. Mátrixunk tehát sorekvivalens egy

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixszal, s $a_{11} \neq 0$. (Valójában az első oszloptól balra lehetnek még csak zérust tartalmazó oszlopok.) Az első sor $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ szeresét adjuk hozzá a második sorhoz! A következő mátrixot kapjuk:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Analóg elemi sorátalakítást végzünk a többi sorral is, tehát az első sor $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$-szeresét hozzáadjuk az i-edik sorhoz, az eredmény egy olyan mátrix, melyben az első oszlopban az első sorbeli zérótól különböző elem alatt csupa nulla van.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ezt az eljárást folytatjuk, úgy, hogy az első sort már nem változtatjuk, azaz csak a

$$\begin{pmatrix} 0 & a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

mátrixon végzünk elemi sorátalakítást. Itt az első oszlopban csak zéróelem van, tehát az előbbi eljárást az eggyel kevesebb oszlopot tartalmazó

$$\begin{pmatrix} a'_{22} & \dots & a'_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a'_{m2} & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}$$

mátrixon ismételjük meg.

Az eljárást folytatva az oszlopok számát mindig legalább eggyel csökkentjük, tehát az eljárás véges sok lépésben véget ér. (Szigorúbb formában indukcióval lehetne a bizonyítást leírni.) □

12.5. Definíció. *Elemi mátrixok*nak nevezzük az egységmátrixból elemi sorátalakítással kapott mátrixokat.

Példa. Példa a három típusra.

12.6. Tétel. *Amilyen elemi sorátalakítással származik az E elemi mátrix az egységmátrixból, olyan elemi sorátalakítással származik az EA mátrix az A mátrixból.*

Bizonyítás: P A tétel 3 állítása (ti. a lehetséges elemi sorátalakítások száma 3) közül csak egyet látunk be, a másik kettő bizonyítása hasonló. Először egy jelölést vezetünk be. Jelölje I_{rs} azt az $m \times m$-es mátrixot, melynek minden eleme zéró, kivéve az r-edik sor s-edik elemét ($1 \le r, s \le m$), amely 1:

$$I_{rs} = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots . 1_{rs} \dots . & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix}$$

Könnyen ellenőrízhető, hogy ha $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ tetszőleges mátrix, akkor

$$I_{rs}A = \begin{pmatrix} 0 & \dots\dots\dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & \dots\dots\dots & a_{sn} \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots\dots\dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow r. \text{ sor},$$

azaz a szorzatmátrix r-edik sora megegyezik A s-edik sorával, s az összes többi mátrixelem zérus. Speciálisan I_{rr}-el való szorzás hatása az, hogy A minden elemét zérusra cseréli, kivéve az r-edik sort, amit változatlanul hagy. Ha az $I_{rs} + I_{sr}$ mátrixszal szorzunk, akkor az előzőek szerint $(I_{rs} + I_{sr})A$ az a mátrix, melyben az s-edik sorban A r-edik sora áll, az r-edik sorban A s-edik sora, a többi mátrixelem pedig nulla.

Legyen E olyan mátrix, melyet az $n \times n$-es egységmátrixból az r-edik és az s-edik sor felcserélésével kaptunk, továbbá legyen A tetszőleges $n \times n$-es mátrix. Ekkor az EA mátrix az A mátrixból úgy kapható, hogy felcseréljük az r-edik és az s-edik sort.

E a következő alakban írható fel:

$$E = I_{rs} + I_{sr} + I_{11} + \cdots + \widehat{I_{rr}} + \cdots + \widehat{I_{ss}} + \cdots + I_{nn},$$

ahol a kalap a tag hiányát jelzi. Számítsuk ki az EA szorzatot:

$$EA = I_{rs}A + I_{sr}A + I_{11}A + \cdots + \widehat{I_{rr}A} + \cdots + \widehat{I_{ss}A} + \cdots + I_{nn}A.$$

A jobb oldalon pontosan az A mátrix áll az r-edik és s-edik sorának cseréjétől eltekintve. □

A Gauss elimináció az elemi mátrixok nyelvén a következőt jelenti:

12.7. Tétel. *Minden mátrixot véges sok elemi mátrixszal balról szorozva lépcsős mátrix kapható.*

13. Négyzetes mátrixok invertálhatósága

A következőekben kiderül, hogy az előzőekben megismert Gauss eliminációval egyszerűen el lehet dönteni, hogy egy mátrix invertálható-e, s ha igen meg lehet határozni az inverz mátrixot.

13.1. Tétel. *Minden elemi mátrix invertálható.*

Bizonyítás: Az elemi mátrixok tehát a következők:

a. az olyan mátrixok, melyeket úgy kaptunk az $n \times n$-es egységmátrixból, hogy az r-edik sort szoroztuk egy $c \neq 0$ számmal,

b. az olyan mátrixok, melyeket az $n \times n$-es egységmátrixból az i-edik és j-edik sor felcserélésével kaptunk,

c. az olyan mátrixok, melyeket az $n \times n$-es egységmátrixból úgy kapunk, hogy az r-edik sor c szeresét hozzáadjuk az s-edik sorhoz, miközben $r \neq s$.

Az a. esetben az A inverzmátrix az egységmátrixtól abban különbözik, hogy a diagonálisban az r-edik sorban 1 helyett $\frac{1}{c}$ van. (Tehát az inverzmátrix is elemi mátrix.) Mivel az E-vel való szorzás (balról) ilyenkor az A r-edik sorának c-vel való szorzását jelenti, ezért EA valóban egységmátrix. Az AE szorzat szintén egységmátrixot eredményez, mert az A-val való szorzás most E r-edik sorának $\frac{1}{c}$-vel való szorzását jelenti.

A b. esetben az elemi mátrix inverze önmaga, mert az r-edik és az s-edik sor kétszer végrehajtott cseréje az egységmátrixot eredményezi.

A c. esetben is az elemi mátrixot jelölje E. A C-vel jelölt inverzét az egységmátrixból úgy kapjuk, hogy az egységmátrix r-edik sorának $-c$-szeresét hozzádjuk az s-edik sorhoz. Így C szintén elemi mátrix. A 12.6. tételből tudjuk, hogy EC és CE is az egységmátrix. □

13.2. Tétel. *Legyen A négyzetes mátrix, A' pedig hozzá sorekvivalens mátrix. A akkor és csakis akkor invertálható, ha A'.*

Bizonyítás: Ha A sorekvivalens A'-vel, akkor léteznek olyan $E_1, \dots, E_k$ elemi mátrixok, hogy

$$A' = E_1 \cdots E_k A.$$

Tegyük fel, hogy A invertálható. Ekkor a jobb oldalon minden tényező invertálható, tehát a bal oldal is invertálható, és

$$A'^{-1} = A^{-1} E_k^{-1} \cdots E_1^{-1}$$

Megfordítva, ha A' sorekvivalens A-hoz, akkor ez megfordítva is teljesül, s az előző bizonyításrész megismételhető. □

A következő tétel egy szükséges és elégséges feltételt ad mátrixok invertálhatóságára. (A félév során még két ilyen feltételt fogunk megtanulni.)

13.3. Tétel. *Egy négyzetes mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha sorekvivalens az (ugyanolyan típusú) egységmátrixhoz.*

Bizonyítás: Legyen az A négyzetes mátrix sorekvivalens az egységmátrixhoz. Az előző tétel szerint ekkor invertálható.

Megfordítva, legyen A invertálható. Tudjuk, hogy A sorekvivalens egy lépcsős mátrixhoz, amely tehát invertálható. Ebben a lépcsős mátrixban nem lehet csupa zéróból álló sor, hiszen akkor az nem lenne invertálható (a mátrixszorzás definícióját használva.) Ez azt jelenti, hogy a lépcsős mátrix valójában egy háromszög alakú mátrix:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

és a fődiagonálisban nincs egyetlen zéró elem sem. Szorozzuk meg az i-edik sort $\frac{1}{a_{ii}}$-vel:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Most az utolsó sor $-a_{in}$ szeresét adjuk hozzá az i-edik sorhoz, $i = 1, \dots, n-1$. Így az utolsó oszlopban az utolsó elem kivételével minden elem zérus lett:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Ha ezt az eljárást elvégezzük az utolsó előtti,..., a 2.sorral is akkor az egységmátrixot kapjuk meg, ahonnan következik állításunk.. (Tulajdonképpen a Gauss eliminációt végezzük el visszafelé.)

□

A bizonyítás második részéből külön is kiemeljük az alábbi állítást:

13.4. Következmény. *Minden olyan háromszög alakú mátrix invertálható, melynek fődiagonálisában nincs zéró elem.*

13.5. Tétel. *Legyen A egy invertálható mátrix. A és A^{-1} egyaránt felírhatók elemi mátrixok szorzataként.*

Bizonyítás: Ha A invertálható, akkor sorekvivalens az egységmátrixszal. Mivel a Gauss eliminációt el tudjuk végezni elemi mátrixok szorzásával, ezért léteznek olyan $E_1, \ldots, E_k$ elemi mátrixok, hogy

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

A bal oldalon szereplő elemi mátrixok inverzével rendre beszorozva:

$$A = E_1^{-1} \cdots E_k^{-1},$$

illetve

$$A^{-1} = E_k \cdots E_1.$$

□

Az előzőekben leírt módszer egyszerű*gyakorlati módszert* ad mátrixok invertálhatóságának eldöntésére és az inverzmátrix meghatározására.

Megjegyzés. (Mátrix invertálása szimultán Gauss eliminációval.) Legyen adva egy A négyzetes mátrix, melyet Gauss eliminációval egységmátrixszá alakítottunk:

$$E_k \cdots E_1 A = I.$$

A mátrix tehát invertálható és inverze:

$$A^{-1} = E_k \cdots E_1 = E_k \cdots E_1 I.$$

Ez azt jelenti, hogy ha az A mátrixot Gauss eliminációval, azaz elemi sorátalakításokkal egységmátrixszá alakítjuk, s ugyanezeket az elemi sorátalakításokat végrehajtjuk az egységmátrixon, a végeredmény A inverze lesz. Tehát az eliminációt egyszerre, szimultán hajtjuk végre a két mátrixon, de az elemi sorátalakításokat az A határozza meg, az egységmátrix csak „elszenvedi”. (A módszer végrehajtásakor természetesen nem kell az elemi mátrixokat felírni, azoknak csak a bizonyításnál van szerepük.) Gyakorlatilag leírjuk egymás mellé az invertálandó mátrixot (bal oldal) és az egységmátrixot (jobb oldal), majd

1. Gauss eliminációval lépcsős alakúra hozzuk ezt a „hosszú” mátrixot. Ha a baloldali négyzetes mátrix nem tartalmaz csupa zéróból álló sort (háromszög alakú és a főátlóban nincs zérus), akkor a mátrix invertálható, s az eljárást folytatjuk.

2. Elemi sorátalakításokkal alulról fölfelé haladva elérjük, hogy a baloldalon egységmátrix legyen. A jobb oldalon az inverzmátrix van.

Példa. Egy példával illusztrálva.

14. Mátrix rangja

14.1. Definíció. Egy (véges) *vektorrendszer rangján* a vektorrendszer által generált altér dimenzióját értjük.

Legyen $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix. Az A oszlopvektorai $\mathbb{F}^m$ egy alterét generálják. Ennek dimenzióját az A *oszloprangjának* mondjuk. Az A sorvektorai $\mathbb{F}^n$ egy alterét generálják. Ennek dimenziója a mátrix *sorrang*ja.

A szakasz fő tétele a későbbiekben kimondja, hogy minden mátrix oszlop- és sorrangja megegyezik.

14.2. Tétel. $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, $X_1, \dots, X_n \in \mathbb{F}^n = \mathcal{M}_{n\times 1}$. *Ekkor*

$$\operatorname{rang}(AX_1, \dots, AX_n) \le \operatorname{rang}(X_1, \dots, X_n).$$

Bizonyítás: Az állítás onnan következik, hogy ha $(X_1, \dots, X_n)$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor $(AX_1, \dots, AX_n)$ is:

$$A(\alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n) = \alpha_1 AX_1 + \dots + \alpha_n AX_n;$$

azaz, ha a bal oldalon a linieáris kombináció zérusvektort ad, akkor a jobb oldalon is.

Tehát ha az $(AX_1, \dots, AX_n)$ vektorrendszerből lineárisan független részrendszert választunk ki, akkor a megfelelő vektorok az $(X_1, \dots, X_n)$ vektorrendszerből szintén lineárisan függetlenek. (Függőek nem lehetnek az előző észrevétel szerint.) $\square$

14.3. Tétel. *Egy elemi sorművelet nem változtatja meg a mátrixnak sem a sorrangját, sem az oszloprangját. Hasonlóan, egy elemi oszlopművelet nem változtatja meg a mátrixnak sem a sorrangját, sem az oszloprangját.*

Bizonyítás: (Sorcserére.) Két sor cseréje nyilván nem változtatja meg a sorrangot: a sorok által generált vektortér nem változik, ha a generáló vektorokat más sorrendben adjuk meg.

Most adjuk hozzá egy sor skalárszorosát egy mások sorhoz, vagy szorozzunk egy sort egy nemzéró skalárral. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a második sor c szeresét adjuk hozzá az első sorhoz, vagy az első sort szorozzuk $c \neq 0$-val. (Más indexekre analóg gondolatmenet alkalmazható.) Az új, B-vel jelölt mátrix sorai tehát:

$$B_1 = A_1 + cA_2, A_2, \cdots, A_m.$$

vagy

$$B_1 = cA_1, A_2, \cdots, A_m.$$

B sorainak, azaz a

$$B_1, A_2, \cdots, A_m$$

vektoroknak minden lineáris kombinációja egyben a A_1, $A_2 \dots A_m$ soroknak is lineáris kombinációja is, azaz

$$\mathcal{L}(B_1, A_2, \dots, A_m) \subset \mathcal{L}(A_1, A_2, \dots, A_m).$$

Az altér dimenziója a bennfoglaló vektortér dimenziójánál nagyobb nem lehet, azaz

$$\operatorname{sorrang} B \leq \operatorname{sorrang} A.$$

Most a B mátrixból állítsuk vissza az eredeti A mátrixot (ld. 12.2. tétel.) Az előbbi gondolatmenet megismételhető, azaz

$$\operatorname{sorrang} A \leq \operatorname{sorrang} B,$$

azaz

$$\operatorname{sorrang} A = \operatorname{sorrang} B.$$

Most belátjuk, hogy elemi sorátalakítás nem változtatja meg az oszloprangot. Először azt vegyük észre, hogy ha $(e_1, \ldots, e_n)$ jelöli $\mathbb{F}^n$ kanonikus bázisát, akkor

$$\operatorname{oszloprang} A = \operatorname{rang}(Ae_1, \ldots, Ae_n),$$

hiszen a jobb oldali vektorrendszer vektorai pontosan A oszlopai, amelyeket jelöljön a továbbiakban $(A_1, \ldots, A_n)$. Írjuk le az elemi sorátalakítást az E elemi mátrixszal való balszorzással.

$$\begin{aligned}
\operatorname{oszloprang}(EA) &= \operatorname{rang}(EAe_1, \ldots, EAe_n) = \\
&= \operatorname{rang}(EA_1, \ldots, EA_n) \leq \operatorname{rang}(A_1, \ldots, A_n) = \\
&= \operatorname{oszloprang} A.
\end{aligned}$$

Tehát

$$\operatorname{oszloprang} EA \leq \operatorname{oszloprang} A.$$

Az előző gondolatmenetet ismételten alkalmazva:

$$\operatorname{oszloprang} A = \operatorname{oszloprang}(E^{-1}EA) \leq \operatorname{oszloprang}(EA),$$

Ahonnan következik állításunk. □

14.4. Tétel. (Mátrixok rangszámtétele.) *Minden mátrix oszloprangja megegyezik a sorrangjával. (*Ezt a közös értéket a *mátrix rangjának* nevezzük és rang A-val jelöljük.)

Bizonyítás: Az állítás következik az alábbi állításból: Legyen A egy r sorrangú mátrix. Sorműveletek és oszlopműveletek véges sorozatával a mátrix olyan alakra hozható, hogy a diagonális első r eleme 1, a mátrix összes többi eleme 0:

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \ldots & 0 & \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\
 & & \ddots & & \\
0 & 0 & \ldots & 1 & \\
\hline
 & & 0 & & 0
\end{array}\right)$$

A mátrixot sorműveletekkel hozzuk először lépcsős alakra, majd oszlopműveletekkel (oszlopcserékkel) trapéz alakra:

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1s} & \dots \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss} & \dots \\ \hline & & 0 & & \end{array}\right) a_{11} \neq 0,\ a_{22} \neq 0,\ a_{ss} \neq 0$$

Itt az első s sor azonban lineárisan független, továbbá a sorrang az elimináció során nem változott meg, tehát $s = r$. Most az 1. oszlop $-\dfrac{a_{1i}}{a_{11}}$ szeresét adjuk hozzá az i. oszlophoz ($i = 2, \dots, m$)! Az alábbi mátrixot kapjuk:

$$\left(\begin{array}{ccccc} a_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2s} & \dots \\ & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{ss} & \dots \\ \hline & & 0 & & \end{array}\right).$$

Analóg módon eljárva az első r sornál, valóban a megadott alakot kapjuk. Ennek a mátrixnak azonban nyilvánvalóan az oszloprangja és sorrangja is r, továbbá az egész eljárás során egyik rang sem változott, tehát az eredeti mátrix sorrangja és oszloprangja is r (egyenlő). □

14.5. Következmény. *Mátrix rangja és a transzponáltja rangja megegyezik.*

14.6. Tétel. *Egy $n \times n$-es négyzetes mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha rangja n.*

Bizonyítás: Egy $n \times n$ típusú négyzetes mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha sorekvivalens az $n \times n$-es egységmátrixhoz. Utóbbinak azonban a rangja n. □

14.7. Tétel. $\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$. *Ha B invertálható, akkor* $\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(BA) = \operatorname{rang}(A)$.

Bizonyítás: A már ismert ötlettel belátjuk, hogy szorzat rangja nem negyobb az első tényező rangjánál:

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(ABe_1, \dots, ABe_n) = \operatorname{rang}(AB_1, \dots, AB_n) \leq \operatorname{rang} B.$$

Most ugyanezt alkalmazzuk a transzponáltakra:

$$\operatorname{rang}(AB) = \operatorname{rang}(AB)^t = \operatorname{rang}(B^t A^t) \leq \operatorname{rang} A^t = \operatorname{rang} A.$$

Ha B invertálható:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(ABB^{-1}) \leq \operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A,$$
$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(B^{-1}BA) \leq \operatorname{rang}(BA) \leq \operatorname{rang} A.$$

□

15. Lineáris egyenletrendszerek

15.1. Definíció. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}$ egy mátrix, $b_1, \ldots, b_m$ pedig skalárok. *Lineáris egyenletrendszer*nek nevezzük az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{$*$}$$

Az n számot az *ismeretlenek számának*, míg m-et az egyenletek számának nevezzük. Bevezetve az ismeretlenekből és a jobb oldali skalárokból képezett

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

oszlopmátrixokat, a $(*)$ lineáris egyenletrendszert az alábbi rövidített formában is felírhatjuk:

$$AX = B,$$

illetve az A mátrix $A_1 \ldots A_m$ soraival:

$$\begin{array}{rcl} A_1X & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ A_mX & = & b_m \end{array}$$

A $(*)$ lineáris egyenletrendszer *alapmátrix*ának nevezzük az A mátrixot, míg *bővített alapmátrix*ának a

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

mátrixot. Ezt röviden (A, B)-vel is jelöljük.

Ha a $b_1, \ldots, b_m$ skalárok mindegyike zéró, akkor *homogén* lineáris egyenletrendszerről beszélünk, míg ellenkező esetben *inhomogén* lineáris egyenletrendszerről. A $(*)$ lineáris egyenletrendszerhez *asszociált* homogén lineáris egyenletrendszer alatt a

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0. \end{array} \tag{$**$}$$

lineáris egyenletrendszert értjük.

Egy $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ skalár n-est a $(*)$ lineáris egyenletrendszer *megoldásának* nevezzük, ha teljesül

$$\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + \cdots + a_{1n}\xi_n &= b_1 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}\xi_1 + \cdots + a_{mn}\xi_n &= b_m. \end{aligned}$$

Triviális megoldás alatt a csupa zéró elemből álló megoldást nevezzük. Az ettől különböző megoldást pedig *nem triviális* megoldásnak.

15.2. Tétel. (Lineáris egyenletrendszerek megoldásának szerkezete.) *Legyen* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. *az* $AX = 0$ *homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai* $n - \operatorname{rang} A$ *dimenziós alteret alkotnak* $\mathbb{F}^n$*-ben.*

Az $AX = B$ *megoldható lineáris egyenletrendszer megoldóvektorai lineáris sokaságot alkotnak, ennek iránytere megegyezik az* $AX = 0$ *homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterével.*

Bizonyítás: A dimenzióra vonatkozó tételt később bizonyítjuk be.

A homogén eset. A megoldáshalmaz nyilván nem üres, mert $\mathbb{F}^n$ zéróvektora megoldás. Ha X_1 ill. X_2 két megoldás, továbbá α skalár, akkor a mátrixműveletek megfelelő tulajdonságait használva:

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = 0, \quad A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = 0.$$

Azaz két megoldás összege megoldás skalárszorosa megoldás.

Az inhomogén eset. Legyen X_1 és X_2 két (nem feltétlenül különböző) megoldás.

$$A(X_1 - X_2) = AX_1 - AX_2 = B - B = 0,$$

amiből az állítás következik. □

15.3. Tétel. *Ha egy lineáris egyenletrendszer bővített alapmátrixa sorekvivalens egy másik lineáris egyenletrendszer bővített alapmátrixával, akkor a két lineáris egyenletrendszer ekvivalens, azaz ugyanazok a megoldásaik.*

Bizonyítás: Legyenn $AX = B$ a szóban forgó lineáris egyenletrendszer, a sorátalakítást pedig írjuk le az E elemi mátrixszal való balszorzással. Ha $AX = B$ teljesül, akkor $(EA)X = E(AX) = EB$, tehát $(EA)X = (EB)$is □

A lineáris egyenletrendszerek megoldásának „filozófiája" a következő: A kibővített alapmátrixot elemi sorátalakításokkal lépcsős alakúra hozzuk, mivel az így kapott lineáris egyenletrendszer ekvivalens az eredetivel, ezért elegendő ezt az egyszerű szerkezetű lineáris egyenletrendszert megoldani. A lépcsős mátrixú lineáris egyenletrendszerek megoldása valóban egyszerű.

15.4. Tétel. *Egy lineáris egyenletrendszernek legyen lépcsős a kibővített alapmátrixa. Ez az egyenletrendszer akkor és csakis akkor megoldható, ha nincs a kibővített alapmátrixban olyan sor, melyben csak az utolsó elem zérótól különböző.*

Bizonyítás: Ha a kibővített alapmátrixban van olyan sor, amelyben csak az utolsó elem zérótól különböző, akkor az egyenletrendszer nyilván nem oldható meg. Be kell látni a megfordítást, azaz ellenkező esetben van az egyenletrendszernek megoldása. Az egyes egyenletekben a tagok megfelelő átrendezésével, majd az együtthatók és az ismeretlenek indexének ennek megfelelő átírásával elérhető, hogy az egyenletrendszer a következő alakú:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1k}x_k + a_{1,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \ a_{11} \neq 0\\
a_{22}x_2 + \cdots + a_{2k}x_k + a_{2,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \ a_{22} \neq 0\\
&\cdots\cdots\cdots\\
a_{kk}x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \cdots + a_{kn}x_n &= b_k, \ a_{kk} \neq 0,
\end{aligned}$$

ahol a $0 = 0$ sorokat nem írtuk ki. Ennek az egyenletrendszernek a megoldását a következőképpen kapjuk meg:

$$\begin{aligned}
x_n &= \xi_n \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges}\\
&\vdots\\
x_{k+1} &= \xi_{k+1} \in \mathbb{R} \text{ tetszőleges,}
\end{aligned}$$

majd az utolsó egyenletből kifejezzük x_k-t:

$$x_k = -\frac{a_{k,k+1}}{a_{kk}}\xi_{k+1} - \cdots - \frac{a_{k,n}}{a_{kk}}\xi_n + \frac{b_k}{a_{kk}}.$$

Mivel $a_{kk} \neq 0$, ezt valóban megtehettük. Visszafelé haladva a következő sorból kifejezzük x_{k-1}-t, és így tovább, végül az első sorból x_1-et.

Most bebizonyítjuk a megoldástér dimenziójára (korábban kimondott) tételt. Tekintsük az ún. bázismegoldásokat! Ezeket úgy kapjuk, hogy egy szabadon választható ismeretylennek az 1 értéket adjuk, a többinek 0-t. Ezt $n-k = n-\operatorname{rang} A$ féleképpen tehetjük meg. Az előzőek szerint ezekből a lineárisan független bázismegoldásokból az összes megoldás lineárisan kombinálható.

□

Alkalmazzuk ezt a tételt a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldására:

15.5. Következmény. *Ha egy homogén lineáris egyenletrendszerben az ismeretlenek száma nagyobb, mint az egyenletek száma, akkor annak van triviálistól különböző megoldása.*

15.6. Tétel. (Kronecker–Capelli tétel.) *Egy lineáris egyenletrendszer akkor és csakis oldható meg, ha alapmátrixának rangja megegyezik a bővített alapmátrix rangjával.*

(A tétel igaz homogén és inhomogén lineáris egyenletrendszerekre is, csak a homogén esetben semmitmondó.)

Bizonyítás: A lineáris egyenletrendszer mátrix alakja legyen $AX = B$, A oszlopai legyenek $A_1, \ldots, A_n$. Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor léteznek olyan $\xi_1, \ldots, \xi_n$ skalárok, hogy

$$\xi_1 A_1 + \cdots + \xi_n A_n = B,$$

azaz $B \in \mathcal{L}(A_1, \ldots, A_n)$, tehát $\operatorname{rang}(A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{rang}(A_1, \ldots, A_n, B)$, ami azt jelenti, hogy az alapmátrix rangja megegyezik a bővített alapmátrix rangjával.

Most induljunk ki abból, hogy az $\operatorname{rang} A = \operatorname{rang}(A, B)$. Válasszunk ki egy bázist az $A_1, \ldots, A_n$ vektorrendszerből! Ugyanez a kiválasztott vektorrendszer egyben $A_1, \ldots, A_n, B$ bázisa is lesz a feltétel miatt. B tehát lineárisan kombinálható a kiválasztott bázisból, azaz az ennél nem szűkebb $A_1, \ldots, A_n$ vektorrendszerből is. (A bázisban szereplő vektorok együtthatója legyen B megfelelő koordinátája, a többi együttható pedig 0). Az így kapott együtthatók az eredeti lineáris egyenletrendszer megoldását adják. □

16. A determinánsfüggvény tulajdonságai

A fejezet első definíciója előtt ismételjük át a harmadrendű determináns fogalmát!

16.1. Definíció. Legyen $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n \times n}$ négyzetes mátrix. Ennek $\det A$-val jelölt *determinánsán* a

$$\det A \stackrel{\text{jel.}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \cdot a_{1\sigma(1)} \cdot a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

számot értjük, ahol az összegzés kiterjed az $(1, 2, \ldots, n)$ számok összes σ permutációjára; továbbá

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 \text{ ha } \sigma \text{ páros permutáció} \\ -1 \text{ ha } \sigma \text{ páratlan permutáció.} \end{cases}$$

n-et a determináns *rendjének* is nevezzük. A $\det$ leképezést, amely minden $n \times n$-es mátrixhoz hozzárendeli a determinánsát *n-edrendű determináns függvény*nek is nevezzük.

Megjegyzés. Azaz egy n-edrendű mátrix determinánsát a definíció szerint úgy számíthatjuk ki, hogy egy $n!$ tagú összeget képezünk, melyben minden tag egy n tényezős szorzat. A szorzat tényezőit úgy kapjuk, hogy A minden sorából kiválasztunk pontosan 1 elemet úgy, hogy közben minden oszlopból is pontosan 1 elem szerepeljen. Ezt $+1$-gyel vagy -1-gyel szorozzuk aszerint, hogy a kiválasztott elemek oszlopindexei az $(1, 2, \ldots, n)$ számoknak páros vagy páratlan permutációját alkotják, miközben a sorindexek természetes sorrendben vannak.

Definíció alapján csak első, másod, vagy harmadrendű determinánst, vagy speciális alakú mátrix determinánsát érdemes kiszámolni. Gondoljunk arra, hogy egy általános 4×4 típusú mátrix determinánsához már 24 tagot kell összegezni. Elsőrendű determinánsra:

$$\det(a) = a.$$

A másodrendű és harmadrendű determináns kiszámítását már ismerjük. Néhány speciális alakú mátrix determinánsa közvetlenül a definíció alapján is egyszerűen kiszámítható:

16.2. Tétel. *Ha egy mátrix tartalmaz csak zérusból álló sort, akkor determinánsa 0. Egy háromszög alakú mátrix determinánsa megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával. Speciálisan, tetszőleges típusú egységmatrix determinánsa 1.*

Vezessük be az alábbi jelölést! Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, $x \in \mathbb{F}^n$ pedig egy sorvektor. $A_i(x)$ jelölje azt az $n \times n$-es mátrixot, melyet az A mátrixból úgy kapunk, hogy az i-edik sort x-re cseréljük.

16.3. Tétel. *A determináns függvény rendelkezik az alábbi tulajdonsággal:* $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$*:* $\det A_i(\alpha x + \beta y) = \alpha \det A_i(x) + \beta \det A_i(y)$*. (Linearitás a sorokban.)*

Bizonyítás: Válasszuk ki a determináns egy tagját!

$$\begin{aligned}
&\varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots \overset{i}{\smile}\!\!\!\!\!\! (\alpha x_{\sigma(i)} + \beta y_{\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \varepsilon(\sigma)\alpha \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} + \varepsilon(\sigma)\beta \cdot a_{1\sigma(1)} \cdots y_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \\
&= \alpha \det A_i(x) + \beta \det A_i(y).
\end{aligned}$$

□

A következőekben egy egyszerű módszert adunk egy mátrix determinánsának kiszámítására. Elemi sorátalakításokkal (akár sor skalárral való szorzása nélkül is) a mátrixot lépcsős alakra hozzuk. Ennek determinánsa már könnyen kiszámítható. Azt kell megvizsgálnunk, hogy elemi sorátalakításokkal hogyan változik a determináns értéke.

16.4. Tétel. (A determináns értékének változása elemi sorátalakításnál.) *Ha a B mátrix az A-ból két sor felcserélésével keletkezik, akkor* $\det B = -\det A$.

Ha a B mátrix az A négyzetes mátrixból úgy keletkezett, hogy egy sort szoroztunk egy $\lambda \neq 0$ skalárral, akkor $\det B = \lambda \det A$.

Ha a B mátrix az A négyzetes mátrixból úgy keletkezett, hogy egy sor skalárszorosát hozzáadtuk egy másik sorhoz, akkor $\det B = \det A$.

Bizonyítás: Ha a mátrixban két sort felcserélünk, akkor az eredeti determináns minden tagja tagja az új determinánsnak is, de a sorcsere miatt az oszlopindexekben az inverziók számának paritása megváltozik, tehát minden tag ellentétes előjellel szerepel.

Ennek az állításnak közvetlen következménye, hogy *ha egy négyzetes mátrixban két sor megegyezik, akkor a mátrix determinánsa* 0: valóban, sorcserével a mátrix determinánsa előjelet vált, ugyanakkor egyenlő sorok esetén sorcserével a determináns nyilván nem változik meg, ezért értéke csak nulla lehet, ez az egyetlen szám, amely megegyezik ellentettjével.

A második tulajdonság a linearitás közvetlen következménye (annak egy speciális esete):

$$\det A_i(\lambda x) = \lambda(\det A_i(x)).$$

A harmadik tulajdonság bizonyításához tegyük fel, hogy a mátrix i-edik sorához, amit x jelöl, hozzáadjuk az y-al jelölt j-edik sor λ-szorosát ($i \neq j$).

$$\begin{aligned}
\det A_i(x + \lambda y) &= \det A_i(x) + \lambda \det A_i(y) \\
&= \det A_i(x), \text{ mert } A_i(y)\text{-ban van két egyenlő sor} \\
&= \det A, \text{ mert } A_i(x) = A
\end{aligned}$$

□

Megjegyzés. Minden elemi sorátalakítás elérhető egy elemi mátrixszal való szorzással. Ez alapján az előző tételt átfogalmazhatjuk.

1. $\det(EA) = -\det A$
2. $\det(E'A) = \lambda \det A$
3. $\det(E''A) = \det A$

ahol E az egységmátrixból sorcserével származik; E' az elemi mátrixból úgy származik, hogy egy sort szoroztunk egy nemzéró λ skalárral; E'' pedig úgy, hogy az egységmátrix egy sorának skalárszorosát hozzáadtuk egy másik sorhoz.

A 16.4. következménye az alábbi állítás:

16.5. Következmény. *Elemi sorátalakítás zéró determinánsú mátrixot zéró determinánsú mátrixba, nemzéró determinánsú mátrixot nemzéró determinánsú mátrixba visz át.*

Bizonyítás: Elemi sorátalakítás során vagy megváltozik a determináns előjele (sorcsere); vagy a determináns értéke szorzódik egy nemzéró skalárral (a mátrix egy sorát szorozzuk egy nemzéró skalárral); vagy nem változik a determináns értéke (a mátrix egy sorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz.) Mindhárom esetben a determináns eltűnő vagy nem eltűnő volta megmarad. □

16.6. Tétel. *Legyen A egy négyzetes mátrix! Ha A sorai lineárisan függetlenek, akkor* $\det A \neq 0$*, ha a sorok lineárisan függő vektorrendszert alkotnak, akkor* $\det A = 0$*. Azaz egy n-edrendű négyzetes mátrix rangja akkor és csakis akkor n, ha determinánsa nem zéró.*

Kiegészíthetjük a tételt azzal is, hogy egy négyzetes mátrix akkor és csakis akkor invertálható, ha determinánsa nem zéró.

Bizonyítás: Hozzuk elemi sorátalakításokkal az A mátrixot lépcsős alakra! Két eset lehetséges.

Ha A sorai lineárisan függők, akkor olyan B mátrixhoz jutunk, melyben van csak zéróból álló sor, tehát determinánsa 0. Az előző következmény miatt:

$$\det B = 0 \implies \det A = 0$$

Ha A sorai lineárisan függetlenek, akkor háromszög alakú mátrixhoz jutunk (zérótól különböző főátlóbeli elemekkel), s további elemi sorátalakításokkal elérhetjük az egységmátrixot is (egy mátrix akkor és csakis akkor invertálható — azaz sorai lineárisan függetlenek —, ha sorekvivalens az egységmátrixhoz.) Az egységmátrix determinánsa 1, azaz $\neq 0$, s innen az állítás szintén az előzőekből következik. □

16.7. Tétel. (Szorzástétel.) *Legyenek A és B azonos rendű négyzetes mátrixok. Ekkor*

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Bizonyítás: Az első lépésben azt bizonyítjuk, hogy az állítás igaz, ha A elemi mátrix. Ha az E elemi mátrix az egységmátrixból sorcserével keletkezett akkor $\det E = -1$, továbbá EB olyan mátrix, mely B-ből sorcserével keletkezett. Tehát

$$\det(EB) = -\det B = \det E \det B.$$

Ha $E' = I_i(\lambda x)$ (x az egységmátrix i-edik sora), akkor $\det E' = \lambda \cdot 1$, továbbá $E'B = B_i(\lambda b)$, ahol b a B i-edik sora, azaz

$$\det(E'B) = \det B_i(\lambda b) = \lambda \det B = \det E' \det B.$$

Végül, ha E'' elemi mátrix úgy keletkezett, hogy az egységmátrix egy sorának skalárszorosát hozzáadjuk egy másik sorhoz, akkor $\det E'' = 1$ és $\det(E''B) = \det B$, amiből ismét következik az állítás.

A bizonyítás második lépésében feltesszük, hogy az A mátrix invertálható. Ekkor tudjuk, hogy A felírható elemi mátrixok szorzataként, tehát a bizonyítás első lépését használva:

$$\begin{aligned} \det A &= \det(E_1 \cdots E_k) \\ &= \det E_1 \cdot \det(E_2 \cdots E_k) \\ &= \cdots \\ &= \det E_1 \cdots \det E_k. \end{aligned}$$

Azaz

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(E_1 \cdots E_k \cdot B) \\ &= \det E_1 \cdot \det(E_2 \cdots E_k \cdot B) \\ &= \cdots \\ &= \det E_1 \cdots \det E_k \cdot \det B \\ &= \det A \cdot \det B. \end{aligned}$$

Hátramaradt annak az esetnek a vizsgálata, amikor A nem invertálható. A bizonyítandó állítás jobb oldalán ekkor 0 szerepel, azt kell belátni, hogy a bal oldal is 0, azaz AB nem invertálható. Ez azonban teljesül, mert

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \min\{\operatorname{rang} A, \operatorname{rang} B\} \leq \operatorname{rang} A < n,$$

ahol n a mátrix rendje. □

16.8. Tétel. *Négyzetes mátrix és transzponáltja determinánsa megegyezik.*

Bizonyítás: Az előző bizonyításhoz hasonlóan, először elemi mátrixokra, majd invertálható mátrixokra, s végül általánosan látjuk be az állítást. E, E' és E'' jelöljön ugyanolyan típusú elemi mátrixot, mint az előző tétel bizonyításában. ${}^tE' = E'$ triviális, az is könnyen látható, hogy

${}^tE = E$. E'' transzponáltja ugyan nem egyezik meg önmagával, de ez is ugyanilyen típusú elemi mátrix, tehát mindkét mátrix determinánsa 1.

Legyen most A invertálható mátrix, s írjuk fel elemi mátrixok szorzataként!

$$\begin{aligned}\det {}^tA &= \det({}^tE_k \cdots {}^tE_1)\\ &= (\det {}^tE_k)\cdots(\det {}^tE_1) \text{ a szorzástétel miatt,}\\ &= (\det E_k)\cdots(\det E_1) \text{ az első lépés miatt}\\ &= (\det E_1)\cdots(\det E_k)\\ &= \det(E_1\cdots E_k) = \det A.\end{aligned}$$

Nem invertálható mátrixra az állítás ismét egyszerű, mert mind a mátrixnak, mind a transzponáltjának a determinánsa 0. □

16.9. Következmény. *Minden sorokra megfogalmazott állítás igaz oszlopokra is. Pl. a determinánsfüggvény az oszlopok lineáris függvénye.*

17. Aldeterminánsok, kofaktorok

17.1. Definíció. Ha egy mátrixból bizonyos sorokat és oszlopokat elhagyunk úgy, hogy a kapott mátrix négyzetes mátrix, akkor ennek a mátrixnak a determinánsát az eredeti *aldeterminánsának* nevezzük.

Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$. Az A mátrixból az i-edik sor és a j-edik oszlop elhagyása után kapott $(n-1)\times(n-1)$-es A_{ij} mátrix determinánsát az i-edik sor j-edik eleméhez *adjungált aldeterminánsnak* nevezzük. A

$$(-1)^{i+j}\det A_{ij}$$

szám az i-edik sor j-edik elemének *kofaktor*a, vagy *algebrai aldeterminánsa*.

17.2. Tétel. *Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, továbbá rögzített i-re és j-re jelölje a_{ij}-t b. Ha az i-edik sor minden b-től különböző eleme zérus, vagy a j-edik oszlop minden b-től különböző eleme zérus, akkor*

$$\det A = b(-1)^{i+j}\det A_{ij}.$$

Bizonyítás: $b = 0$-ra az állítás triviális, feltehetjük, hogy a továbbiakban $b \neq 0$. Először tegyük fel, hogy b az első sor első eleme, és az első oszlopan minden további elem zérus.

$$\det A = \sum_\sigma \varepsilon(\sigma)a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} =$$

mivel a_{j1} értéke $j \neq 1$-re 0, ezért a determináns egyenlő:

$$= \sum_{\sigma(1)=1} \varepsilon(\sigma)a_{11}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)} =$$

ahol az összegzés már csak az $(1, \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ permutációkra terjed ki. Minden tagból kiemelhető a_{11}, tehát tovább folytatva a megkezdett sort:

$$= a_{11} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

Az $(1, 2, \ldots, n)$ számok $(1, \sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ permutációjának a paritása ugyanaz, mint a $(2, \ldots, n)$ számok $(\sigma(2), \ldots, \sigma(n))$ permutációjának, mert az előbbiben az 1 minden további számot megelőz. Ez azt jelenti, hogy

$$= a_{11} \det A_{11}$$

Transzponálással a tétel állítását megkapjuk arra az esetre, amikor az első sorban az első elemen kívül mindegyik 0.

Most az általános esetet látjuk be. $i - 1$ egymás utáni sorcserével elérhetjük, hogy a b-t tartalmazó sor az első sorba kerüljön, s a többi sor egymáshoz viszonyított helyzete nem változik. Hasonlóan, $j - 1$ egymás utáni oszlopcserével pedig elérhető, hogy b az első oszlopban legyen. Az így kapott mátrixot jelölje C. $A_{ij} = C_{11}$. Ekkor

$$\det C = (-1)^{(i-1)+(j-1)} \det A = (-1)^{i+j} \det A.$$

Alkalmazzuk a bizonyítás első részét:

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{i+j} \det C \\ &= (-1)^{i+j} b \det C_{11} \\ &= (-1)^{i+j} b \det A_{ij} \end{aligned}$$

□

17.3. Tétel. (Cramer szabály.) *Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, oszlopai legyenek $(A_1, \ldots, A_n)$, továbbá*

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ és } B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ha $AX = B$, akkor

$$(\det A) \cdot x_i = \det(A_1 \quad \cdots \quad A_{i-1} \quad B \quad A_{i+1} \quad \cdots \quad A_n).$$

Bizonyítás: Jelölje $(E_1, \ldots, E_n)$ $\mathbb{R}^n$ természetes bázisát, melyet most oszloponként írunk. Legyen C a következő mátrix:

$$C = \begin{pmatrix} E_1 & \ldots & E_{i-1} & X & E_{i+1} & \ldots & E_n \end{pmatrix}.$$

$AE_j = A_j$ és $AX = B$-ből következik, hogy

$$AC = \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & B & A_{i+1} & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

A szorzástétel miatt

$$\det A \det C = \det \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & B & A_{i+1} & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

C alakja a következő

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & x_1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & x_i & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & x_n & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ahol x_i az i-edik sor i-edik eleme. A megelőző lemmából:

$$\det C = x_i(-1)^{i+i} \det I_{n-1} = x_i.$$

□

17.4. Tétel. *Legyen A invertálható mátrix, az inverzét jelölje $B = (b_{ij})$! Ekkor fennáll, hogy*

$$b_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det A_{ji}}{\det A}.$$

Bizonyítás: A bizonyítás során legyen j rögzítve, továbbá legyen

$$B_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

a B mátrix j-edik oszlopa. Mivel $AB = I_n$, ezért $AB_j = E_j$ szintén teljesül. Alkalmazzuk a Cramer szabályt:

$$\det Ax_i = \det \begin{pmatrix} A_1 & \dots & A_{i-1} & E_j & a_{i+1} & \dots & A_n \end{pmatrix}.$$

A 17.2. lemmát használva:

$$\det Ab_{ij} = 1 \cdot (-1)^{j+i} \det A_{ji}.$$

Mivel $x_i = b_{ij}$, ezért az állítást beláttuk. □

A paragrafus következő formulájával egy determináns kiszámítását nála alacsonyabb rendű determináns kiszámítására vezetjük vissza.

17.5. Tétel. (Kifejtési tétel.) *Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $1 \le i \le n$ pedig rögzített természetes szám. Ekkor teljesül, hogy*

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det A_{ik}.$$

Bizonyítás: $\mathbb{R}^n$ természetes bázisa legyen $(e_1, \dots, e_n)$ sorokként írva. A i-edik sorát a következőképpen tudjuk felírni:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} e_k.$$

Ezért

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \det A_i(e_k) \text{ a determináns linearitása miatt} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} \det A_{ik} \text{ a 17.2. lemma miatt.} \end{aligned}$$

□

Megjegyzés. Analóg állítás fogalmazható meg egy oszlopindex rögzítése után. (Oszlop szerinti kifejtés, míg a tételben sor szerinti kifejtés van.)

17.6. Tétel. (Ferde kifejtési tétel.) *Legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, $1 \le i \ne j \le n$ pedig rögzített természetes számok. Ekkor teljesül, hogy*

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \cdot \det A_{jk} = 0.$$

Bizonyítás: Legyen B az a mátrix, amelyet a A mátrixtól csak abban különbözik, hogy a j-edik sora megegyezik az A i-edik sorával. Így B-ben két egyenlő sor van, az i-edik és a j-edik. Továbbá $A_{jk} = B_{jk}$ minden k-ra. Alkalmazzuk B-re a kifejtési tételt, megkapjuk A-ra a ferde kifejtési tételt. □

17.7. Tétel. *Legyen*

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1k} \\ \vdots & & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nk} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times k}$$

mátrix, ahol $k \le n$. A mátrix oszlopai akkor és csakis akkor lineárisan függők, ha a sorokból képezhető minden k-adrendű determináns értéke 0. ($\iff$ a mátrix oszlopai akkor és csakis akkor lineárisan függetlenek, ha a sorokból képezhető k-adrendű nem nulla értékű determináns.)

Bizonyítás: Ha az oszlopok függő vektorrendszert alkotnak, akkor a sorokból képezhető minden $k \times k$-as mátrix oszlopai is lineárisan függők, s ekkor ennek a mátrixnak a determinánsa zérus.

A megfordítást a következőképpen láthatjuk be. Először válasszunk ki a mátrixban maximális rendű el nem tűnő aldeterminánst. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ez a bal felső sarokban van (sorcserék és oszlopcserék az állítást nem érintik.)

$$\begin{pmatrix} \boxed{\quad D \neq 0 \quad} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ * \ \ \dots \ \ * & * \end{pmatrix}.$$

Ennek a determinánsnak a rendje kisebb, mint k, tehát van még legalább 1 olyan oszlop, ami a determinánsban nem szerepel. Azt állítjuk, hogy a determinánsban szereplő oszlopok s még egy oszlop (mondjuk a pontosan mellette elhelyezkedő) lineárisan függő rendszert alkotnak. Ehhez meg kell konstruálni azt a nem triviális együtthatórendszert, amivel az oszlopokat lineárisan kombinálva megkapjuk a zérővektort. Ehhez először képezzünk az el nem tűnő determinánstól 1-gyel nagyobb rendű D' determinánst egy sor és egy oszlop hozzávételével:

$$\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} \boxed{\quad D \neq 0 \quad} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ * \end{matrix} \\ x_1 \ \ \dots \ \ x_r & x_{r+1} \end{matrix}} & \quad \end{pmatrix}.$$

Azt állítjuk, hogy a keresett együtthatók az új determináns $x_1, \dots, x_{r+1}$ elemekhez tartozó kofaktorai. Ez triviálistól különböző együtthatórendszer, mert az utolsó elem kofaktora pontosan $D \neq 0$, továbbá az $x_1, \dots, x_{r+1}$ elemektől nem függenek. Kombináljuk ezzel az együtthatórendszerrel az oszlopokat. Azt kell ellenőrízni, hogy minden sorban megkapjuk a nullát. Ez a D-ben szerepet játszó sorokra a D'-re alkalmazott ferde kifejtési tételből, míg a többi sorra a kifejtési tételből következik. □

Tételünk közvetlen következménye az alábbi állítás:

17.8. Tétel. *Egy mátrix rangja megegyezik maximális rendű el nem tűnő aldeterminánsa rendjével.*

Ezzel a tétellel a mátrixok rangszámtételére egy új bizonyítást adtunk.

4. fejezet

Lineáris leképezések

18. Lineáris leképezések alaptulajdonságai

18.1. Definíció. Legyenek V és W ugyanazon $\mathbb{F}$ test feletti vektorterek. A

$$\varphi\colon V \to W$$

leképezést *lineáris leképezés*nek mondjuk, ha teljesül, hogy $\forall x, y \in V$ és $\forall \alpha \in \mathbb{F}$ esetén:

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \tag{L1}$$

$$\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) \tag{L2}$$

Jelölje $L(V; W)$ az összes $V \to W$ lineáris leképezés halmazát! A $\varphi \in L(V; W)$ lineáris leképezést *lineáris izomorfizmus*nak nevezzük, ha bijektív, ilyenkor V-t és W-t *izomorf* vektortereknek mondjuk. Speciálisan, ha $W = V$, akkor *lineáris operátor*ról, vagy *lineáris transzformáció*ról, míg ha $W = \mathbb{F}$, *lineáris formá*ról szólunk.

Megjegyzés. Az L1 és L2 tulajdonságok egyetlen formulába foglalhatók:

$$\varphi(\alpha x + \beta y) = \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(y), \quad x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}.$$

Ebből indukcióval az alábbi általános formulát nyerjük:

$$\varphi(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k) = \alpha_1\varphi(x_1) + \cdots + \alpha_k\varphi(x_k), \quad x_i \in V, \alpha_i \in \mathbb{F}; i = 1 \ldots k.$$

18.2. Tétel. *Legyen $\varphi\colon V \to W$ lineáris leképezés. V zérusvektorának képe W zérusvektora.*

Bizonyítás: $\varphi(0) = \varphi(0 + 0) = \varphi(0) + \varphi(0)$, azaz $\varphi(0) = 0$. $\square$

18.3. Tétel. *Lineáris leképezés lineárisan függő vektorrendszert lineárisan függő vektorrendszerbe visz át.*

Bizonyítás: Legyen $(a_1, \ldots, a_k)$ lineárisan függő vektorrendszer! Ekkor a zérusvektor előáll nemtriviális lineáris kombinációjukként:

$$\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_k x_k = 0.$$

Alkalmazzuk mindkét oldalra a φ lineáris leképezést:

$$\alpha_1 \varphi(a_1) + \cdots + \alpha_k \varphi(x_k) = 0.$$

Mivel a fenti lineáris kombinációban az eredeti együtthatórendszer szerepel, ezért ez a lineáris kombináció is nemtriviális, ami a $(\varphi(a_1) \ldots, \varphi(a_k))$ vektorrendszer függőségét jelenti. □

Az alábbiakban definiált leképezések lineárisak:

Példa. Az identikus leképezés. Egy V vektortér önmagára való $\varphi\colon V \to V, x \mapsto \varphi(x) = x$ identikus leképezése.

Példa. A zéró leképezés. Ha V és W ugyanozon test feletti vektorterek és V minden vektorához W zérusvektorát rendeljük.

Példa. Origó középpontú hasonlóság. Legyen V valós vektortér, $k \in \mathbb{R}$ rögzített szám. Legyen

$$\varphi\colon V \to V,\ v \mapsto \varphi(v) = kv.$$

Példa. A mátrixszorzás. Legyen $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ mátrix. Legyen

$$L_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ L_A(X) = AX.$$

Példa. A differenciálás. Legyen V az (a, b) nyílt intervallumon differenciálható valós függvények vektortere, míg W az (a, b)-n értelmezett összes valós függvények vektortere. A

$$D\colon V \to W,\ f \mapsto D(f) = f'$$

deriválás lineáris leképezés.

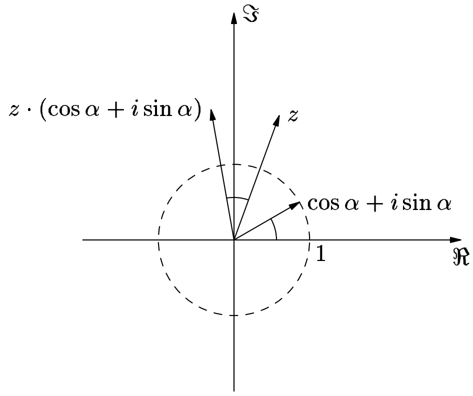
Példa. Az integrál, mint a felső határ függvénye. Legyen V az $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tere. A $\varphi\colon V \to V$ leképezést értelmezzük a következő módon:

$$f \mapsto \varphi(f) = F, \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt; \quad x \in [a, b].$$

Példa. A sík origó körüli elforgatása. A V síkot kétféleképpen is vektortérnek gondolhatjuk: $V = \mathbb{C}$, mint $\mathbb{C}$ fölötti egy dimenziós vektortér; vagy $V = \mathbb{R}^2$, mint $\mathbb{R}$ fölötti két dimenziós vektortér. Az elforgatást először a $\mathbb{C}$ egy dimenziós vektortérben értelmezzük. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}$, továbbá

$$\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto \varphi(z) = z \cdot (\cos\alpha + i \sin\alpha).$$

(Gondoljunk a komplex számok szorzásának geometriai interpretációjára, ld. az ábrát!) Vegyük



4.1. ábra. Elforgatás a komplex számsíkon.

észre, hogy a középpontos hasonlóság speciális esetével állunk szemben.

A fentiek alapján könnyen levezethetjük az origó körüli elforgatás képletét $\mathbb{R}^2$-ben is. Legyen $z = x + iy$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

$$(x + iy) \cdot (\cos\alpha + i\sin\alpha) = (\cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y) + i(\sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y).$$

Tehát ha az elforgatás

$$\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (x, y)^t \mapsto (x', y')^t,$$

akkor

$$\begin{aligned} x' &= \cos\alpha \cdot x - \sin\alpha \cdot y \\ y' &= \sin\alpha \cdot x + \cos\alpha \cdot y; \end{aligned}$$

illetőleg mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Helyettesítsünk a fenti formulákba $\alpha = \pm\pi/2$-t: a középiskolából jól ismert „szabályt” kapjuk a $\pi/2$ szögű elforgatásra.

Példa. Vetítés altérre. Lineáris leképezés $\mathbb{R}^3$ merőleges vetítése a koordinátatengelyekre vagy a koordinátasíkokra. (Írjuk fel ezen vetítések explicit alakját!)

18.4. Tétel. *Legyenek V és W ugyanazon $\mathbb{F}$ test feletti vektorterek. $L(V;W)$ vektortér $\mathbb{F}$ felett, ha két lineáris leképezés összegét és egy lineáris leképezés skalárral való szorzatát a következőképpen értelmezzük:*

$$\begin{aligned} (\varphi + \psi)(x) &= \varphi(x) + \psi(x), \ x \in V \\ (\alpha\varphi)(x) &= \alpha\varphi(x), \ x \in V, \ \alpha \in \mathbb{F}. \end{aligned}$$

Bizonyítás: Könnyen látható, hogy az összeadás és skalárral való szorzás előző definíciói valóban lineáris leképezést értelmeznek.

Ellenőriznünk kell a vektortér axiómák teljesülését. Először belátjuk, hogy $\alpha(\varphi + \psi) = \alpha\varphi + \alpha\psi$. Valóban:

$$\begin{aligned}[\alpha(\varphi + \psi)](x) &= \alpha[(\varphi + \psi)(x)] = \alpha[\varphi(x) + \psi(x)] = \alpha\varphi(x) + \alpha\psi(x) = \\ &= (\alpha\varphi)(x) + (\alpha\psi)(x) = (\alpha\varphi + \alpha\psi)(x).\end{aligned}$$

Hasonlóan bizonyítható a többi tulajdonság. □

18.5. Tétel. *Legyenek U, V, W ugyanazon test fölötti vektorterek. Ha $\varphi \in L(U;V)$, $\psi \in L(V;W)$, akkor $\psi \circ \varphi \in L(U;W)$.*

Bizonyítás: Triviális számolás. □

18.6. Tétel. *Legyen $\varphi \in L(V;W)$ izomorfizmus. $\varphi^{-1}: W \to V$ szintén lineáris izomorfizmus*

Bizonyítás: Mivel φ bijektív ezért létezik inverze, s az inverze is bijektív, azt kell belátni, hogy ez lineáris leképezés. Legyen $\varphi^{-1}(u_1) = v_1$, $\varphi^{-1}(u_2) = v_2$. Mivel

$$\varphi(v_1 + v_2) = \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = u_1 + u_2,$$

ezért $\varphi^{-1}(u_1 + u_2) = v_1 + v_2$, azaz

$$\varphi^{-1}(u_1 + u_2) = v_1 + v_2 = \varphi^{-1}(u_1) + \varphi^{-1}(u_2).$$

Hasonlóan igazolható a homogenitás:

$$\varphi(\alpha v_1) = \alpha\varphi(v_1) = \alpha u_1,$$

azaz

$$\varphi^{-1}(\alpha u_1) = \alpha v_1 = \alpha\varphi^{-1}(u_1).$$

□

18.7. Tétel. (A véges dimenziós vektorterek struktúratétele.) *Az $\mathbb{F}$ test feletti n dimenziós V vektortér izomorf $\mathbb{F}^n$-hez, az $\mathbb{F}$ elemeiből képzett skalár-n-esek teréhez.*

Bizonyítás: Rögzítsünk V-ben egy bázist: $(v_1, \ldots, v_n)$. Értelmezzük a következő leképezést:

$$\varphi: V \to \mathbb{F}^n,\ x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \mapsto (x_1, \ldots, x_n),$$

azaz tetszőleges vektorhoz rendeljük hozzá a rögzített bázisra vonatkozó koordinátáit. Egyszerűen megmutatható, hogy így lineáris leképezést definiáltunk. (Ld. két vektor összegének koordinátái, vektor skalárszorosának koordinátái!) Mivel bázisból a tér bármely vektora pontosan egyféleképpen kombinálható, továbbá tetszőleges skalár n-esből kombinálhatunk vektort, ezért ez a leképezés bijektív is. □

18.8. Következmény. *Izomorf vektorterek dimenziója ugyanaz.*

18.9. Tétel. (A lineáris kiterjesztés tétele.) *Legyenek V és W ugyanazon test fölötti vektorterek, $(v_1, \ldots, v_n)$ bázis V-ben, $(w_1, \ldots, w_n)$ tetszőleges vektorrendszer W-ben. Egyértelműen létezik olyan*

$$\varphi\colon V \to W$$

lineáris leképezés, hogy

$$\varphi(v_i) = w_i \ (i = 1, \ldots, n).$$

— Azaz a lineáris leképezést bázison felvett értéke egyértelműen meghatározza.

Bizonyítás: Értelmezzük a φ leképezést a következőképpen:

$$\varphi\colon V \to W,\ x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \mapsto x_1w_1 + \cdots + x_nw_n.$$

Egyszerűen ellenőrizhető, hogy ez a leképezés lineáris, továbbá $\varphi(v_i) = w_i$. Az egyértelműség bizonyítása maradt hátra. Tegyük fel, hogy $\psi \in L(V, W)$ rendelkezik a tételben leírt tulajdonsággal! Belátjuk, hogy tetszőleges vektoron ugyanazt az értéket veszi fel, mint az előbb definiált φ. Valóban:

$$\psi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = x_1\psi(v_1) + \cdots + x_n\psi(v_n) = x_1w_1 + \cdots + x_nw_n. \qquad \square$$

19. Lineáris leképezés képtere és magtere

19.1. Definíció. Legyen $\varphi \in L(V; W)$ lineáris leképezés. A

$$\ker \varphi = \{v \in V | \varphi(v) = 0\} \subset V$$

halmazt a φ lineáris leképezés *magjának* vagy *magterének* nevezzük, míg a

$$\operatorname{im} \varphi = \{w \in W | \exists v \in V : \varphi(v) = w\} \subset W$$

halmazt a φ *képterének*. (Utóbbira a $\varphi(V)$ jelölés is használatos.)

19.2. Tétel. *Legyen $\varphi \in L(V; W)$ lineáris leképezés.* $\operatorname{im} \varphi$ *W altere, míg* $\ker \varphi$ *a V altere.*

Bizonyítás: Egyik halmaz sem üres, mert a zérusvektort mindkettő triviálisan tartalmazza. Elegendő tehát azt belátni, hogy mindkét halmaz zárt az összeadásra és a skalárral való szorzásra.

Teljesüljön, hogy $x, y \in \ker \varphi$.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = 0 + 0 = 0,\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha \cdot 0 = 0,$$

tehát $x + y, \alpha x \in \ker \varphi$.

Most legyen $z, v \in \operatorname{im} \varphi$! Ekkor léteznek olyan vektorok V-ben, hogy $\varphi(x) = z$, $\varphi(y) = v$.

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) = z + v,\ \varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x) = \alpha z,$$

azaz $z + v,\ \alpha z \in \operatorname{im} \varphi$. $\square$

19.3. Definíció. Egy lineáris leképezés *rang*ján képterének dimenzióját, míg *nullitás*án magterének dimenzióját értjük.

Példa. Legyen $V_1 \subset V$ altér és a π leképezés legyen a

$$\pi\colon V \to V/V_1,\ x \mapsto \pi(x) = x + V_1$$

ún. *kanonikus projekció.* (Erről könnyen megygőződhetünk, hogy lineáris leképezés.) $\ker \pi = V_1$ — Gondoljunk arra, hogy a V/V_1 faktortér zérusvektora a $0 + V_1 = V_1$ lineáris sokaság.

Példa. Legyen $\varphi\colon \mathcal{P}^n \to \mathcal{P}^n, \quad p \mapsto \varphi p = p'$. Figyelembe véve, hogy a deriválás a polinomok fokszámát eggyel csökkenti: $\operatorname{im} \varphi = \mathcal{P}^{n-1}$, $\ker \varphi$ pedig megegyezik a konstans polinomok halmazával.

Példa. Tekintsük $\mathbb{R}^3$ merőleges vetítését az xy síkra:

$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto \varphi(x, y, z) = (x, y, 0).$$

A leképezés képtere az xy sík, míg magtere a z tengely.

19.4. Tétel. *Legyen $\varphi \in L(V; W)$! Ha $\ker \varphi = \{0\}$, akkor φ injektív, továbbá lineárisan független vektorrendszer képe lineárisan független vektorrendszer.*

Bizonyítás: Először belátjuk, hogy a feltételek mellett különböző vektorok képe különböző. Ha $x, y \in V$ és $\varphi(x) = \varphi(y)$, akkor

$$0 = \varphi(x) - \varphi(y) = \varphi(x - y).$$

$x - y$ tehát a $\ker \varphi$ eleme. A feltétel szerint $\ker \varphi$-nek azonban egyetlen eleme van, s ez a zérusvektor, azaz $x = y$.

Legyenek $v_1, \ldots, v_n \in V$ lineárisan független vektorok. Kombináljuk ezen vektorok képvektoraiból a zérusvektort:

$$x_1\varphi(v_1) + \cdots + x_n\varphi(v_n) = 0 \in W.$$

A linearitás miatt:

$$\varphi(x_1v_1 + \cdots + x_nv_n) = 0,$$

azaz $x_1v_1 + \cdots + x_nv_n \in \ker \varphi$. $\ker \varphi$ egyetlen eleme azonban a zérusvektor, azaz

$$x_1v_1 + \cdots + x_nv_n = 0 \in V.$$

A feltétel miatt $(x_1, \ldots, x_n)$ lineárisan független vektorrendszer, azaz mindegyik együttható nulla. A képvektorokból W zérusvektorát tehát csak triviálisan lehet kombinálni. $\square$

19.5. Tétel. *Legyen $\varphi \in L(V; W)$! Ha $(v_1, \ldots, v_n)$ bázis V-ben, akkor $(\varphi(v_1), \ldots, \varphi(v_n))$ $\operatorname{im} \varphi$ generátorrendszere.*

Bizonyítás: Legyen $w \in \operatorname{im} \varphi$. Ekkor létezik olyan $v \in$ vektor, hogy $\varphi(v) = w$. Kombináljuk v-t a V bázisából:

$$x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = v.$$

Ekkor a linearitást használva:

$$w = \varphi(v) = x_1 \varphi(v_1) + \cdots + x_n \varphi(v_n),$$

amit bizonyítani kellett. □

19.6. Tétel. (Homomorfiatétel.) *Legyen $\varphi \in L(V; W)$ lineáris leképezés.*

$$V / \ker \varphi \cong \operatorname{im} \varphi$$

Bizonyítás: Legyen tehát $\varphi \in L(V; W)$. Értelmezzük a következő leképezést:

$$\overline{\varphi} \colon V / \ker \varphi \to \operatorname{im} \varphi, \; v + \ker \varphi \mapsto \varphi(v).$$

A definíció nem függ a lineáris sokaság reprezentensának választásától, mert ha $v_1 + \ker \varphi = v_2 + \ker \varphi$, akkor $v_1 - v_2 \in \ker \varphi$, azaz

$$0 = \varphi(v_1 - v_2) = \varphi(v_1) - \varphi(v_2).$$

Azt is könnyű ellenőrizni, hogy $\overline{\varphi}$ lineáris leképezés. Nyilvánvaló, hogy $\overline{\varphi}$ szürjektív. Másrészt $\overline{\varphi}$ magtere a zérustér, mert ha $\overline{\varphi}(\ker \varphi + v) = \varphi(v) = 0$, akkor $v \in \ker \varphi$, azaz $\ker \varphi + v = \ker \varphi$. Innen következik, hogy $\overline{\varphi}$ injektív is, tehét izomorfizmus. □

19.7. Tétel. (A nullitás+rang tétel.) *Legyen $\varphi \in L(V; W)$ lineáris leképezés. Ekkor*

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim V.$$

Bizonyítás: Következik az előző tételből, s a faktortér dimenziójára vonatkozó tételből. □

A „nullitás+rang” tétel egy egyszerű alkalmazásaként újabb bizonyítást adunk a homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásteréről szóló tételre.

19.8. Tétel. *Legyen $Ax = 0$ homogén lineáris egyenletrendszer ($A \in \mathcal{M}_{m \times n}$), $x \in \mathbb{R}^n$. A megoldástér dimenziója $n - \operatorname{rang} A$.*

Bizonyítás: Jelölje $(E_1, \ldots, E_n)$ $\mathbb{R}^n$ természetes bázisát, $A_1, \ldots, A_n$ pedig A oszlopait! Ekkor

$$AE_1 = A_1, \ldots, AE_n = A_n$$

is teljesül. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{im} L_A$-t A oszlopai generálják, vagyis: $\operatorname{rang} L_A = \operatorname{rang} A$. Alkalmazzuk a „nullitás+rang” tételt az L_A operátorra:

$$\dim \ker L_A + \dim \operatorname{im} L_A = n.$$

$\dim \ker L_A$ a megoldástér dimenzióját adja, $\dim \operatorname{im} L_A$ pedig A rangját, az előző példában leírtakat figyelembe véve. □

20. A lineáris leképezések mátrix-reprezentációja

20.1. Definíció. Legyen $\varphi \in L(V;W)$, továbbá legyen $(v_1, \dots, v_m)$ V egy bázisa, $(w_1, \dots, w_n)$ W egy bázisa. A φ lineáris leképezésnek a rögzített bázisokra vonatkozó mátrixa az az $n \times m$ típusú mátrix, melynek elemeit a következő összefüggés értelmezi:

$$\varphi(v_i) = \sum_{j=1}^{n} c_{ji} w_j,$$

azaz az i-edik oszlop megegyezik v_i képének $(w_1, \dots, w_n)$ bázisra vonatkozó koordinátáival.

A $V = W$ esetben ha mást nem mondunk, akkor csak egy bázist rögzítünk (amit a definíció szerint kétszer használunk).

20.2. Tétel. *(A definíció jelöléseivel.) Ha a $v \in V$ vektor koordinátái a rögzített bázisra vonatkozóan $(x_1, \dots, x_m)$, a lineáris leképezés mátrixa pedig a C mátrix, akkor $\varphi(v)$ koordinátái a W-ben rögzített bázisra vonatkozóan*

$$C \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},$$

azaz ha a v koordinátáiból képzett oszlopvektort X jelöli, akkor $\varphi(v)$ koordinátáinak oszlopvektorát $L_C(X)$ adja.

Bizonyítás:

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{m} x_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ji} w_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_i c_{ij} w_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i w_j$$

□

20.3. Tétel. *Legyenek $\varphi, \psi \in L(V;W)$ lineáris leképezések, valamint rögzítsük V és W egy-egy bázisát! Ha φ mátrixa erre a bázispárra A, ψ mátrixa pedig B, akkor $\varphi + \psi$ mátrixa $A + B$, $\alpha\varphi$ mátrixa pedig αA, ahol α tetszőleges skalár.*

Bizonyítás: Egyszerű számítás a definíció alapján. □

20.4. Tétel. *Legyen* $\dim V = m$, $\dim W = n$*! Az $L(V;W)$ vektortér izomorf a $\mathcal{M}_{m\times n}$ vektortérrel; ha egy lineáris leképezéshez hozzárendeljük egy rögzített bázispárra vonatkozó mátrixát akkor a két vektortér között izomorfizmust kapunk. (Következésképpen:* $\dim L(V;W) = n \cdot m$*.)*

Bizonyítás: Az előző tétel szerint az a leképezés, mely minden lineáris leképezéshez hozzárendeli egy rögzített bázispárra vonatkozó mátrixát lineáris leképezés. Azt kell még belátnunk, hogy ez a leképezés bijektív is. Legyen $(v_1, \dots, v_m)$ V rögzített bázisa, $(w_1, \dots, w_n)$ W rögzített bázisa, $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$. A lineáris kiterjesztés tétele szerint egyértelműen létezik olyan lineáris leképezés, mely a v_i vektorhoz a

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} w_j$$

vektort rendeli. Ennek a mátrixa a megadott mátrix. □

20.5. Tétel. *Legyenek U, V, W ugyanazon test feletti m, n, p dimenziós vektorterek, továbbá $\varphi \in L(U;V)$, $\psi \in L(V;W)$. Rögzítsünk U-ban, V-ben és W-ben egy-egy bázist! φ mátrixa (a rögzített bázisokra vonatkozóan) legyen $A \in \mathcal{M}_{n\times m}$, ψ mátrixa pedig $B \in \mathcal{M}_{p\times n}$. Ekkor $\psi\circ\varphi$ mátrixa $B \cdot A$.*

Bizonyítás: Jelöljük el a bázisokat: $(a_1,\dots,a_m)$ U-ban; $(b_1,\dots,b_n)$ V-ben; $(c_1,\dots,c_p)$ W-ben.

$$\begin{aligned}(\psi\circ\varphi)(a_i) &= \psi\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}b_j\right) = \\ &= \sum_{j=1} n a_{ij}\psi(b_j) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\sum_{k=1}^{p} b_{kj}c_k = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{kj}a_{ji}\right)c_k.\end{aligned}$$

A szorzatleképezés mátrixa k-adik sorának i-edik eleme tehát $\sum_{j=1}^{n} b_{kj}a_{ji}$, ami nem más, mint a BA szorzatmátrix megfelelő eleme. □

20.6. Következmény. *Legyen $\varphi \in L(V;W)$ lineáris izomorfizmus, s rögzítsünk V-ben és W-ben egy-egy bázist! Ha φ mátrixa a rögzített bázispárra vonatkozóan A, akkor φ^{-1} mátrixa ugyanezen bázispárra vonatkozóan A^{-1}.*

21. Báziscsere

21.1. Definíció. Legyen $\mathcal{A} = (a_1,\dots,a_n)$ illetve $\mathcal{A}' = (a'_1,\dots,a'_n)$ a V vektortér két bázisa. Értelmezzük az $S = (s_{ji}) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ mátrixot a következőképpen:

$$a'_i = \sum_{j=1}^{n} s_{ji}a_j.$$

Az S mátrixot az $\mathcal{A} \to \mathcal{A}'$ *báziscsere (bázistranszformáció) mátrixának* nevezzük.

Úgy is fogalmazhatunk, hogy a báziscsere mátrixának i-edik oszlopában a'_i koordinátái vannak az $(a_1,\dots,a_n)$ bázisra vonatkozóan.

21.2. Tétel. *Egy báziscsere mátrixa mindig invertálható mátrix.*

Bizonyítás: (A definícióban alkalmazott jelölésekkel.) S oszlopai lineárisan függetlenek, hiszen az oszlopok $\mathcal{A}'$ bázisvektorainak koordinátái az $\mathcal{A}$ bázisban és az a leképezés, mely egy vektorhoz hozzárendeli (egy rögzített bázisra vonatkozó) koordinátáit izomorfizmus. S rangja tehát n, azaz invertálható. □

21.3. Tétel. *Legyen $\mathcal{A} = (a_1,\dots,a_n)$ illetve $\mathcal{A}' = (a'_1,\dots,a'_n)$ a V vektortér két bázisa. Ha egy tetszőleges vektor $\mathcal{A}$-ra vonatkozó $(x_1,\dots,x_n)$ koordinátáiból képzett oszlopvektor X; $\mathcal{A}'$-re vonatkozó $(x'_1,\dots,x'_n)$ koordinátáiból képzett oszlopvektor pedig X', akkor fennáll, hogy*

$$X' = S^{-1}\cdot X.$$

Bizonyítás: Legyen x tetszőleges vektor!

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^{n} x_i' a_i' = \sum_{i=1}^{n} x_i' \sum_{j=1}^{n} s_{ji} a_j = \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ji} x_i' \right) a_j, \end{aligned}$$

azaz $x_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ji} x_i'$, mátrix alakban $X = S \cdot X'$. S inverzével balról szorozva adódik állításunk.

□

21.4. Tétel. *Legyen $\varphi \in L(V;V)$ lineáris operátor, továbbá*

$$\mathcal{B} = (b_1, \ldots, b_m) \textit{ ill. } \mathcal{B}' = (b_1', \ldots, b_m')$$

a V két bázisa. Jelőlje a $\mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ báziscsere mátrixát S. Ha a φ lineáris leképezés mátrixa a $\mathcal{B}$, bázisra vonatkozóan A, a $\mathcal{B}'$ bázira vonatkozóan pedig A', akkor fennál, hogy

$$A' = S^{-1} A S.$$

Bizonyítás: Legyen $S = \left(s_{ij}\right)$, $A = \left(\alpha_{ij}\right)$, $A' = \left(\alpha_{ij}'\right)$; tehát a definíciónak megfelelően:

$$b_i' = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} b_j, \ \varphi(b_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} b_j, \ \varphi(b_i') = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}' b_j'.$$

Számítsuk ki $\varphi(b_i')$-t kétféleképpen:

$$\begin{aligned} \varphi(b_i') &= \varphi\left(\sum_{j=1}^{n} s_{ji} b_j \right) = \sum_{j=1}^{n} s_{ji} \varphi(b_j) = \\ &= \sum_{j=1}^{n} s_{ji} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} b_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} s_{ji} \right) b_k, \end{aligned}$$

másrészt:

$$\begin{aligned} \varphi(b_i') &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ki}' b_j' = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji}' \sum_{k=1}^{n} s_{kj} b_k = \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{kj} \alpha_{ji}' \right) b_k. \end{aligned}$$

Mind a két esetben a $\varphi(b_i')$ vektort az $\mathcal{B}$ bázisban kombináltuk, tehát az együtthatók is megegyeznek:

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{kj} s_{ji} = \sum_{j=1}^{n} s_{kj} \alpha_{ji}',$$

ami a mátrixszorzás definíciója szerint $AS = SA'$-t jelenti, s ez a bizonyítandó állítással ekvivalens.

□

21.5. Definíció. Az A és B ugyanolyan típusú négyzetes mátrixokat *hasonló*nak nevezzük, ha létezik olyan invertálható S mátrix, hogy $B = S^{-1}AS$. Egy lineáris operátort *diagonalizálható*nak nevezünk, ha van olyan bázis, melyben mátrixa diagonális. Egy mátrixot akkor nevezünk diagonalizálhatónak, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

21.6. Tétel. *Hasonló mátrixok rangja és determinánsa megegyezik.*

Bizonyítás: Mindkét mátrix ugyanannak a lineáris operátornak más-más bázisra vonatkozó mátrixa. Mivel a mátrixok rangja megegyezik a lineáris operátor képterének a dimenziójával, ezért mind a két mátrixra ugyanannyi.

A determinánsok megegyezése a determinánsok szorzástételének egyszerű következménye:

$$\det(S^{-1}AS) = \det S^{-1} \cdot \det A \cdot \det S = \det A \cdot \underbrace{\det S^{-1}S}_{=\det I = 1} = \det A.$$

□

21.7. Definíció. Egy lineáris transzformáció *determinánsán* valalmely bázisra vonatkozó mátrixának determinánsát értjük. (Az előző tétel szerint ez az érték független a bázis választásától.)