

I. rész

(Ebből a részből legalább 15 pontot kell elérni!)

1. feladat (12 pont)*

a) $\int (x - 3) e^{2x} dx = ?$

b) $\int (x - 3) e^{x^2 - 6x} dx = ?$

2. feladat (8 pont)*

a) $\int \frac{1}{5x^2 + 10} dx = ?$

b) $\int \frac{2x}{5x^2 + 10} dx = ?$

3. feladat (13 pont)*

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 5e^x + 6} dx = ? \quad (e^x = t \text{ helyettesítéssel dolgozzon!})$$

4. feladat (5 pont)*

Konvergens-e az alábbi integrál?

$$\int_0^1 \frac{\cos^2(x^3)}{\sqrt[3]{x^2} (x+1)^2} dx$$

II. rész

1. feladat (10 pont)

Mondja ki és bizonyítsa be a számsorozatokra kimondott rendőrelvet!

2. feladat (10 pont)

$$a_n > 0, b_n > 0$$

Bizonyítsa be az alábbi állítást!

$$a_n = \Theta(b_n) \quad \implies \quad \frac{1}{a_n} = \Theta\left(\frac{1}{b_n}\right)$$

3. feladat (15 pont)

Van-e valós gyöke az

$$f(x) = -2x^7 + ax^5 + bx^2 + c, \quad a, b, c \in \mathbb{R}$$

függvénynek? Állítását indokolja meg!

4. feladat (20 pont)

Írja le az egyváltozós függvényekkel kapcsolatos Weierstrass I. és II. tételét!

Bizonyítsa be Weierstrass II. tételét!

5. feladat (18 pont)

Adjon két különböző feltételt elegendően sokszor differenciálható függvénynél lokális szélsőérték létezésére!

Az egyiket bizonyítsa be! (A szükséges részt is bizonyítsa!)

6. feladat (27 pont)

a) Definiálja az integrálfüggvényt!

Hogyan szól az integrálszámítás II. alaptétele?

A differenciálhatósággal kapcsolatos tételt bizonyítsa be!

b)
$$\int_0^x \operatorname{sh}(2x^2) dx$$

b)
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{\arcsin(5x)} = ?$$