név:.. Neptun kód:..................

Gyakorlatvezető, gyakorlat időpontja:...

Matematika A4, Valószínűségszámítás, zh. 1. 2016. március 23.

Munkaidő: 50 perc. Az 1-4. feladatok 5-5 pontosak. Az 5. feladat bónusz feladat, 3 pontot ér. A végeredményeket nem kell kiszámolni, elég képlettel felírni.

1. Juli virágot kap valamelyik udvarlójától, Jancsitól, Petitől vagy Sanyitól, de nem tudja, hogy kitől. Tapasztalatból tudja, hogy a figyelmességet feléje harmadrészben Jancsi, fele arányban Peti, hatod részben Sanyi gyakorolja. Ha Jancsi, Peti, Sanyi figyelmességet gyakorol, akkor esetükben éppen a virág küldése rendre $\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{3}$ valószínűségű. Mire tippeljen Juli, ki küldte a virágot? (azaz ki a legvalószínűbb?)

2. Egy forgalmas autópályán annak valószínűsége, hogy egy nap pontosan 3 defekt történik, háromszor annyi, mint annak a valószínűsége, hogy pontosan négy defekt lesz. Mennyi a napi defektek számának átlaga? (a megoldásban használt modell jogosságát meg kell indokolni!)

3. Jelölje X az ötös lottón kihúzott nagyság szerint középső számot. Határozza meg X eloszlását, vagyis adja meg a lehetséges értékeit és klasszikus képlet segítségével azok valószínűségeit! Mit értünk X móduszán és n lottóhúzás esetén mit értünk tapasztalati móduszon? (a móduszt nem kell kiszámolni.)

4. a) Tekintsük a következő mérési adatokat: -1.5, 2.6, -1.5, 2.1, 2.6, -1.3. Írja fel az adatrendszer tapasztalati szórásnégyzetét összeg alakban!

b) Egy örökifjúnak tekinthető élettartam átlaga 400 nap. Mi a valószínűsége annak, hogy az élettartam hosszabb az átlagnál?

5. *(Bónusz feladat.)* Ha Excelben ezer cellába beírjuk az

`= RAND() + RAND()^2` (= random + random négyzet)

utasítást, akkor kb. mennyi lesz a kapott ezer szám átlaga? (válaszként egy számot és megfelelő indokolást adjon!)

MEGOLDÁSOK

1. A P(J|V), P(P|V) és P(S|V) feltételes valószínűségek esetére kell meghatározni azt, hogy melyik a legnagyobb - ahol a J, P, S események jelentik rendre azt, hogy Jancsi, Peti, Sanyi volt figyelmes, V pedig azt, hogy Juli virágot kapott.

A Bayes tétel szerint, például $P(J|V) = \frac{P(J)\ P(V|J)}{P(V)} = \frac{1/3\ 1/4}{P(V)} = \frac{1/12}{P(V)}$. Hasonlóan számolható P(P|V) és P(S|V) is. P(V)-nek nincs jelentősége, hiszen mindhárom feltételes vsz.-nek ugyanaz a nevezője. A számlálók közül P(J|V) számlálója a legnagyobb, így Jancsira érdemes tippelni.

Megj.: Sokan nem említették, hogy feltételes vsz.-geket kell összehasonlítani. A feltételes vsz.-geknek csak a számlálójával foglalkoztak - szorzás tétel szerint. Sokszor hiányzott az utalás is, hogy milyen szabály szerint számolnak.

2. A defektek száma Poisson eloszlásúnak tekinthető, mert az autópálya forgalmas, sok autó közlekedik (n nagy) és az egyes autóknál a defekt vsz.-ge kicsi (p kicsiny).

Így a feltétel szerint $\frac{\lambda^3}{3!}e^{-\lambda} = 3\frac{\lambda 4}{4!}e^{-\lambda}$. Egyszerűsítések után, ebből $\lambda = \frac{3}{2}$.

Tudjuk, hogy a Poisson eloszlásnál az átlagérték éppen λ, ezért a kérdezett átlag $\frac{3}{2}$.

Megj. Vigyázat, a $\frac{3}{2}$-t nem kerekítjük!

3. X lehetséges értékei: 3,4,...88.

X eloszlása:

$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{2}\binom{90-k}{2}}{\binom{90}{5}}$

X (elméleti) módusza az a k-érték, amelyre $P(X = k)$ a legnagyobb (lehet több ilyen érték is)

X tapasztalati módusza n lottóhúzás esetén az a szám, amely a leggyakrabban fordul elő n húzásnál, mint nagyság szerint középső szám (itt is lehet több ilyen érték is).

4. a) $s^2 = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6}(X_k - \overline{x})^2$ ahol $\overline{x}$ jelenti az adatok átlagát, jelen esetben ez $\frac{1}{2}$, az X_k-k pedig jelentik rendre az adatokat.

Megj. A tapasztalati mennyiségeket mindig számolhatjuk a tapasztalati eloszlásból, mint diszkrét eloszlásból, a szokásos kiszámítási módszerekkel. Jelen esetben a tapasztalati eloszlás 4 értékre koncentrálódik és a valószínűségek:

$P(X = -1.3) = \frac{1}{6}, P(X = -1.5) = \frac{2}{6}, P(X = -1.3) = \frac{1}{6}, P(X = 2.1) = \frac{1}{6}, P(X = 2.6) = \frac{2}{6}$.

b) Az örökifjú tulajdonság $F(x)$ eloszlás függvénye $1 - e^{-\lambda x}$. Az exponenciális eloszlás átlaga $\frac{1}{\lambda}$, ezért az adatokból $\lambda = \frac{1}{400}$. Az eloszlás függvény definíciójából $P(X < 400) = 1 - e^{-\frac{1}{400}400} = 1 - e^{-1}$. A kérdés a $P(X > 400)$, ezért a végeredmény: $1 - (1 - e^{-1})$, azaz e^{-1}.

Megj. Az exponenciális eloszlás $\lambda e^{-\lambda x}$ sűrűség függvényével is lehetett számolni.

5. A nagy számok törvénye értelmében a kérdéses átlag az $M(RND + RND^2)$ elméleti átlag közelében van.

Azonban $M(RND + RND^2) = M(RND) + M(RND^2)$. Innen $M(RND)$ nyilván $\frac{1}{2}$ ((0,1) -beli egyenletes eloszlás átlaga). Továbbá $M(RND^2) = \int_0^1 x^2 1dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

Megj. Teljesen rossz az a meggondolás, hogy $M(RND^2) = (M(RND))^2$ $(= \frac{1}{4})$. $M(RND^2)$-t a (0,1)-ben egyenletes eloszlás tanult szórásnégyzetéből is lehetett számolni.