Valszám ZH
2009. nov. 12.

1) <u>1. változat</u>

1 először mindegy hogy mit húzunk

$P(\underbrace{\text{másodikra ugyanazt}}_{A}) = \frac{1}{5}$ 1 $P(\underbrace{\text{másodikra mást}}_{\bar{A}}) = \frac{4}{5}$

harmadikra biztos új színt húzunk 1

$P(\text{4.-re ugyanazt} \mid A) = \frac{1}{3}$ 1 $P(\text{4.-re mást} \mid A) = \frac{2}{3}$

ötödikre biztos újat

$X = 5$

$X = 4$

$P(\underbrace{\text{3.-ra nem új szín}}_{B} \mid \bar{A}) = \frac{1}{2}$ 1 $P(\text{3.-ra új} \mid \bar{A}) = \frac{1}{2}$

$X = 3$

$P(\text{4.-re olyat ami már volt} \mid \bar{A} \cdot B) = \frac{1}{3}$ 1 $P(\text{4.-re új} \mid \bar{A}B) = \frac{2}{3}$

ötödikre biztos újat

$X = 5$

$X = 4$

$$P(X=3) = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=4) = \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{5}$$

$$P(X=5) = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}$$

2

$$EX = \sum x_i P(X = x_i) = 3 \cdot \frac{2}{5} + 4 \cdot \frac{2}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5} = \frac{19}{5}$$

2

<u>2. változat</u>

Első húzás mindegy, hogy mi, 1 utána X_1 kell a következő színhez, majd X_2 a harmadikhoz 2 $X_1 \sim G(\frac{2}{3})$, $X_2 \sim G(\frac{1}{3})$

$X = X_1 + X_2 + 1$ 1 $EX = EX_1 + EX_2 + 1 = \frac{3}{2} + 3 + 1 = \frac{11}{2}$ 1

$$P(X=k) = P(X_1 + X_2 = k-1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(X_1 = i) P(X_2 = k-i-1) =$$

2

Valszám ZH
2009. nov 12 /2

$$= \sum_{i=1}^{k-2} \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{i-1} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2-i} \overset{1}{=} \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \underbrace{\sum_{i=1}^{k-2}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}\right)^{i-1}}_{\sum_{i=1}^{k-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{i-1} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-4}}$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{k-4}\right) \overset{1}{=}$$

$$= \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} - \frac{2}{9}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \qquad k = 3, 4, 5, \dots$$

2) <u>1. változat</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \text{kell.} \quad 2$$

$$1 = \int_{-1}^{2} c\cdot e^{|x|}\,dx \overset{1}{=} \int_{-1}^{0} c\cdot e^{-x}\,dx + \int_{0}^{2} c\cdot e^{x}\,dx \overset{1}{=}$$

$$= \left[-c\,e^{-x}\right]_{-1}^{0} + \left[c\cdot e^{x}\right]_{0}^{2} = c\cdot(e^2+e-2) \Rightarrow c = \frac{1}{e^2+e-2} \quad 2$$

$$P(X<1) = \int_{-\infty}^{1} f_X(x)\,dx \overset{1}{=} \int_{-1}^{0} c\cdot e^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} c\cdot e^{x}\,dx \overset{1}{=} \dots = \frac{2}{e+2} \quad 2$$

vagy

$$= 1 - P(X>1) = 1 - \int_{1}^{2} c\cdot e^{x}\,dx = \dots = \frac{2}{e+2}$$

<u>2. változat</u>

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\,dx = 1 \quad \text{kell} \quad 2$$

$$1 = \int_{-2}^{1} c\cdot e^{|x|}\,dx \overset{1}{=} \int_{-2}^{0} c\cdot e^{-x}\,dx + \int_{0}^{1} c\cdot e^{x}\,dx \overset{1}{=} \left[-c\cdot e^{-x}\right]_{-2}^{0} + \left[c\cdot e^{x}\right]_{0}^{1} =$$

$$= c(e^2+e-2) \Rightarrow c = \frac{1}{e^2+e-2} \quad 2$$

$$P(X>0) = \int_{0}^{+\infty} f_X(x)\,dx \overset{1}{=} \int_{0}^{1} c\cdot e^{x}\,dx \overset{1}{=} \dots = \frac{1}{e+2} \quad 2$$

vagy

$$= 1 - P(X<0) = 1 - \int_{-\infty}^{0} f_X(x)\,dx = 1 - \int_{-2}^{0} c\,e^{-x}\,dx = \dots = \frac{1}{e+2}$$

Valószám ZH

2009. nov 12. /3

3) <u>1. változat</u> 1 $f_X(x)=e^{-x}$, $F_X(x)=1-e^{-x}$ $x>0$

$f_Y(y)=2e^{-2y}$, $F_Y(y)=1-e^{-2y}$ $y>0$

$$F_Z(t)=P(Z<t)=P(\min(X,Y)<t)=1-P(\min(X,Y)\geq t)=$$

$$=1-P(X\geq t, Y\geq t) \underset{\text{mert fgtlenek}}{=} 1-P(X\geq t)\cdot P(Y\geq t)=$$

1 1 1

$$=1-(1-P(X<t))(1-P(Y<t))=1-(1-F_X(t))(1-F_Y(t))\cdot$$

2

$$=1-e^{-t}\cdot e^{-2t}=1-e^{-3t} \Rightarrow Z\sim E(3)$$

$f_Z(t)=3\cdot e^{-3t}$ 1, $t>0$ 1

$EZ=\frac{1}{3}$ 2

<u>2. változat</u>

$f_X(x)=e^{-x}$, $F_X(x)=1-e^{-x}$ $x>0$ 1

$f_Y(y)=2\cdot e^{-2y}$, $F_Y(y)=1-e^{-2y}$ $y>0$

$$F_Z(t)=P(Z<t)=P(\max(X,Y)<t)=P(X<t, Y<t)=$$

$$\underset{\text{mert fgtlenek}}{=} P(X<t)\cdot P(Y<t)=F_X(t)\cdot F_Y(t)=$$

1 1 2

$$=(1-e^{-t})(1-e^{-2t})=1-e^{-t}-e^{-2t}+e^{-3t}$$

$f_Z(t)=F_Z'(t)=e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t}$ 1, $t>0$ 1

$$EZ=\int t\cdot f_Z(t)dt=\underbrace{\int_0^{+\infty} te^{-t}dt}_{1}+\underbrace{\int_0^{+\infty} t2e^{-2t}dt}_{\frac{1}{2}}-\underbrace{\int_0^{+\infty} t\cdot 3e^{-3t}dt}_{\frac{1}{3}}=\frac{7}{6}$$

1 2

mert $E(1)$ $E(2)$ $E(3)$

várható értéke

---

1) Ha tudja a fgtlenség definícióját, de nem jut el seholva az 1 p.

Valószám ZH

2009. nov 12 / 4

4) 1. változat

1

X \ Y	1	2	3	4	5	6	
0	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{2}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3$	$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3$	$\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3$	0	$\frac{125}{216}$
1	0	0	0	0	0	$3\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2$	$\frac{75}{216}$
2	0	0	0	0	0	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}$	$\frac{15}{216}$
3	0	0	0	0	0	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\frac{1}{216}$
	$\frac{1}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{91}{216}$	

ha van 6-os dobás, akkor a maximum 6. 1

$P(X=0, Y=j) = P(\text{minden dobás} \leq j) - P(\text{minden dobás} \leq j-1)$

$= \left(\frac{j}{6}\right)^3 - \left(\frac{j-1}{6}\right)^3$ 2

Nem fgtlenek, mert pl $P(X=2, Y=3) = 0$ 2

$\neq$

$P(X=2)\cdot P(Y=3) = \frac{15}{216}\cdot\frac{19}{216}$

$\text{cov}(X,Y) = E(X\cdot Y) - EX\cdot EY$ 1

$EX = \sum_{i=0}^{3} i\cdot P(X=i) = 0\cdot\frac{125}{216} + 1\cdot\frac{75}{216} + 2\cdot\frac{15}{216} + 3\cdot\frac{1}{216} = \frac{1}{2}$ 0,5

1

$EY = \sum_{j=1}^{6} j\, P(Y=j) = 1\cdot\frac{1}{216} + 2\cdot\frac{7}{216} + 3\cdot\frac{19}{216} + 4\cdot\frac{37}{216} + 5\cdot\frac{61}{216} +$

$+ 6\cdot\frac{91}{216} = \frac{1071}{216}$ 0,5

$EXY = 1\cdot 6\cdot\frac{75}{216} + 2\cdot 6\cdot\frac{15}{216} + 3\cdot 6\cdot\frac{1}{216} = 3$ 0,5

$\text{cov}(X,Y) = \frac{225}{432}$ 0,5

2. változat

1

X \ Y	1	2	3	4	5	6	
0	0	$\left(\frac{5}{6}\right)^3-\left(\frac{4}{6}\right)^3$	$\left(\frac{4}{6}\right)^3-\left(\frac{3}{6}\right)^3$	$\left(\frac{3}{6}\right)^3-\left(\frac{2}{6}\right)^3$	$\left(\frac{2}{6}\right)^3-\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	$\frac{125}{216}$
1	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^2$	0	0	0	0	0	$\frac{75}{216}$
2	$3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)$	0	0	0	0	0	$\frac{15}{216}$
3	$\left(\frac{1}{6}\right)^3$	0	0	0	0	0	$\frac{1}{216}$
	$\frac{91}{216}$	$\frac{61}{216}$	$\frac{37}{216}$	$\frac{19}{216}$	$\frac{7}{216}$	$\frac{1}{216}$	

Valószínűségszámítás ZH
2009. máj 12/15

ha van 1-es dobás, akkor a minimum 1. (1)

$$P(X=0,\ Y=j) = P(\text{minden dobás} \geq j) - P(\text{minden dobás} \geq j+1)$$

$$= \left(\frac{6-(j-1)}{6}\right)^3 - \left(\frac{6-j}{6}\right)^3 \quad (2)$$

Nem fgtlenek, mert pl $P(X=2,\ Y=3) = 0$ (2)

$$\neq P(X=2)\cdot P(Y=3) = \frac{15}{216}\cdot\frac{37}{216}$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - EX\cdot EY \quad (1)$$

$$EX = \sum_{i=0}^{3} i\,P(X=i) = 0\cdot\frac{125}{216} + 1\cdot\frac{75}{216} + 2\cdot\frac{15}{216} + 3\cdot\frac{1}{216} = \frac{1}{2} \quad (0{,}5)$$

(1)

$$EY = \sum_{j=1}^{6} j\,P(Y=j) = 1\cdot\frac{91}{216} + 2\cdot\frac{61}{216} + 3\cdot\frac{37}{216} + 4\cdot\frac{19}{216} + 5\cdot\frac{7}{216} + 6\cdot\frac{1}{216} =$$

$$= \frac{441}{216} \quad (0{,}5)$$

$$E(XY) = 1\cdot 1\cdot\frac{75}{216} + 2\cdot 1\cdot\frac{15}{216} + 3\cdot 1\cdot\frac{1}{216} = \frac{1}{2}. \quad (0{,}5)$$

$$\mathrm{cov}(X,Y) = -\frac{225}{432}. \quad (0{,}5)$$

5) <u>1. változat</u>

(2) $\frac{X+2}{2} \sim N(0,1)$ X standardizáltja: $\tilde{X}$

$$F_Z(t) = P(Z<t) = P\left(\left(\frac{X+2}{2}\right)^2 < t\right) \overset{(1)}{=} P\left(-\sqrt{t} < \frac{X+2}{2} < \sqrt{t}\right) =$$

$$= \Phi(\sqrt{t}) - \Phi(-\sqrt{t}) \overset{(2)}{=} 2\Phi(\sqrt{t}) - 1 \qquad (1)\ t\in[0,+\infty)$$

$$f_Z(t) = F_Z'(t) \overset{(1)}{=} 2\cdot\varphi(\sqrt{t})\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} = \varphi(\sqrt{t})\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-\frac{t}{2}} \quad (1)$$

(2) $$EZ = E\left(\frac{X+2}{2}\right)^2 = \sigma^2\left(\frac{X+2}{2}\right) + \left[E\left(\frac{X+2}{2}\right)\right]^2 = 1.$$

<u>2 változat</u>

$\frac{X+1}{3} \sim N(0,1)$ ... ugyanaz, mint az 1. változat, csak ahol $\frac{X+2}{2}$ volt, ott most $\frac{X+1}{3}$ lesz.

Vizsgán ZH
2009. ... 12/6.

6) 1. változat

Azt kell belátni, hogy

$$P((A+\bar{D})\bar{B}C) = P(A+\bar{D})\cdot P(\bar{B}C)$$ (2)

$$P((A+\bar{D})\bar{B}C) = P(A\bar{B}C + \bar{D}\bar{B}C) \underset{\uparrow}{=} P(A\bar{B}C) + P(\bar{D}\bar{B}C) - P(A\bar{B}C\bar{D})$$ (2)

Poincaré

$+\ C\cdot C = C$

$$= P(A)P(\bar{B})\cdot P(C) + P(\bar{D})\cdot P(\bar{B})\cdot P(C) - P(A)\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})\cdot P(\bar{D})$$ (2)

mert teljesen fgtlenek az események (1) +

$$= \underbrace{P(\bar{B})\cdot P(C)}_{P(\bar{B}C)}\cdot\underbrace{\left[P(A) + P(\bar{D}) - \underbrace{P(A)\cdot P(\bar{D})}_{P(A\bar{D})}\right]}_{P(A+\bar{D})}$$ (2)

+ ha A és B fgtlen, akkor az ellentettek is (1)

2. változat

Azt kell belátni, hogy

$$P((\bar{A}\cdot\bar{D})(\bar{B}+C)) = P(\bar{A}\cdot\bar{D})\cdot P(\bar{B}+C)$$ (2)

$$P((\bar{A}\cdot\bar{D})(\bar{B}+C)) = P(\bar{A}\bar{B}\bar{D} + \bar{A}C\bar{D}) \underset{\uparrow}{=} P(\bar{A}\bar{B}\bar{D}) + P(\bar{A}C\bar{D}) -$$ (2)

Poincaré

$+\ \bar{A}\cdot\bar{A} = \bar{A}$

$$- P(\bar{A}\bar{B}C\bar{D}) \underset{\uparrow}{=} P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{D}) + P(\bar{A})P(C)P(\bar{D}) - P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(C)P(\bar{D})$$ (2)

(1) mert teljesen fgtlenek az események +

(1) ha A és B fgtlen, akkor az ellentettek is

$$= \underbrace{P(\bar{A})\cdot P(\bar{D})}_{P(\bar{A}\cdot\bar{D})}\underbrace{\left[P(\bar{B}) + P(C) - \underbrace{P(\bar{B})\cdot P(C)}_{P(\bar{B}\cdot C)}\right]}_{P(\bar{B}+C)}$$ (2)

Ha nem írja le előre hogy mit kell belátni, de kijön neki és azt írja, hogy tehát fgtlenek az is elég.