

# SÍKBELI ÉS TÉRBELI MOZGÁS

„Mivégre vannak ők, a Mercator pólusok és az egyenlítők,  
A trópusok, zónák s a sok Föld-szelet?”  
A hírnök emígyen kérdé, s a sokaság azt felelé:  
„Ezek csupán egyezményes jelek!”

Lewis Carroll  
(Snark vadászat)  
(Farkas László fordítása)

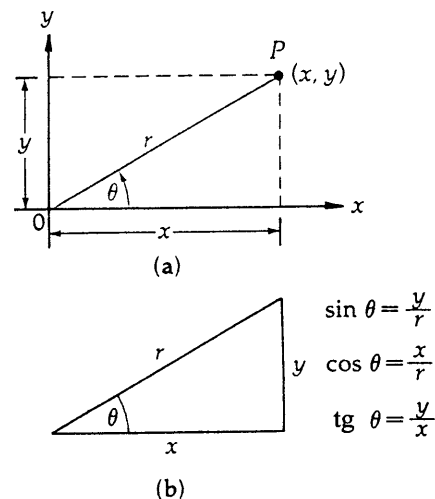
## 3.1 Bevezetés

A következőkben a pontszerű részecskék mozgásának vizsgálatát két és három dimenziós mozgásokra terjesztjük ki. Az általános térbeli mozgás legtöbb alapvető sajátossága kétdimenziós mozgásoknál is megjelenik, ezért többnyire síkbeli mozgásokkal foglalkozunk. Az eddigiekben definiáltuk a mozgás kinematikai jellemzőit: az  $x$  elmozdulást, a  $v$  sebességet és az  $a$  gyorsulást. Mindhárom mennyiségnek van nagysága és iránya. Az ilyen mennyiségek leírására a síkban és a térben a *vektorok* szolgálnak.

## 3.2 Kétdimenziós koordinátarendszerek és a helyzetvektor

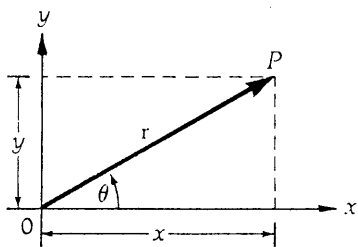
Egy síkbeli pont helyzetének megadására leggyakrabban a *derékszögű (Descartes-féle)*, vagy a *síkbeli polárkoordinátarendszert* használjuk. E két koordinátarendszert mutatja be a 3-1 ábra. A derékszögű  $(x, y)$  koordináták azon szakaszok hosszával egyeznek meg, amelyeket a vizsgált pontból a tengelyekre bocsátott merőleges egyenesek a tengelyekből lemetszenek. Az  $(r, \theta)$  polárkoordináták jelentése a következő:  $r$  az origót az adott  $P$  ponttal összekötő szakasz hossza, a  $\theta$  polárszög pedig az  $OP$  egyenesnek a pozitív  $x$  tengellyel bezárt szöge. A szöget az  $x$  tengelytől az *óramutató járásával ellentétes irányban* mérjük.

A  $P$  pont helyzetét kényelmesen magadhatjuk egy adott koordinátarendszerben felvett *vektorral* is. A vektorokat *irányukkal és nagyságukkal* jellemezzük. Műveleti szabályaikra a későbbiekben visszatérünk. Geometriailag a vektorok irányított szakaszok, amelyeket nyíllal ábrázolunk. A nyíl hegye mutatja a vektor irányát, a szakasz hossza pedig a nagyságát. A fizikai mennyiségeket reprezentáló vektorok fontos sajátossága, hogy nagyságuk



3-1 ábra

- a) A  $P$  pont *derékszögű* (vagy *Descartes*) koordinátái  $(x, y)$  és *síkbeli polárkoordinátái*  $(r, \theta)$ .  
b) Derékszögű háromszögre vonatkozó trigonometriai összefüggések.



3-2 ábra

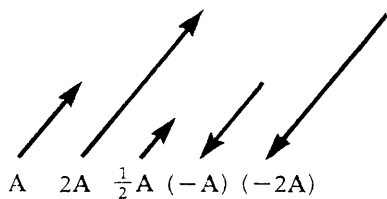
Az  $\mathbf{r}$  helyvektor és  $x$ ,  $y$  komponensei. A helyvektor kijelöli a  $P$  pont helyét az origóhoz képest.

mellett meg kell adni a megfelelő fizikai mennyiség dimenzióját. Például a 3-2 ábrán jelzett  $\mathbf{r}$  helyvektor a  $P$  pont helyzetét mutatja meg a koordináta-rendszer origójához képest. Az  $\mathbf{r}$  vektor csúspontjából a tengelyekre bocsátott merőlegesek a tengelyekből éppen a  $P$  pont  $x$  és  $y$  koordinátáit metszik ki. A tengelyekre vett vetületeket nevezzük az  $\mathbf{r}$  vektor **derékszögű** vagy **Descartes féle komponenseinek (összvetevőinek)**. A vektorok összetevőit rendre  $x$ -szel és  $y$ -nal jelöljük. Az összetevők értéke pozitív is és negatív is lehet attól függően, hogy a komponens az origótól milyen irányba mutat. A vektorok komponenseik segítségével egyértelműen magadhatók. A komponensek meghatározását a **vektor komponensekre bontásának** nevezzük. Nyomatásban a vektorokat **fett** betűkkel ( $\mathbf{r}$ ), kézírásban pedig a betűjel fölé húzott kicsiny nyíllal ( $r$ ) jelöljük. A helyvektor nagyságának (abszolút értékének) jelölésére pedig az  $|\mathbf{r}|$ , ill.  $r$  szimbólumokat használjuk. Egyszerű trigonometriai összefüggések segítségével belátható, hogy a derékszögű és a polárkoordináták között a következő összefüggések állnak fenn:

$$\left. \begin{aligned} x &= r \cos \theta & r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ y &= r \sin \theta & \operatorname{tg} \theta &= \frac{y}{x} \end{aligned} \right\} \quad (3-1)$$

ahol  $\theta$  a pozitív  $x$  iránytól az óramutató járásával ellentétes irányban mért szög.

A vektorok nagysága számokkal (skaláris mennyiségekkel) való szorzással növelhető, vagy csökkenthető. A  $-1$ -gyel való szorzás hatására a vektor iránya ellentétesre változik. A 3-3 ábra ezeket a műveleteket illusztrálja. (Vegyük észre, hogy a skalárral való osztást nem szükséges definiálni, hiszen ez megegyezik az egynél kisebb számokkal történő szorzással.) A vektorok skalár összetevői – mint azt a következő példában megmutatjuk – a szögfüggvényekre vonatkozó előjelszabályok szerint vesznek fel pozitív vagy negatív értéket.



3-3 ábra

Vektorok szorzása skalárral. A  $-1$ -gyel való szorzással a vektor *negatívját (ellentettjét)* kapjuk. Ez azt jelenti, hogy az  $\mathbf{A}$  és a  $-\mathbf{A}$  vektorok abszolút értéke azonos, de irányuk ellentétes. (A két vektort antiparalellnek is nevezük.)

### 3-1 PÉLDA

A 3-4 ábrán látható  $\mathbf{r}$  helyvektor nagysága  $0,1$  m és iránya  $150$  fokban szöget zár be a pozitív  $x$  tengely irányával. Határozzuk meg a vektor derékszögű komponenseit.

### MEGOLDÁS

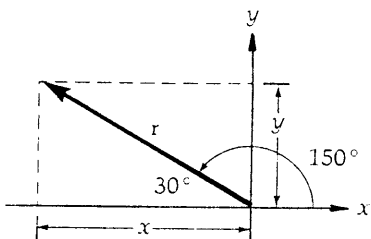
Az ábra szerint a derékszögű komponensek a következők:

$$x \text{ összetevő: } x = r \cos 150^\circ = (0,10 \text{ m})(\cos 150^\circ) = -0,0866 \text{ m}$$

$$y \text{ összetevő: } y = r \sin 150^\circ = (0,10 \text{ m})(\sin 150^\circ) = 0,0500 \text{ m}$$

Az  $(r, \theta)$  síkbeli polár koordináta-rendszerben a  $\theta$  szöget a pozitív  $x$  tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük. Egyes esetekben a probléma egyszerűbb és világosabb megfogalmazását segíti, ha az ábrán nemcsak az  $x$  tengelytől, hanem *más tengelyektől mért szögeket is bejelölünk*.

A vektorok alkalmazásának talán legfontosabb oka az, hogy a vektoriális alakban felírt egyenletek az adott vonatkoztatási rendszerben tetszőlegesen választott koordináta-rendszer esetén érvényesek. Mindegy tehát, hogy derékszögű, illetve síkbeli vagy térbeli polárkoordinátákat használunk. A vektorjelölés a matematikai formulákat rendkívül egyszerűvé teszi, bizonyos



3-4 ábra

A 3-1 példához.

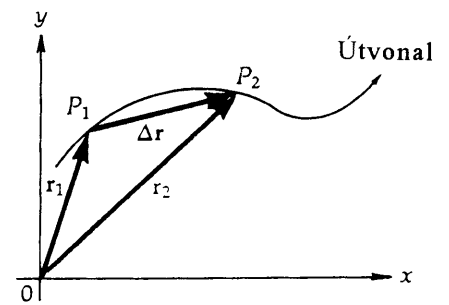
értelemben lehámozza a számításokról azokat a nehézkes részleteket, amik egy speciális koordináta-rendszerbeli reprezentációval járnak, s így a fizikai tartalom világosabban állhat előttünk. A fizika sok modern ágában kerülnek szembe szinte leküzdhetetlen nehézségekkel, ha az elegáns egyszerű vektorális jelölésrendszer nem állna rendelkezésünkre.

Mindezek mellett a vektorális jelölés további mély kapcsolatot mutat a fizikai törvények rendkívül fontos tulajdonsága a koordináta-rendszer eltolásával és elforgatásával szembeni **invariancia**. Ez azt jelenti, hogy a fizikai törvények matematikai kifejezése változatlan marad, ha a koordináta-rendszert **eltoljuk** (a rendszer origójának helye megváltozik, a koordináta tengelyek iránya azonban az eredeivel párhuzamos marad), vagy **elforgatjuk** (a tengelyek térbeli iránya elfordul). Mivel a vektorok hasonló invariancia tulajdonságokkal rendelkeznek, a vektorszámítás igen sok fizikai elmélet kifejtésekor ideális matematikai eszközt jelent.

### 3.3 A $\Delta r$ elmozdulásvektor

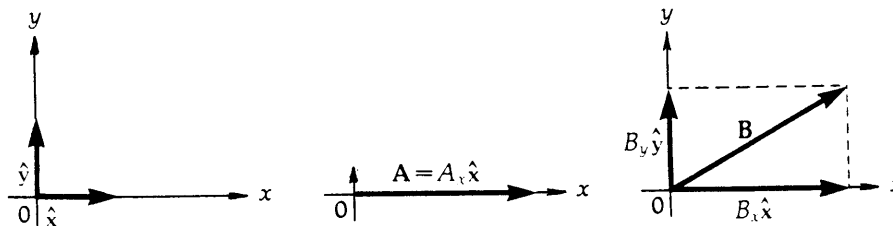
A 3-5 ábra egy görbe vonalon mozgó részecske pályáját mutatja az  $(x_1, y_1)$  koordinátájú,  $r_1$  helyzetvektorú  $P_1$  kezdőponttól, az  $(x_2, y_2)$  koordinátájú  $r_2$  helyzetvektorú  $P_2$  végpontig. A két pont közötti pálya tényleges alakjától függetlenül az eredő **elmozdulást a  $\Delta r$  vektorral** definiáljuk. Vegyük észre, hogy az elmozdulásvektor nagysága nem a görbe pályán megtett út hosszával, hanem a kezdő és a végpont közötti legrövidebb utat jelentő egyenes szakasz hosszával egyezik meg.

A  $\Delta r$  elmozdulásvektort az  $x$  és az  $y$  irány menti elmozdulásokkal is kifejezhetjük. Ehhez be kell vezetnünk az  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  és  $\hat{z}$  egységvektorokat, amelyek egységnyi hosszúságúak<sup>1</sup> és nincsen dimenziójuk. A 3-6 ábra az egységvektorok alkalmazását illusztrálja. Az  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  és  $\hat{z}$  egységvektort a kövér betű feletti kalappal jelöljük. E vektorok nagysága és iránya nem változik és bármilyen mennyiség jelölésére is használjuk őket, dimenziójuk sincs csupán irányok jelzésére szolgálnak. Általában minden  $C$  vektor leírható a  $C_x$  és  $C_y$  derékszögű komponensekkel, vagy a  $C_x \hat{x}$  és  $C_y \hat{y}$  vektorösszetevőkkel.



3-5 ábra

A görbült pályán  $P_1$ -től  $P_2$ -ig mozgó részecske  $\Delta r$  elmozdulásvektora.



a) Az  $\hat{x}$  és  $\hat{y}$  egységvektoroknak dimenziója nincs, hosszuk egységnyi, irányuk a megfelelő tengely pozitív iránya.

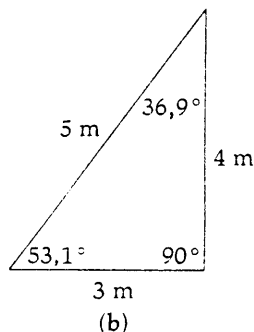
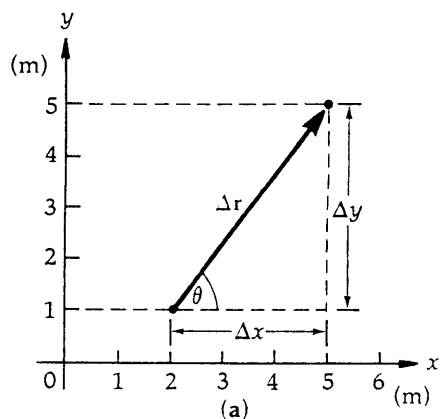
b) Egydimenziós vektorok kifejezhetők a Descartes-féle koordinátájuk és az egységvektor szorzataként.

c) Egy kétdimenziós  $B$  vektor, amelynek Descartes-féle koordinátái  $B_x$  és  $B_y$  felírható a  $B_x \hat{x}$  és  $B_y \hat{y}$  vektorkomponensek összegeként.

3-6 ábra

Az  $\hat{x}$  és  $\hat{y}$  egységvektorok használata. Ha egy skalárt egységvektorral szorzunk, akkor a skalárból vektor lesz, amelynek nagysága megegyezik a skalár értékével, iránya pedig azonos egységvektor irányával.

<sup>1</sup> Az egységvektorok  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  és  $\hat{z}$  jelölése helyett szokásos az  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  és  $\hat{k}$  szimbólumok használata is. Úgy tűnik azonban, hogy a haladók számára írott könyvek szerzői a koordináta tengelyek és a megfelelő egységvektorok azonos betűvel való jelölésére törekednek. A rendszer könnyen megjegyezhető, sok esetben elkerülhetővé teszi az indexek használatát és kényelmesen alkalmazható más típusú, pl. polárkoordináták esetén ( $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  és  $\hat{\phi}$ ).



### 3-7 ábra

A 3-2 példához. A  $\Delta r$  elmozdulásvektor skalárösszetevői:  $\Delta x$  és  $\Delta y$ .

### 3-2 PÉLDA

A 3-7 ábra szerint egy részecske a (2 m, 1 m) pontból a (5 m, 5 m) pontba mozdul el. Határozzuk meg a  $\Delta r$  elmozdulásvektor irányát és nagyságát.

### MEGOLDÁS

A  $\Delta r$  elmozdulásvektor skalárkomponensei a következők:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 5 \text{ m} - 2 \text{ m} = 3 \text{ m} \text{ és } \Delta y = y_2 - y_1 = 5 \text{ m} - 1 \text{ m} = 4 \text{ m}.$$

Az összetevők az eredővel 3-4-5 típusú pitagoraszti számhármast alkotnak, amint az a 3-7/b ábra illusztrálja. Az eredő  $\Delta r$  abszolút értékére a Pitagorasz tétellel

$$\Delta r = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = \sqrt{25} \text{ m} = 5,00 \text{ m}$$

adódik. A  $\Delta r$  elmozdulásvektor irányát az  $x$  tengellyel alkotott  $\theta$  szöggel adhatjuk meg. Az ábra szerint

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4 \text{ m}}{3 \text{ m}} = 1,33$$

amiből a  $\theta$  szög  $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} 1,33$  adódik.

Az arkusz tangens függvény inverze, ennek megfelelően  $\theta$  azt a szöget jelenti, amelynek tangense 1,33. Zsebszámológép segítségével ez a szög

$$\theta = 53,1^\circ.$$

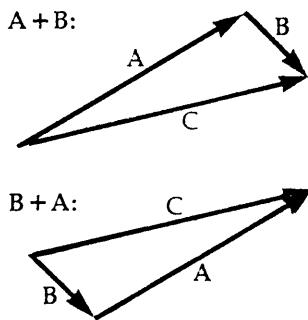
Érdemes megjegyezni, hogy a 3-4-5 típusú háromszög hegyesszögei rendre  $36,9^\circ$  és  $53,1^\circ$ .

## 3.4 Vektorok összeadása és kivonása

Vektorok összeadását és kivonását kétféleképpen, *geometriai* (ekkor grafikusan határozzuk meg az eredményt) és a pontosabb eredményt adó *algebrai* módszerrel végezhetjük el.

### A geometriai módszer

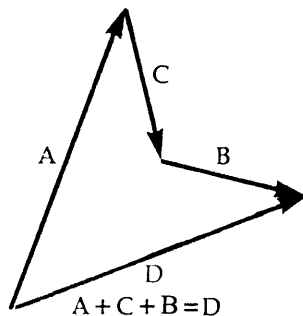
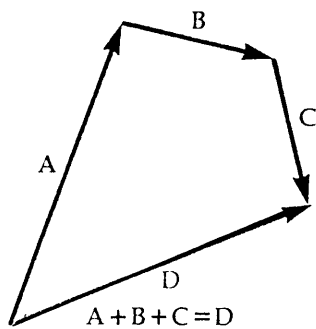
A vektorok összeadására és kivonására készített ábrákon a vektorokat – nagyságuk és irányuk megtartásával – tetszés szerint mozgathatjuk. A vektorösszeg grafikus meghatározásához rajzoljuk fel az egyik vektort, majd a végpontjából mérjük fel a másik komponenst. Az összeget az első vektor kezdőpontjából a második végpontjába mutató vektor adja meg. A 3-8 ábrán például az  $A$  és  $B$  elmozdulásvektorokat aduk össze és meghatározzuk az eredő  $C$  vektort. Az ábra mutatja, hogy a vektorok összeadása *kommutatív*, azaz nem függ a tagok sorrendjétől:  $A + B = B + A$ . Kettőnél több vektort grafikusán a 3-9/a ábrán bemutatott ún. „poligon” (sokszög) módszerrel adhatunk össze. Ennek során a vektorok összeadása tetszés szerinti csoportosításban végezhető (3-9/b ábra), azaz a vektorok összeadása *asszociatív* művelet.



### 3-8 ábra

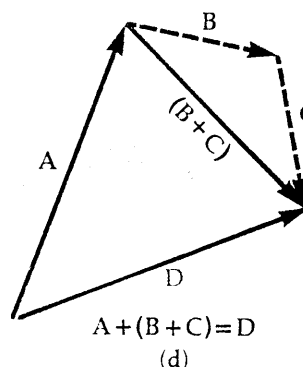
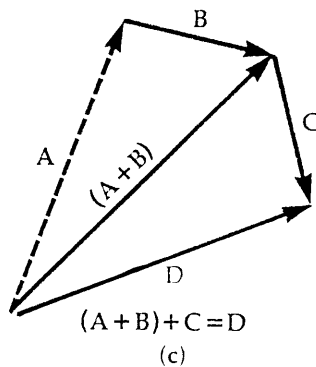
Vektorok összeadásának kommutatív törvénye. Bár az  $A+B$  és  $B+A$  művelet ábrája különböző, a  $C$  összegvektor azonos.

$$\text{A vektorok összeadása} \begin{cases} \text{kommutatív: } A + B = B + A \\ \text{asszociatív: } (A + B) + C = A + (B + C) \end{cases}$$



a) Sokszög módszer három vagy több vektor összegezésére

b) Az a) ábrán látható összeg meghatározása a tagok más sorrendjével. A kommutatív törvénynek megfelelően az összegvektor ugyanaz mint az a) ábrán.



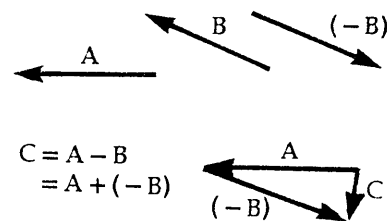
c) és d) Az asszociatív törvény szerint a vektorok összeadása a tagok különböző csoportosításával is elvégezhető.

A vektorok kivonásának definíciója előtt felidézünk, hogy a kivonás *negatív* mennyiség *hozzáadásaként* is értelmezhető. A vektorok ellentettjét már definiáltuk (3-3 ábra), így a kivonás értelmezése a következő:

II. Vektorok kivonása  $D = A - B$  definíció szerint  $D = A + (-B)$  (3-2)

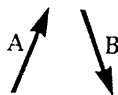
A grafikus kivonás során az A és a (-B) vektor *adjuk össze* a már definiált módon (3-10 ábra). A kivonás során a vektorok nem cserélhetők fel, hiszen  $(A - B) = -(B - A)$ . Pongyola kifejezés tehát a „két vektor különbsége” szóhasználat, ha nem mondjuk meg melyik vektor a kivonandó, ill. a kisebbítendő. Figyeljük meg, hogy bizonyos esetekben (3-11 ábra) két vektor különbségének abszolút értéke nagyobb lehet mint a két vektor összegéé.

3-9 ábra  
Három vektor összeadása



3-10 ábra  
Az  $A - B$  különbség meghatározásakor először felrajzoljuk az A vektort, majd hozzáadjuk (-B)-t.

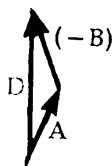
Adott:



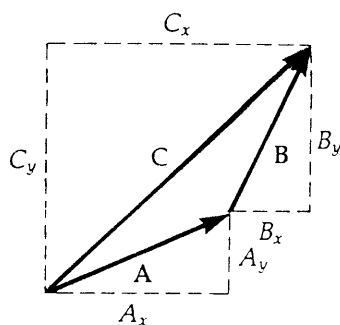
Összeadás:  $A + B = C$



Kivonás:  $A - B = D$   
(a művelet:  $A + (-B) = D$ )



3-11 ábra  
Egyes esetekben a különbségvektor nagysága *nagyobb* lehet mint a két vektor összegének nagysága.



3-12 ábra

Az  $A$  és  $B$  vektor  $x$  komponenseinek összege megegyezik a  $C$  összegvektor  $x$  összetevőjével. Hasonló szabály az  $y$  komponensekre.

Figyelmeztetés az előjelekre vonatkozóan: A vektordiagramokon csak akkor használjuk negatív előjelet, ha egy vektorral ellentétes irányú másik vektort kívánunk jelölni. Soha ne lássunk el negatív előjellel egy vektort azért, mert történetesen valamelyik negatív koordináta irányba mutat. (Például a lefelé mutató nehézségi gyorsulás  $-g$ -vel való jelölése célszerűtlen, a  $g$  jelölés alkalmasabb.) Ha egy vektort negatív előjellel látunk el, az mindig magában rejti annak a félreértésnek a lehetőségét, hogy az „igazi” pozitív vektor éppen ellentétes irányba mutat. A vektordiagramok a pozitív és negatív irány választásától függetlenül fennálló összefüggéseket fejeznek ki. A félreérthetőség lehetősége miatt ismételten hangsúlyozzuk, hogy a vektordiagramokon csak akkor használjunk negatív előjelű vektorokat, ha egy másik ugyancsak szereplő vektor ellentétjét kívánjuk jelölni.

### Algebrai módszer

A vektorok összeadásának és kivonásának algebrai végrehajtása pontos eredményre vezet. Ekkor az egyes vektorkomponenseket algebrailag kell összeadni, ill. kivonni, hogy megkapjuk az eredő megfelelő összetevőit. A 3-12 ábra geometriailag szemlélteti ezt a műveletet, míg a következő példa a művelet algebrai megoldását mutatja be.

### 3-3 PÉLDA

Határozzuk meg a következő elmozdulásvektorokat:

$$\mathbf{A} = (3 \text{ m})\hat{x} + (3 \text{ m})\hat{y}$$

$$\mathbf{B} = (1 \text{ m})\hat{x} + (-4 \text{ m})\hat{y}$$

$$\mathbf{C} = (-2 \text{ m})\hat{x} + (3 \text{ m})\hat{y}$$

Határozzuk meg algebrai úton a) a  $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$  vektort, b) az  $\mathbf{E} = -\mathbf{A} - \mathbf{B} + \mathbf{C}$  vektort.

### MEGOLDÁS

a) Az  $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$  összeg meghatározásához foglaljuk táblázatba a tagok  $x$  és  $y$  összetevőit, majd adjuk össze a megfelelő komponenseket.

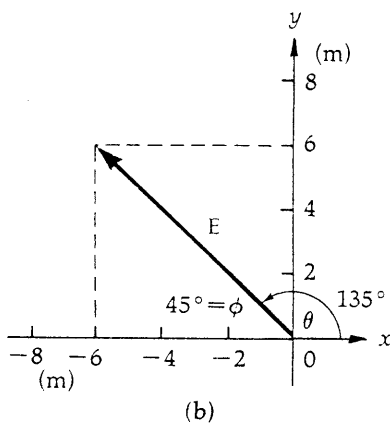
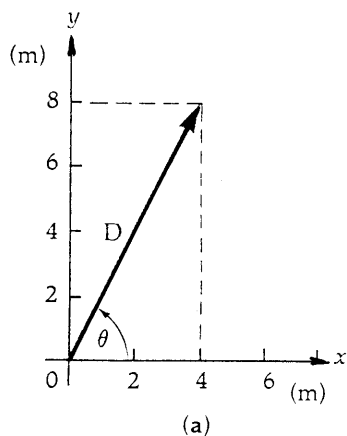
Vektor	$x$ Komponens	$y$ Komponens
$\mathbf{A}$	3 m	3 m
$\mathbf{B}$	1 m	-4 m
$\mathbf{C}$	-2 m	5 m
$\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$	2 m	4 m

Így  $\mathbf{D} = (2 \text{ m})\hat{x} + (4 \text{ m})\hat{y}$ , amint ezt a 3-13 ábra mutatja. A  $\mathbf{D}$  vektor nagysága

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2} = \sqrt{(2 \text{ m})^2 + (4 \text{ m})^2} = 4,47 \text{ m}$$

Az  $x$  tengely pozitív irányával alkotott  $\theta$  szög pedig

$$\theta = \arctan\left(\frac{D_y}{D_x}\right) = \arctan\left(\frac{4 \text{ m}}{2 \text{ m}}\right) = \arctan 2 = 63,4^\circ$$



3-13 ábra

A 3-3 példához

- b) Készítsünk új táblázatot a vektorok összetevőiből, jelezve, hogy a  $-A$  és  $-B$  vektorok összetevői az  $A$  és  $B$  vektorok összetevőinek ellentettjei.

Vektor	$x$ Komponens	$y$ Komponens
$-A$	$-3$ m	$-3$ m
$-B$	$-1$ m	$4$ m
$C$	$-2$ m	$5$ m
$E = (-A) + (-B) + C$	$-6$ m	$6$ m

Itt  $E = (-6 \text{ m})\hat{x} + (6 \text{ m})\hat{y}$ , amint azt a 3-13/b ábra mutatja.

$E$  nagysága

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{(-6 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 8,49 \text{ m}$$

Az  $E$  vektor a második térdnegyedbe esik és az  $x$  tengely negatív irányával a következő szöget zárja be<sup>2</sup>

$$\phi = \arctg \left| \frac{E_y}{E_x} \right| = \arctg \left| \frac{-6 \text{ m}}{6 \text{ m}} \right| = 45^\circ$$

Polárkoordinátákban a  $\theta$  szöget a  $+x$  tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mérjük, azaz

$$\theta = (180^\circ - 45^\circ) = 135^\circ$$

Egyes esetekben kényelmes az  $x$  tengely negatív irányával alkotott  $\theta = 45^\circ$ -os szög bejelölése is, ekkor azonban *olyan ábrát kell készíteni amelyről világosan leolvasható, hogy melyik szögről van szó.*

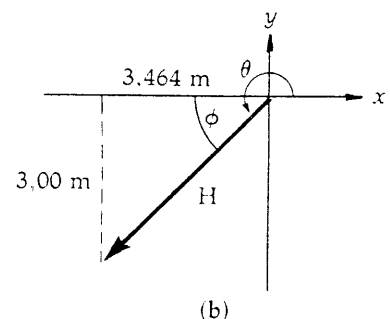
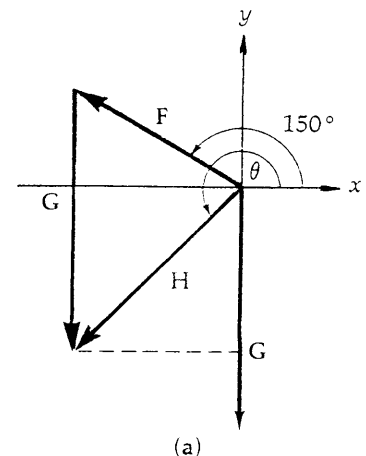
A vektorokat gyakran  $r$ ,  $\theta$  polárkoordinátákkal adjuk meg, ahol  $r$  a vektor hossza,  $\theta$  pedig a pozitív  $x$  tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mért szög. Az ilyen alakban megadott vektorokat úgy adhatjuk össze, hogy először meghatározzuk derékszögű összetevőiket, majd a már ismertett eljárást alkalmazzuk. A következő példában ezt olyan vektorok összeadásával illusztráljuk, amelyek nem az első térdnegyedbe esnek, ezért a koordináta-transzformáció során a szögfüggvények inverzeit nagyon gondosan kell kezelni.

### 3-4 PÉLDA

Adott a  $F$  vektor és a  $G$  vektor polárkoordinátákkal:

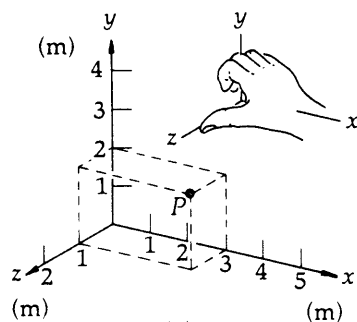
$$F = (4 \text{ m}, 150^\circ) \text{ és } G = (5 \text{ m}, 270^\circ)$$

Határozzuk meg a  $H = F + G$  vektor polárkoordinátáit (3-14/a ábra).

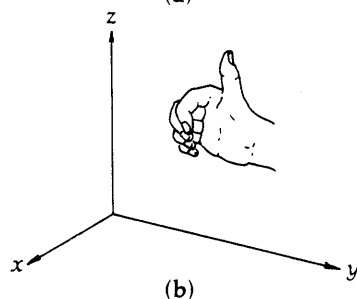


**3-14 ábra**  
A 3-4 példához.

<sup>2</sup> A trigonometrikus függvények inverzét a legtöbb számológép csak a  $-90^\circ < 0 < 90^\circ$  tartományban adja meg. Ezért különös gonddal kell eljárunk, ha a vektor a második vagy a harmadik térdnegyedbe esik. Mindig készítsünk ábrát!



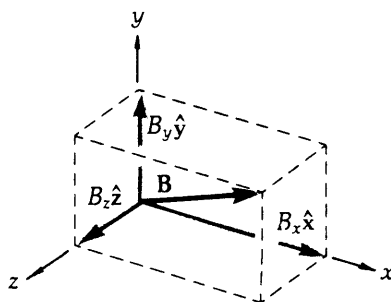
(a)



(b)

**3-15 ábra**

Jobbrendszer alkotó Descartes-féle koordináta-rendszer egy  $P$  pont térbeli koordinátaival. Bár az a) és b) ábra más-más tengelyirányítást mutat, mindkét koordináta-rendszer jobbsodrású

**3-16 ábra**

A  $\mathbf{B}$  vektor térbeli koordinátái  $B_x$ ,  $B_y$  és  $B_z$ . A megfelelő vektorösszetevők  $B_x \hat{x}$ ,  $B_y \hat{y}$  és  $B_z \hat{z}$ . Ezekkel a vektor a  $\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z}$  alakban írható fel.

**MEGOLDÁS**

Először kifejezzük a vektorok derékszögű komponenseit:

Vektor	$x$ Komponens	$y$ Komponens
$\mathbf{F}$	$(4 \text{ m})(\cos 150^\circ) = -3,142 \text{ m}$	$(4 \text{ m})(\sin 150^\circ) = 2,00 \text{ m}$
$\mathbf{G}$	$(4 \text{ m})(\cos 270^\circ) = 0$	$(4 \text{ m})(\sin 270^\circ) = -5,00 \text{ m}$
$\mathbf{H} = \mathbf{F} + \mathbf{G}$	$-3,646 \text{ m}$	$-3,00 \text{ m}$

A  $\mathbf{H}$  vektor iránya a 3-14 ábrán megrajzolt háromszögből határozható meg

$$\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{y}{x} \right| = \frac{3,000 \text{ m}}{3,464 \text{ m}} = 0,8661 \text{ vagy } \phi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} = 0,8661 = 40,9^\circ$$

Ennek megfelelően  $\mathbf{H}$  irányszöge polárkoordinátákban

$$\theta = (180^\circ + 40,9^\circ)$$

$$\text{Így} \quad \mathbf{H} = (4,58 \text{ m}, 221^\circ)$$

**3.5 Térbeli vektorok**

A térben a legismertebb koordináta-rendszer térben az egymásra merőleges  $x$ ,  $y$ , és  $z$  tengelyekkel rendelkező Descartes-féle koordináta-rendszer. A tengely-rendszert még azonos tengelyállások esetén is kétféleképpen vehetjük fel. Az  $xy$  síkra merőleges  $z$  tengelyt ugyanis kétféleképpen irányíthatjuk. Megállapodás szerint azonban az ún. **jobbrendszer** szokás használni, amit a következőképpen definiálunk. Vegyük fel tetszőlegesen az  $x$  és  $y$  tengelyeket, majd forgassuk a pozitív  $x$  irányt a pozitív  $y$  irány felé. Ez a forgatás kitüntet egy *forgási irányt*. Válasszuk a  $z$  tengely irányát úgy, hogy egy jobbkezes csavar ilyen forgatás hatására a pozitív  $z$  irányba mozogjon. Más kritériumot kaphatunk a jobbrendszer kijelölésére a következőképpen. Kifeszített hüvelykujjal hajlítsuk be jobbkezünk többi ujját úgy, hogy hegyük az előbb kijelölt forgás irányába mutasson. Hüvelykujjunk kijelöli a  $z$  tengely pozitív irányát! A 3-15 ábrán egy jobbrendszer perspektivikus képe látható. A  $P$  pont  $x$ ,  $y$ ,  $z$  koordinátái rendre 3 m, 2 m, 1 m.

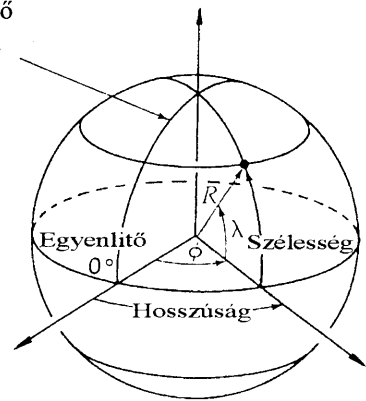
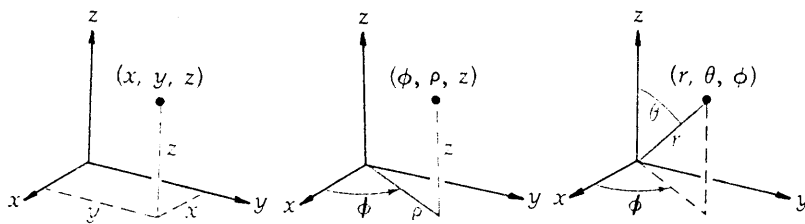
Az eddig használt **egységvektorrendszert** a  $z$  tengely pozitív irányába mutató  $\hat{z}$  **egységvektorral** kiegészítve, egy térbeli  $\mathbf{B}$  vektor pl. a 3-16 ábrán látható módon állítható elő derékszögű koordinátákkal. Az általánosan ismert térbeli koordináta-rendszereket a 3-17 ábra ismerteti. Jelenleg elsősorban a Descartes-féle koordináta-rendszert alkalmazzuk.

**3-5 PÉLDA**

A helikopterállomást  $40^\circ$ -os szögben északkelet felé elhagyó helikopter vízszintesen 2 km-t tesz meg, mialatt magassága 2500 m-re nő. A pilóta ekkor keletre fordul és 1500 m-t süllyedve vízszintesen még 3 km-t tesz meg. Milyen irányban és mekkora távolságra jutott a gép a repülőtértől? (3-18 ábra)



A Greenwichen áthaladó kezdő hosszúsági kör (0° hosszúság).



a) Descartes-féle koordináták  
( $x, y, z$ )

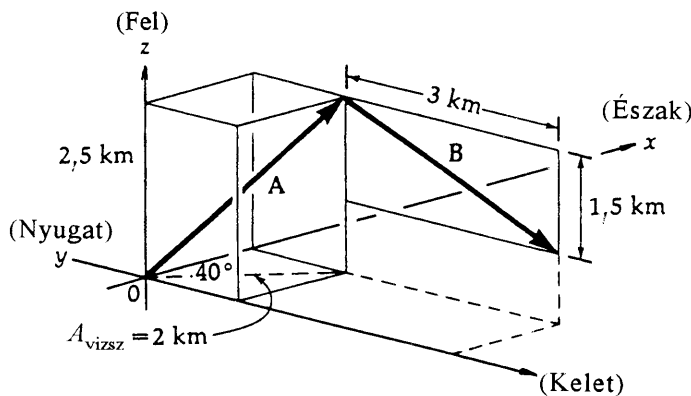
b) Hengerkoordináta-rendszer ( $\rho, \phi, z$ )  
 $x = \rho \cos \phi$   
 $y = \rho \sin \phi$   
 $z = z$   
 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$   
 $\text{tg } \phi = \frac{y}{x}$

c) Gömbi polárkoordináták ( $r, \theta, \phi$ )  
 $x = r \sin \theta \cos \phi$   
 $y = r \sin \theta \sin \phi$   
 $z = r \cos \theta$   
 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$   
 $\text{tg } \theta = \sqrt{x^2 + y^2} / z$   
 $\text{tg } \phi = y / x$

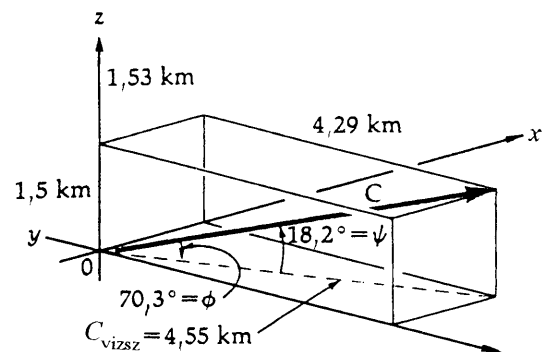
(d) A földgömbön elfoglalt helyzet két szöggel jellemezhető: a  $\phi$  hosszúsági szöggel (amit a Greenwich (Anglia) átmenő kezdő hosszúsági körtől keletre és nyugatra mérünk) és a szélességi szöggel (amit az egyenlítőtől északra és délre mérünk). Ez a két szög alkalmas a gömb felületét alkotó két dimenziós görbült tér jellemzésére. Ha figyelembe vesszük az átlagos tengerszint feletti magasságot (azaz a gömb középpontjától mért  $R$  változását), akkor a szóban forgó tér háromdimenziós.

**3-17 ábra**

Egy pont térbeli helyzetének meghatározására szolgáló különböző koordináta-rendszerek. Mindegyik esetben *három* paramétert ( $x, y, z$ ), ( $\rho, \phi, z$ ), ill. ( $r, \theta, \phi$ ) tartalmaznak, amelyek jellemzik a háromdimenziós teret.



a) Az A és B elmozdulásvektorok.



b) Az eredő  $C = A + B$  elmozdulás.

**3-18 ábra**

A 3-5 példához. Térbeli elmozdulásvektorok.

**MEGOLDÁS**

A helikopter végső helyzetének meghatározásához két térbeli elmozdulásvektort kell összeadnunk. Az eljárás első lépéseként a vektorok derékszögű koordinátáit kell meghatározni. Az összeadás után kiszámítjuk a kapott elmozdulásvektor hosszát és irányát. Használjunk

olyan derékszögű koordináta-rendszert, amelynek  $x$  tengelye északra,  $y$  tengelye nyugatra,  $z$  tengelye pedig függőlegesen felfelé mutat.

Az elmozdulásvektorok derékszögű összetevőit az alábbi táblázat mutatja ( a távolságokat kilométerben mérjük):

Vektor	$x$ Összetevő	$y$ Összetevő	$z$ Összetevő
A	$\frac{2 \cos 40^\circ}{1,53}$	$-\frac{2 \sin 40^\circ}{1,29}$	2,5
B	0	-3	$\frac{1,5 - 2,5}{-1,0}$
C	1,53	-4,29	1,5

Ennek megfelelően az eredő elmozdulás:  $C = 1,53 \hat{x} - 4,29 \hat{y} - 1,50 \hat{z}$ .

A repülőtértől való távolságot a kapott vektor hossza adja:

$$|C| = \sqrt{(1,53)^2 + (-4,29)^2 + (1,50)^2} = 4,79 \text{ km}$$

A vízszintes irányban mért szög

$$\phi = \arctg \left( \frac{4,29}{1,53} \right) = \boxed{70,3^\circ \text{ északkeletre}}$$

A teljes elmozdulás vízszintes összetevője:

$$C_{\text{vizsz}} = \sqrt{(4,29)^2 + (1,53)^2} = 4,55 \text{ km}$$

Az elmozdulásvektornak a vízszintessel alkotott szöge:

$$\psi = \arccos \frac{C_{\text{vizsz}}}{C} = \arccos \frac{4,55}{4,79} = \boxed{18,2^\circ \text{ a horizont felett}}$$

### 3.6 A sík- és térbeli mozgás sebessége és gyorsulása

A második fejezetben egyenesvonalú mozgásra vonatkozóan már definiáltuk a kinematikai alapfogalmakat, az elmozdulást, a sebességet és a gyorsulást. A vektorok felhasználásával most két- és háromdimenziós mozgásokra is kiterjesztjük ezeket a fogalmakat. Az egyszerűség kedvéért ábráink többnyire kétdimenziós esetre vonatkoznak. Az eredmények azonban kis gyakorlattal könnyen kiterjeszthetők a háromdimenziós esetekre.

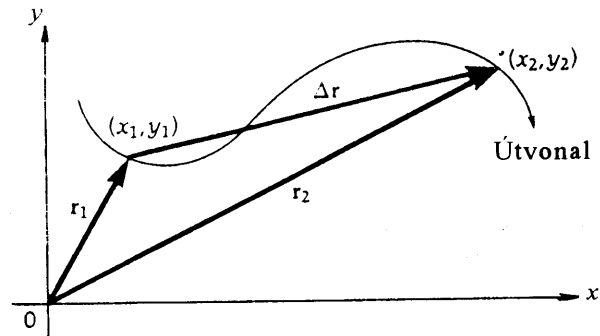
A 3-19 ábra két város közötti autótutat mutat. A városok távolsága toronyiránt 100 km. Vizsgáljuk fizikai szempontból egy autó útját a két város között. A kiinduló város **helyzetvektora** legyen  $\mathbf{r}_1(x_1, y_1)$  a célvárosé pedig  $\mathbf{r}_2(x_2, y_2)$ . A  $\Delta \mathbf{r}$  **elmozdulásvektort** az

$$\text{Elmozdulásvektor } \Delta \mathbf{r} \qquad \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \qquad (3-3)$$

összefüggés definiálja. Természetesen a gépkocsi által a görbevonalú pályán ténylegesen megtett út  $\Delta \mathbf{r}$ -nél hosszabb is lehet. Az **átlagsebesség-vektor** definíciója a következő:

Átlagsebesség  
vektor  $\mathbf{v}_{\text{át}}$

$$\mathbf{v}_{\text{át}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3-4)$$



3-19 ábra

A  $\Delta \mathbf{r}$  elmozdulásvektor az  $(x_1, y_1)$  kezdőpontból az  $(x_2, y_2)$  végpontba mutat. Vegyük észre, hogy  $\mathbf{r}_1 + \Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ .

ahol  $\Delta t = t_2 - t_1$  azt az időtartamot jelenti, ami alatt a gépkocsi a pálya  $(x_1, y_1)$  és  $(x_2, y_2)$  közötti szakaszát megtette. Oda-vissza út esetén pl. az elmozdulás és így az átlagsebesség-vektor is zérus lenne. A pillanatnyi sebességet a pálya bármely pontjában a  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  különbségi hányados határértékével értelmezhetjük, midőn  $\Delta t$  zérushoz tart (3-20 ábra). Bár ezen folyamat során  $\Delta \mathbf{r}$  is kicsinnyé válik, a  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  arány nem feltétlenül kicsi. **Pillanatnyi sebességnek** a határérték-képzési folyamat eredményét nevezzük. Ha a mozgó test a  $t$  időpillanatban az  $\mathbf{r}(t)$  helyen a  $t + \Delta t$  pillanatban az  $\mathbf{r}(t + \Delta t)$  helyen tartózkodik, akkor

Pillanatnyi  
sebesség  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \right) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (3-5)$$

Szavakban: „ $\mathbf{v}$  a  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  különbségi hányados határértéke, midőn  $\Delta t$  tart zérushoz”. A határértéket  $d\mathbf{r}/dt$ -vel jelöljük és „ $\mathbf{r}$  idő szerinti deriváltjának nevezük”. SI mértékrendszerben a sebesség mértékegysége *méter per másodperc*.

Amennyiben az  $\mathbf{r}(t)$  függvényt analitikusan ismerjük, akkor a deriváltját a G-I függelékben található deriválási szabályokkal is meghatározhatjuk. Figyeljük meg, hogy határértékben  $\Delta \mathbf{r}$  iránya a pálya érintőjének irányához közeledik. Emiatt a  $\mathbf{v}$  pillanatnyi sebesség *mindig a pálya érintőjébe esik és a haladás irányába mutat*.

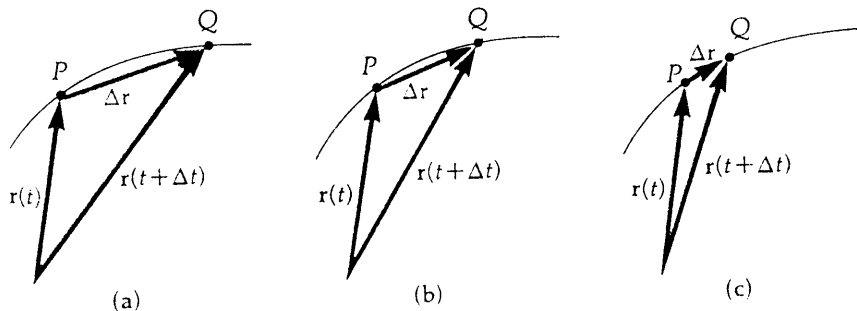
A fizikában a **sebességvektor** mindig nagysággal és iránnyal jellemzett, mennyiség. A sebességvektort koordináta-rendszertől függetlenül definiáltuk, így bármely koordináta-rendszerben ugyanúgy használható – ez talán a legnagyobb előnye a vektorfogalom alkalmazásának. Derékszögű koordinátákban a sebességvektor az

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}$$

helyzetvektor segítségével

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x \hat{\mathbf{x}} + v_y \hat{\mathbf{y}} + v_z \hat{\mathbf{z}} = \frac{dx}{dt} \hat{\mathbf{x}} + \frac{dy}{dt} \hat{\mathbf{y}} + \frac{dz}{dt} \hat{\mathbf{z}}$$

alakban fejezhető ki.



3-20 ábra

Az ábra a 3-19 görbevonali pálya kicsiny részének nagyítása. A határérték-képzési folyamat során, amikor a  $Q$  pontot egyre közelebb és közelebb vesszük fel  $P$ -hez, a  $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$  különbségi hányados a  $d\mathbf{r} / dt$  határértékhez tart, eközben  $\Delta \mathbf{r}$  iránya a görbe  $P$  pontbeli érintőjének irányához közeledik.

A  $d\hat{x}/dt$ ,  $d\hat{y}/dt$  és  $d\hat{z}/dt$  deriváltak értéke zérus, mivel az  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  és  $\hat{z}$  egységvektorok állandók, nem változnak az idő függvényében. Így

$$\mathbf{v} = v_x \hat{x} + v_y \hat{y} + v_z \hat{z} \quad (3-6)$$

ahol a sebességvektor koordinátái egyenlők helyzetvektor koordinátáinak a deriváltjaival:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (3-7)$$

### 3-6 PÉLDA

Egy az  $xy$  síkban mozgó részecske helyzetvektorának derékszögű koordinátái az  $x = (2 \text{ m/s}^2)t^2$  és  $y = (16 \text{ m}^2)/t^2$  összefüggések szerint változnak. Határozzuk meg a részecske helyzetvektorát és sebességvektorát a  $t = 2$  s időpontban és ábrázoljuk ezeket.

### MEGOLDÁS

A helyzetvektort bármely időpontban az

$$\mathbf{r} = 2t^2 \hat{x} + \frac{16}{t^2} \hat{y} \quad (\text{SI egységekben})$$

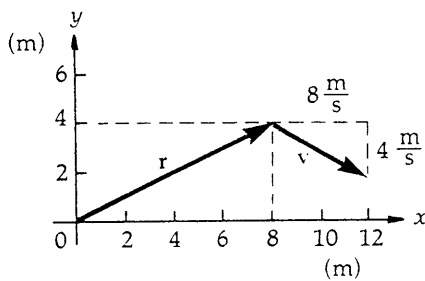
függvény adja meg. A 3-6 egyenlet szerint a sebességvektor:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} = 4t \hat{x} - \frac{32}{t^3} \hat{y}$$

Meghatározva ezeket a vektorokat a  $t = 2$  s pillanatban és beírva a mértékegységeket, azt kapjuk, hogy

$$\mathbf{r} = (8\hat{x} + 4\hat{y}) \text{ m} \quad \text{és} \quad \mathbf{v} = (8\hat{x} - 4\hat{y}) \text{ m/s}$$

A helyzet- és sebességvektort a 3-21 ábrán rajzoltuk fel.



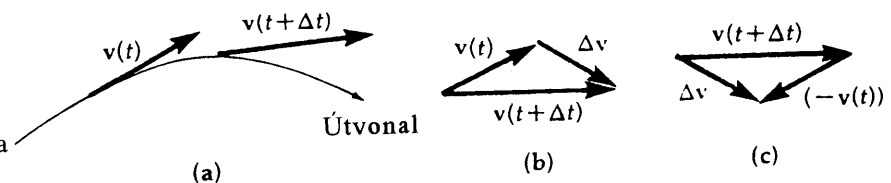
3-21 ábra

A 3-6 példához. Mozgó test pillanatnyi helyzetvektora és sebességvektora.

### A gyorsulás

A gyorsulás definíciója az egydimenzióban adott definícióhoz hasonlóan adható meg. A 3-22a ábra egy görbevonalú pályán mozgó részecske helyzetét mutatja két különböző időpontban. A mozgás során a részecske sebessége nőhet, vagy csökkenhet. Válasszuk azt az esetet, amikor a sebesség növekszik. A  $\mathbf{v}(t)$  és  $\mathbf{v}(t+\Delta t)$  sebességvektorok kezdőpontját az ábrán a részecskének az adott időpontban való helyzete határozza meg. A sebességvektor változását a 3-22 ábrán követhetjük.

A vektorábrán a  $\mathbf{v}(t)$  és  $\mathbf{v}(t+\Delta t)$  sebességvektorok irányuk és nagyságuk megtartásával szabadon mozgathatók, így felrajzolható a  $\mathbf{v}(t) + \Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t)$  vektorösszeg, amiből kifejezhetjük a  $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}(t+\Delta t) - \mathbf{v}(t)$  különbségvektort. (A különbséget a  $\mathbf{v}(t+\Delta t)$  végsebesség és a  $-\mathbf{v}(t)$  sebesség összegeként határozhatjuk meg, amint azt a 3-22 ábra mutatja.) Az **átlagos gyorsulás** definíció szerint:



3-22 ábra

$\Delta t$  idő alatt a sebességvektor iránya és nagysága is változik, a változás  $\Delta\mathbf{v}$

Átlagos gyorsulás  $\mathbf{a}_{\text{át}}$  
$$\mathbf{a}_{\text{át}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (3-8)$$

A pillanatnyi gyorsulás :

Pillanatnyi gyorsulás  $\mathbf{a}$  
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (3-9)$$

Szavakban: „ $\mathbf{a}$  a  $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$  különbségi hányados határértéke, midőn  $\Delta t$  tart zérushoz”. A határértéket  $d\mathbf{v}/dt$ -vel jelöljük és „ $v$  idő szerinti deriváltjának nevezüik”. SI mértékrendszerben a gyorsulás egysége [(méter per másodperc) per másodperc], rövidebben  $m/s^2$ . Derékszögű komponensekben a gyorsulásvektor

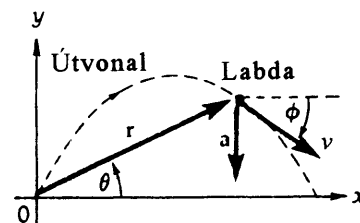
$$\mathbf{a} = a_x \hat{\mathbf{x}} + a_y \hat{\mathbf{y}} + a_z \hat{\mathbf{z}} \quad (3-10)$$

alakban adható meg, ahol a gyorsulásvektor összetevői a megfelelő sebességkomponensek idő szerinti deriváltjai:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (3-11)$$

Az  $\mathbf{r}$  helyzetvektor, a  $\mathbf{v}$  sebességvektor és az  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektor a kinematika kulcsfontosságú fogalmai, hatékonyságuk és sokoldalú alkalmazhatóságuk figyelemreméltó. E fogalmakkal a pontszerű testek tetszőleges térbeli mozgása leírható.

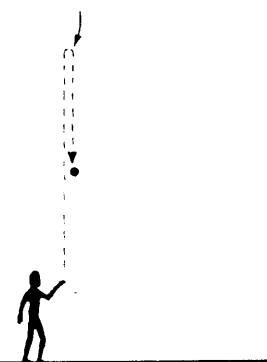
Egy gyakori félreértés forrására azonban még fel kell hívnunk a figyelmet. A helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor iránya nem szükséges, hogy azonos legyen. Tekintsük például egy eldobott és pusztán a gravitáció hatására mozgó labda parabola pályáját (3-23 ábra). A sebesség mindig a pálya érintőjének irányába mutat, a helyvektor folyamatosan változik, míg a gravitáció miatt fellépő gyorsulás iránya mindig lefelé mutat és nagysága is állandó. Nem szabad meglepődnünk azon, ha egy test gyorsulása nem a mozgás irányába mutat! Még az is lehetséges, hogy a test egy pillanatban nem mozog, bár gyorsul; gondoljunk a pályája tetőpontjára érkező függőlegesen felfelé hajított testre (3-24 ábra). A régi görögök még nem fogták fel ezeket a finom részleteket, következésképpen nem is érthették meg a mozgás lényegét.



3-23 ábra

Az eldobott labda parabolapályán mozog. Az ábra mutatja, hogy egy adott pillanatban a labda az  $\mathbf{r}$  helyzet-,  $\mathbf{v}$  sebesség- és  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektora három különböző irányba mutat.

A pálya csúcspontján a pillanatnyi sebesség zérus, a gyorsulás pedig  $9,81 \text{ m/s}^2$  és lefelé mutat.



3-24 ábra

Függőlegesen feldobott test pályagörbéje. A test szabad mozgása során (mind felfelé, mind pedig lefelé) a gyorsulás lefelé mutat és állandó, nagysága  $9,81 \text{ m/s}^2$ . Így egy test mozoghat felfelé, miközben lefelé gyorsul, s sebessége zérus lehet egy pillanatban, (a csúcsponton), míg gyorsulása továbbra is lefelé irányul.

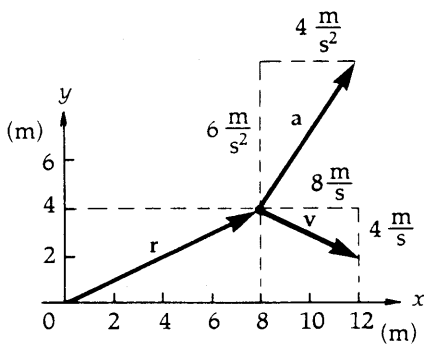
3-7 PÉLDA

Határozzuk meg a 3-6 példában szereplő test gyorsulását. Rajzoljuk meg a test helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektorát a  $t = 2 \text{ s}$  időpontban.

MEGOLDÁS

A 3-6 feladat szerint a helyzet-idő és a gyorsulás-idő függvényt a következő formulák írják le.

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= 2t^2 \hat{\mathbf{x}} + \frac{16}{t^2} \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{v} &= 4t \hat{\mathbf{x}} - \frac{32}{t^3} \hat{\mathbf{y}} \end{aligned} \right\} \text{ (SI egységekben)}$$



3-25 ábra

A 3-7 példához. Változó mozgást végző test pillanatnyi helyzete, sebessége és gyorsulása

Az  $a = dv/dt$  gyorsulás ily módon

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{d}{dt} \left( 4t\hat{x} - \frac{32}{t^3}\hat{y} \right) \\ &= 4\hat{x} + \frac{96}{t^4}\hat{y} \end{aligned}$$

A  $t = 2$  s időpontban pedig:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r} &= 8\hat{x} + 4\hat{y} \\ \mathbf{v} &= 8\hat{x} - 4\hat{y} \\ \mathbf{a} &= 4\hat{x} + 6\hat{y} \end{aligned} \right\} \text{(SI egységekben)}$$

A keresett vektorokat a 3-25 ábra mutatja.

### 3.7 Hajítások

A mechanika kifejlesztésében hatalmas fejlődést hozó két gondolkodót, Galileit és Newtont is izgatta a Föld közelében, pusztán a gravitáció hatása alatt álló testek mozgásának leírása. Szerencsére, ha a testek elég kicsinyek és elegendően súlyosak, akkor a légellenállás okozta zavaró hatások elhanyagolhatók és kis magasságkülönbségekre korlátozódó helyi mozgások esetén a gravitációs gyorsulás állandónak tekinthető. Minden szabadon eső test ugyanakkora  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$  gyorsulással esik a Föld felé. A Föld forgásából eredő effektus szintén elhanyagolható. Ezen közelítések mellett Galilei felfedezte, hogy

**a szabadon eső testek mozgásának vízszintes és függőleges összetevői tökéletesen függetlenek egymástól<sup>1</sup>.**

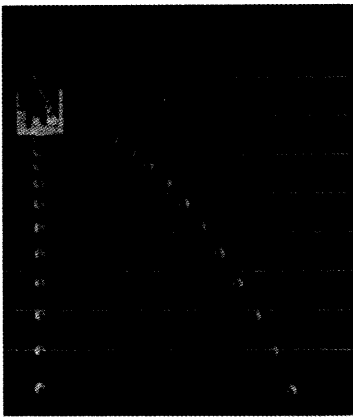
Más szavakkal; *a mozgás függőleges és vízszintes összetevői külön-külön vizsgálhatók*, azaz a kétdimenziós pályagörbe leírása helyett elegendő két különálló egydimenziós mozgással foglalkozni. A gravitációs gyorsulás nagyságát  $g$ -vel jelöljük, azaz  $g$  mindig pozitív értéket jelent, mert a gyorsulásnak csak a nagyságát jelöli, az irányát nem. A 3-26 ábra olyan kísérletet mutat, amely szemlélteti, hogy a függőleges és a vízszintes mozgásösszetevők függetlenek egymástól.

Az előző fejezetben az egyenesvonalú mozgásokra vonatkozó kinematikai egyenleteket írtunk fel [(2-11)–(2-13) egyenletek]. A mozgásösszetevők függetlensége következtében ezek a kinematikai egyenletek tetszőleges koordináta irány mentén felírhatók. Térbeli mozgások esetén az összetevők világos megkülönböztetésére a kinematikai egyenletekben szereplő mennyiségeket a megfelelő koordináta irányokra utaló indexekkel látjuk el. Például:

$$v_x = (v_x)_0 + a_x t \quad v_y = (v_y)_0 + a_y t \quad v_z = (v_z)_0 + a_z t$$

Ezekben az egyenletekben a  $t$  paraméter mindenütt ugyanazt az időpontot jelenti.

<sup>1</sup> A mozgások összetevői nem mindig függetlenek egymástól. A következő fejezetben fonal végén körbe pörgetett test mozgásával foglalkozunk, ahol az  $x$  és  $y$  összetevő között szigorú összefüggés áll fenn. A 14. fejezetben tárgyaljuk a Coriolis erőt. Kiderül, hogy az egyik irányban ható erőt a rá merőleges sebességösszetevő szabja meg. A gravitáció hatására állandó  $g$  és elhanyagolható légellenállás mellett megvalósuló mozgások összetevői azonban függetlenek egymástól.



3-26 ábra

Stroboszkopikus felvétel két golfabda mozgásáról. A két mozgás ugyanabban az időpontban indult, az egyik labdát függőlegesen leejtettük, a másikat vízszintesen  $2 \text{ m/s}$  sebességgel elhajítottuk. A két labda függőleges mozgása azonos annak ellenére, hogy az egyik labda állandó, vízszintes irányú sebességgel rendelkezett. A felvétel jól mutatja, hogy a gravitáció hatása alatt szabadon mozgó testek vízszintes és függőleges mozgása független egymástól. A fénykép  $1/30$  másodpercenként felvillanó fényvillák készült. A fehér vonalak egymástól  $15 \text{ cm}$  távolságban kifeszített húrok képei.

Amint a 3C-37 feladat is mutatja, a kétdimenziós mozgások érdekes tulajdonsága, hogy állandó  $g$  gyorsulás és elhanyagolható légellenállás mellett a szabadon eső testek pályagörbéje mindig parabola.

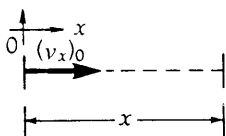
### 3-8 PÉLDA

Egy lövedéket a vízszinteshez képest  $\theta_0 = 55^\circ$ -os szögben  $v_0 = 50$  m/s sebességgel lőttünk ki. A lövedék pályájának leszálló ágában az elhajtási helynél 60 m-rel magasabban egy domboldalba csapódott (3.-27 ábra). a) Mennyi ideig repült a lövedék? b) A kilövés helyétől milyen távolságba jutott el? c) Mekkora sebességgel csapódott a domboldalba?

### MEGOLDÁS

Válasszuk a koordináta-rendszer kezdő pontjával a kilövés helyét, a pozitív tengelyirányokat pedig vegyük fel a 3-27 ábrán jelölt módon. (Ekkor a kezdeti helyzet koordinátái,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ .) A pályagörbe teljes egészében az  $xy$  síkban fekszik, így a mozgás egymástól független vízszintes és függőleges komponensekre bontva tárgyalható. A két összetevőről külön-külön is vázlatot készítettünk. Az ábrák alatti listán a paraméterek kezdeti és végső értékét a választott koordinátairányoknak megfelelő előjellel láttuk el.

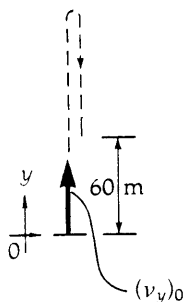
#### Vízszintes összetevő



$$\left[ \begin{array}{l} v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \theta_0 = 55^\circ \\ (v_x)_0 = v_0 \cos \theta_0 \\ a_x = 0 \\ x_0 = 0 \\ x = ? \\ t = ? \end{array} \right.$$

(Megjegyzés: Az 5. fejezetben rámutatunk, hogy a vízszintes irányú erő zérus, ezért a vízszintes irányú gyorsulás is zérus.)

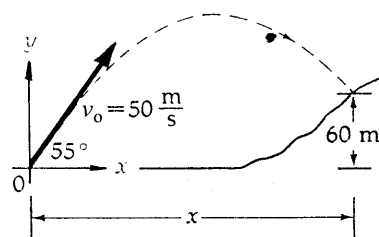
#### Függőleges összetevő



$$\left[ \begin{array}{l} v_0 = 50 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ \theta_0 = 55^\circ \\ (v_y)_0 = v_0 \sin \theta_0 \\ a_y = -g \\ y_0 = 0 \\ y = 60 \text{ m} \\ t = ? \end{array} \right.$$

(Megjegyzés: Nem szükséges, hogy a felfelé és lefelé repülés idejét külön-külön határozzuk meg. Ha a véghelyzet 60 m helykoordinátáját behelyettesítjük a kinematikai egyenletbe, akkor egy lépésben kiszámíthatjuk a teljes mozgás idejét.)

a) és b) rész: Az adatokat és az ismeretleneket a kinematikai egyenletekkel összehasonlítva megállapíthatjuk, hogy az  $y$  komponensre a (2-12) egyenletet felírva a keresett időtartam azonnal megkapható. (Természetesen ez egyben megszabja a vízszintes irányú mozgás időtartamát is.)



3-27 ábra

A 3-8 példához

$$x = x_0 + (v_x)_0 + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$x = 0 + (v_0 \cos \theta_0) t + 0$$

Mivel ebben az egyenletben két ismeretlen van:  $x$  és  $t$ , addig nem juthatunk tovább, míg  $t$  értékét az  $y$  összetevőre vonatkozó egyenletből ki nem fejeztük.

$$y = y_0 + (v_y)_0 + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$y = 0 + (v_0 \sin \theta_0) t + \frac{1}{2} g t^2$$

A másodfokú egyenletet a szokásos alakra hozva:

$$\frac{1}{2} g t^2 + (v_0 \sin \theta_0) t + y = 0$$

Felhasználva a másodfokú egyenlet megoldóképletét (E függelék), amely szerint az

$$a t^2 + b t + c = 0$$

egyenlet megoldása

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a};$$

esetünkben

$$t = \frac{v_0 \sin \theta_0 \pm \sqrt{(v_0 \sin \theta_0)^2 - 2gy}}{g}$$

Behelyettesítve az adatokat:

$$t = \frac{\left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \sin 55^\circ \pm \sqrt{\left[\left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) \sin 55^\circ\right]^2 - 2\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(60 \text{ m})}}{9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$t = 6,46 \text{ és } 1,89$$

Behelyettesítve az  $y$  komponensre vonatkozó egyenletből  $t$  értékét, azt kapjuk, hogy

$$x = \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\cos 55^\circ) (6,46 \text{ s})$$

$$x = 185 \text{ m}$$

A  $t = 1,89 \text{ s}$  eredményt elvetjük, hiszen ez éppen azt az időpontot jelenti, amikor a lövedék a *fel szálló* ágban elérte a 60 m magasságot. A keresett időtartam  $t = 6,46 \text{ s}$ . Ekkor a lövedék a kilövés helyénél 60 m-rel magasabban van és már lefelé mozog. Ezt az értéket kell behelyettesítenünk az  $x$  irányú elmozdulás-összetevőt meghatározó egyenletbe.

Az eredmények: a) A lövedék repülésének ideje: 6,46 s

b) A vízszintes irányú elmozdulás: 185 m

**c) rész:** A mozgás során a sebesség vízszintes összetevője nem változik, így a becsapódás pillanatában ez az összetevő ugyanannyi, mint a kilövés pillanatában:

$$v_x = v_0 \cos \theta_0 = \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\cos 55^\circ) = 28,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A  $t = 6,46 \text{ s}$  időpillanatban a sebesség függőleges komponense a következő kinematikai egyenletből határozható meg:

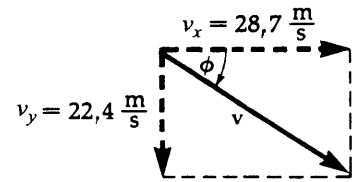
$$v_y = (v_y)_0 + a_y t = \left(50 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right) (\sin 55^\circ) - \left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (6,46 \text{ s}) = -22,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



A negatív előjel azt jelzi, hogy a sebesség függőleges összetevője az y tengely negatív irányába mutat. A sebesség összetevőit a becsapódás pillanatában a 3-28 ábra mutatja. Ennek alapján a sebesség nagyságát és irányát a  $t = 6,46$  s időpontban a következő egyenletekkel adhatjuk meg:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(280,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-22,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 36,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\phi = \arctg \left( \frac{|v_y|}{v_x} \right) = \arctg \left( \frac{22,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{28,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \right) = 38,0^\circ \text{ (a horizonttól lefelé)}$$



3-28 ábra

A gránát becsapódási sebessége a 3-8 példában.

### 3-9 PÉLDA

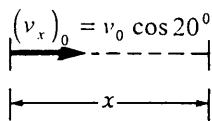
Egy épület felső emeleti ablakából 8 m/s sebességgel és a vízszintessel  $20^\circ$  szöget bezáró irányban egy labdát hajítottunk lefelé. A labda a kihajítás után három másodperccel csapódott a talajba. a) Az épület aljától milyen távolságban ért földet? b) Milyen magasról hajítottuk el? c) Mennyi idő telt el, míg a labda kiinduló helyzeténél 10 m-rel lejjebb került? (A légellenállás elhanyagolható.)

#### MEGOLDÁS

Rajzoljunk vázlatot a feladatról (3-29 ábra). Mivel példánkban minden mozgás lefelé irányul, ezért válasszuk ezt az irányt pozitívnak. Készítsünk külön vázlatot az x és az y irányú mozgásösszetevőkről. A kis tengelykeresztek jelzik, hogy az origót a röppálya kezdőpontjában vettük fel, és a tengelyek pozitív iránya rendre jobbfelé illetve lefelé mutat.

#### Vízszintes összetevő

##### Az a) rész adatai



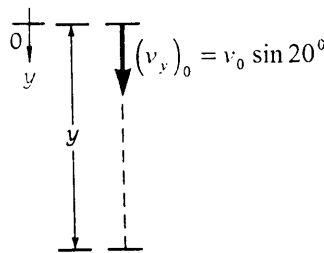
$$(v_x)_0 = v_0 \cos 20^\circ$$

$$(v_x)_0 = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0,940) = 7,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} a_x &= 0 \\ t &= 3 \text{ s} \\ x_0 &= 0 \\ x &= ? \end{aligned}$$

#### Függőleges összetevő

##### A b) rész adatai

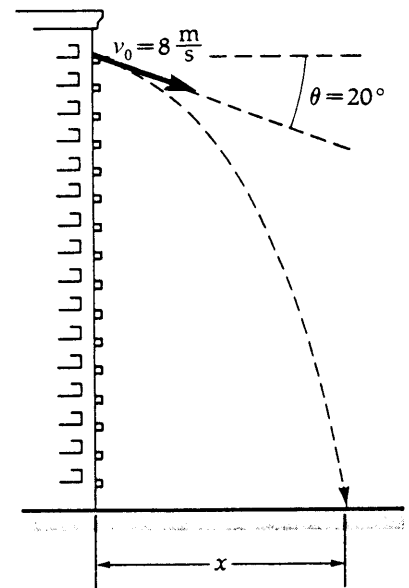


$$(v_y)_0 = v_0 \sin 20^\circ$$

$$(v_y)_0 = \left(8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(0,342) = 2,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\begin{aligned} a_y &= 9,81 \text{ m/s}^2 && \text{g pozitív, mert} \\ t &= 3 \text{ s} && \text{a lefelé mutató} \\ y_0 &= 0 && \text{irányt választottuk} \\ y &= ? && \text{pozitívnak} \end{aligned}$$

Összehasonlítva az adatokat a kinematikai egyenletek változóival, megállapítható, hogy mindkét esetben a (2-12) egyenletet kell alkalmazni.



3-29 ábra

A 3-9. példához.

$$x = x_0 + (v_x)_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$x = 0 + \left(7,52 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3 \text{ s}) + \frac{1}{2}(0)(3 \text{ s})^2$$

$$x = 22,6 \text{ m}$$

$$y = y_0 + (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

Behelyettesítve az adatokat, azt kapjuk, hogy

$$y = 0 + \left(2,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(3 \text{ s}) + \frac{1}{2}\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(3 \text{ s})^2$$

$$y = 52,3 \text{ m}$$

c) rész: Ebben a részben a mozgás függőleges összetevőjével foglalkozunk:

$$(v_y)_0 = 2,74 \text{ m/s} \quad (\text{a b) rész alapján})$$

$$a_y = 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$y_0 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 10 \text{ m} \\ t = ? \end{array} \right\} \quad (\text{új adat a c) rész alapján})$$

A feladat megoldására most is a (2-12) egyenlet alkalmas

$$y = y_0 + (v_y)_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$10 \text{ m} = 0 + \left(2,74 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)(t) + \frac{1}{2}\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(t^2)$$

Átrendezve, és a könnyebb áttekinthetőség kedvéért a mértékegységeket elhagyva:

$$4,90t^2 + 2,74t - 10 = 0$$

Az egyenlet ránézésre nem bontható tényezőkre, ezért a másodfokú egyenlet megoldóképletét (E függelék) alkalmazzuk:

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4ac}}{2a} = \frac{-2,74 \pm \sqrt{(2,74)^2 - (4)(4,90)(-10)}}{2(4,90)} =$$

$$= +1,18 \text{ s}, -1,74 \text{ s}$$

Mivel az időmérés kezdőpontját a labda elhajításának időpontjával vettük egyenlőnek, a negatív gyök értelmetlen számunkra. Ezért

$$t = 1,18 \text{ s}$$

Megjegyezzük, hogy más probléma esetén a negatív gyöknek is tulajdonítható fizikai jelentés. A negatív idő az adott feladatbeli mozgás kezdőpontja előtti időt jelent. Elképzelhetünk olyan hajítást, amelynek során a labda felfelé mozgó pályán haladva  $t = -1,74$ -kor időpontban 10 m-rel lenne az ablak szintje alatt, utána elérné pályájának tetőpontját, majd lefelé haladva a  $t = 0$  időpontban becsatlakozna az előzőekben megoldott feladatban leírt pályába. Sok feladat esetén mindkét gyök értelmes lehet, azért a számítás eredményeiről mindig a konkrét fizikai feltételek ismeretében dönthetjük el, hogy a gyökök megfelelnek-e a feladat követelményeinek.

## 3-10 PÉLDA

A 3-30 ábrán a koordinátarendszer kezdőpontjából elhajított test pályája látható. Ha a légellenállás elhanyagolható, akkor a kizárólag a gravitáció hatása alatt álló test parabola pályán mozog (lásd a 3C-37 feladatot). Helyzetvektorának  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  időfüggvénye:

$$\mathbf{r} = (9,8t)\hat{\mathbf{x}} + (19,6t - 4,9t^2)\hat{\mathbf{y}}$$

(Itt  $\mathbf{r}$  méterben,  $t$  másodpercben van megadva.)

Határozzuk meg a test helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektorát a  $t = 3$  s időpontban.

## MEGOLDÁS

A helyzetvektor: A  $t = 3$  s értéket az  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  függvénybe helyettesítve

$$\mathbf{r}(3) = (29,4)\hat{\mathbf{x}} \text{ m} + (14,7)\hat{\mathbf{y}} \text{ m}$$

Az elmozdulásvektor abszolút értéke a Pitagorász tétel segítségével:

$$|\mathbf{r}(3)| = \sqrt{(29,4 \text{ m})^2 + (14,7 \text{ m})^2} = 32,9 \text{ m}$$

Megjegyezzük, hogy ez a távolság *nem* egyenlő a test által befutott pálya hosszával.

A helyzetvektornak a vízszintessel bezárt szöge a

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_y}{r_x} = \frac{14,7 \text{ m}}{29,4 \text{ m}} = 0,500$$

összefüggésből:

$$\theta = \arcsin 0,500 = 26,5^\circ$$

A sebességvektor: A  $\mathbf{v}(t)$  sebességvektor az  $\mathbf{r}(t)$  helyvektor idő szerinti deriváltja. A differenciálási szabályok szerint (G Függelék):

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( (9,8t)\hat{\mathbf{x}} + (19,6t - 4,9t^2)\hat{\mathbf{y}} \right) = (9,8)\hat{\mathbf{x}} + (19,6 - 9,8t)\hat{\mathbf{y}}$$

ahol  $v$  m/s-ben van megadva. (Vegyük észre, hogy a  $t = 2$  s pillanatban  $v_y = 0$ ,  $v_x$  azonban nem zérus, a test pályájának csúcspontján van és vízszintesen mozog.) A  $t = 3$  s időpontban:

$$\mathbf{v}(3) = (9,8)\hat{\mathbf{x}} \frac{\text{m}}{\text{s}} + (-9,8)\hat{\mathbf{y}} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

A  $\mathbf{v}(3)$  sebesség a Pitagorász tétellel határozható meg:

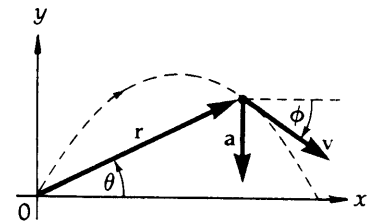
$$|\mathbf{v}(3)| = \sqrt{\left(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 + \left(-9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} = 13,85 \text{ m/s}$$

A sebességnek a vízszintessel bezárt szöge  $\phi^*$

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{|v_y|}{v_x} = \frac{9,8 \text{ m/s}}{9,8 \text{ m/s}} = 1,00$$

egyenletből:

$$\phi = \arcsin(1,00) = 45^\circ \quad (\text{a horizont alatt})$$



3-30 ábra

A 3-10 példához

**A gyorsulásvektor:** Mivel  $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ , a gyorsulásvektort a sebességvektor deriválásával kaphatjuk meg.

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}((9,8)\hat{x} + (19,6 - 9,8t)\hat{y}) = (-9,8)\hat{y} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A gyorsulás tehát az  $y$  tengely negatív irányába mutat és időben állandó.

## Összefoglalás

A pontszerű testek sík- és térbeli mozgásának leírására a nagyságukkal és irányukkal jellemzett vektormennyiségeket használjuk.

Helyzetvektor

$$\mathbf{r} = r_x\hat{x} + r_y\hat{y} + r_z\hat{z}$$

Sebességvektor

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr_x}{dt}\hat{x} + \frac{dr_y}{dt}\hat{y} + \frac{dr_z}{dt}\hat{z}$$

Gyorsulásvektor

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{x} + \frac{dv_y}{dt}\hat{y} + \frac{dv_z}{dt}\hat{z}$$

mozgás  
háromdi-  
menziós  
térben

$$v = v_0 + at$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

(állandó gyorsulás esetén)

Az  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{v}$  és  $\mathbf{a}$  vektorok iránya nem szükségképpen azonos, a  $\mathbf{v}$  vektor mindig a pálya érintőjének irányába mutat.

Az egydimenziós mozgások leírására *skalármennyiségeket* használunk, amelyeket az irány jelzésére (a koordinátatengely pozitív irányának megválasztásától függően) *pozitív vagy negatív előjellel látunk el*

$$r = x$$

$$v = \frac{dr}{dt}$$

$$a = \frac{dv}{dt}$$

egy di-  
menziós  
mozgás

További hasznos összefüggéseket kaphatunk az átlagsebesség felhasználásával:

$$v_{\text{átl}} = \frac{v_0 + v}{2}$$

$$x = x_0 + v_{\text{átl}}t$$

A kinematikai egyenletekben negatív előjeleket csak akkor használunk, ha adatok számértékeit, vagy paramétereket helyettesítünk be.

## Kérdések

- Mivel az idő egy irányban múlik – jelenti-e ez azt, hogy az idő vektormennyiség?
- Válasszuk ki a következő mennyiségek közül, melyek a vektorok, skalárok és melyik azok, amelyek egyik csoportba sem sorolhatóak: *sebesség, térfogat, hőmérséklet, idő, terület és szín*.
- Lehetséges-e, hogy két különböző nagyságú vektor eredője zérus? És mi a helyzet három különböző vektor esetében? Mi a feltétele annak, hogy három vektor eredője zérus legyen?
- Milyen módszerrel lehet megmérni a Föld és a Hold távolságát.
- Egy hajó árbocáról leejtünk egy követ. Vajon a fedélzetnek ugyanabba a pontjába csapódik-e akkor is, ha a hajó nyugalomban van, ill. ha egyenes sebességgel mozog? És ha a hajó gyorsul?
- Egy hídról vízszintesen elhajtottunk egy követ. A kő mozgását leíró mennyiségek közül tárgyaljuk meg, hogy a *helyzet-, sebesség- és gyorsulásvektor* közül melyik függ a koordinárendszer, kezdőpontjának megválasztásától?
- Írjunk le egy olyan mozgást, amelynél egy adott időpontban derékszöget zárnak be egymással a) a helyzet- és a sebességvektor, b) a sebesség- és a gyorsulásvektor, c) a helyzet- és a gyorsulásvektor.
- Tekintsük az előző kérdést. Felsorolhatók-e olyan példák, midőn az említett vektorok továbbra is derékszöget zárnak be egymással a mozgás véges időintervallumban való lefolyása során.
- Válaszoljunk meg a 7. és 8. kérdést az említett vektorokra vonatkozóan úgy, hogy a) azok *egyirányúak*, b) *ellentétes irányúak*.

**Feladatok**

**3.4 Vektorok összeadása és kivonása**

**3A-1** Egy négyzetháló mintával kirakott úton sétáló gyerek két osztásrészt nyugatra, hármat északra, majd kettőt ismét nyugat felé lép. a) Mekkora utat tett meg? b) Adjuk meg a kiinduló ponthoz képest az eredő elmozdulás irányát és nagyságát.

**3A-2** Egy hajó 40 km-t északra, majd 50 km-t 60°-os szögben délnyugatra vitorlázik. Adjuk meg az eredő elmozdulás nagyságát és irányát. (A Föld görbületétől tekintünk el.)

**3A-3** Adott az  $\mathbf{A} = 2\hat{x} + 6\hat{y}$  és a  $\mathbf{B} = 4\hat{x} - 1\hat{y}$  vektor. Készítsünk vázlatot ésszerű méretű skála felvételével a  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  vektorösszegre és a  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  különbségre.

a) Fejezzük ki a  $\mathbf{C}$  és  $\mathbf{D}$  összeg- és különbségvektorokat a koordináta egységvektorok segítségével algebrai úton is. b) Adjuk meg ezeket a vektorokat polárkoordinátákkal (hosszuk és az x tengellyel bezárt szög segítségével)

**3A-4** Az  $\mathbf{A} = 4\hat{x} + 3\hat{y}$  és a  $\mathbf{B} = 2\hat{x} - 2\hat{y}$  vektorok összetevői méterben adottak. Készítsünk vázlatot a  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$  vektorösszegre és a  $\mathbf{D} = \mathbf{B} - 2\mathbf{A}$  különbségre. Adjuk meg a  $\mathbf{C}$  és a  $\mathbf{D}$  vektorokat (három értékes jegyre) analitikusan is polárkoordináták segítségével: a vektorok abszolút értékével és a +x tengelytől az óramutató járásával ellentétes irányban mért szöggel.

**3B-5** Adott az  $\mathbf{A} = 3\hat{x} + 4\hat{y}$  és a  $\mathbf{B} = 2\hat{x} - 2\hat{y}$  vektor. Határozzuk meg grafikusán és analitikusan a  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ ,  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  és  $\mathbf{E} = \mathbf{B} - 2\mathbf{A}$  vektor nagyságát és irányát.

**3B-6** Egy kezdő golfjátékos három ütéssel vitte a lyukba a labdát. Az egymást követő elmozdulások a következők voltak: először 4 m északi irányban, majd 2 m északkeletre, végül 1 m 30°-os szögben délnyugatra. Egy profi golfjátékos ugyanezt egyetlen ütéssel hajtja végre. Mekkora a golflabda elmozdulásvektora ennek során?

**3.5 Térbeli vektorok**

**3A-7** Adottak az  $\mathbf{A} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 4\hat{z}$  és  $\mathbf{B} = -2\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$  elmozdulásvektorok (SI egységben). Határozzuk meg a) a  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , és b) a  $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$  elmozdulásvektorok nagyságát és derékszögű összetevőit.

**3A-8** Adottak az  $\mathbf{A} = 3\hat{x} - 4\hat{y} + 4\hat{z}$  és  $\mathbf{B} = 2\hat{x} + 3\hat{y} - 7\hat{z}$  elmozdulásvektorok (SI egységben). Határozzuk meg a) a  $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ , és b) a  $\mathbf{D} = 2\mathbf{A} - \mathbf{B}$  elmozdulásvektorok nagyságát és derékszögű összetevőit.

**3.6 Sebesség és gyorsulás két és három dimenzióban**

**3.7 Hajítások két és három dimenzióban**

**3B-9** Egy repülő sólyom 5m/s sebességgel, a vízszintessel 60° szöget bezáró irányban bukik alá. Milyen sebességgel mozog a Földön az árnyéka, ha a Nap pontosan a fejünk felett van.

**3B-10** Egy szakadék széléről elütött golflabda helykoordinátái az

$$x = (18 \text{ m/s})t \quad \text{és} \quad y = (4 \text{ m/s})t - (4,9 \text{ m/s}^2)t^2$$

függvény szerint változnak.

a) Az  $\hat{x}$  és  $\hat{y}$  egységvektorok felhasználásával írjuk fel az  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  helyzetvektor függvényt. A komponensek deriváltjával írjuk fel b) a  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$  sebesség-idő és c) az  $\mathbf{a} = \mathbf{a}(t)$  gyorsulás-idő függvényt. d) Határozzuk meg a labda x és y koordinátáit a  $t = 3$  s időpillanatban. Az  $\hat{x}$  és  $\hat{y}$  egységvektorok felhasználásával írjuk fel a  $\mathbf{v}$  sebességvektort és az  $\mathbf{a}$  gyorsulásvektort a  $t = 3$  s időpontban.

**3B-11** Egy motorbicikli 20 m/s sebességgel 3 percig déli irányban mozog, ekkor nyugatra fordul és két percig 25 m/s sebességgel halad, majd 1 percig 30 m/s sebességgel északnyugati irányban száguld. A mozgás 6 perces teljes időtartamára határozzuk meg a) az eredő elmozdulást, b) az átlagsebesség nagyságát és c) az átlagsebességvektort.

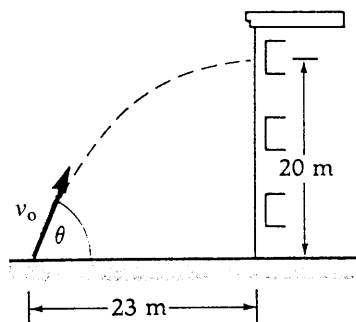
**3B-12** Egy autó 8 percig 25 km/h sebességgel keleti irányban, ezután 3 percig 40 km/h sebességgel déli irányban, végül 17 percen át 30 km/h sebességgel délkeleti irányban halad. Határozzuk meg a) a gépkocsi eredő elmozdulását kilométerben, b) az átlagsebességvektort a teljes útra (Készítsünk vektor diagramot.), c) a kocsinak a teljes útra vonatkoztatott átlagsebességét.

**3B-13** Egy vízszintesen repülő gép pilótája a repülőgép árnyékát a gép előtt, a horizont alatt 60°-os szögben látja a talajon. Határozzuk meg a talaj hajlásszögét a gép haladásának irányában, ha a repülőgép sebessége 200 km/h, az árnyéka a talajon 250 km/h és a szél elhanyagolható.

**3A-14** Egy műugró a víz felett 3 m magasban elhelyezett ugródeszkáról a vízszinteshez képest 60°-os szögben, 2 m/s sebességgel rugaszkodik el. Mennyi ideig lesz a levegőben?

**3A-15** Egy bérház ablakából vízszintes irányban, 6 m/s sebességgel labda repült ki. A labda a ház aljától 10 m távolságban ért talajt. Milyen magasról dobták ki?

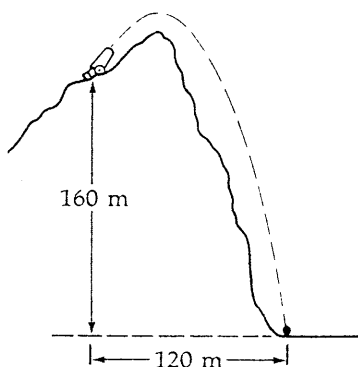
**3B-16** Egy labdát – a 3-31 ábrán látható módon – bedobtak egy ház nyitott ablakán. A labda az ablakon vízszintes irányú sebességgel repült be. Mekkora volt a) a labda  $v_0$  kezdősebessége és b) az elhajítás  $\theta$  szöge?



**3-31 ábra**

A 3B-16 feladathoz

**3B-17** Egy lövedéket a 3-32 ábrán látható módon a vízszinteshez képest  $53,1^\circ$ -os szögben lőttek ki. A gránát eltalálta a kilövés helye alatt  $160\text{ m}$ , vízszintesen  $120\text{ m}$  távolságban fekvő célpontot. Milyen sebességgel lőtték ki a gránátot?

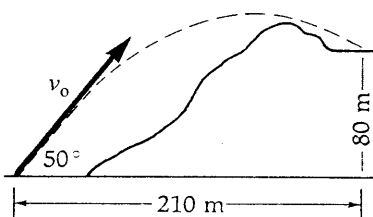


### 3-32 ábra

A 3B-17 feladathoz

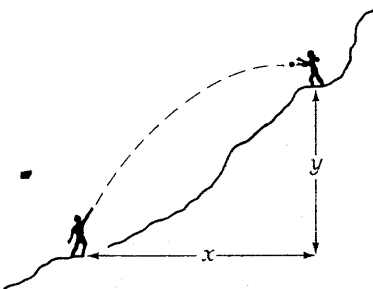
**3B-18** Vízszintes puskacsövet pontosan a  $100\text{ m}$  távolságban elhelyezett céltábla közepe felé tartva a golyó  $10\text{ cm}$ -rel a középpont alatt csapódik be. Mekkora sebességgel hagyta el a golyó a fegyver csövét?

**3B-19** A vízszinteshez képest  $50^\circ$ -os szögben kilőtt lövedék a 3-33 ábrának megfelelően talált célba. Mekkora volt a kezdősebessége?



### 3-33 ábra

a 3B-19 feladathoz



### 3-34 ábra

A 3B - 20 feladathoz

**3B-20** Egy hegymászó feldob egy mászótüskét az előtte haladó társának, aki elkapja azt (3-34 ábra). A mászótüske kezdősebessége  $12\text{ m/s}$  és a vízszintessel  $55^\circ$ -os szöget alkotott. Tudjuk továbbá, hogy a tüske az elkapás pillanatában vízszintesen repült. Milyen távol volt egymástól a két hegymászó?

**3B-21**  $25\text{ m}$  magas hídról vízszintes irányban hajítottunk el egy követ. A kő becsapódási helyét a vízszintestől lefelé  $45^\circ$ -os irányban látjuk. a) Mekkora sebességgel hajítottuk el a követ? b) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódott a kő a vízbe?

**3B-22** Egy baseball játékos  $24\text{ m/s}$  sebességgel, a vízszinteshez képest  $53,1^\circ$ -os szögben (ez a 3-4-5 típusú háromszögek egyik szöge) üti el a labdát. a) Mennyi ideig repül a labda? b) Mekkora maximális magasságba emelkedik? c) Mekkora a hajtási távolság? d) Mekkora és milyen irányú sebességgel rendelkezik a labda  $3$  másodperccel az elütés után?

**3B-23** Vízszintes sík felett  $20\text{ m}$  magasságból,  $8\text{ m/s}$  sebességgel, a vízszintessel  $50^\circ$ -os szöget bezáró irányban követ hajítottunk felfelé. a) Határozzuk meg, hogy a síkhoz képest mekkora maximális magasságot ér el a kő. b) Mennyi idő telik el míg a kő a talajba csapódik? c) Mekkora vízszintes távolságot tesz meg a test? d) Mekkora és milyen irányú sebességgel csapódik a talajba?

**3B-24** Egy labdát függőlegesen feldobunk, hogy az  $5\text{ m}$ -rel feljebb elhelyezkedő társunk elkapja. Társunk a labdát csak akkor tudja elkapni, ha  $6\text{ m/s}$ -nál kisebb sebességgel érkezik hozzá. Mekkora a labda minimális és maximális repülési ideje?

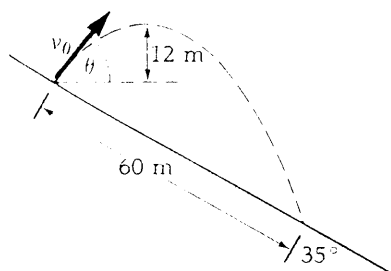
### További feladatok

**3C-25** Adott az  $\mathbf{E} = 2\hat{x} - 3\hat{y} + 4\hat{z}$  és az  $\mathbf{F} = 4\hat{x} + 1\hat{y} - 2\hat{z}$  vektor. Határozzuk meg algebrai úton a) a  $\mathbf{G} = \mathbf{E} + \mathbf{F}$  vektort, b) a  $\mathbf{H} = \mathbf{F} - \mathbf{E}$  vektort és c) a  $\mathbf{J}$  vektort úgy, hogy kielégítse a  $\mathbf{E} - 2\mathbf{F} + \mathbf{J} = \mathbf{0}$  egyenletet.

**3C-26** Egy hegymászó expedíció  $3000\text{ m}$  magasan létesíti B bázisát, míg K közbülső táborát  $4900\text{ m}$  magasságban az alaptábortól a vízszintes síkban  $5,2\text{ km}$  távolságra és  $60^\circ$ -os szögben északnyugati irányban építi fel. A  $6100\text{ m}$  magas csúcs ettől a közbülső táborától a térkép szerint  $3,2\text{ km}$  távolságban és  $40^\circ$ -os szögben északkeleti irányban fekszik. A csúcsot elérő hegymászó k és a bázis között lézerekkel kívánnak kapcsolatot teremteni. Milyen irányba kell a lézerekkel célózni?

**3C-27** Egy labdát a vízszinteshez képest  $48^\circ$ -os szögben,  $12\text{ m/s}$  kezdősebességgel dobtunk el. Határozzuk meg annak a pontnak az  $x$  és  $y$  koordinátáját (az elhajtási ponthoz képest), amelyben a labda sebessége a vízszinteshez képest  $35^\circ$ -os szögben lefelé mutat.

**3C-28** Sík lejtőn elhajított test a 3-35 ábrán látható pályát futotta be. A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg, hogy a) mekkora volt a kezdősebessége és b) milyen  $\theta$  szögben hajítottuk el a vízszinteshez képest.



**3-35 ábra**

A 3C-28 feladathoz

**3C-29** A kinematikai egyenletekből kiindulva határozzuk meg egy a vízszintes síkhoz képest  $\theta$  szög alatt,  $v_0$  kezdősebességgel kilőtt lövedék röppályájának egyenletét és az  $R$  lőtávolságot.

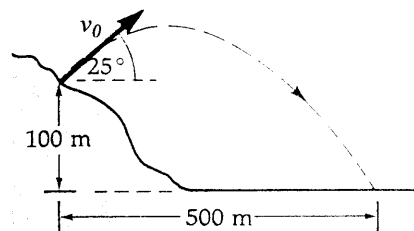
**3C-30** A 3C-29 feladatban szereplő röppályája egyenletének a differenciálásával mutassuk meg, hogy a maximális lőtávolságot  $\theta = 45^\circ$  kilövési szög esetén érjük el.

**3C-31** Mutassuk meg, hogy az azonos  $v_0$  kezdősebességű lövedékek lőtávolsága megegyezik, ha a  $\theta_1$  és  $\theta_2$  kilövési szögek pótszögek ( $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ ).

**3C-32** Határozzuk meg, hogy milyen  $\theta$  kilövési szög esetén lesz egy lövedék  $R$  lőtávolsága egyenlő a  $H$  emelkedési magasságával. (Induljunk ki a kinematikai egyenletekből.)

**3C-33** A kinematikai egyenletek alapján határozzuk meg a  $v_0$  kezdősebességgel,  $\theta$  kilövési szöggel kilőtt lövedék maximális  $y_m$  emelkedési magasságát.

**3C-34** Vízszintes sík felett 100 m magasságban elhelyezkedő pontból a vízszinteshez képest  $25^\circ$ -os emelkedési szöggel lövedéket lövünk ki. A lövedék eltalálja a 3-36 ábrának megfelelően vízszintesen 500 m távolságban elhelyezett céltáblát. Mekkora volt a kezdősebessége?

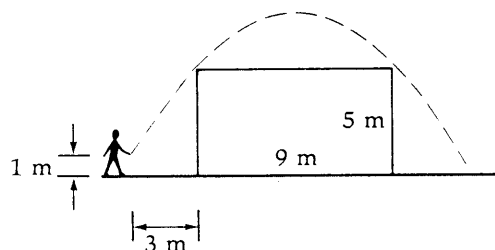


**3-36 ábra**

A 3C-34 feladathoz

**3C-35** Egy labdát úgy dobtunk el, hogy az adott kezdősebesség mellett vízszintes irányban a lehető legnagyobb  $R$  távolságra jusson. (Lásd. 3C-29 feladat) a) Mutassuk meg, hogy miután a labda túljutott pályájának tetőpontján bármely  $x, y$  koordinátájú pontra érvényes  $R = x^2/(x - y)$ . b) Vajon az a tény, hogy a formulában  $g$  nem szerepel, azt jelenti, hogy adott kezdősebesség mellett a maximális hajítási távolság ugyanakkora lenne a Földön és a Holdon? (Magyarázzuk meg a választ!)

**3C-36** Egy gyerek labdát dob át a 3-37 ábrán látható  $5 \text{ m} \times 9 \text{ m}$ -es négyzetes barakk felett. A gyerek  $3 \text{ m}$  távolságban áll a baraktól. Mekkora minimális kezdősebességgel és milyen irányban kell elhajítania a labdát, hogy az a barakk sarkait éppen elkerülve jusson át a túloldalra, ha a labdát elhajító gyerek keze  $1 \text{ m}$ -rel van a talaj felett?



**3-37 ábra**

A 3C-36 feladathoz

**3C-37** Egy labdát a vízszintes tengelyhez képest  $\theta$  szögben ( $0 < \theta < 90^\circ$ )  $v_0$  sebességgel hajítottunk el. Mutassuk meg, hogy parabolapályán mozog. (Megjegyzés: A kinematikai egyenletekből a  $t$  kifejezést eliminálva  $y$  összetevőt  $x$  függvényként fejezzük ki. Emlékeztetünk arra, hogy a parabola általános egyenlete  $y = ax + bx^2$  alakú.)

**3C-38** Egy szöcske vízszintes irányban legfeljebb  $1 \text{ m}$  távolságra tud elugrani. Feltételezve, hogy az elugráshoz szükséges idő elhanyagolható, határozzuk meg, hogy vízszintes úton mekkora maximális sebességgel halad a szöcske, ha mindig a maximális távolságba ugrik. (Lásd a 3C-29 feladatot és annak eredményét).

**3C-39** Egy lövedéket  $\theta$  kilövési szöggel lövünk ki. Határozzuk meg, hogy a lövedék röppályájának tetőpontja mekkora  $\phi$  szög alatt látszik a kilövési pontból.

**3C-40** Galilei *Két új tudomány* című művében azt állítja, hogy „a  $45^\circ$ -nál ugyanannyival nagyobb, ill. kisebb emelkedéssel (hajítási szöggel) elhajított testek azonos távolságra jutnak el” Bizonyítsuk be ezt az állítást.

# AZ 1–23 FEJEZETEK PÁRATLAN SZÁMOZÁSÚ FELADATAINAK MEGOLDÁSAI

## II. Fejezet

- 2A-1 200 km  
 2A-3 1 fényév =  $9,46 \times 10^{15}$  m; 1 pc =  $3,09 \times 10^{16}$  m  
 2A-5 0,447%  
 2A-7 49,4  
 2B-9 7,40 perc; az óra hosszabb  
 2A-11  $6,67 \times 10^{-22}$  s  
 2A-13 1,63 cm/év  
 2A-15 55,4 s  
 2B-17 lehetetlen  
 2B-19 a) 1,20 m/s b) 7,00 s c) -1,54 m/s (közelítőleg)  
 2B-21  $62,5 \text{ m/s}^2$   
 2B-23  $2,65 \times 10^4 \text{ m/s}^2$   
 2A-25 2,59 m/s  
 2A-27 0,639 s  
 2A-29 a) 1,63 s b) 9,96 m/s c) 13,1 m  
 2A-31 a) 5,00 s b) 75,0 m  
 2B-33 3,34 s  
 2B-35 0,804 s; 0,0127 s  
 2B-37 a)  $-1,5 \text{ m/s}^2$  b) 4 s c) 5,33 m  
 2B-39 a)  $6t^2$  b)  $3t$   
 2B-41 a) 2 m; 3 m/s; 4 m/s<sup>2</sup> b)  $v = 3 - 8t$   
 c)  $-8 \text{ m/s}^2$  d) 0,375 s e) 2,56 m  
 2B-43 c) -4 m/s d) 34,0 m  
 2B-45  $x(2) = 2 \text{ m}$ ;  $x(4) = 6 \text{ m}$ ;  $x(6) = 14 \text{ m}$ ;  
 $x(10) = 22 \text{ m}$   
 2B-47  $a = \frac{1}{2}$ ;  $b = -\frac{1}{2}$   
 2C-49 a) 12,8 m/s b) 5,90 m  
 2C-51 12,2 m/s  
 2C-53 a) 7 m/s b) -5,35 m/s c) -9,8 m/s<sup>2</sup>  
 2C-55 a) 46,2 s b) 34,6 m/s  
 2C-57 14,2 s  
 2C-59  $4,83 \times 10^{-3} \text{ m/s}^2$   
 2C-61 a) 26,4 m b) 6,89%  
 2C-63 a) 41,5 s b)  $20,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  c)  $10,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$   
 2C-65 a)  $v = 3At^2$  b)  $\alpha = 6At$  c)  $0,0533 \text{ m/s}^3$

## III. Fejezet

- 3A-1 a) 7 osztásrészt b)  $36,9^\circ$ ; 5 osztásrészt  
 3A-3 a)  $C = 6\hat{x} + 5\hat{y}$ ;  $D = -2\hat{x} + 7\hat{y}$   
 b)  $C = 7,81$ ;  $39,8^\circ$ ;  $D = 7,28$ ;  $106^\circ$   
 3B-5  $C = 5,39$ ;  $21,8^\circ$ ;  $D = 6,08$ ;  $80,5^\circ$ ;  $E = 10,8$ ;  
 $248,2^\circ$   
 3A-7 a)  $C = \hat{y} - 2\hat{z}$ ; 2,24 m  
 b)  $D = 4\hat{x} + 5\hat{y} - 6\hat{z}$ ; 8,78 m  
 3B-9 2,50 m/s  
 3B-11 a) 4,87 km;  $61,4^\circ$  délnyugatra b) 23,3 m/s  
 c) 13,5 m/s;  $61,4^\circ$  délnyugatra  
 3B-13  $16,1^\circ$  a horizont alatt  
 3A-15 13,6 m  
 3B-17 24,7 m/s  
 3B-19 55,4 m/s  
 3B-21 a) 11,1 m/s b) 24,7 m/s;  $26,5^\circ$  a függőlegestől  
 3B-23 a) 21,9 m b) 2,74 s c) 14,1 m  
 d) 21,4 m/s;  $13,9^\circ$  a függőlegestől  
 3C-25 a)  $6\hat{x} - 2\hat{y} + 2\hat{z}$  b)  $2\hat{x} + 4\hat{y} - 6\hat{z}$   
 c)  $6\hat{x} + 5\hat{y} - 8\hat{z}$   
 3C-27 (2,44 m, 11,9 m)  
 3C-29  $R = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g}$   
 3C-31 A válasz adott.  
 3C-33  $Y_m = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{2g}$   
 3C-35 A válasz adott.  
 3C-37  $y = (\text{tg } \theta)x - \left[ \frac{g}{2(v_o \cos \theta)^2} \right] x^2$   
 3C-39  $\phi = \text{arc tg} \left( \frac{\text{tg } \theta}{2} \right)$

## IV. Fejezet

- 4A-1 a)  $8,73 \times 10^{-3} \text{ rad}$  b) 0,030 rad  
 4B-3  $91,7^\circ$