

Jelek és rendszerek 2
II. házi feladat

Jánosi Gergely Péter
S3A653

2010. október 17.

1. Vizsgálat az időtartományban

1.1. Normálalak meghatározása

A hálózatra felírjuk az állapotváltozós normálalakot. Ehhez a késleltetők kimeneteire állapotváltozókat veszünk fel. Így az egyenletek a következők:

$$x_1[k+1] = (1 + d \cdot a)x_1[k] + e \cdot a \cdot x_2[k] + a \cdot s[k] \quad (1)$$

$$x_2[k+1] = (b + d \cdot a \cdot b) \cdot x_1[k] + (1 + e \cdot a \cdot b) \cdot x_2[k] + a \cdot b \cdot s[k] \quad (2)$$

$$x_3[k+1] = (b + d \cdot a \cdot b) \cdot x_1[k] + (1 + e \cdot a \cdot b) \cdot x_2[k] + a \cdot b \cdot s[k] \quad (3)$$

$$y[k] = cx_3[k] \quad (4)$$

$$x[k+1] = Ax[k] + Bu[k] \quad y[k] = C^T x[k] + Du[k] \quad (5)$$

Ezek alapján a mátrixok

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 1.4500 & 0.4500 & 0 \\ 0.7250 & 1.2250 & 0 \\ 0.7250 & 1.2250 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = [0 \quad 0 \quad 0.7] \quad D = 0$$

1.2. Sajátértékek meghatározása

A sajátértékeket a MATLAB segítségével könnyen meghatározhatjuk

```
>> [sv,se]=eig(A)
```

sv =

```

0      0.4165   -0.5609
0     -0.6429   -0.5854
1.0000  -0.6429   -0.5854
```

se =

```

0      0      0
0     0.7553   0
0      0     1.9197
```

A sajátértékek ismeretében eldönthető, hogy a hálózat stabilis-e. Sajnos nem minden sajátérték kisebb abszolútértékben 1-nél, ezért a hálózat nem GV-stabilis. A hálózatról látható, hogy a problémát a d és e szorzók okozzák, mivel ezek a meglevő egységnyi pozitív visszacsatolást (D_1 és D_2 késleltetők önmagukra direktben visszahatnak) még tovább növelik. d és e értékét megfelelő – negatív értékre választva, a sajátértékek abszolút értéke kisebb lesz 1-nél, és a hálózat nem viselkedik gonosz módon. Legyen tehát $d = -3$ és $e = -0.9$, ekkor az állapotváltozós leírás, és sajátértékek a következőképpen alakulnak:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -0.5000 & -0.4500 & 0 \\ -0.2500 & 0.7750 & 0 \\ -0.2500 & 0.7750 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.25 \\ 0.25 \end{bmatrix} \quad \underline{C}^T = [0 \quad 0 \quad 0.7] \quad D = 0$$

```
>> [sv,se]=eig(A)
```

sv =

```

0     -0.2282   0.9677
0      0.6885   0.1782
1.0000  0.6885   0.1782
```

se =

$$\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.8579 & 0 \\ 0 & 0 & -0.5829 \end{array}$$

A sajátértékek tehát: $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = 0.8579$ $\lambda_3 = -0.5829$.

1.3. Impulzusválasz

Az impulzusválasz a hálózat $u[k] = \delta[k]$ függvényre adott válasza. Ennek első néhány értékét a lépésről lépésre módszerrel határozhatjuk meg az alábbi táblázat segítségével. A számértékek a normálalakba történő behelyettesítéssel adódnak. $k < 0$ -ra a kauzalitás miatt a válasz azonosan 0.

k	$u[k]$	$x_1[k]$	$x_2[k]$	$x_3[k]$	$y[k]$
0	1	0	0	0	0
1	0	0,5	0,25	0,25	0,175
2	0	-0,3625	0,06875	0,06875	0,048125
3	0	0,150313	0,143906	0,143906	0,100734
4	0	-0,13991	0,073949	0,073949	0,051764
5	0	0,03668	0,092289	0,092289	0,064602
6	0	-0,05987	0,062354	0,062354	0,043648
7	0	0,001876	0,063292	0,063292	0,044304
8	0	-0,02942	0,048582	0,048582	0,034008
9	0	-0,00715	0,045006	0,045006	0,031504
10	0	-0,01668	0,036668	0,036668	0,025668

Az impulzusválasz analitikus alakban történő előállításához a differenciaegyenlet rendszert a Lagrange mátrixok segítségével oldjuk meg. Ekkor az impulzusválasz a következő alakban áll elő:

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1](C^T(L_1\lambda_1^{k-1} + L_2\lambda_2^{k-1} + L_3\lambda_3^{k-1}) \cdot B) \quad (6)$$

ahol L_i az i -edik Lagrange mátrix, melyek az alábbiak:

$$\underline{\underline{L_1}} = \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \frac{A - \lambda_3 E}{\lambda_1 - \lambda_3} \quad (7)$$

$$\underline{\underline{L_2}} = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{A - \lambda_3 E}{\lambda_2 - \lambda_3} \quad (8)$$

$$\underline{\underline{L_3}} = \frac{A - \lambda_1 E}{\lambda_3 - \lambda_1} \cdot \frac{A - \lambda_2 E}{\lambda_3 - \lambda_2} \quad (9)$$

$$\underline{\underline{L_1}} = \begin{pmatrix} -0.0000 & 0.0000 & 0 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0 \\ -0.0000 & -1.0000 & 1.0000 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{L_2}} = \begin{pmatrix} 0.0575 & -0.3123 & 0 \\ -0.1735 & 0.9425 & 0 \\ -0.1735 & 0.9425 & 0 \end{pmatrix} \quad \underline{\underline{L_3}} = \begin{pmatrix} 0.9425 & 0.3123 & 0 \\ 0.1735 & 0.0575 & 0 \\ 0.1735 & 0.0575 & 0 \end{pmatrix}$$

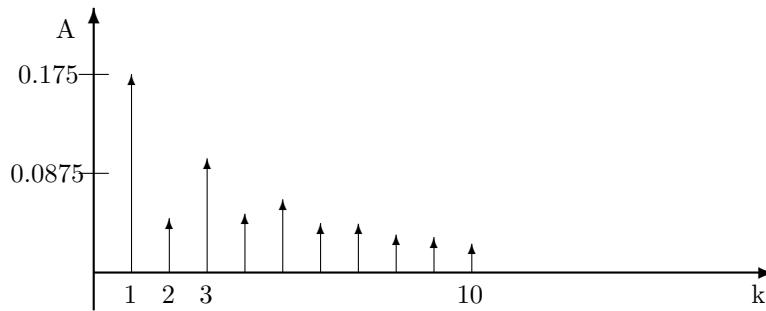
A Lagrange mátrixokról tudjuk, hogy $\sum \underline{\underline{L_i}} = \underline{\underline{I}}$, ez teljesül, tehát a mátrixok jók. Ezeket egyenként megszorozva C^T -vel és B -vel, adódnak az exponenciális tagok együtthatói:

$$K_1 = 0 \quad K_2 = 0.1042 \quad K_3 = 0.0708$$

Ezeket behelyettesítve pedig az impulzusválasz kifejezése:

$$h[k] = D\delta[k] + \varepsilon[k-1](K_1\lambda_1^{k-1} + K_2\lambda_2^{k-1}) = \varepsilon[k-1](0.1042 \cdot 0.8579^{k-1} + 0.0708 \cdot (-0.5829)^{k-1}) \quad (10)$$

Az impulzusválasz ábrája a következő:



Az impulzusválasz explicit kifejezésébe k értékeit behelyettesítve valóban visszakapjuk a lépésről lépésre módszerrel meghatározott értékeket.

1.4. Válasz adott gerjesztésre

A hálózat gerjesztése legyen $s[k] = \varepsilon[k](F + Gp^k)$, ahol $F = 1,5$, $G = 0,8$ és $p = \frac{8}{9}$, vagyis $s[k] = \varepsilon[k](1,5 + 0,8(\frac{8}{9})^k)$. A hálózat válaszát a $0 \dots 5$ ütemben a gerjesztés, és az impulzusválasz diszkrét konvolúciója adja:

$$y[k] = s[k] * h[k] = \sum_{i=0}^k s[i] \cdot h[k-i]$$

A konvolúciót elegendő 0-tól kezdeni, mivel a rendszer kauzális. $k = 0$ -ra $y[0] = 0$ hiszen az impulzusválasz $k = 1$ -ben kezdődik.

A gerjesztés értékei $k = 0 \dots 5$ -re az alábbiak:

k	$s[k]$
0	2,3
1	2,211111
2	2,132099
3	2,061866
4	1,999436
5	1,943943

Elvégezve a konvolúciót az alábbi MATLAB script segítségével¹:

```
%a gerjesztés és az impulzusválasz kiszámítása
for i=1:10
    u(i)=1.5+0.8*(8/9)^(i-1);
    h(i)=K1*se(1,1)^(i-1)+K2*se(2,2)^(i-1)+K3*se(3,3)^(i-1);
end;
y=zeros(1,10)
%konvolúció
for i=1:10
    for j=0:i-1
        y(i)=y(i)+h(i-j)*u(j+1);
    end;
end;
```

y vektorban a következő értékek adódnak $y[k]$ értékeire:

k	$s[k]$	$y[k]$
0	2,3	0
1	2,211111	0,4025
2	2,132099	0,4976
3	2,061866	0,7112
4	1,999436	0,8052
5	1,943943	0,9269

¹Szükséges a változók indexének módosítása, mert a MATLAB a 0-s vektorindexet nem értelmezi

2. Vizsgálat a frekvenciatartományban

2.1. Átviteli karakterisztika meghatározása

Az átviteli karakterisztika meghatározásához, felírjuk a frekvenciatartománybeli egyenleteket. Ezen esetben a kimeneteket $e^{-j\vartheta}$ -val szorozni kell a bemenetén megjelenő értéket.

$$x_1 = (1 + da)x_1e^{-j\vartheta} + eax_2e^{-j\vartheta} + as \quad (11)$$

$$x_2 = (b + dab)x_1e^{-j\vartheta} + (1 + eab)x_2e^{-j\vartheta} + abs \quad (12)$$

$$x_3 = (b + dab)x_1e^{-j\vartheta} + (1 + eab)x_2e^{-j\vartheta} + abs \quad (13)$$

$$y = x_3e^{-j\vartheta} \quad (14)$$

Az átviteli karakterisztikát a MATLAB segítségével könnyen megadhatjuk a már első feladatban kiszámolt mátrixok alapján:

```
>> [sz,nev]=ss2tf(A,B,CT,D)
```

sz =

```
0    0.1750    0.0000   -0.0000
```

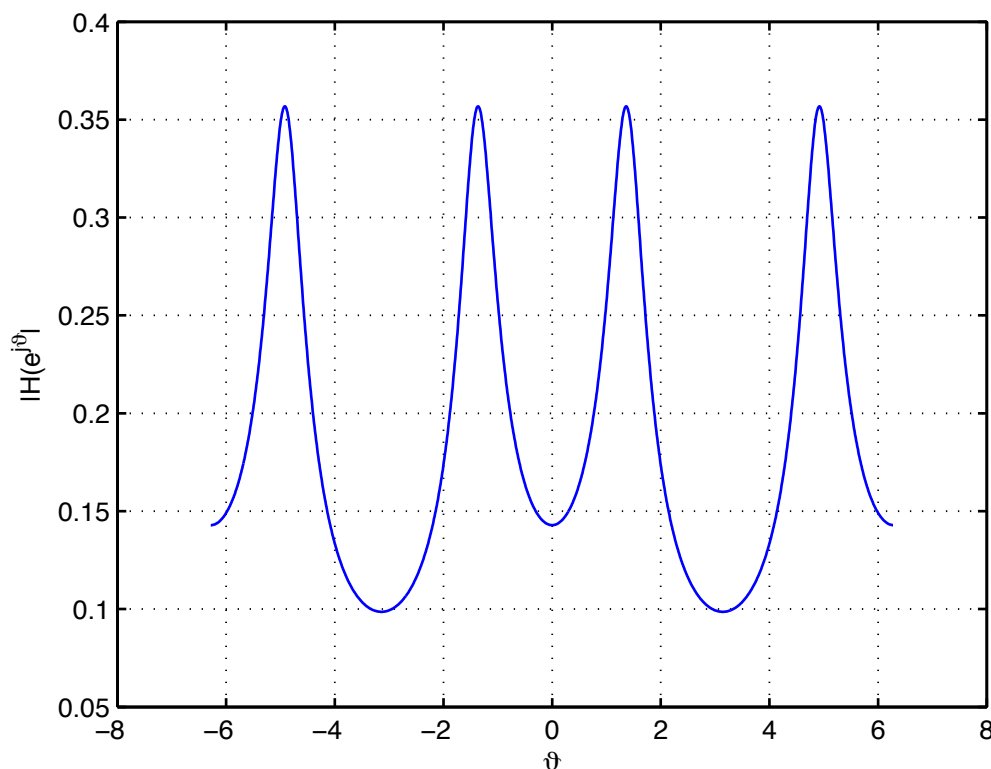
nev =

```
1.0000   -0.2750   -0.5000    0
```

Ez a függvény két vektort ad vissza, amelyek az átviteli függvény együtthatóit tartalmazzák z hatványai szerinti csökkenő sorrendben (z^0 -al kezdődően). Mivel a hálózat GV-stabilis ezért az átviteli függvény megegyezik az átviteli karakterisztikával, z helyett azonban $e^{j\vartheta}$ -kat kell írni. Ezek alapján az átviteli karakterisztika:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0.175e^{-j\vartheta}}{1 - 0.275e^{-j\vartheta} - 0.5e^{-2j\vartheta}} \quad (15)$$

Az amplitúdó karakterisztika az átviteli karakterisztika abszolút értéke. Alakja a $(-2\pi, 2\pi)$ intervallumon az alábbi:



2.2. Válasz adott gerjesztésre

Keressük a hálózat $s[k] = S \cos(\vartheta_0 k + \rho) = 2.5 \cos(\frac{3\pi}{43} + \frac{\pi}{3})$ gerjesztésre adott válaszát. A válasz gerjesztett összetevője a tranziensek lecsengése után áll be. Ehhez természetesen szükséges, hogy a tranziensek valóban lecsengjenek, vagyis $|\lambda_i| < 1 \quad \forall i$ (aszimptotikus stabilitás). Mivel ez a feltétel teljesül, a számításnak van fizikai tartalma. A válasz meghatározásához az átviteli karakterisztikába behelyettesítve ϑ értékét kapjuk az átviteli tényezőt: $H(e^{j3\pi/43}) = \frac{0.175e^{-j3\pi/43}}{1-0.275e^{-j3\pi/43}-0.5e^{-23\pi/43}} = 0,449226e^{j-56,8474^\circ}$, ezt megszorozva S-el pedig a válasz értékét komplex alakban. Ennek abszolút értéke a válasz együtthatója, fázisszögét pedig ρ -val összeadva adódik a válasz időfüggvénye:

$$y[k] = 1,123065977 \cos(\frac{3\pi}{43}k + 3,152551346^\circ) \quad (16)$$

A gerjesztőjel periodicitásának feltétele, hogy ϑ π -nek valamely racionális többszöröse legyen. Mivel ez a feltétel teljesül, a gerjesztőjel periodikus, periódusszámának meghatározásához pedig a

$$K \frac{3\pi}{43} = n2\pi \quad K, n \in \mathbb{N} \quad (17)$$

diofantikus egyenletet kell megoldani. $K = 86$ és $n = 3$ a legkisebb olyan számpár (mivel ezek relatív prímek), ami megoldás, tehát a periódusszám $K = 86$.

2.3. Fourier sor meghatározása

Keressük a következő DI jel Fourier sorát. A Fourier sor diszkrét esetben véges tagú összeg, és pontosan előállítja a jelet. A Fourier együtthatók, a következő összefüggéssel számíthatók:

$$F_i = \frac{1}{K} \sum_{k=0}^{K-1} x[k] \cdot e^{-jik \frac{2\pi}{K}}$$

Ahol K a periódusszám (jelen esetben 6). A fenti alak numerikus számítása a MATLAB segítségével könnyen megtehető²:

```
jel=[1 -2 4 7 9 9];
for k=0:5
    for l=0:5
        kfe(k+1)=kfe(k+1)+jel(l+1)*exp(-1i*k*l*2*pi/6);
    end;
end;
kfe=1/6*kfe;
```

a kfe vektorban a komplex Fourier együtthatókat kapjuk, amelyeknek képezzük a kétszeres valós és -2-szeres képzetes részét

```
kfe =
```

```
Columns 1 through 4
```

```
4.6667          -1.5000 + 2.3094i   -0.3333 + 0.8660i          0 - 0.0000i
```

```
Columns 5 through 6
```

```
-0.3333 - 0.8660i   -1.5000 - 2.3094i
```

```
>> uia=2*real(kfe)
```

```
uia =
```

```
9.3333   -3.0000   -0.6667          0   -0.6667   -3.0000
```

```
>> uib=-2*imag(kfe)
```

²Az indexelés módosítása a MATLAB miatt kell, mivel a 0-s vektorindexet nem értelmezi

uib =

$$0 \quad -4.6188 \quad -1.7321 \quad 0 \quad 1.7321 \quad 4.6188$$

Ezen adatok alapján a valós alak együtthatóit a következő szabályok szerint olvashatjuk ki:

$$U_i^a = 2\operatorname{Re}\{U_i^C\} = uia(i) \quad U_i^b = -2\operatorname{Im}\{U_i^C\} = uib(i) \quad 0 < i < \frac{K}{2}$$

$$U_i^a = U_i^C = kfe(i) \quad U_i^b = 0 \quad i = \frac{K}{2} \wedge i = 0$$

Ezekből pedig a Fourier sor valós alakja a következő:

$$u[k] = U_0 + \sum_{i=1}^{\frac{K}{2}} U_i^a \cos(i\vartheta_0 k) + U_i^b \sin(i\vartheta_0 k)$$

Behelyettesítve az együtthatókat, és elvégezve az összegzést a valós Fourier sor az alábbi:

$$u[k] = 4.6667 - 3\cos(\vartheta_0 k) - 4.6188\sin(\vartheta_0 k) - 0.6667\cos(2\vartheta_0 k) - 1.7321\sin(2\vartheta_0 k) \quad (18)$$

ahol $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{6}$. A fenti alakba k értékeit rendre behelyettesítve az vissza kell kapni a jel értékeit pontosan: k=0-ra:

$$u[0] = 4.6667 - 3\cos(0) - 4.6188\sin(0) - 0.6667\cos(0) - 1.7321\sin(0) = 1$$

k=1-re:

$$u[1] = 4.6667 - 3\cos(2\pi/6) - 4.6188\sin(2\pi/6) - 0.6667\cos(4\pi/6) - 1.7321\sin(4\pi/6) = -2$$

k=2-re:

$$u[2] = 4.6667 - 3\cos(4\pi/6) - 4.6188\sin(4\pi/6) - 0.6667\cos(8\pi/6) - 1.7321\sin(8\pi/6) = 4$$

...

k	$u[k]$
0	1
1	-2
2	4
3	7
4	9
5	9
6	1
7	-2
8	4
9	7
10	9

Valóban, a Fourier sor pontosan visszaadta a jel eredeti értékeit.

2.4. A hálózat válasza az előbbi gerjesztésre

Az átviteli karakterisztikába behelyettesítjük ϑ értékeit, így megkapjuk az átviteli tényezőket a megfelelő frekvenciákra, majd ezek abszolút értékét megszorozva, a gerjesztés abszolút értékével, kapjuk a válasz abszolút értékét, a fázisokat pedig összegezve kapjuk az eredő fázist. A számítás a következő táblázat segítségével szemléletesen elvégezhető. ϑ értéke ebben az esetben $\vartheta_0 = \frac{2\pi}{6} = 60^\circ$ egész számú többszöröse:

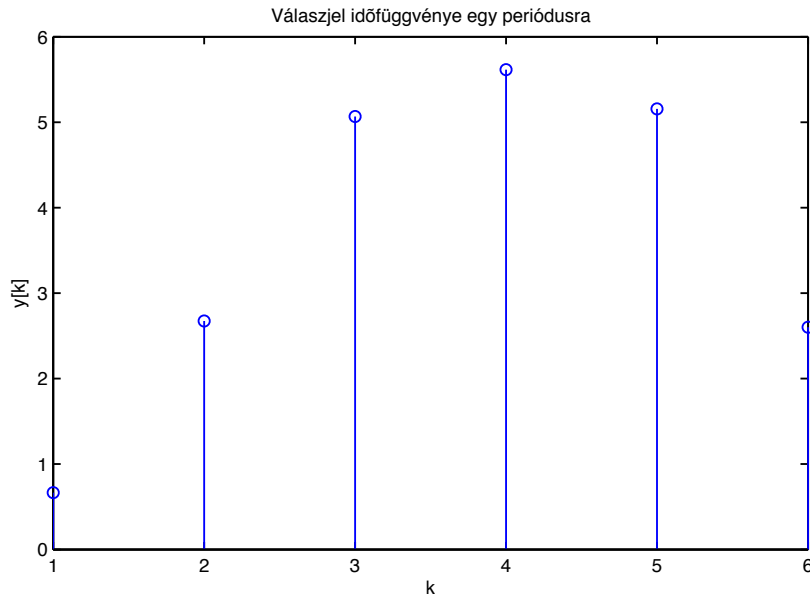
ϑ	$ U $	φ_u	$ H $	φ_H	$ Y $	φ_Y
0	4,6667	0	0,777778	0	3,629656	0
$1\vartheta_0$	5,507569	$-123,005^\circ$	0,13469	$-91,1025^\circ$	0,7418	$-214,107^\circ$
$2\vartheta_0$	1,855979	$-111,052^\circ$	0,1249	$-112,0059^\circ$	0,2318	$-223,057^\circ$

Vagyis a válasz kifejezése az alábbi:

$$y[k] = 3,629656 + 2,474145 \cos(\vartheta_0 k - 179,852^\circ) + 0,491353 \cos(2\vartheta_0 k - 185,456^\circ) \quad (19)$$

A fenti időfüggvény egy periódusa az alábbi:

k	$u[k]$	$y[k]$
0	1	0,666337
1	-2	2,673475
2	4	5,06753
3	7	5,61463
4	9	5,1551
5	9	2,600863
6	1	0,666337
7	-2	2,673475
8	4	5,06753
9	7	5,61463
10	9	5,1551



2.5. Fourier transzformáció

Keressük a hálózat impulzusválaszának Fourier transzformáltját, ami tulajdonképpen az átviteli karakterisztikát adja. A Fourier transzformált a következő alakban állítható elő:

$$H(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-jk\vartheta}$$

Mivel a rendszer kauzális, ezért az összegzést elegendő 0-tól, illetve mivel a gerjesztés közvetlenül nem hat a kimenetre 1-től kezdeni (ezért az $\varepsilon[k-1]$ sem szerepel az alábbi kifejezésben). Tudjuk, hogy $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ $|q| < 1$.

$$H(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=1}^{\infty} (0.1042 \cdot 0.8579^{k-1} + 0.0708 \cdot (-0.5829)^{k-1}) e^{-j\vartheta k}$$

átrendezve úgy, hogy $k = 0$ -ról induljon az összegzés

$$H(e^{j\vartheta}) = \sum_{k=0}^{\infty} (0.1042 \cdot 0.8579^k + 0.0708 \cdot (-0.5829)^k) e^{-j\vartheta(k+1)}$$

így kiemelhető egy $e^{-j\vartheta}$ -s tag, a másik $e^{-j\vartheta k}$ -s taggal beszorozva, és átzárójelezve az alábbi kifejezés adódik

$$H(e^{j\vartheta}) = 0.1042 e^{-j\vartheta} \sum_{k=1}^{\infty} (0.8579 e^{-j\vartheta})^k + 0.0708 e^{-j\vartheta} \sum_{k=1}^{\infty} (-0.5829 e^{-j\vartheta})^k$$

majd felhasználva a $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ azonosságot, és $e^{j\vartheta}$ -val bővítve az így kapott törtet a következőt kapjuk:

$$H(e^{j\vartheta}) = \left(0.1042 \frac{e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta} - 0.8579} + 0.0708 \frac{e^{j\vartheta}}{e^{j\vartheta} + 0.5829} \right) e^{-j\vartheta} \quad (20)$$

Az így kapott alakot közös nevezőre hozva előáll az átviteli karakterisztika szokásos – polinom/polinom alakja (ezúttal $e^{j\vartheta}$ pozitív kitevőivel):

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{0.175e^{j\vartheta}}{e^{2j\vartheta} - 0.275e^{j\vartheta} - 0.5} \quad (21)$$

2.6. Rendszeregyenlet

Az átviteli karakterisztika ismeretében a rendszeregyenlet egyszerűen adódik, mivel tudjuk, hogy a

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{a_0 + a_1e^{-j\vartheta} + a_2e^{-2j\vartheta} + \dots}{1 + b_1e^{-j\vartheta} + b_2e^{-2j\vartheta} + \dots}$$

alakú átviteli karakterisztikából a rendszeregyenlet a

$$y[k] + b_1y[k-1] + b_2y[k-2] + \dots = a_0u[k] + a_1u[k-1] + a_2u[k-2] + \dots$$

formában képezhető. Tehát az átviteli karakterisztikából a rendszeregyenlet az alábbi:

$$y[k] - 0.275y[k-1] - 0.5y[k-2] = 0.175u[k-1] \quad (22)$$

3. Vizsgálat a komplex frekvenciatartományban

3.1. Átviteli függvény meghatározása

Az állapotváltozós leírás alapján az átviteli függvény meghatározható, a korábban leírt MATLAB függvény segítségével ([sz,nev]=ss2tf(A,B,C,D)). Az átviteli függvény tehát a következő:

$$H(z) = \frac{0.175z^{-1}}{1 - 0.275z^{-1} - 0.5z^{-2}} \quad (23)$$

A GV-stabilitás miatt ez az átviteli karakterisztikával megegyezik, $z = e^{j\vartheta}$

3.2. Pólus-Zérus elrendezés

Az átviteli függvény pólusai és zérusai, a nevező és a számláló gyökhelyei. Ezeket a MATLAB segítségével megtudhatjuk:

```
>> polus=roots(sz)
```

```
polus =
```

```
0
0
```

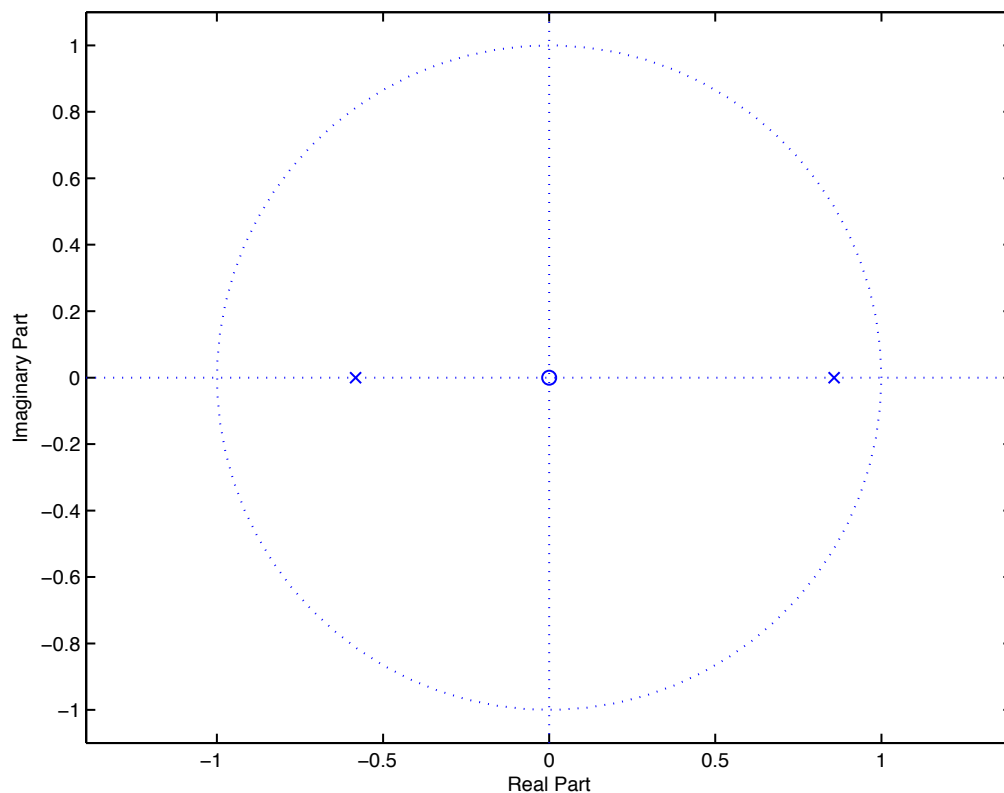
```
>> zerus=roots(nev)
```

```
zerus =
```

```
0
0.8579
-0.5829
```

A visszaakapott két vektor a gyökhelyeket tartalmazza. Ezekből a pólus-zérus elrendezést szintén a MATLAB segítségével ábrázolhatjuk:

```
>> zplane(polus,zerus)
```



A hálózat GV-stabilitásának feltétele, hogy a pólusok az egységkörtől belül helyezkedjenek el. Az ábrán látható, hogy ez teljesül, tehát valóban GV-stabilis a rendszer.

3.3. Impulzusválasz

Az impulzusválasz az átviteli függvény inverz Z transzformáljaként is előállítható. A Z-transzformált meghatározásához először parciális törtekre kell bontani az átviteli függvényt. Ez könnyen megtehető a MATLAB segítségével:

```
>> [r,p,c]=residue(sz,nev)
```

```
r =
```

```
0.1042
0.0708
0
```

```
p =
```

```
0.8579
-0.5829
0
```

```
c =
```

```
[]
```

Mivel ez egy valódi törtfüggvény, konstans tag nem keletkezett (üres a c vektor), a parciális törtek tehát az alábbiak:

$$H(z) = \left(\frac{0.1042}{z - 0.8579} + \frac{0.0708}{z + 0.5829} \right) z \cdot z^{-1} \quad (24)$$

mivel a számlálóból nem lehet kiemelni z -t ezért be kell szorozni $z \cdot z^{-1}$ -el, így a z -t bevihetjük a számlálókba így már képezhető az inverz Z-transzformált a $\mathcal{L}^{-1}\{\frac{z}{z-p}\} = \varepsilon[k]p^k$ azonosságot és az eltolási tételt alkalmazva. Így az alábbi formában áll elő az inverz Z transzformált:

$$\mathcal{L}^{-1}\{H(z)\} = h[k] = \varepsilon[k-1](0.1042 \cdot 0.8579^{k-1} + 0.0708 \cdot (-0.5829)^{k-1}) \quad (25)$$

Az impulzusválasz az átviteli függvényből polinomosztás segítségével is meghatározható. A polinomosztás eredményeképp $h_1z + h_2z^{-1} + h_3z^{-2} \dots$ alakot kapunk, és mivel tudjuk, hogy $\mathcal{L}^{-1}\{z^{-p}\} = \delta[k-p]$, az impulzusválasz könnyen képezhető.

$$\begin{aligned} (0.175z^{-1}) : (1 - 0.275z^{-1} - 0.5z^{-2}) &= 0z^0 + 0.175z^{-1} + 0.0481z^{-2} + 0.1007z^{-3} + 0.05176z^{-4} + 0.0646z^{-5} \dots \\ 0 & \\ 0.175z^{-1} & \\ \hline -0.175z^{-1} - 0.04812z^{-2} - 0.0875z^{-3} & \\ 0.04812z^{-2} + 0.0875z^{-3} & \\ \hline -0.04812z^{-2} - 0.01323z^{-3} - 0.024z^{-4} & \\ 0.1007z^{-3} + 0.024z^{-4} & \\ \hline -0.1007z^{-3} - 0.0277z^{-4} - 0.0503z^{-5} & \\ 0.0517z^{-4} + 0.0503z^{-5} & \\ \hline \ddots & \end{aligned}$$

Tehát az impulzusválasz $k = 0, 1 \dots 5$ lépésre az alábbi:

$$h[k] = 0\delta[k] + 0.175\delta[k-1] + 0.0481\delta[k-2] + 0.1007\delta[k-3] + 0.05176\delta[k-4] + 0.0646\delta[k-5] \quad (26)$$

3.4. Válasz a megadott jelre

A hálózat gerjesztése legyen: $s[k] = \varepsilon[k](1, 5 + 0, 8(\frac{8}{9})^k)$. Ennek képezzük a Z-transzformáltját, amely az alábbi:

$$U(z) = \frac{1,5z}{z-1} + \frac{0,8z}{z-\frac{8}{9}} = \frac{20.7z^2 - 19.2z}{9z^2 - 17z + 8}$$

Ezt megszorozva az átviteli függvénnyel megkapjuk a válasz kifejezését a komplex frekvenciatartományban (itt célszerűen áttérünk z pozitív kitevős hatványaira, vagyis az átviteli karakterisztikát $\frac{z^2}{z^2}$ -el bővítjük):

$$Y(z) = U(z) \cdot H(z) = \frac{20.7z^2 - 19.2z}{9z^2 - 17z + 8} \cdot \frac{0.175z}{z^2 - 0.275z - 0.5}$$

Fenti művelet a MATLAB segítségével végezhető el legegyszerűbben

```
>> gsz=[20.7, -19.2, 0]
```

```
gsz =
```

```
20.7000 -19.2000 0
```

```
>> gnev=[9,-17,8]
```

```
gnev =
```

```
9 -17 8
```

```
>> vsz=conv(gsz,sz)
```

```
vsz =
```

```
0    3.6225    -3.3600    0    0    0
```

```
>> vnev=conv(gnev,nev)
```

```
vnev =
```

```
9.0000    -19.4750    8.1750    6.3000    -4.0000    0
```

A válasz kifejezése polinom/polinom alakban az alábbi:

$$Y[z] = \frac{3.6225z^3 - 3.36z^2}{9z^4 - 19.475z^3 + 8.175z^2 + 6.3z - 4} \quad (27)$$

Ezután parciális törtekre kell bontani a kapott függvényt. A már leírt módszert használjuk (MATLAB)

```
>> [r1,p1,c1]=residue(vsz,vnev)
```

```
r1 =
```

```
1.1667
2.4216
-3.2473
0.0615
0
```

```
p1 =
```

```
1.0000
0.8889
0.8579
-0.5829
0
```

```
c1 =
```

```
[]
```

Ezúttal is valódi törtfüggvényt bontottunk parciális törtekre, tehát a c1 vektor üres (nincs konstans tag). Az inverz Z-transzformált megadja a válasz kifejezését az időtartományban (most is a $\mathcal{Z}^{-1}\{\frac{z}{z-p}\} = \varepsilon[k]p^k$ összefüggést és az eltolási tételt használva képezzük). A parciális törtek:

$$Y(z) = \left(\frac{1.1667}{z-1} + \frac{2.4216}{z-0.8889} - \frac{3.2473}{z-0.8579} + \frac{0.0615}{z+0.5829} \right) z \cdot z^{-1} \quad (28)$$

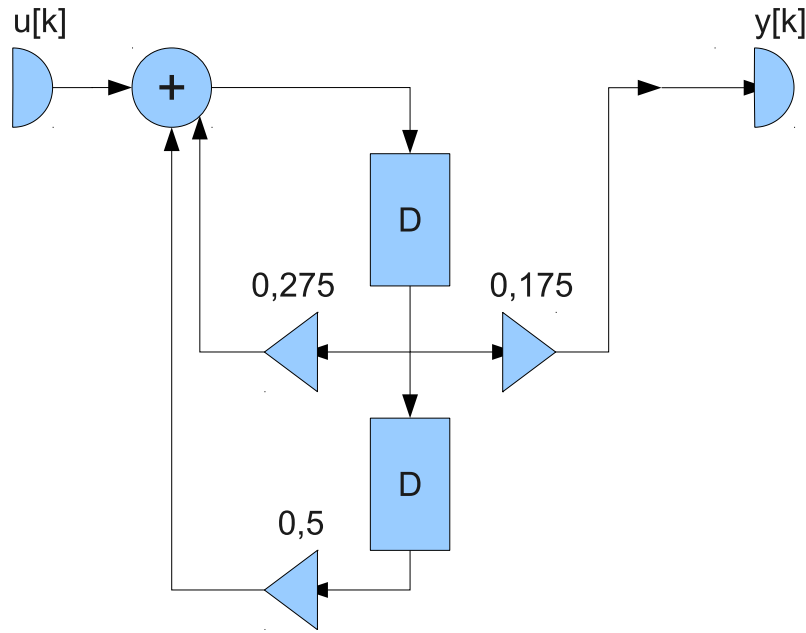
Az időfüggvény pedig:

$$y[k] = \varepsilon[k-1] (1.1667 + 2.4216 \cdot 0.8889^{k-1} - 3.2473 \cdot 0.8579^{k-1} + 0.0615 \cdot (-0.5829)^{k-1}) \quad (29)$$

3.5. Kanonikus hálózat

A kanonikus alakú hálózatot az átviteli függvény alapján konstruálhatjuk. Az így kapott hálózat nagy előnye, hogy minimális számú késleltetőt tartalmaz, jelen esetben kettőt (vagyis az eredetileg megadott hálózat feleslegesen sok késleltetőt tartalmaz – valóban, a kimenet előtt szorzó és késleltető elhagyható lenne, hiszen $x_2 = x_3^3$). A kanonikus hálózat az alábbi:

³A kauzalitás persze követelmény, de mivel a hálózat meg van valósítva ez teljesül



A hálózat rendszeregyenlete könnyen leolvasható a hálózattól, a visszacsatoló ágak a válaszjel időben eltoló együtthatói, az előre csatoló ágak pedig a gerjesztésé. Ez alapján a rendszeregyenlet:

$$y[k] - 0.275y[k-1] - 0.5y[k-2] = 0.175u[k-1] \quad (30)$$

3.6. Ellenőrzés fokozatos behelyettesítéssel

Átrendezve a rendszeregyenletet $y[k]$ -ra a következő rekurzív kifejezést kapjuk

$$y[k] = 0.275y[k-1] + 0.5y[k-2] + 0.175u[k-1] \quad (31)$$

k értékeit rendre behelyettesítve megkapjuk $y[k]$ értékeit:

$y[0] = 0$ mivel a gerjesztés belépő,

$k = 1$ -re:

$$y[1] = 0.275 \cdot 0 + 0.5 \cdot 0 + 0.175 \cdot 2.3 = 0.4025$$

$k = 2$ -re:

$$y[2] = 0.275 \cdot 0.4025 + 0.5 \cdot 0 + 0.175 \cdot 2.2111 = 0.4978$$

$k = 3$ -ra:

$$y[3] = 0.275 \cdot 0.4978 + 0.5 \cdot 0.4025 + 0.175 \cdot 2.132 = 0.7114$$

...

Ugyanígy a válasz explicit kifejezésébe behelyettesítve k értékeit, ugyanazt kapjuk (kerekítési hibáktól eltekintve)

$$y[k] = \varepsilon[k-1](1.1667 + 2.4216 \cdot 0.8889^{k-1} - 3.2473 \cdot 0.8579^{k-1} + 0.0615 \cdot (-0.5829)^{k-1}) \quad (32)$$

pl. $k = 0$ -ra $y[0] = 0$, mivel csak $k = 1$ -ben lép be a válasz,

$k = 1$ -re a válasz:

$$y[1] = 1.1667 + 2.4216 - 3.2473 + 0.0615 = 0.4025$$

$k = 2$ -re a válasz:

$$y[2] = 1.1667 + 2.4216 \cdot 0.8889 - 3.2473 \cdot 0.8579 + 0.0615 \cdot (-0.5829) = 0.497795$$

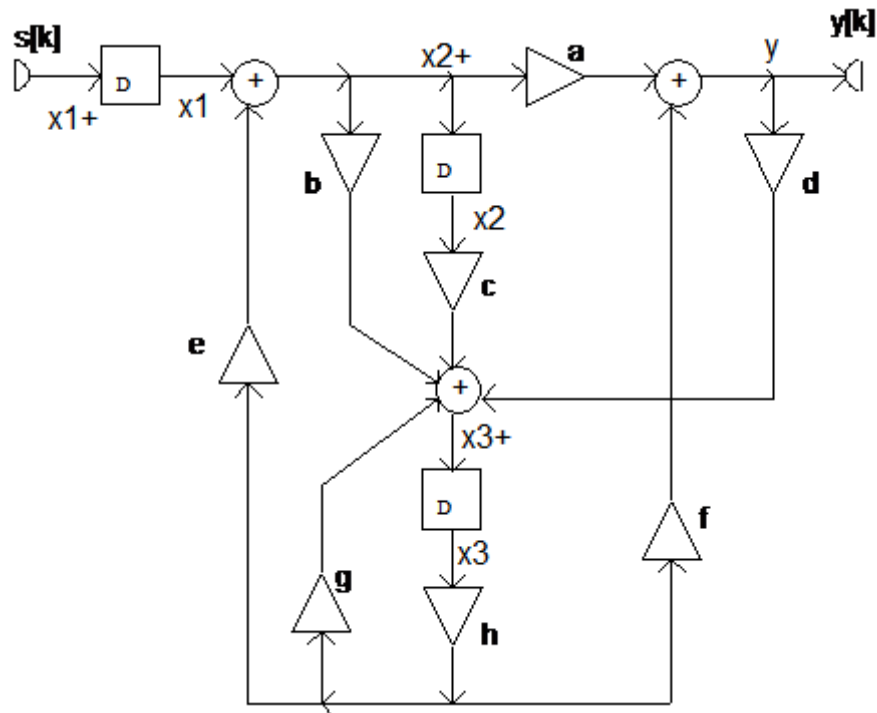
$k = 3$ -ra:

$$y[3] = 1.1667 + 2.4216 \cdot 0.8889^2 - 3.2473 \cdot 0.8579^2 + 0.0615 \cdot (-0.5829)^2 = 0.711449$$

...

k	$u[k]$	$y_{ren.egy}[k]$	$y_{expl.}[k]$
0	2,3	0	0
1	2,211111	0,4025	0,4025
2	2,132099	0,497632	0,497795
3	2,061866	0,711216	0,711449
4	1,999436	0,805227	0,805554
5	1,943943	0,926947	0,927336
6	1,894616	0,997714	0,99816
7	1,85077	1,069402	1,069891
8	1,811795	1,116827	1,117349
9	1,777152	1,158893	1,159438
10	1,746357	1,188111	1,188671

1.1 Az állapotváltozós leírás normál alakja



Az erősítések értékei:

$$a = -2,5 \quad b = 0,4 \quad c = -1 \quad d = -0,7 \quad e = -2 \quad f = 0,2 \quad g = 0,3 \quad h = 0,4$$

Egyenletek az összegző csomópontokra:

- (1) $x_1^+ = u$
- (2) $x_2^+ = x_1 - 0,8 \cdot x_3$
- (3) $y = 0,08 \cdot x_3 - 2,5 \cdot x_2^+$
- (4) $x_3^+ = 0,4 \cdot x_2^+ - 0,7 \cdot y - x_2 + 0,12 \cdot x_3$

Ezek alapján az egyenletek a következőképpen alakulnak.

(2) egyenletet a (3)-ba behelyettesítve a válasz, a kapott egyenletet és (2)-t (4)-be pedig x_3^+ függvényét kapjuk

$$x_1^+ = u$$

$$x_2^+ = x_1 - 0,8 \cdot x_3$$

$$x_3^+ = 2,15 \cdot x_1 - x_2 - 1,656 \cdot x_3$$

$$y = -2,5 \cdot x_1 + 2,08 \cdot x_3$$

Mátrixos alakban:

$$\begin{bmatrix} x_1^+ \\ x_2^+ \\ x_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0,8 \\ 2,15 & -1 & -1,656 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u \quad y = [-2,5 \quad 0 \quad 2,08] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

1.2. Sajátértékek:

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0.8 \\ -2.15 & 1 & \lambda + 1.656 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda \cdot (\lambda + 1.656) - 0.8) = 0$$

$$\lambda_1 = -2.0468 \quad \lambda_2 = 0.3908 \quad \lambda_3 = 0$$

Mivel $\lambda_1 > 1$ -nél nagyobb ezért a rendszer nem GV-stabilis, a szorzókat változtatni kell.

Legyen mondjuk $e = -0.5$.

Az egyenletek paraméteres alakban:

$$x_1^+ = u$$

$$x_2^+ = x_1 + e \cdot h \cdot x_3$$

$$x_3^+ = (b + d \cdot a) \cdot x_1 + c \cdot x_2 + (b \cdot e \cdot h + h \cdot g + d \cdot (a \cdot e \cdot h + h \cdot f)) \cdot x_3$$

$$y = a \cdot x_1 + (a \cdot e \cdot h + h \cdot f) \cdot x_3$$

Az erősítések értékeit behelyettesítve a rendszer mátrixai így alakulnak:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -0.2 \\ 2.15 & -1 & -0.366 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C^T = [-2.5 \quad 0 \quad 0.58] \quad D = 0$$

A karakterisztikus polinom:

$$\det(\lambda \cdot I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0.8 \\ -2.15 & 1 & \lambda + 0.366 \end{vmatrix} = \lambda \cdot (\lambda \cdot (\lambda + 0.366) - 0.8) = 0$$

$$A11=0;$$

$$A12=0;$$

$$A13=0;$$

$$A21=1;$$

$$A22=0;$$

$$A23=e \cdot h;$$

$$A31=(b+d \cdot a);$$

$$A32=c;$$

$$A33=(b \cdot e \cdot h + h \cdot g + d \cdot (a \cdot e \cdot h + h \cdot f));$$

$$A=[A11 \ A12 \ A13; A21 \ A22 \ A23; A31 \ A32 \ A33]$$

$$C1=a;$$

$$C2=0;$$

$$C3=(a \cdot e \cdot h + h \cdot f);$$

$$C=[C1 \ C2 \ C3]$$

$$D=0$$

$$B=[1;0;0]$$

$$[m, \lambda] = \text{eig}(A);$$

A sajátértékek:

$$\lambda_1 = -0.6662 \quad \lambda_2 = 0.3002 \quad \lambda_3 = 0$$

1. 3 Az impulzusválasz meghatározása

Kezdeti feltétel:

$\mathbf{x}[0] = 0$, mivel a rendszer egy-gerjesztésű, egy-válaszú

$$\begin{aligned} k=0: & \quad h[0] = D & \quad \mathbf{x}[1] = B \\ k=1: & \quad h[1] = C^T \cdot \mathbf{x}[1] & \quad \mathbf{x}[2] = A \cdot \mathbf{x}[1] \\ k=2: & \quad h[2] = C^T \cdot \mathbf{x}[2] & \quad \mathbf{x}[3] = A \cdot \mathbf{x}[2] \end{aligned}$$

stb.

Ennek alapján: $k = 10$ ig:

k	$\delta[k]$	h[k]	x1[k+1]	x2[k+1]	x3[k+1]
0	1	0,00	1,0	0,0	0,00
1	0	-2,5000	0,0000	1,0000	2,1500
2	0	1,2470	0,0000	-0,4300	-1,7869
3	0	-1,0364	0,0000	0,3574	1,0840
4	0	0,6287	0,0000	-0,2168	-0,7541
5	0	-0,4374	0,0000	0,1508	0,4928
6	0	0,2858	0,0000	-0,0986	-0,3312
7	0	-0,1921	0,0000	0,0662	0,2198
8	0	0,1275	0,0000	-0,0440	-0,1467
9	0	-0,0851	0,0000	0,0293	0,0976
10	0	0,0566	0,0000	-0,0195	-0,0651

Analitikus alakban:

$$h[k] = \sum_{i=1}^3 c_i \cdot \lambda_i^k, \text{ ha } k \geq 2 \text{ mivel } \lambda_3 = 0$$

$$h[k] = c_1 \cdot \lambda_1^k + c_2 \cdot \lambda_2^k, \text{ ha } k \geq 2 \text{ Ezt így is írhatjuk } h[k] = \varepsilon[k-2] \cdot (c_1 \cdot \lambda_1^{k-2} + c_2 \cdot \lambda_2^{k-2})$$

A táblázatból az értékeket behelyettesítve:

$$\text{ha } k=2, \quad h[2] = 1.2470 = c_1 + c_2$$

$$\text{ha } k=3, \quad h[3] = -1.0364 = -0.6662 \cdot c_1 + 0.3002 \cdot c_2$$

% egyenletrendszer megoldása Matlab-bal:

$$X = [1 \ 1; -0.6662 \ 0.3002];$$

$$y = [1.2470; -1.0364];$$

$$\text{inv}(X) * y$$

$$c_1 = 1.4598 \quad c_2 = -0.2128$$

$$\varepsilon[k-2] \cdot (1.4598 \cdot (-0.6662)^{k-2} - 0.2128 \cdot 0.3002^{k-2}), \text{ ha } k \geq 2$$

$$h[0] = 0 \quad h[1] = -2.5$$

Tehát az impulzusválasz:

$$h[k] = -2.5 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot (1.4598 \cdot (-0.6662)^{k-2} - 0.2128 \cdot 0.3002^{k-2})$$

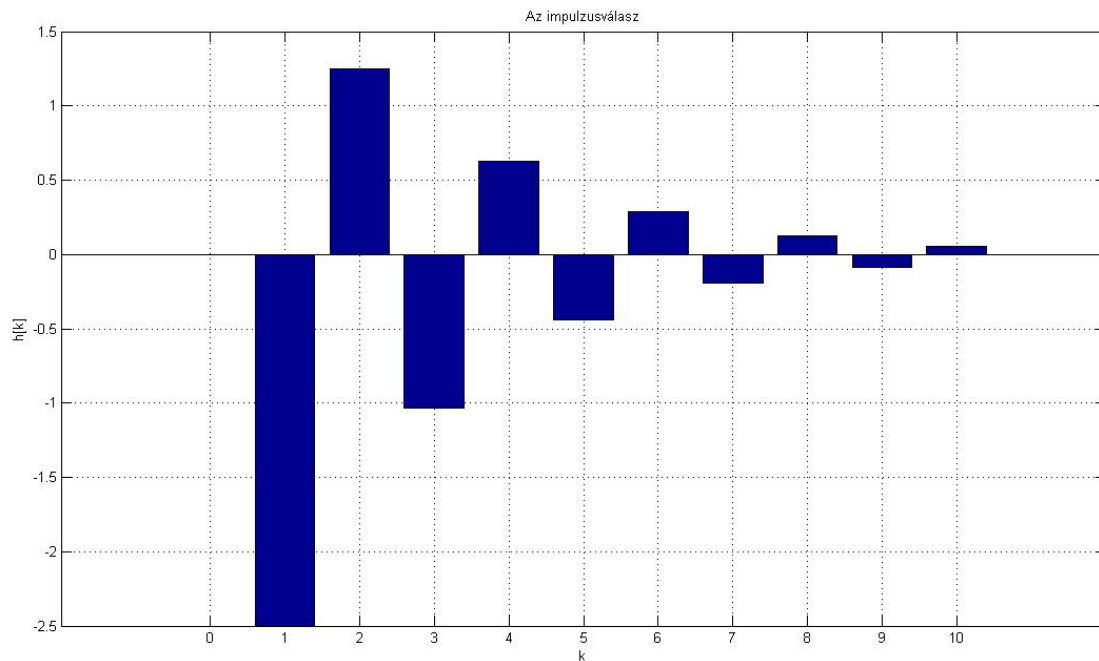
Ábrázolás Matlabbal:

$$k=0:1:10;$$

```

h=-2.5.*(stepfun(k,1)-stepfun(k,2))+stepfun(k,2).*(1.4598.*(-0.6662).^(k-2)-
0.2128.*0.3002.^(k-2));
figure(1)
bar(k,h)
title('Az impulzusválasz');
xlabel('k')
ylabel('h[k]')
grid

```



Az ábrázolásoknál mindig ugyanazokat a függvényeket használom, ezért a többi feladatnál nem írom le a kódot.

1.4. A válasz meghatározása

A megadott táblázat alapján:

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k) = \varepsilon[k] \cdot (2 - (0.75)^k)$$

A válasz a $y[k] = \varepsilon[k] \cdot \sum_{i=0}^k h[k-i] \cdot u[i]$ kifejezés alapján számolható

Az impulzusválasz és a gerjesztés értékei:

k	0	1	2	3	4	5
$h[k]$	0	-2.5	1.2470	-1.0364	0.6287	-0.4374
$u[k]$	1	1.25	1.4375	1.5781	1.6836	1.7627

$$y[0] = h[0] \cdot u[0] = 0 \cdot 1 = 0$$

$$y[1] = h[1] \cdot u[0] + h[0] \cdot u[1] = -2.5 \cdot 1 + 0 \cdot 1.25 = -2.5$$

$$y[2] = h[2] \cdot u[0] + h[1] \cdot u[1] + h[0] \cdot u[2] = 1.2470 \cdot 1 - 2.5 \cdot (1.25) \\ 0 \cdot (1.4375) = -1.8780$$

$$y[3] = h[3] \cdot u[0] + h[2] \cdot u[1] + h[1] \cdot u[2] + h[0] \cdot u[3] = -1.0364 \cdot 1 + 1.2470 \cdot 1.25 \\ -2.5 \cdot 1.4375 + 0 \cdot 1.5781 = -3.0714$$

$$y[4] = h[4] \cdot u[0] + h[3] \cdot u[1] + h[2] \cdot u[2] + h[1] \cdot u[3] + h[0] \cdot u[4] = 0.6287 \cdot 1 \\ -1.0364 \cdot 1.25 + 1.2470 \cdot 1.4375 - 2.5 \cdot 1.5781 + 0 \cdot 1.6836 = -2.8195$$

$$y[5] = h[5] \cdot u[0] + h[4] \cdot u[1] + h[3] \cdot u[2] + h[2] \cdot u[3] + h[1] \cdot u[4] + h[0] \cdot u[5] = \\ -0.4374 \cdot 1 + 0.6287 \cdot 1.25 - 1.0364 \cdot 1.4375 + 1.2470 \cdot 1.5781 \\ -2.5 \cdot 1.6836 + 0 \cdot 1.7627 = -3.3823$$

A válasz értékei táblázatban:

k	0	1	2	3	4	5
$y[k]$	0	-2.5	-1.8780	-3.0714	-2.8195	-3.3823

2. 1 Az átviteli karakterisztika meghatározása

Induljunk ki a az állapotváltozós normálalakból:

$$(1) \quad x_1^+ = u \rightarrow X_1 \cdot e^{j\theta} = U$$

$$(2) \quad x_2^+ = x_1 - 0.2 \cdot x_3 \rightarrow X_2 \cdot e^{j\theta} = X_1 - 0.2 \cdot X_3$$

$$(3) \quad x_3^+ = 2.15 \cdot x_1 - x_2 - 0.366 \cdot x_3 \rightarrow X_3 \cdot e^{j\theta} = 2.15 \cdot X_1 - X_2 - 0.366 \cdot X_3$$

$$(4) \quad y = -2.5 \cdot x_1 + 0.58 \cdot x_3 \rightarrow Y = -2.5 \cdot X_1 + 0.58 \cdot X_3$$

$$(1) \quad X_1 = U \cdot e^{-j\theta}$$

(2)-be helyettesítsük be X_1 -et és rendezzük X_2 -re:

$$(2) \quad X_2 = U \cdot e^{-j2\theta} - 0.2 \cdot X_3 \cdot e^{-j\theta}$$

Célunk (4) egyenletből X_1 -et és X_3 -at kiküszöbölni.

(3) egyenletből próbáljuk meg X_1 -et és X_2 -öt eltávolítani.

$$X_3 \cdot e^{j\theta} = 2.15 \cdot X_1 - X_2 - 0.366 \cdot X_3 = 2.15 \cdot U \cdot e^{-j\theta} - (U \cdot e^{-j\theta} - 0.2 \cdot X_3) \cdot e^{-j\theta} - 0.366 \cdot X_3$$

Ezt szorozzuk meg $e^{-j\theta}$ -vel majd rendezzük X_3 -ra:

$$X_3 = \frac{2.15 \cdot U \cdot e^{-j2\theta} - e^{-j3\theta}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j\theta} - 0.2 \cdot e^{-j2\theta}} \cdot U$$

(4) egyenletbe helyettesítsük be X_1 -et és X_3 -at:

$$\underline{Y} = -2.5 \cdot U \cdot e^{-j \cdot \vartheta} + 0.58 \cdot \frac{2.15 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta} - e^{-j 3 \cdot \vartheta}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} - 0.2 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta}} \cdot U = \frac{-2.5 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} + 0.332 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta} - 0.08 \cdot e^{-j 3 \cdot \vartheta}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} - 0.2 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta}} \cdot U$$

Tehát az átviteli karakterisztika:

$$\rightarrow H(e^{j \cdot \vartheta}) = \frac{Y}{U} = \frac{-2.5 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} + 0.332 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta} - 0.08 \cdot e^{-j 3 \cdot \vartheta}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} - 0.2 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta}}$$

$$\text{Az amplitúdó karakterisztika: } K(\vartheta) = \left| \overline{H}(e^{j \cdot \vartheta}) \right| = \left| \frac{-2.5 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} + 0.332 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta} - 0.08 \cdot e^{-j 3 \cdot \vartheta}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot \vartheta} - 0.2 \cdot e^{-j 2 \cdot \vartheta}} \right| =$$

Ábrázolás:

```
teta=2.*pi:0.001:2.*pi;
```

```
H=(-2.5.*exp(-j.*teta)+0.332.*exp(-2.*j.*teta)-0.08.*exp(-3.*j.*teta))./(1+0.366.*exp(-j.*teta)-0.2.*exp(-2.*j.*teta));
```

```
Habs=abs(H);
```

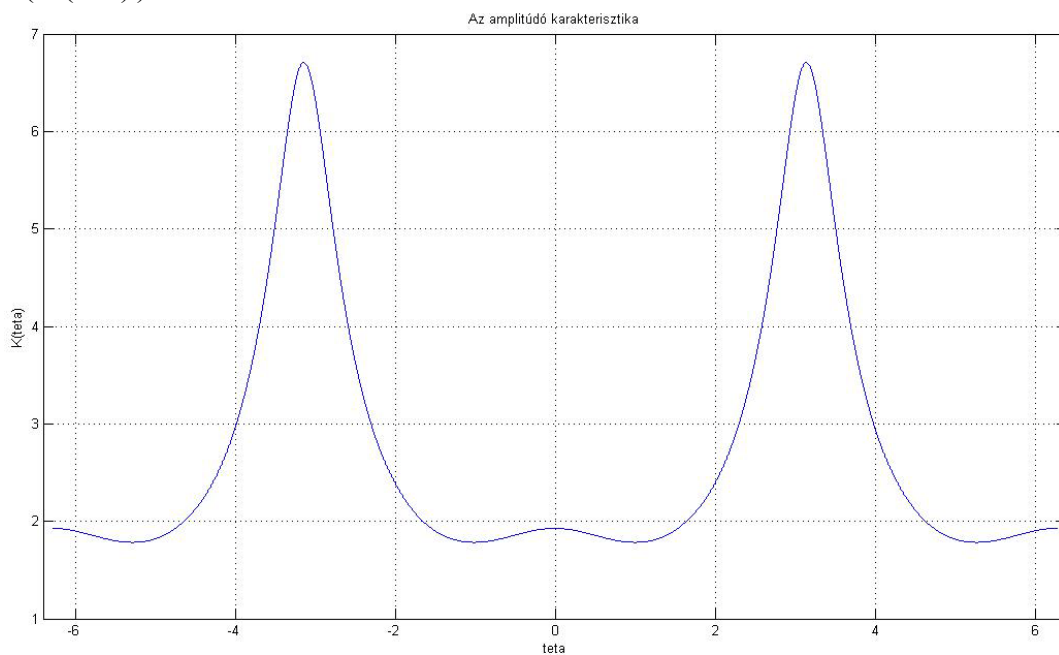
```
plot(teta,Habs)
```

```
grid
```

```
title('Az amplitúdó karakterisztika')
```

```
xlabel('teta')
```

```
ylabel('K(teta)')
```



2.2

A megadott táblázat alapján:

$$s[k] = S \cdot \cos(\vartheta_0 \cdot k + \rho) = s[k] = 15 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18} \cdot k + 0.29\pi\right)$$

$$\vartheta_0 = \frac{\pi}{18} = 2 \cdot \pi \cdot \frac{1}{36}, \text{ azaz a jel periódusa } K=36$$

Az átviteli karakterisztika a vizsgált $\vartheta_0 = \frac{\pi}{18}$ körfrekvencián:

$$\overline{H}(e^{j\vartheta_0}) = \frac{-2.5 \cdot e^{-j\frac{\pi}{18}} + 0.332 \cdot e^{-j\frac{\pi}{9}} - 0.08 \cdot e^{-j\frac{\pi}{3}}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j\frac{\pi}{18}} - 0.2 \cdot e^{-j\frac{\pi}{9}}} = -1.8915 + 0.3153 \cdot j = 1.9176 \cdot e^{j2.9764}$$

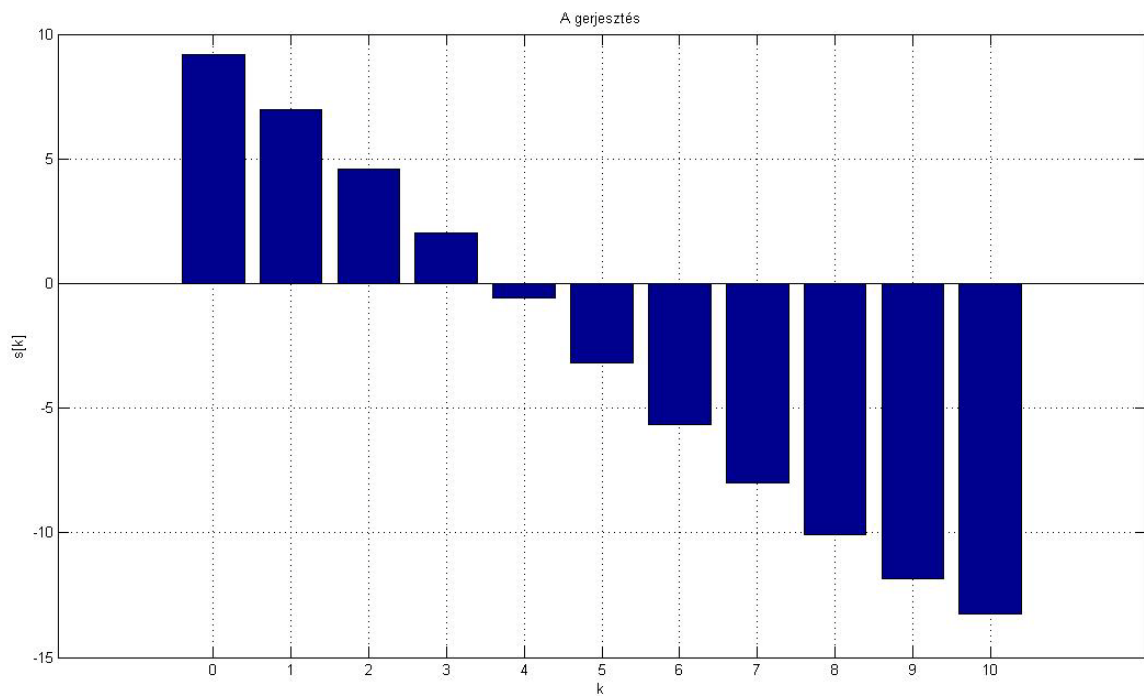
a gerjesztés komplex alakja:

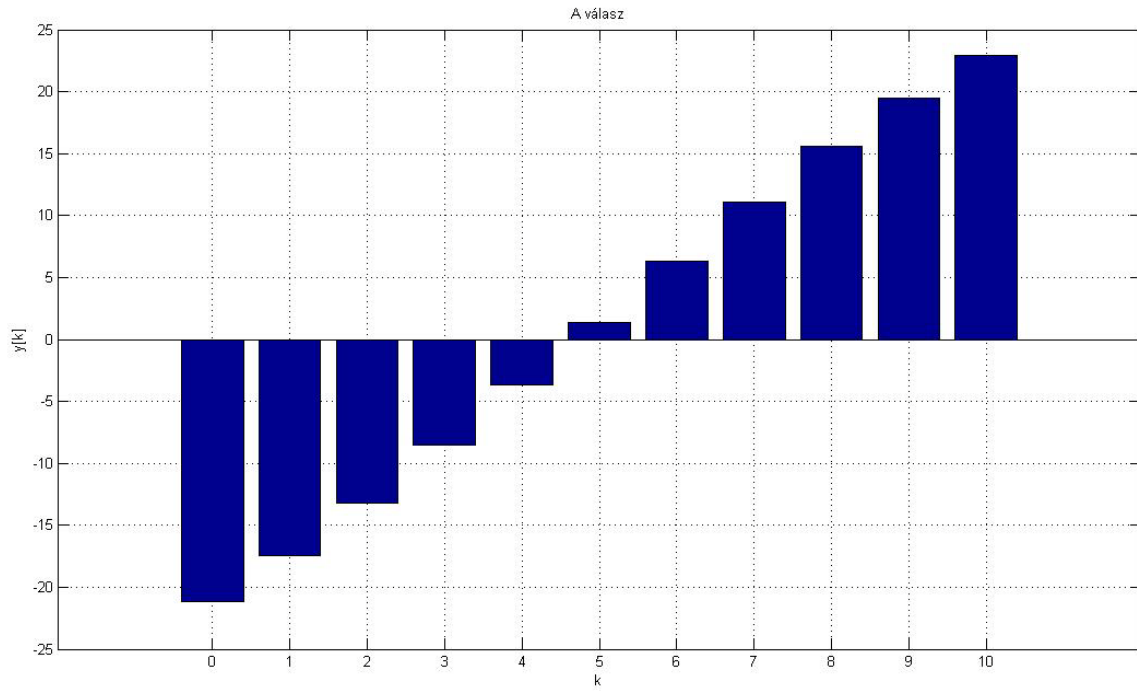
$$\overline{S} = 15 \cdot e^{j0.29\pi}$$

A válasz komplex alakja:

$$\overline{Y} = \overline{H} \cdot \overline{S} = 1.9176 \cdot e^{j2.9764} \cdot 15 \cdot e^{j0.29\pi} = 28.764 \cdot e^{j3.8875}$$

$$y[k] = 28.764 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{18} \cdot k + 3.8875\right)$$





2. 3

$$s[0] = -1 \quad s[1] = 2 \quad s[2] = -2 \quad s[3] = 3 \quad s[4] = 2 \quad s[5] = -9$$

$$L = 6 \quad \Theta = \frac{2 \cdot \pi}{L} = \frac{2 \cdot \pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

$$S_p^C = \frac{1}{L} \cdot \sum_{k=0}^{L-1} s[k] \cdot e^{-j \cdot p \cdot \Theta \cdot k}$$

$$S_0^C = \frac{1}{6} \cdot (-1 + 2 - 2 + 3 + 2 - 9) = -0.8333$$

$$S_1^C = \frac{1}{6} \cdot \left(-1 + 2 \cdot e^{-j \frac{\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} + 3 \cdot e^{-j \pi} + 2 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} - 9 \cdot e^{-j \frac{5\pi}{3}} \right) = -1.2500 - j \cdot 1.0104 = 1.6073 \cdot e^{-j \cdot 2.4618}$$

$$S_2^C = \frac{1}{6} \cdot \left(-1 + 2 \cdot e^{-j \frac{2\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} + 3 \cdot e^{-j 2\pi} + 2 \cdot e^{-j \frac{8\pi}{3}} - 9 \cdot e^{-j \frac{10\pi}{3}} \right) = 0.9167 - j \cdot 2.1651 = 2.3512 \cdot e^{-j \cdot 1.1703}$$

$$S_3^C = \frac{1}{6} \cdot (-1 + 2 \cdot e^{-j \pi} - 2 \cdot e^{-j 2\pi} + 3 \cdot e^{-j 3\pi} + 2 \cdot e^{-j 4\pi} - 9 \cdot e^{-j 5\pi}) = 0.5$$

$$S_4^C = \frac{1}{6} \cdot \left(-1 + 2 \cdot e^{-j \frac{4\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \frac{8\pi}{3}} + 3 \cdot e^{-j 4\pi} + 2 \cdot e^{-j \frac{16\pi}{3}} - 9 \cdot e^{-j \frac{20\pi}{3}} \right) = 0.9167 + j \cdot 2.1651 = 2.3512 \cdot e^{j \cdot 1.1703}$$

$$S_5^C = \frac{1}{6} \cdot \left(-1 + 2 \cdot e^{-j \frac{5\pi}{3}} - 2 \cdot e^{-j \frac{10\pi}{3}} + 3 \cdot e^{-j 5\pi} + 2 \cdot e^{-j \frac{20\pi}{3}} - 9 \cdot e^{-j \frac{25\pi}{3}} \right) = -1.2500 + j \cdot 1.0104 = 1.6073 \cdot e^{j \cdot 2.4618}$$

Komplex alak:

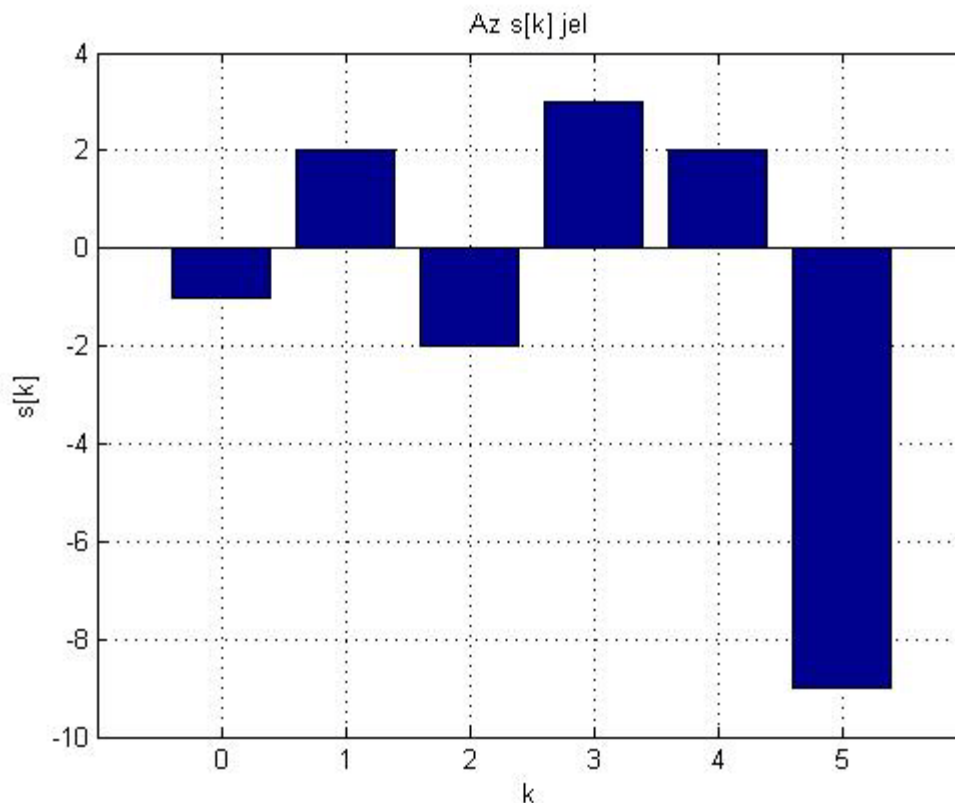
$$s[k] = \sum_{p=0}^{L-1} S_p^C \cdot e^{j \cdot p \cdot \Theta \cdot k}$$

$$s[k] = -0.8333 + 1.6073 \cdot e^{-j \cdot 2.4618} \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{3} \cdot k} + 2.3512 \cdot e^{-j \cdot 1.1703} \cdot e^{j \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot k} + 0.5 \cdot e^{j \cdot \pi \cdot k} + 2.3512 \cdot e^{j \cdot 1.1703} \cdot e^{j \cdot \frac{4 \cdot \pi}{3} \cdot k} + 1.6073 \cdot e^{j \cdot 2.4618} \cdot e^{j \cdot \frac{5 \cdot \pi}{3} \cdot k}$$

Valós alak:

$$s[k] = -0.8333 + 2 \cdot 1.6073 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} - 2.4618\right) + 2 \cdot 2.3512 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} - 1.1703\right) + 0.5 \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Az $s[k]$ periodikus gerjesztőjel:



Az ábra alapján látszik, hogy a Fourier-sorral számított értékek valóban megegyeznek az $s[k]$ értékeivel.

2.4. A válasz számítása

p	$p \cdot \mathcal{G}_0$	$\bar{S}_p$	$\bar{H}(p \cdot \mathcal{G}_0)$	$\bar{Y}_p = \bar{H}(p \cdot \mathcal{G}_0) \cdot \bar{S}_p$	$y_p[k]$
0	0	-0.8333	$1.928 \cdot e^{j \cdot \pi}$	1.6066	1.6066
1	$\pi / 3$	$3.2146 \cdot e^{-j \cdot 2.4618}$	$1.7849 \cdot e^{j \cdot 2.3008}$	$5.7377 \cdot e^{-j \cdot 0.161}$	$5.7377 \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{3} - 0.161\right)$

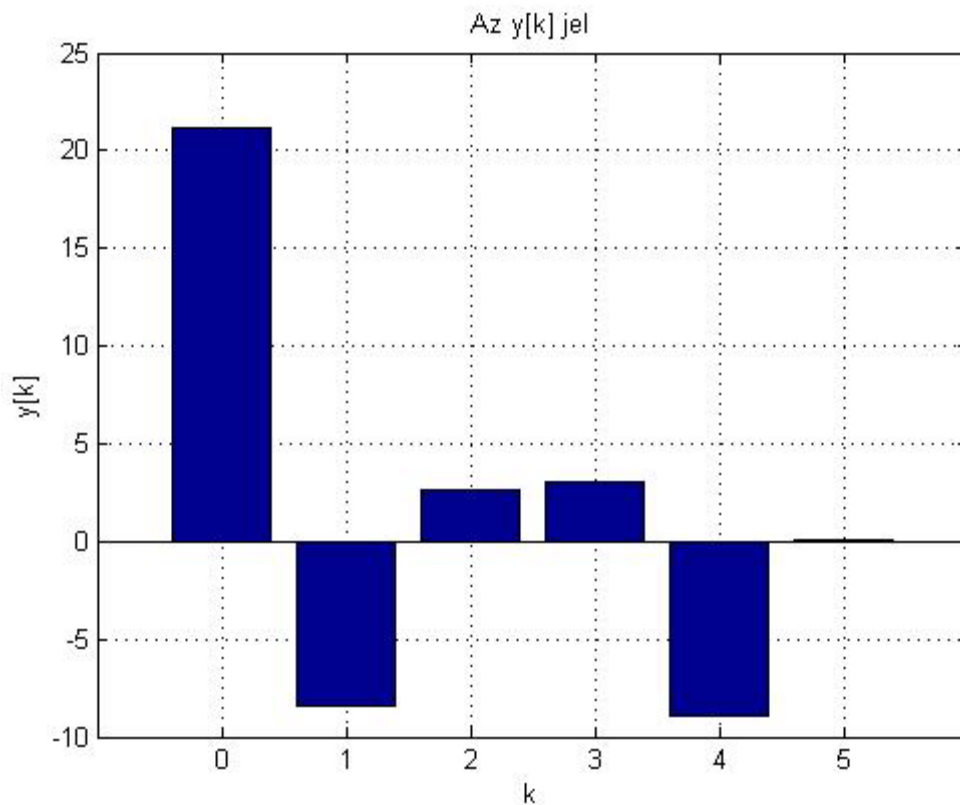
2	$2\pi/3$	$4.7024 \cdot e^{-j \cdot 1.1703}$	$2.5487 \cdot e^{j \cdot 1.6731}$	$11.985 \cdot e^{j \cdot 0.5028}$	$11.985 \cdot \cos\left(\frac{k \cdot 2 \cdot \pi}{3} + 0.5028\right)$
3	π	0.5	$6.7097 \cdot e^{j \cdot 3.5930 \cdot 10^{-16}}$	$3.3549 \cdot e^{j \cdot 3.5930 \cdot 10^{-16}}$	$3.3549 \cdot \cos(k\pi)$

A válasz

$$y[k] = 1.6066 + 5.7377 \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi}{3} - 0.161\right) + 11.985 \cdot \cos\left(\frac{2 \cdot k \cdot \pi}{3} + 0.5028\right) + 3.3549 \cdot \cos(k\pi)$$

$$s[k] = -0.8333 + 2 \cdot 1.6073 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{3} - 2.4618\right) + 2 \cdot 2.3512 \cdot \cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{3} - 1.1703\right) + 0.5 \cdot \cos(k \cdot \pi)$$

Az $y[k]$ válasz:



Értékei:

k	0	1	2	3	4	5
$y[k]$	21,1267	-8,3724	2,6771	3,0899	-8,9192	0,0376

2.5. Az impulzusválasz Fourier-transzformáltja:

$$F\{h[k]\} = F\left\{-2.5 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left(1.4598 \cdot (-0.6662)^{k-2} - 0.2128 \cdot 0.3002^{k-2}\right)\right\} =$$

$$-2.5 \cdot e^{-j \cdot 9} + F \left\{ \varepsilon[k-2] \cdot \left(1.4598 \cdot (-0.6662)^{k-2} - 0.2128 \cdot 0.3002^{k-2} \right) \right\}$$

$$= -2.5 \cdot e^{-j \cdot 9} + \frac{1.4598 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9}}{1 - (-0.6662) e^{-j \cdot 9}} + \frac{-0.2128 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9}}{1 - 0.3002 e^{-j \cdot 9}}$$

Közös nevezőre hozva és a szorzásokat elvégezve:

$$F \{ h[k] \} = \frac{-2.5 \cdot e^{-j \cdot 9} + 0.332 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9} - 0.08 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 9}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot 9} - 0.2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9}}$$

Az eredmény azonos az átviteli karakterisztikával

2.6. A rendszeregyenlet

A rendszeregyenlet az átviteli karakterisztikából közvetlenül meghatározható

$$H(e^{j \cdot 9}) = \frac{Y}{U} = \frac{-2.5 \cdot e^{-j \cdot 9} + 0.332 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9} - 0.08 \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 9}}{1 + 0.366 \cdot e^{-j \cdot 9} - 0.2 \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9}}$$

Szorozunk át $\bar{U}$ -val és az átviteli karakterisztika nevezőjével. Ekkor a következőt kifejezést kapjuk:

$$\bar{Y} + 0.366 \cdot \bar{Y} \cdot e^{-j \cdot 9} - 0.2 \cdot \bar{Y} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9} = -2.5 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j \cdot 9} + 0.332 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j \cdot 2 \cdot 9} - 0.08 \cdot \bar{U} \cdot e^{-j \cdot 3 \cdot 9}$$

A rendszeregyenlet:

$$y[k] + 0.366 y[k-1] - 0.2 \cdot y[k-2] = -2.5 \cdot u[k-1] + 0.332 \cdot u[k-2] - 0.08 \cdot u[k-3]$$

3.1. Az átviteli függvény meghatározása

A hálózat kauzalitása miatt a frekvenciatartománybeli átviteli karakterisztika $z^{-1} = e^{-j \cdot 9}$ helyettesítéssel megegyezik a z-tartománybeli átviteli függvénnyel:

$$H(z) = \frac{-2.5 \cdot z^{-1} + 0.332 \cdot z^{-2} - 0.08 \cdot z^{-3}}{1 + 0.366 \cdot z^{-1} - 0.2 \cdot z^{-2}}$$

A számlálót és a nevezőt z^3 -al megszorozva:

$$H(z) = \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z^3 + 0.366 \cdot z^2 - 0.2 \cdot z}$$

Megjegyzés: A normálalak alapján ugyanúgy kell ezt a feladatot is megoldani mint a 2.1-et, csak itt $e^{-j \cdot 9}$ helyett z^{-1} van, ezért ezt nem vezetem le még egyszer.

3.2. Pólusok, zérusok

Az átviteli függvény pólusai és zérusai Matlabbal:

```
num=[-2.5 0.332 -0.08]
```

```
den=[1 0.366 -0.2 0]
```

```
z=roots(num)
```

```
p=roots(den)
```

```
pzmap(num,den)
```

```
grid;
```

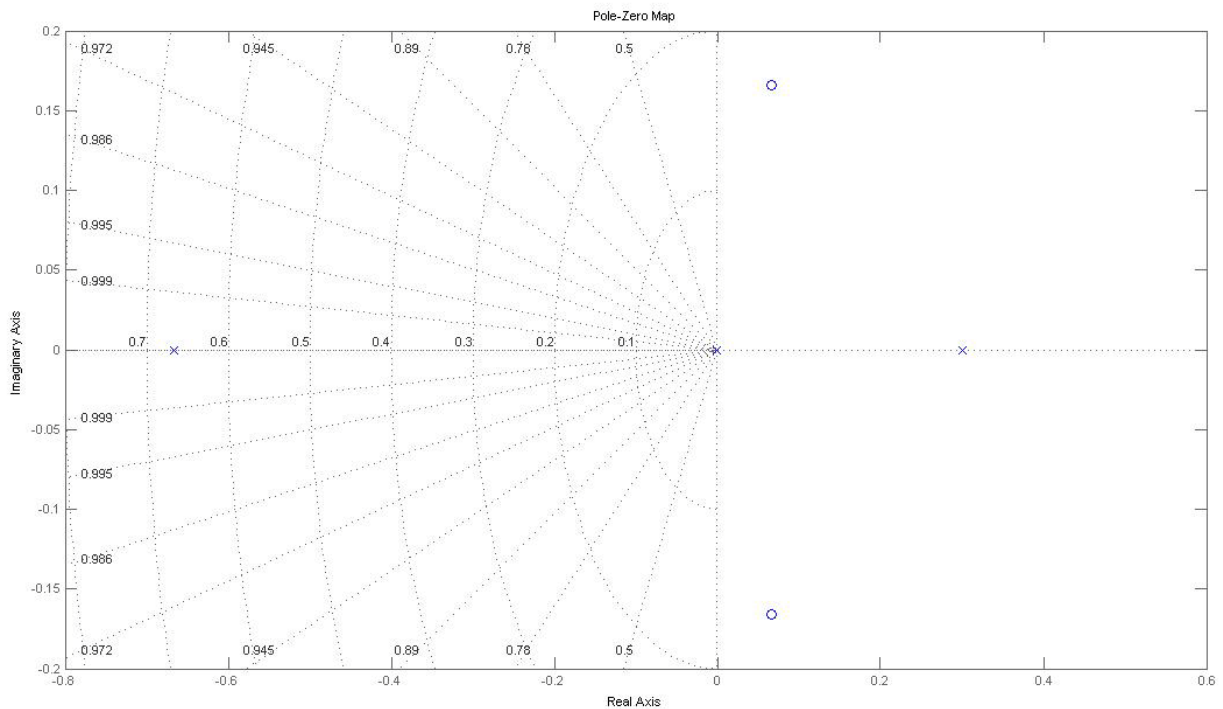
$$z_1 = 0.0664 + 0.1661j$$

$$z_2 = 0.0664 - 0.1661j$$

$$p_1 = 0$$

$$p_2 = -0.6662$$

$$p_3 = 0.3002$$



Mivel a hálózat pólusai a komplex síkon az egységsugarú körön belül vannak ezért a hálózat GV-stabilis.

3.3. Az hálózat impulzusválasza az átviteli függvényből

$$h[k] = Z^{-1} \{ H(z) \}$$

$$H(z) = \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z^3 + 0.366 \cdot z^2 - 0.2 \cdot z}$$

A nevezőből kiemelek $\frac{1}{z} - t$ és a megmaradt törtet részlet törtre bontom.

```
>> [r,p,k]=residue([-2.5 0.332 -0.08],[1 0.366 -0.2])
```

r =

1.4598
-0.2128

p =

-0.6662
0.3002

k =

-2.5000

Ennek alapján

$$H(z) = z \cdot z^{-2} \cdot \left(-2.5 + \frac{1.4598}{z - (-0.6662)} + \frac{-0.2128}{z - 0.3002} \right) =$$

$$-2.5 \cdot z^{-1} + z^{-2} \cdot \left(\frac{1.4598}{z - (-0.6662)} \cdot z + \frac{-0.2128}{z - (0.3002)} \cdot z \right)$$

Így már tagonként visszatranszformálható:

$$h[k] = -2.5 \cdot \delta[k-1] + \varepsilon[k-2] \cdot \left(1.4598 \cdot (-0.6662)^{k-2} - 0.2128 \cdot 0.3002^{k-2} \right)$$

Ellenőrzés polinomosztáson alapuló z-transzformációval:

(z^{-1} hatványai szerint érdemes felírni $H(z)$ -t)

$$\begin{array}{r} (-2.5z^{-1} + 0.332z^{-2} - 0.08z^{-3}) : (1 + 0.366z^{-1} - 0.2z^{-2}) = -2.5z^{-1} + 1.2470z^{-2} - 1.0364z^{-3} \\ + 2.5z^{-1} + 0.915z^{-2} - 0.5z^{-3} \qquad \qquad \qquad + 0.6287z^{-4} - 0.4374z^{-5} \dots \\ \hline 1.247z^{-2} - 0.58z^{-3} \\ -1.2470z^{-2} - 0.4564z^{-3} + 0.2494z^{-4} \\ \hline -1.0364z^{-3} + 0.2494z^{-4} \\ +1.0364z^{-3} + 0.3793z^{-4} - 0.2073z^{-5} \\ \hline +0.6287z^{-4} - 0.2073z^{-5} \\ -0.6287z^{-4} - 0.2301z^{-5} + 0.1257z^{-6} \\ \hline -0.4374z^{-5} + 0.1257z^{-6} \\ \dots \end{array}$$

A polinom inverz z-transzformáltja:

$$y[k] = -2.5 \cdot \delta[k-1] + 1.2470 \cdot \delta[k-2] - 1.0364 \cdot \delta[k-3] + 0.6287 \cdot \delta[k-4] - 0.4374 \cdot \delta[k-5]$$

3.4. A válasz számítása

$$s[k] = \varepsilon[k] \cdot (F + G \cdot p^k) = \varepsilon[k] \cdot (2 - (0.75)^k)$$

$$S(z) = Z\{s[k]\} = \frac{2 \cdot z}{z-1} - \frac{z}{z-0.75}$$

$$Y(z) = H(z) \cdot S(z) = \frac{2 \cdot z}{z-1} \cdot \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} -$$

$$- \frac{z}{z-0.75} \cdot \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} = Y_1 + Y_2 \qquad \text{két részre bontjuk a megoldást a}$$

könnyebb kezelhetőség érdekében

Tagonként részlettörtekre bontva:

A művelet elvégzéséhez itt is residue függvényt használok, ezért nem részletezem a használatát.

$$Y_1(z) = \frac{2 \cdot z}{z-1} \cdot \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} = \frac{-5z^2 + 0.664 \cdot z - 0.16}{(z-1) \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} =$$

$$-\frac{3.8559}{z-1} - \frac{1.7522}{z-(-0.6662)} + \frac{0.6081}{z-0.3002} =$$

$$-z^{-1} \left(\frac{3.8559 \cdot z}{z-1} + \frac{1.7522 \cdot z}{z-(-0.6662)} - \frac{0.6081 \cdot z}{z-0.3002} \right), \text{ azaz}$$

$$y_1[k] = -\varepsilon[k-1] \left(3.8559 + 1.7522 \cdot (-0.6662)^{k-1} - 0.6081 \cdot 0.3002^{k-1} \right)$$

$$Y_2(z) = -\frac{z}{z-0.75} \cdot \frac{-2.5 \cdot z^2 + 0.332 \cdot z - 0.08}{z \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} = \frac{2.5z^3 - 0.332 \cdot z^2 + 0.08}{(z-0.75) \cdot (z^2 + 0.366 \cdot z - 0.2)} =$$

$$= \frac{1.9423}{z-0.75} + \frac{1.0308}{z-(-0.6662)} - \frac{0.4731}{z-0.3002} =$$

$$= z^{-1} \cdot \left(\frac{1.9423 \cdot z}{z-0.75} + \frac{1.0308 \cdot z}{z-(-0.6662)} - \frac{0.4731 \cdot z}{z-0.3002} \right) =$$

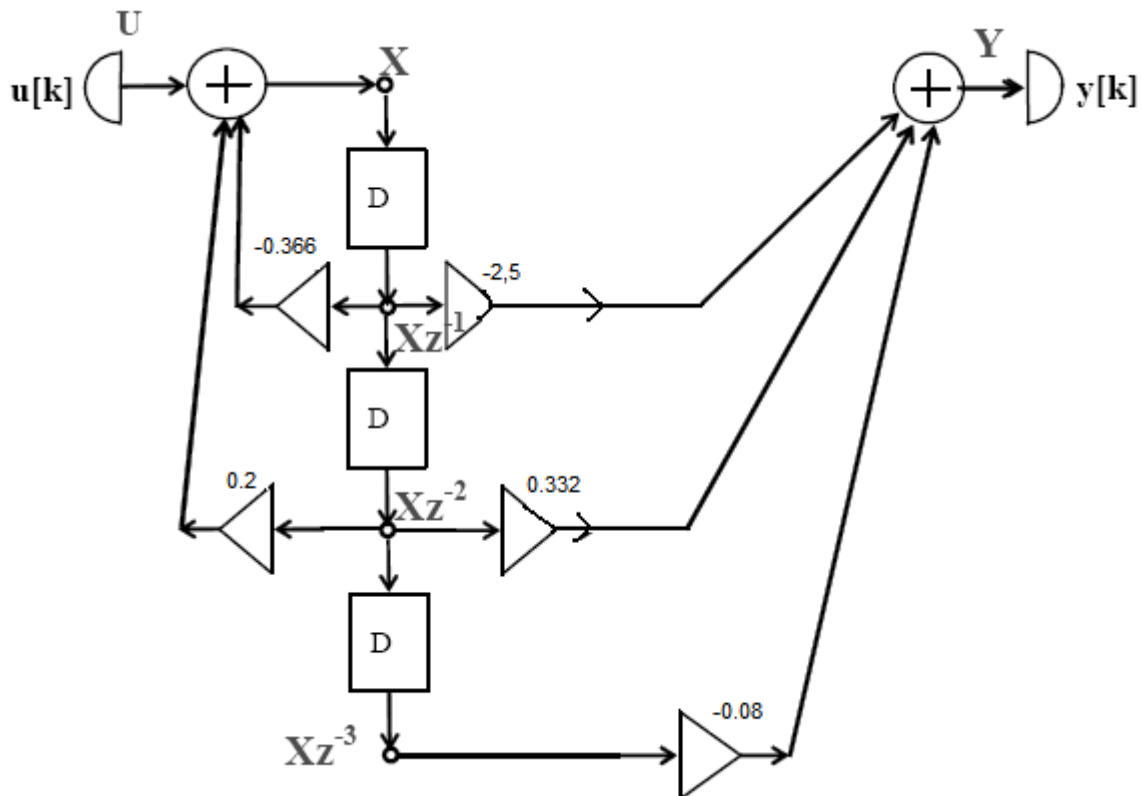
$$= \varepsilon[k-1] \cdot \left(1.9423 \cdot 0.75^{k-1} + 1.0308 \cdot (-0.6662)^{k-1} - 0.4731 \cdot 0.3002^{k-1} \right)$$

$$y_2[k] = \varepsilon[k-1] \cdot \left(1.9423 \cdot 0.75^{k-1} + 1.0308 \cdot (-0.6662)^{k-1} - 0.4731 \cdot 0.3002^{k-1} \right)$$

A teljes megoldás a két tag összege: $y[k] = y_1[k] + y_2[k]$.

$$y[k] = \varepsilon[k-1] \left(-3.8559 - 0.7214 \cdot (-0.6662)^{k-1} + 1.9423 \cdot 0.75^{k-1} + 0.135 \cdot 0.3002^{k-1} \right)$$

3.5 A kanonikus helyettesítő hálózat



A rendszeregyenlet meghatározása:

$$X(z) = U - 0.366Xz^{-1} + 0.2Xz^{-2}, \text{ egyenletből } X = \frac{U}{1 + 0.366z^{-1} - 0.2z^{-2}}$$

A kimeneti összegzőre felírható:

$$Y = X(-2.5z^{-1} + 0.332z^{-2} - 0.08z^{-3}) = \frac{U}{1 + 0.366z^{-1} - 0.2z^{-2}} \cdot (-2.5z^{-1} + 0.332z^{-2} - 0.08z^{-3})$$

Ebből az átviteli függvény:

$$\frac{Y}{U} = \frac{-2.5z^{-1} + 0.332z^{-2} - 0.08z^{-3}}{1 + 0.366z^{-1} - 0.2z^{-2}}, \text{ és végül a rendszeregyenlet keresztszorzással és}$$

átalakítással:

$$Y + 0.366Yz^{-1} - 0.2Yz^{-2} = -2.5Uz^{-1} + 0.332Uz^{-2} - 0.08Uz^{-3}$$

$$\rightarrow \underline{y[k] + 0.366y[k-1] - 0.2 \cdot y[k-2] = -2.5 \cdot u[k-1] + 0.332 \cdot u[k-2] - 0.08 \cdot u[k-3]}$$

3.6.

A rendszeregyenlet 3.5-ből

$$y[k] + 0.366y[k-1] - 0.2 \cdot y[k-2] = -2.5 \cdot u[k-1] + 0.332 \cdot u[k-2] - 0.08 \cdot u[k-3]$$

$$u[k] = \varepsilon[k] \cdot (2 - (0.75)^k)$$

Kezdeti értékek: $y[-3] = y[-2] = y[-1] = 0$

Rendezzük $y[k]$ -ra a rendszeregyenletet:

$$y[k] = -0.366 \cdot y[k-1] + 0.2 \cdot y[k-2] - 2.5 \cdot u[k-1] + 0.332 \cdot u[k-2] - 0.08 \cdot u[k-3]$$

A rendszeregyenlet alapján:

k	$u[k]$	$y[k]$
0	1	0
1	1.25	-2.5
2	1.4375	-1.878
3	1.5781	-3.0714
4	1.6836	-2.8195
5	1.7627	-3.3823
6	1.8220	-3.3
7	1.8665	-3.5732
8	1.8999	-3.5546

3.4. alapján:

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$y[k]$	0	-2.53	-1.9081	-3.1014	-2.8495	-3.4123	-3.33	-3.6032	-3.5846

Látható, hogy az eredmények körülbelül megegyeznek.