

4. Gyakorlat

4. Tantermi gyakorlat – Diszkrétidejű szabályozások tervezése

A gyakorlat célja diszkrétidejű (mintavételes) szabályozók tervezésének bemutatása. Megvizsgáljuk az analóg szabályozó (soros kompenzátor) mintavételes megvalósításának kérdéseit, illetve az ún. kétszabadságfokú mintavételes szabályozó tervezésének lépéseit. A mintavételes szabályozások vizsgálatának gyakorlati jelentőségét az adja, hogy a kereskedelmi forgalomban kapható szabályozók szinte kivétel nélkül diszkrétidejű működésűek, ún. DDC (Direct Digital Control) szabályozók.

A mintavételezés és a Shannon-tétel

Tekintsünk egy folytonosidejű (analóg) jelet, amelyet az f hozzárendelés definiál

$$f : t \in \mathbb{R} \rightarrow f(t) \in \mathbb{R},$$

ahol a t változót tekintjük az időnek. Legyen $T \in \mathbb{R}$ ($T > 0$) a mintavételi periódusidő (sampling time), $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$ pedig a mintavételi körfrekvencia, $f_s = \frac{1}{T}$ a mintavételi frekvencia (sampling frequency). A mintavételi periódusidő segítségével az $f(t)$ folytonosidejű jelhez egy

$$\{f_k\} = \{f(kT) : k \in \mathbb{Z}\}$$

számsorozatot definiálhatunk, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok halmaza. Az $f(t)$ időfüggvényből *matematikai mintavételezéssel* kapott $f^*(t)$ jelet az

$$f^*(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \delta(t - nT)$$

Dirac-impulzusok sorozata definiálja, ahol az $\{f_k\}$ számsorozatnak csak a nemnegatív indexű elemeit vesszük figyelembe. A Shannon-tétel választ ad arra a kérdésre, hogy mikor állatható vissza az $f(t)$ analóg jel a matematikai mintavételezéssel keletkező $f^*(t)$ jelből.

Tétel (Shannon): Ha egy $f(t)$ időfüggvény (analóg jel) sávkorlátozott és határkörfrekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$, továbbá a mintavételi idő kielégíti a $T \leq \frac{\pi}{\omega_h} = \frac{1}{2f_h}$ feltételt, akkor az analóg jel rekonstruálható az f_k mintákból egy T erősítésű,

ideális aluláteresztő szűrővel, amelynek határ-körfrekvenciája $\omega_N = \frac{\pi}{T}$ (az ún. Nyquist-frekvencia).

A tételben megfogalmazott eredményt a tankönyv részletesen tárgyalja.

A Z-transzformáció

Tekintsünk egy $\{f_k\}$ valós számsorozatot, amelyre $f_k = 0$ minden $k < 0$ esetén. A sorozat Z-transzformáltját az

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^{-n}$$

összefüggéssel definiáljuk. Az inverz transzformáció az

$$f_n = \frac{1}{2\pi j} \oint_C F(z) z^{n-1} dz$$

összefüggés segítségével számítható, ahol C egy $R > 0$ sugarú kör a z síkon, amelynek külsejében az $F(z)$ sor konvergens. (Vegyük észre, hogy $F(z)$ egy hatványsor a z^{-1} változóban, és mivel minden hatványsor egy kör belsejében konvergens, ezért $F(z)$ is egy $|z^{-1}| < \rho \Rightarrow |z| > R = 1/\rho$ kör külsejében lesz konvergens, ahonnan az $F(z)$ függvény analitikusan folytatható a $|z| = R$ kör belsejébe. Az analitikus folytatás képlete $F(z)$ marad, a szingularitások a kör belsejében lesznek). Az inverz Z-transzformációt a Laplace-transzformáció esetéhez hasonlóan racionális tört alakú $F(z)$ transzformált függvények esetében szintén részlettörtekre bontással célszerű végrehajtani. Erre a korábban tanultak alapján a Matlab `residue` utasítása alkalmas.

Az alábbi táblázat a Z-transzformált néhány összefüggését mutatja

$f_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z)$	$f_{\infty} = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})F(z)$
$Z\{1, 1, 1, \dots\} = Z\{1_n\} = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}$	$Z\{e^{s_i n T}\} = \frac{z}{z - e^{s_i T}}$
$Z\{1, 0, 0, \dots\} = Z\{\delta_n\} = 1$	$Z\{f_{n-k}\} = z^{-k} F(z)$

Az első sorban szereplő összefüggések a transzformáció végérték-tételei, melyek közül a második csak akkor alkalmazható, ha $F(z)$ reguláris az egységkörön és azon kívül. A második sor első összefüggése az egységugrás Z-transzformáltját adja meg, második összefüggése pedig egy exponenciális időfüggvényből T periódusidővel mintavételezett sorozat Z-transzformáltját. Ez utóbbi esetében vegyük észre, hogy a folytonos időfüggvény Laplace-transzformáltjának

($L\{e^{s_i t}\} = \frac{1}{s - s_i}$) s_i pólusának itt a $z_i = e^{s_i T}$ pólus felel meg. Az $\{f_{n-k}\}$ sorozat induló k darab elemét, azaz $f_{-k}, f_{-k+1}, \dots, f_{-1}$ értékét nullának tekintettük: $\{f_{n-k}\} = \{0, \dots, 0, f_0, f_1, \dots\}$. Az exponenciális sorozat eredményének s_i szerinti deriválásával, majd $s_i = 0$ helyettesítésével kapjuk, hogy

$$Z\{0, T, 2T, \dots\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z - 1)^2}$$

Diszkrétidejű tagok leírása

A SISO diszkrétidejű, lineáris és időinvariáns tagok leírását tárgyaljuk. A tag időben invariáns volta alatt itt – a folytonosidejű esethez hasonló módon – a paraméterek időtől való függetlenségét értjük. A tag bemenetére adott számsorozatot u_k -val ($k \in N$, N a természetes egész számok halmaza), a kimenetén a bemenet hatására megjelenő számsorozatot y_k -val jelöljük (mivel n az átviteli függvény nevezőjének fokszámát fogja jelölni), Z-transzformáltjuk rendre $U(z)$ és $Y(z)$.



4.1. ábra. Diszkrét időben működő tag

A tag leírható diszkrétidejű átviteli függvényével (*transfer function*)

$$D(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_{m-1} z + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n}, \quad n \geq m$$

ahol a szabályozott szakasz esetén általában $n - m = 1$. A tag w_k -val jelölt impulzusválaszának (más néven súlyfüggvényének) Z-transzformáltja a tag $D(z)$ átviteli függvénye.

Egy tagot diszkrétidejű állapotegyenletével is jellemezhetünk, ez az ún. állapotteres (state-space) leírás:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \Phi x_k + \Gamma u_k \\ y_k &= C x_k + D u_k \end{aligned}$$

Az állapotteres leírás „gazdagabb”, mint a tag átviteli függvénnyel történő leírása, mivel az ún. nem irányítható és nem megfigyelhető alrendszeret is

tartalmazhatja. Ezek a fogalmak a félév során később kerülnek ismertetésre. Legyen $x \in R^n$ és a kezdeti állapot $x_0 = 0$. Ekkor az állapotegyenlet Z-transzformáltja

$$zX(z) = \Phi X(z) + \Gamma U(z)$$

$$X(z) = (zI - \Phi)^{-1} \Gamma U(z)$$

$$Y(z) = [C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma + D]U(z)$$

$$D(z) = C(zI - \Phi)^{-1} \Gamma + D$$

ahol I az egységmátrix. Látható, hogy az átviteli függvény nevezője $\det(zI - \Phi)$, amely pontosan az Φ mátrix karakterisztikus egyenlete, tehát az átviteli függvény pólusai a Φ mátrix sajátértékei. Az algebrai hasonlóság a folytonosidejű esettel nyilvánvaló. A szakaszok esetén rendszerint az energiatárolók (időállandók) hatására a bemenet nem hat azonnal a kimenetre, ezért az állapotegyenlet D mátrixa rendszerint nulla. Ez nem lenne igaz a szabályozó állapotegyenletére, mivel a szabályozó a hibajel bemenetre azonnal reagálni akar, lásd P -(proporcionális, arányos) hatás.

A diszkrétidejű átviteli függvény számlálója és nevezője valós együtthatójú polinom, melyek gyökei valós számok, illetve konjugált komplex párok lehetnek. A (diszkrétidejű) átviteli függvény számlálója és nevezője továbbra is gyöktényezős alakra hozható, tehát a pólus-zérus megadás diszkrét tagok esetében is lehetséges.

A Matlab Control Systems Toolbox (CST) segítségével a lineáris tagok mindhárom alakban (átviteli függvény: transfer function (`tf`), állapotegyenlet: state-space (`ss`), gyöktényezős alak: zero-pole-gain (`zpk`)) vizsgálhatóak. A Control System Toolbox mindhárom reprezentációhoz egy-egy adatstruktúrát rendel, melyek létrehozása rendre a `tf`, `ss` és `zpk` utasításokkal lehetséges, de meg kell adni a T mintavételi időt is.

Egy diszkrétidejű tag vagy szabályozási kör stabil működésű, ha pólusai az egységkör belsejébe esnek.

Most vizsgáljuk meg a

$$D(z) = 4 \cdot \frac{(z - 0.5)(z - 0.1)}{(z - 0.3)(z - 0.45)(z - 0.56)}$$

diszkrétidejű tagot a Matlab segítségével. A felírt alak alapján a legcélszerűbb a `zpk` utasítás használata a bevitelhez. A mintavételi periódusidő legyen $T = 0.1$ sec.

```
>> sysd = zpk([0.5 0.1],[0.3 0.56 0.45],4,0.1)
```

```
Zero/pole/gain:
```

```
4 (z-0.5) (z-0.1)
```

```
-----  
(z-0.3) (z-0.45) (z-0.56)
```

Sampling time: 0.1

Hasonló módon kell eljárni diszkrétidejű tagok állapotegyenlet (ss) vagy átviteli függvény (tf) alakban történő bevitele esetében is, azaz meg kell adni utolsó argumentumként a mintavételi periódusidőt is. Nem specifikált mintavételi periódusidő esetén az üres mátrixot [] kell megadni. A Matlab CST utasításai a tf, ss, vagy zpk alakban bevitt folytonos és diszkrétidejű rendszerek között különbséget tudnak tenni. Például a dcgain utasítás az $s=0$ behelyettesítéssel él egy folytonosidejű, átviteli függvényként megadott tag esetében, ugyanakkor a $z=1$ behelyettesítést használja, ha diszkrétidejű átviteli függvényről van szó.

```
>> dcgain(ssd)
```

```
ans =
```

```
10.6257
```

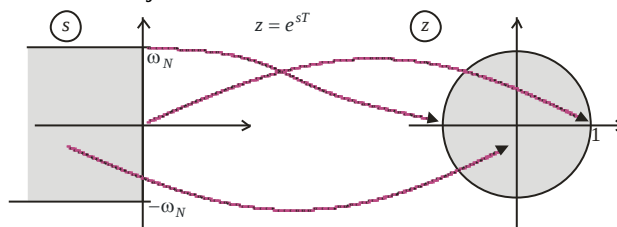
A diszkrétidejű tagok frekvencia- és időtartománybeli vizsgálata a folytonosidejű tagokéhoz hasonló, de a bode és nyquist függvények z helyére $z = e^{j\omega T}$ értéket helyettesítenek a stabilitáskritériumban szereplő kontúrgörbe megváltozott alakja miatt, továbbá bode $\omega = \pi / T = \omega_N$ -ig rajzolja fel a Bode-diagramot.

Tartomány	Módszer	Utasítás	Magyarázat
Frekvencia	Bode-diagram	bode	Az egységsugarú kör pozitív képzetes részű pontjainak (felső félkör) képe a diszkrétidejű átviteli függvény alatt. A diagram egy amplitúdó-jelleggörbéből és egy fázis-jelleggörbéből áll.
Frekvencia	Nyquist-diagram	nyquist	A egységsugarú kör képe az átviteli függvény alatt a komplex számsíkon. A kép mindig tengelyszimmetrikus a számsík valós tengelyére.
Frekvencia	Pólus-zérus eloszlás	pzmap	Az átviteli függvény pólusai és zérusai a komplex számsíkon (a függvény az egységsugarú kört is felrajzolja).
Idő	Impulzusválasz	impulse	A tag kimenetének alakulása ha bemenetére a δ_k időfüggvény kerül (nulla kezdeti feltételek mellett).
Idő	Ugrásválasz	step	A tag kimenetének alakulása ha bemenetére az 1_k időfüggvény kerül (nulla kezdeti feltételek mellett).

Nem specifikált mintavételi periódusidő esetén a függvények a $T=1\text{sec}$ érték mellett végzik el a számításokat. Megemlítjük, hogy a korábbi MATLAB-verziókkal való kompatibilitás megőrzése érdekében rendelkezésre állnak még a dbode,

nyquist, dstep, dimpulse, ddcgain utasítások is. Ezen utasításoknak nem tf, ss, vagy zpk struktúráként kell megadni a tagot, hanem vagy fel kell sorolni állapotegyenletének mátrixait, vagy meg kell adni átviteli függvényének számlálóját és nevezőjét.

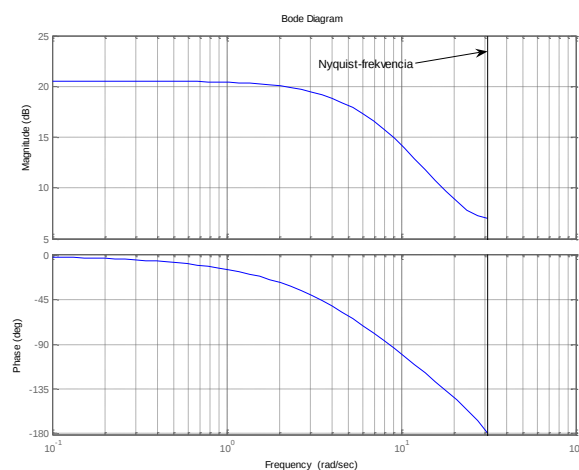
A frekvenciaválaszokat számító függvények esetében vegyük észre, hogy a folytonos időben vizsgált képzetes tengely és a diszkrét időben vizsgált egységsugarú kör z pontjai között a már említett $z = e^{j\omega T}$ összefüggés áll fenn. Az egységsugarú kör pontjai és a képzetes tengely $(-j\omega_N, j\omega_N]$ tartományába tartozó pontok között egy-egyértelmű a megfeleltetés, ugyanakkor a teljes képzetes tengelyt a leképezés „felcsévéli” az egységsugarú körre. Az s sík bal félsíkja az egységsugarú kör belsejébe képződik le. A leképezés így sávonként kölcsönösen egyértelmű, ahogy azt a 4.2. ábra mutatja.



4.2. ábra. Összefüggés az s és a z sík között

Ebből következik, hogy a bode utasítás mind az amplitúdó-, mind a fázismenetet csak az $\omega_n = \pi/T$ Nyquist-frekvenciáig rajzolja fel diszkrétidejű tag esetében.

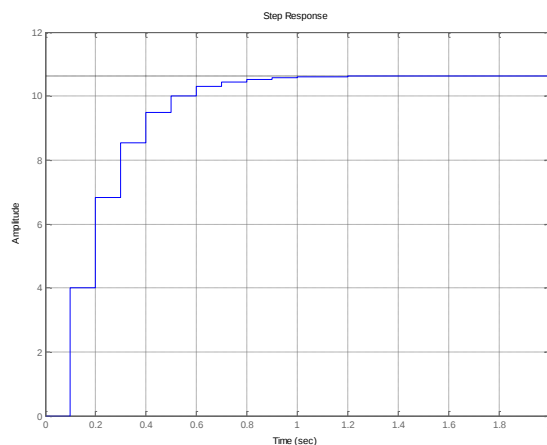
```
>> bode(sysd)
```



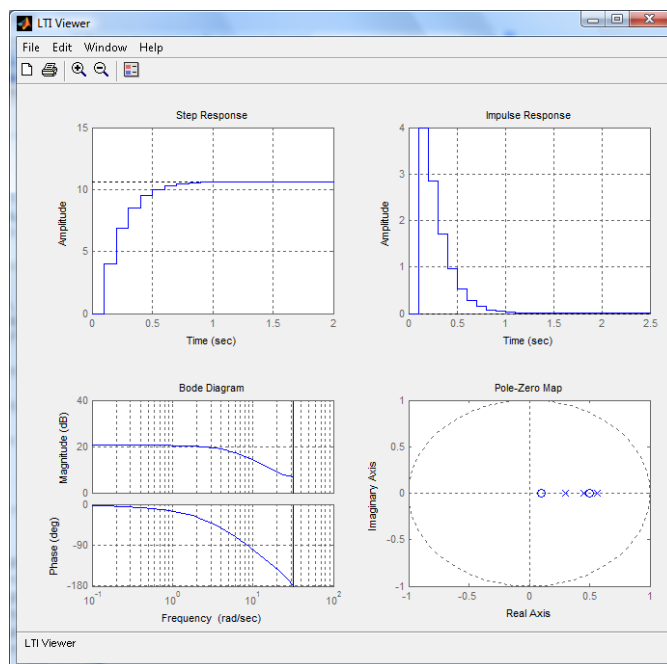
4.3. ábra. Diszkrétidejű tag Bode-diagramja

Az ugrásválasz kirajzolásakor lépcsős függvényt kapunk.

```
>> step(sysd); grid on;
```



4.4. ábra. Diszkrétidejű szakasz ugrásválasza. Az időtengely a mintavételi periódusidő szerint van skálázva.



4.5. ábra. Mintavételes működésű tag vizsgálata az LTI böngésző használatával

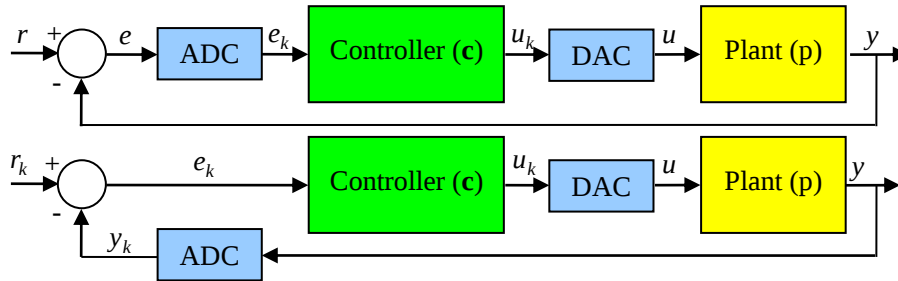
Az LTI böngésző alkalmas diszkrétidejű tagok jellemzőinek vizsgálatára is, lásd 4.5. ábra.

```
>> ltiview({'step'; 'impulse'; 'bode'; 'pzmap'}, sysd);
```

Vegyük észre, hogy a tag stabilitásának könnyebb megállapítását megkönnyítendő a pólus-zérus eloszlás ábrázolásakor a Matlab az egységsugarú kört is megjeleníti.

Mintavételezés a szabályozási körben

Azt az esetet vizsgáljuk, mikor a szakasz folytonos működésű, a szabályzó pedig diszkrét időben működik. Egy ilyen szabályozási kör felépítését mutatja a 4.6. ábra.



4.6. ábra. Mintavételes szabályozási körök a felső ábrán folytonos, az alsó ábrán diszkrét alapijellel

A mintavételezést az ADC (Analog to Digital Converter) elem végzi, a szabályzó által kiadott számsorozatot a DAC (Digital to Analog Converter) elem alakítja át folytonosidejű jellé. Általánosan

$$ADC: f(t) \rightarrow f_k$$

$$DAC: f_k \rightarrow f(t)$$

A kereskedelmi forgalomban kapható átalakító egységek a mintavételi időpillanatokban eltárolt értékeket véges számú biten ábrázolják, így az $f(t)$ függvény értékkészlete mellett annak értelmezési tartománya is kvantálásra kerül.

A kvantálási hiba illusztrálására szolgál az alábbi példa. Tekintsük a már többször is vizsgált háromtárolós szakaszt:

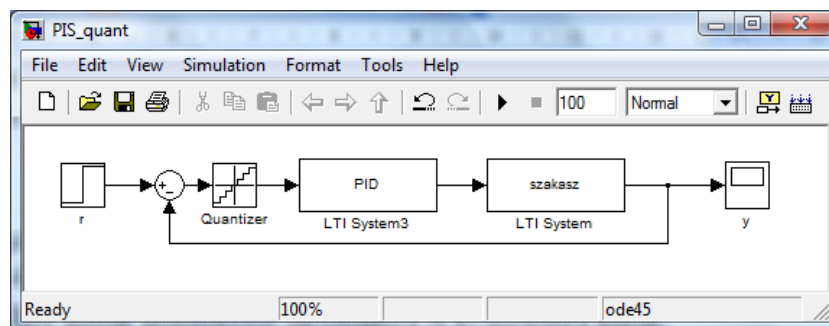
$$W_p(s) = \frac{5}{(1+s)(1+4s)(1+10s)},$$

legyen az ahhoz megtervezett PID szabályzó

$$W_{PID}(s) = \frac{3.51s^2 + 1.229s + 0.08776}{0.351s^2 + s},$$

és tegyük fel, hogy a PID szabályzó bementére jutó jel kvantálásra kerül. Ezt szemlélteti az alábbi Simulink modell.

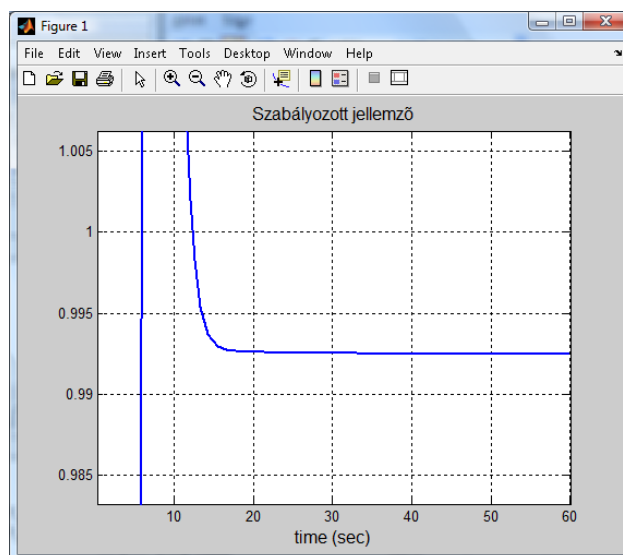
```
>> szakasz = tf(5,conv(conv([1 1],[4 1]),[10 1]));
>> PID = tf([3.51 1.229 0.08776],[0.351 1 0]);
```



4.7. ábra. A kvantálási hiba szemléltetésére szolgáló modell (A Quantizer elem a Discontinuous könyvtár része)

Feltesszük, hogy a szabályozó bemenére jutó jel a ± 10 tartományban mozog és 10 biten kerül ábrázolásra. A 4.8. ábra a kimenetet mutatja kinagyítva.

Látható, hogy a kvantálás által okozott hiba itt 0.05% és 1% között van és az integrátor dacára is jelentkeznek. Ez azért következik be, mert a szabályozó bemenetén az ilyen nagyságú hiba alatta marad a legkisebb helyiértékű biten (Least Significant Bit, LSB) ábrázolható értéknek és a szabályzó bemenetére így nulla kerül, ezért a szabályozó a kimenetét már nem módosítja.



4.8. ábra. A kvantálás hatása a kimeneten

Az értékkészlet kvantálásából adódó hatásokat a továbbiakban elhanyagoljuk, mert feltesszük, hogy az átalakítókban belül a számbábrázolás kellő számú biten történik ehhez az elhanyagoláshoz a folyamaton elvárt pontossághoz képest.

A szabályozási körökben a Shannon-tétel egyik feltétele (sávkorlátosság és ideális aluláteresztő szűrő használata DAC átalakítóként) sem teljesíthető. A $y(t)$ szabályozott jellemző sávkorlátossága nem teljesülhet, hiszen a szakaszra ható zavarások sávkorlátossága még akkor sem garantálható, ha a szakasz bementére sikerülne sávkorlátos jelet juttatni. De ez utóbbi sem teljesíthető, tekintettel arra, hogy az ideális aluláteresztő szűrő nem kauzális (lásd tankönyv), azaz $u(t)$ számításához szükségesek u_k jövőbeli értékei is, melyekre $kT > t$. Mivel sem az alapjel, sem a szabályozott jellemző jövőbeli alakulása nem ismert a szabályzó számára, ezért egy ilyen átalakító fizikailag nem megvalósítható.

A DAC átalakítók körében a gyakorlatban a kauzális viselkedésű zérusrendű tartószervek (ZOH – **Z**ero **O**rd**E**r **H**old) dominálnak, csak kivételes esetekben alkalmaznak elsőrendű tartószerveket (FOH – **F**irst **O**rd**E**r **H**old). A továbbiakban, ha erre külön nem térünk ki, zérusrendű tartószerv használatát tételezzük fel.

A diszkrét időben működő szabályozót tartalmazó szabályozási körben a tervezési feladatot a gyakorlat során kétféle módon oldjuk meg. Az egyik lehetőség, hogy a szabályozót folytonos időben tervezzük meg, és a zérusrendű tartószerv viselkedését alacsony frekvencián egy ideális $T_h = T/2$ holtidejű taggal közelítjük, majd annak diszkrétidejű változatát használjuk. A másik lehetőség, hogy a szabályozott szakasznak meghatározzuk a diszkrétidejű átviteli függvényét, és ahhoz egzakt tervezési módszerekkel diszkrétidejű szabályzót tervezünk. Ez utóbbi esetben meg kell vizsgálni, hogy a mintavételi időpillanatok között nem lép-e fel hullámosság a folytonosidejű jelekben. A mintavételes szabályzók egzakt tervezését megelőzően először a folytonosidejű (analóg) tagok mintavételes (DDC) közelítésének lehetőségeit vizsgáljuk meg.

Áttérés folytonos időről diszkrét időre

Adott egy folytonos működésű tag, amelynek átviteli függvénye $W(s)$, és legyen adott egy mintavételi periódusidő T . Keressük azt a $D(z)$ diszkrétidejű (impulzus-) átviteli függvényt, amelynek működése valamilyen szempontból megfeleltethető a $W(s)$ átviteli függvényvel adott tag működésének. A tankönyv számos lehetséges megfeleltetést vizsgál folytonos és diszkrét működésű tagok között.

A megfeleltetés alapulhat a folytonosidejű deriváló operátor véges differenciákkal történő különféle *közelítésein*, vagy a folytonosidejű integráló operátornak a (jobb és bal oldali) téglalapszabályon, vagy a trapézsabályon alapuló *közelítésén*, amely utóbbi esetben az ún. Tustin-képletet kapjuk s helyettesítésére z -beli kifejezéssel.

Másrészt a megfeleltetés alapulhat azon is, hogy a folytonosidejű $W(s)$ tag és a $D(z)$ diszkrétidejű tag viselkedjék azonosan valamilyen lerögzített bemenőjel esetén (az utóbbi természetesen csakis a mintavételi időpontokban). Ilyenkor a két tag valamilyen bemenő jelre ekvivalens viselkedésű, így beszélhetünk például egységugrás-ekvivalenciáról, vagy sebességugrás-ekvivalenciáról.

A számításokat a tankönyv megfelelő alapossággal tárgyalja, itt csak azokat az áttéréseket ismertetjük, amelyeket a Matlab CST támogat.

Az folytonos időből diszkrét időbe történő áttérésre a Matlab CST `c2d` (a continuous to discrete szavak rövidítéséből származó) utasítása szolgál, amelynek meg kell adni a folytonosidejű LTI tagot (`ss`, `tf` vagy `zpk` struktúráként), a mintavételi periódusidőt és az áttéréshez használt módszert (a megfeleltetés alapját), ez utóbbit karaktersorozat alakjában, tehát aposztróf `'...'` jelek között. A lehetséges opciók közül az alábbi táblázat foglal össze néhányat.

Módszer (method)	Magyarázat
<code>zoh</code>	zérusrendű tartószerv használata (egyenértékű az egységugrás-ekvivalens áttéréssel)
<code>foh</code>	elsőrendű tartószerv használata (egyenértékű a sebességugrás-ekvivalens áttéréssel)
<code>tustin</code>	Tustin-képlet használata
<code>imp</code>	impulzus-ekvivalens áttérés

Példaként tekintsük a

$$W(s) = \frac{3}{s^2 + s + 1}$$

átviteli függvényű kéttárolós lengőtagot, és a mintavételi periódusidő legyen $T=0.2$ sec. Az áttérés egységugrás ekvivalens impulzusátviteli függvényre az alábbi:

```
>> W = tf(3,[1 1 1])

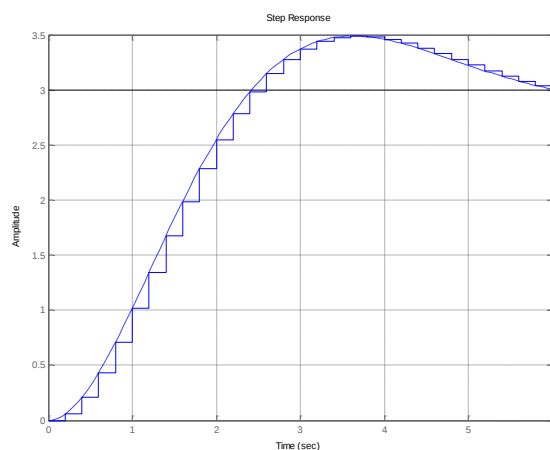
Transfer function:
      3
-----
s^2 + s + 1

>> D = c2d(W,0.2,'zoh')

Transfer function:
  0.05601 z + 0.05239
-----
z^2 - 1.783 z + 0.8187

Sampling time: 0.2
>> step(W,'--',D,'-',6) % megadható a vonaltípus
```

A 4.9. ábra a folytonosidejű és az átalakítással kapott egységugrás-ekvivalens diszkrétidejű tag átmeneti függvényeit mutatja be. A megvalósításkor $D(z)$ előtt ADC, $D(z)$ után pedig DAC beiktatása is szükséges, amely utóbbi nulladrendű tartószervet (sample and hold amplifier) is tartalmaz.



4.9. ábra. Folytonosidejű tag és diszkrétidejű egységugrás-ekvivalens párjának ugrásválaszai (a mintavételi pillanatokban azonos értékekkel)

Most tekintsünk ismét az előző szakaszt, de egy ideális holtidővel

$$W(s) = e^{-0.4s} \frac{3}{s^2 + s + 1},$$

és határozzuk meg az egységugrás-ekvivalens tag impulzusátviteli függvényét.

```
>> W = tf(3,[1 1 1],'outputdelay',0.4)
```

Transfer function:

$$\exp(-0.4s) * \frac{3}{s^2 + s + 1}$$

```
>> D = c2d(W,0.2,'zoh')
```

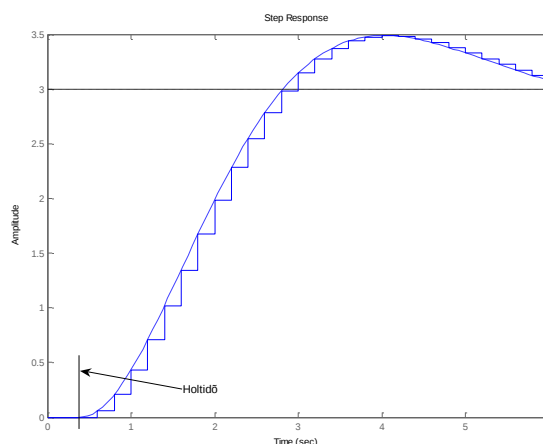
Transfer function:

$$z^{(-2)} * \frac{0.05601 z + 0.05239}{z^2 - 1.783 z + 0.8187}$$

Sampling time: 0.2

```
>> step(W,'--',D,'-',6)
```

A holtidő $T_h = 2T$, ezért szerepel $D(z)$ -ben a z^{-2} tényező.



4.10. ábra. Holtidővel rendelkező folytonosidejű tag és diszkrétidejű egységugrás-ekvivalens párjának ugrásválaszai

Áttérés diszkrét időről folytonos időre

Az áttérés diszkrétidejű tag leírásából folytonosidejű tagok leírásra az ellenkező irányú áttéréshez hasonlóan zajlik, a Matlab CST `d2c` (discrete to continuous) utasítása segítségével. Az utasítás paraméterei a diszkrétidejű tag leírása `tf`, `zpk`, vagy `ss` alakban, valamint az áttérésnél használt módszer. A mintavételi periódusidő a diszkrétidejű reprezentációból ismert, ha nem specifikáltuk, akkor az algoritmus 1-nek veszi (!). Az áttérés a diszkrétidejű pólusokat az s -sík ($j\omega_N, -j\omega_N$) által határolt sávjába képezi le a pólusok számának megtartása mellett. Kivételt képeznek a z síkon található tisztán negatív valós pólusok, amelyekhez nem feleltethető meg azonos foksámú folytonosidejű tag. A negatív valós pólusok szabályozóban történő használatát ezért elkerüljük. (Később egy ilyen áttérésre is mutatunk példát.)

```
>> D = zpk([0.5 0.1],[0.3 0.56 0.45],4,0.1)
```

```
Zero/pole/gain:
      4 (z-0.5) (z-0.1)
-----
(z-0.3) (z-0.45) (z-0.56)
```

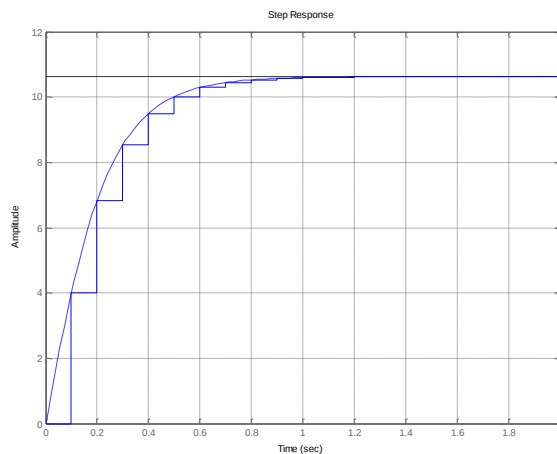
```
Sampling time: 0.1
>> W = d2c(D,'zoh')
```

```
Zero/pole/gain:
41.8981 (s+20.39) (s+6.934)
-----
```

$$(s+12.04) (s+7.985) (s+5.798)$$

```
>> step(W, '--', D, '-', 2)
```

Az ugrásválaszok láthatók a 4.11. ábrán.



4.11. ábra. Diszkrétidejű idejű tag és folytonos egységugrásekvivalens párjának ugrásválaszai

Most tekintsük azt az esetet, mikor egy negatív valós pólus folytonosidejű megfelelőjét keressük.

```
>> D = tf(1,[1 0.9],0.3)
```

Transfer function:

$$\frac{1}{z + 0.9}$$

Sampling time: 0.3

```
>> W = d2c(D,'zoh')
```

Warning: Model order was increased to handle real negative poles.

Transfer function:

$$\frac{0.1848 s + 57.78}{s^2 + 0.7024 s + 109.8}$$

```
>> roots(W.den{1})
```

```
ans =
```

```

-0.3512 +10.4720i
-0.3512 -10.4720i

>> w_N = pi/0.3

w_N =

    10.4720

```

Látható, hogy az egyetlen negatív valós pólusnak megfeleltetett konjugált komplex póluspár képzetes része éppen az ω_N Nyquist-frekvencia.

Tervezés folytonos időben, majd a szabályzó diszkrétidejű közelítése

Az eljárás lényege, hogy a soros kompenzátort (tipikusan PD, PI, PID szabályozót) a korábban megismert és a harmadik gyakorlaton részletesen tárgyalt módon tervezzük, majd megkeressük diszkrétidejű approximációját. Itt az áttéréshez használt mintavételi periódusidő (T) meghatározása a feladat, amelynek során tekintetbe kell venni a mintavételezéshez szükséges és a szabályozó után a szabályozási körbe beépített tartószerv tulajdonságait is. Továbbra is zérusrendű tartószerv használatát tételezzük fel.

Az áttéréshez használt mintavételi periódusidő meghatározása egy közelítésen alapszik. Tegyük fel, hogy a folytonosidejű soros kompenzátor tervezése során meghatároztuk a felnyitott kör ω_c vágási frekvenciáját. A zérusrendű tartószerv fázismenete a Nyquist-frekvenciánál kisebb frekvenciákon megegyezik egy ideális, e^{-sT_h} átvitelű holtidős tag fázismenetével, amelynek holtideje a mintavételi idő fele: $T_h = T/2$. Ez a negatív fázisszög módosítja a felnyitott kör $W_o(s)$ átviteli függvényét fázisát. Ha elhanyagoljuk ω_c megváltozását, akkor a nulladrendű tartószerv a fázistartalékot $\omega_c T/2$ radiánnal csökkenti. Minél kisebb tehát a mintavételi idő (sűrűbbek a minták), annál kevésbé figyelhető meg a mintavételezés hatása. Fordítva viszont a nagy mintavételi idő labilis zárt szabályozási kört is eredményezhet.

A túllövés mérséklésére és a megfelelő stabilitási tartalék biztosítására a soros kompenzátort általában 45-60 fokos fázistartalékra tervezik. (A konkrét érték a technológiai problémától is függ, például robotok esetén túllövésmentes tranziens biztosításához akár 70 fok fázistöbblet is szükséges lehet.) A mintavételi időt pedig úgy választják meg, hogy a fázistartalékot lehetőleg 5 foknál jobban ne rontsa. Felhasználva a fenti eredményeket, kapjuk hogy

$$\frac{\omega_c T}{2} = 5 \frac{\pi}{180} \Rightarrow \omega_c T = \frac{\pi}{18} = 0.17 \approx 0.2 \Rightarrow T = \frac{0.2}{\omega_c}$$

Példaként tekintsük a korábban már sokszor vizsgált háromtárolós szakaszt

$$W_p(s) = \frac{5}{(1+s)(1+4s)(1+10s)},$$

és az ahhoz tervezett PID szabályzót

$$W_{PID}(s) = \frac{3.51s^2 + 1.229s + 0.08776}{0.351s^2 + s},$$

amely 60 fokos fázistartalékot eredményez. A vágási frekvencia $\omega_c = 0.403 \text{ rad/sec}$. A leírtak alapján a mintavételi periódusidő $T = 0.4963 \text{ sec}$, amit kerekítünk $T = 0.5 \text{ sec}$ -ra. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = W_{PID}(s)W_p(s) = \frac{3.51s^2 + 1.229s + 0.08776}{0.351s^2 + s} \cdot \frac{5}{(1+s)(1+4s)(1+10s)}.$$

Írjuk fel a felnyitott kör diszkrétidejű átviteli függvényét és vizsgáljuk meg a fázistartalékot.

```
>> szakasz = tf(5,conv(conv([1 1],[4 1]),[10 1]));
>> PID = tf([3.51 1.229 0.08776],[0.351 1 0]);
>> D=c2d(szakasz,0.5,'zoh')
```

```
Transfer function:
0.002208 z^2 + 0.00749 z + 0.001576
-----
z^3 - 2.44 z^2 + 1.952 z - 0.5092
```

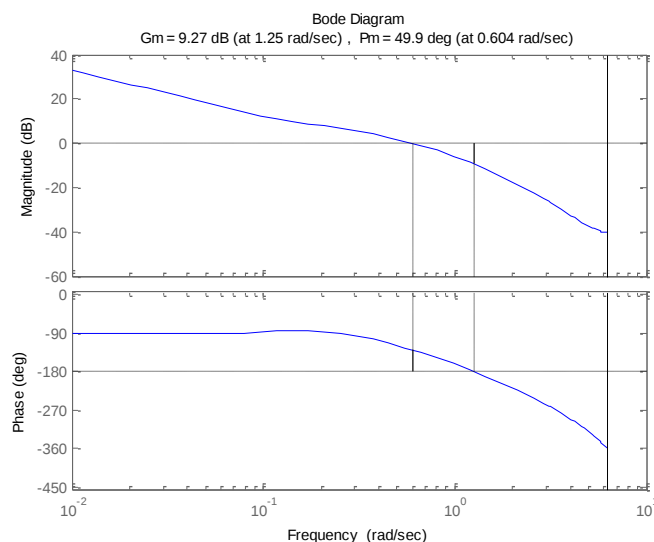
```
Sampling time: 0.5
>> PID_d=c2d(PID,0.5,'zoh')
```

```
Transfer function:
10 z^2 - 19.05 z + 9.08
-----
z^2 - 1.241 z + 0.2406
```

```
Sampling time: 0.5
>> D0 = series(PID_d,D)
```

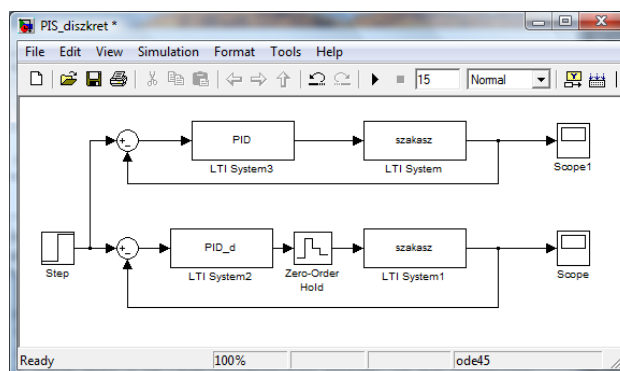
```
Transfer function:
0.02208 z^4 + 0.03285 z^3 - 0.1069 z^2 + 0.03799 z + 0.01431
-----
z^5 - 3.681 z^4 + 5.22 z^3 - 3.518 z^2 + 1.101 z - 0.1225
```

```
Sampling time: 0.5
>> margin(D0)
```



4.12. ábra. A felnyitott kör átviteli függvénye diszkrét időben

A 4.12. ábrán látható, hogy a várakozásoknak megfelelően a fázistartalék valamivel több, mint 5 fokkal csökkent. A folytonos szabályozási kör és a diszkrét szabályozási kör jeleinek összehasonlítását egy Simulink modell segítségével végezzük.

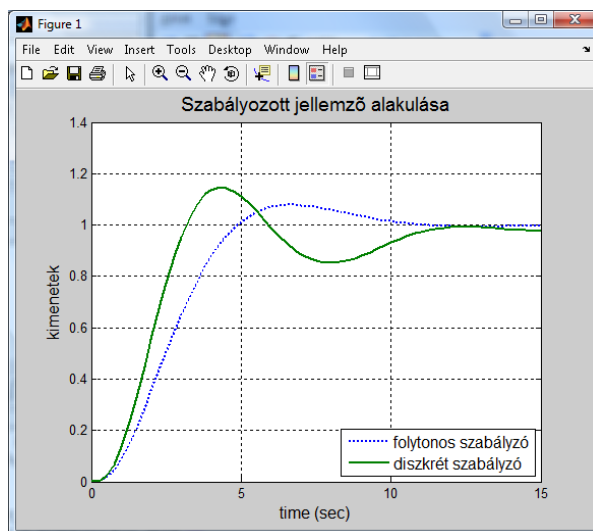


4.13. ábra. A folytonosidejű és diszkrétidejű szabályozót tartalmazó körök összehasonlítására szolgáló Simulink modell

A modellben használt paramétereknek a Matlab munkaterében értéket kell adni.

```
>> szakasz = tf(5, conv(conv([1 1], [4 1]), [10 1]));
>> PID = tf([3.51 1.229 0.08776], [0.351 1 0]);
>> PID_d = c2d(PID, 0.5, 'zoh');
```

A futtatás után a szabályzási körök kimenetét mutatja a következő ábra.

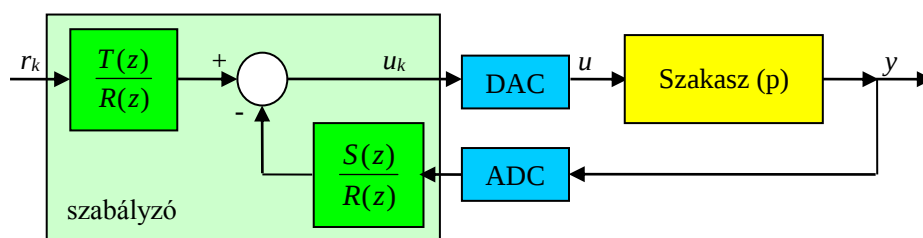


4.14. ábra. A diszkrét és folytonosidejű szabályzókkal működő szabályozási körök kimenetei

A várakozásoknak ismét csak megfelelően a diszkrétidejű szabályozó a kisebb fázistartalékból következően nagyobb túllövést produkál egységugrás alapjel esetén. Ezt mutatja a 4.14. ábra.

Tervezés diszkrét időben: kétszabadságfokú szabályzó

A kétszabadságfokú szabályzó felépítését mutatja a 4.15. ábra.



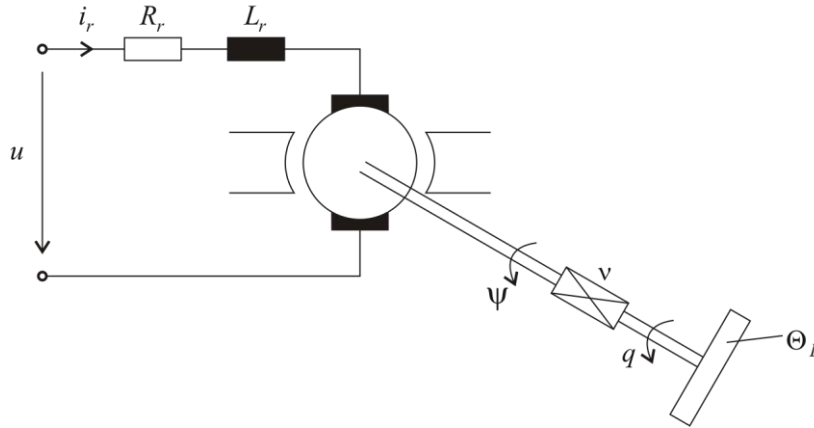
4.15. ábra. Kétszabadságfokú szabályzó felépítése

Látható, hogy az eddig megismert egyetlen soros kompenzátor helyett két kompenzátor helyeztünk el a szabályozási körben (bár a szabályzó most is az alapjel és a kimenet alapján állítja elő a beavatkozó jelet). A különbségképző szerv pozitív előjellel figyelembe vett ágában elhelyezett $T(z)/R(z)$ átvitel az előrecsatoló

(feedforward) tag, a negatív előjellel figyelembe vett ágban elhelyezett $S(z)/R(z)$ átvitel a visszacsatoló (feedback) tag. A kétszabadságfokú szabályzót ezért feedforward-feedback szabályzónak is nevezik.

A szabályzó tervezésének részletes ismertetését a tankönyv tartalmazza. Legyen a szakasz átviteli függvénye $W_p(s)$. A tervezést a szakasz átviteli függvényének diszkrét időbe transzformált $D_p(z) = B(z)/A(z)$ alakja alapján végezzük.

A tervezés modell alapú. Ennek értelmében a kompenzálást úgy végezzük el, hogy a zárt kör viselkedése a lehető legjobban megközelítse egy modell viselkedését. A tervezés lépéseit az egyenáramú motor pozíciósabályozásán követjük nyomon (lásd még 2. gyakorlat). Egyszerűsített felépítését mutatja a 4.16. ábra.



4.16. ábra. Egyenáramú motor egyszerűsített vázlata

Az állapotváltozók vektora $x = (\psi \ \dot{\psi} \ i_r)^T$, melynek elemei a motor tengelyének szögelfordulása, szögsebessége és a rotor tekercsében folyó áram, a kimenet $y = \psi$. A modellt állapotegyenlet alakjában adtuk meg, ezt itt a teljesség kedvéért ismét megteesszük.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -f/\Theta & c_2/\Theta \\ 0 & -c_1/L_r & -R_r/L_r \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L_r \end{bmatrix},$$

ahol a paraméterek jelentését és értéküket a táblázat magyarázza.

Jelölés	Magyarázat	Érték
f	súrlódás	$8.01 \cdot 10^{-3} \text{ Nms/rad}$
Θ	forgó inercia	$4 \cdot 10^{-5} \text{ Kgm}^2$
c_2	nyomatékállandó	0.03 Nm/A
c_1	sebességállandó	0.03 Vs/rad
L_r	A motor kapcsai között mérhető indukción	10 mH
R_r	A motor kapcsai között mérhető ellenállás	1Ω

A paraméter értékeket felhasználva a Matlab CST-ben létrehozuk a szakaszmodellt.

```
>> f = 8.01e-3; Theta = 4e-5; c2 = 0.03; c1 = 0.03;
>> Lr = 1e-2; Rr = 1;
>> A = [0 1 0; 0 -f/Theta c2/Theta; 0 -c1/Lr -Rr/Lr];
>> B = [0; 0; 1/Lr];
>> C = [1 0 0];
>> D = 0;
>> motor_ss = ss(A,B,C,D);
>> motor_tf = tf(motor_ss)
```

```
Transfer function:
          7.5e004
-----
s^3 + 300.3 s^2 + 2.227e004 s
```

A szakasz három pólusa $p_1 = -166.3273$, $p_2 = -1339227$ és $p_3 = 0$. A két negatív valós pólushoz tartozó időállandó $T_1 = 7.5 \text{ ms}$ és $T_2 = 6 \text{ ms}$.

A mintavételi periódusidő megállapítása

A mintavételi periódusidő meghatározásakor az előírt vágási frekvencia közelítő számítását és az 5 fokos fázisrontást vesszük figyelembe. Az időállandók összege $T_{sum} = T_1 + T_2 = 13.5 \text{ ms}$. Ehhez az időállandóhoz képest kívánjuk a rendszert felgyorsítani, ugyanakkor túlságosan nagy gyorsítás nagy beavatkozó jeleket eredményezne. Lehetséges kompromisszumként az $\omega_c \approx 5/T_{sum} = 370.9409 \text{ rad/s}$ választással élünk, ahonnan a mintavételi idő $T_s = 0.2/\omega_c \approx 0.0005 \text{ s}$.

Áttérés diszkrét időre

A meghatározott mintavételi időt felhasználva meghatározzuk a szakasz $D_p(z)$ impulzusátviteli függvényét.

```
>> Ts = 0.5e-3;
```

```
>> motor_d = c2d(motor_tf, Ts, 'zoh')
```

Transfer function:

$$\frac{1.505e-006 z^2 + 5.8e-006 z + 1.396e-006}{z^3 - 2.855 z^2 + 2.716 z - 0.8606}$$

Sampling time: 0.0005

Tehát

$$D_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1.505 \cdot 10^{-6} z^2 + 5.8 \cdot 10^{-6} z + 1.396 \cdot 10^{-6}}{z^3 - 2.855 z^2 + 2.716 z - 0.8606},$$

ahol a nevezőnek van egy pólusa a $z = 1$ helyen, ami az integrátornak felel meg.

A zárt kör átvitele diszkrét időben

A zárt kör impulzusátviteli függvénye

$$D_{cl}(z) = \frac{B(z)T(z)}{A(z)R(z) + B(z)S(z)}$$

(A könnyebb olvashatóság kedvéért a továbbiakban a polinomok függését z -től nem jelöljük.) Azt kívánjuk elérni, hogy a zárt kör diszkrétidejű (impulzus-) átviteli függvénye egy előírt (modell) impulzusátviteli függvény legyen, amelyet

$$\frac{B_m}{A_m} \cdot \frac{A_o}{A_o}$$

átviteli függvénnyel adunk meg. A számlálót és a nevezőt a fokszámfeltételek teljesíthetősége miatt az A_o ún. megfigyelő (observer) polinommal bővítettük.

A szakasz számlálójának (B polinom) faktorizálása

A zárt kör átviteli függvényéhez akkor lehetne tetszőleges modellt előírni, ha a B polinommal egyszerűsíteni lehetne. Ez úgy lenne lehetséges, ha a B polinom gyökeit bevinnénk az R polinom gyökei közé. Azonban az R polinom a szabályzó előre- és visszacsatoló ágának is nevezője (gyökei a szabályzó stabilitását befolyásolják), amellyel szemben elvárás, hogy csak stabil pólusokat tartalmazzon és folytonos időben azonos számú pólussal realizálható legyen. Ezért a B polinomnak csak azon gyökei egyszerűsíthetőek, amelyek az *egységkörön belülre esnek és nem* (tisztán) *negatív valós* értékűek. (A negatív valós gyökökkel kapcsolatos áttérési problémát korábban példával is illusztráltuk.) Most bontsuk fel a B polinomot két polinom szorzatára, ahol

$$B = B^+ \cdot B^-$$

és B^+ tartalmazza a kiejthető gyököket, illetve B^- tartalmazza a nem kiejthető gyököket, továbbá B^+ monik¹. Példánk esetében

```
>> roots(motor_d.num{1})
```

```
ans =  
    -3.5952  
    -0.2580
```

Mivel az egyik gyök az egységkörön kívül esik (és negatív valós), a másik pedig ugyan az egységkörön belül van, de negatív valós, ezért $B^- = B$ és $B^+ = 1$.

```
>> Bminus = motor_d.num{1};  
>> Bplus = 1;
```

Tartalmazza tehát az R polinom a B^+ polinomot, azaz legyen $R = B^+ \cdot R_1$ alakú. Vegyük észre, hogy a B_m polinomnak tartalmaznia kell a nem kiejthető gyököket, azaz $B_m = B^- \cdot B'_m$. Az egyszerűsítések elvégzése a

$$\frac{T}{AR_1 + B^-S} = \frac{B'_m A_o}{A_m A_o}$$

összefüggésre vezet. Tegyük fel, hogy a szabályozási kör típuszámát is be szeretnénk állítani, tehát a szakasz által tartalmazott integrátorok számát még l darab integrátorral kívánjuk növelni. (Diszkrét időben az integrátornak egy $z_I = +1$ pólus felel meg.) Az integrátorok számát az R polinomba elhelyezett $(z-1)^l$ taggal tudjuk beállítani:

$$R = B^+(z-1)^l R'_1.$$

A példánkat tekintve a szakaszban már van egy integrátor. Az egységugrás alapjel maradó hiba nélküli követéséhez ez elegendő, így az $l=0$ választással élünk.

A számlálók és nevezők egyenlőségéből következik, hogy

$$T = B'_m A_o$$

$$A(z-1)^l R'_1 + B^-S = A_m A_o$$

egyenleteknek kell teljesülniük a szabályzó R , S , és T polinomjaira. Adott A_o , B'_m és A_m választás mellett az első egyenlet alapján meghatározható T , a második egyenlet alapján pedig R'_1 és S . A második egyenlet két ismeretlent is tartalmaz, de mivel a

¹ Azt a polinomot nevezzük moniknak, amely legnagyobb kitevőjű hatványához tartozó együttható értéke egy.

polinomok gyűrűt (és nem testet) alkotnak, az ilyen jellegű, ún. diophantoszi egyenleteknek bizonyos feltételek teljesülése esetén van egyértelmű megoldása.

A modell polinomjainak és a megfigyelő polinomnak meghatározása

A polinomok meghatározása a foksámok és az együtthatók kiszámításából áll. Egy P polinom foksámát a gr operátor felhasználásával grP -vel jelöljük. A foksámok meghatározásakor abból indulunk ki, hogy $grA - grB = 1$, a diophantoszi egyenlet megoldása legyen egyértelmű, illetve minden diszkrétidejű (impulzus-) átviteli függvény legyen kauzális. A részletes levezetést a tankönyv tartalmazza, itt csak az eredményt közöljük

$$grA_m = \begin{cases} 2 & \text{ha } grB^- = 0 \\ 1 + grB^- & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$grS = grA + l - 1$$

$$grA_b = grA + l - 1 - \begin{cases} 1 & \text{ha } grB^- = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$grR'_1 = grB^-$$

A példa esetében $grB^- = 2$, illetve $grA = 3$ adódott és az $l = 0$ választással éltünk, tehát

$$grA_m = 3$$

$$grS = 2$$

$$grA_b = 2$$

$$grR'_1 = 2$$

Az A_m és A_b polinomok együtthatóit a gyökeik alapján számítjuk, a gyököket pedig s tartományban adjuk meg és a $z = e^{sT}$ összefüggés alapján számítjuk át z tartományba. Azt az elgondolást követjük, hogy a zárt kör viselkedése dominánsan egy ξ csillapítással és ω_0 sajátfrekvenciával adott kéttárolós lengőtag viselkedését mutassa. Ha A_m polinom foksáma kettőnél nagyobbra adódik, akkor a domináns póluspárt egészítsük ki egy megfelelő $(grA_m - 2)$ multiplicitású valós pólussal, amely kellően gyors tranzienssel rendelkezik ahhoz, hogy a lengő tag jellemzőit érdemben ne befolyásolja. Hasonló módon választjuk meg az A_b megfigyelő gyökeit is.

Példánkban legyen $\xi = 1/\sqrt{2}$, $\omega_0 = 5/T_{sum} = 37094$, az A_m további gyökei (itt összesen még egy darab) legyenek $s_{\infty} = -\max\{\omega_0, 1/\min\{T_1, T_2\}\}$, az A_b megfigyelő polinom gyökei pedig legyenek $s_{\infty} = -5\max\{\omega_0, |s_{\infty}|\}$. Számszerűen a Matlab segítségével az alábbi értékek adódnak:

```

>> pvec=roots(motor_tf.den{1});
>> ix=find(pvec~=0);
>> Tvec=1./abs(pvec(ix));
>> Tmin=min(Tvec);
>> Tsum=sum(Tvec);
>> wo=5/Tsum;
>> scinf =-max([wo,1/Tmin])

scinf =

    -370.9409

>> soinf = -5*max([wo,abs(scinf)])

soinf =

   -1.8547e+003

>> ksi=1/sqrt(2);
>> s1 = -wo*ksi+j*wo*sqrt(1-ksi^2)

s1 =

   -2.6229e+002 +2.6229e+002i

>> s2 = -wo*ksi-j*wo*sqrt(1-ksi^2);

```

A gyökök z tartományban az alábbiak szerint számíthatók.

```

>> z1 = exp(s1*Ts);
>> z2 = exp(s2*Ts);
>> zcinf = exp(scinf*Ts);
>> zoinf = exp(soinf*Ts);

```

A polinomok meghatározását a Matlab `poly` utasításával végezzük, amely lehetővé teszi, hogy egy polinom együtthatóit kiszámítsuk, ha ismertek a gyökei.

```

>> Ao = poly([zoinf zoinf])
Ao =
    1.0000    -0.7912     0.1565

>> Am = poly([z1 z2 zcinf])
Am =
    1.0000   -2.5698     2.2140   -0.6391

```

B'_m meghatározása

Feltesszük, hogy B'_m konstans. Értékét úgy állapítjuk meg, hogy egységugrás alapjel esetén a modell végértéke 1 legyen, vagyis a kimenő jel állandósult állapotban vegye fel a referencia jel értékét. Az Z -transzformált végértéktételét felhasználva

$$1 = \frac{B'_m B^-(1)}{A_m(1)} \Rightarrow B'_m = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$$

A példánk esetében számszerűen

```
> Bmv = polyval(Am,1)/polyval(Bminus,1)
```

```
Bmv =  
586.9991
```

Az R , S és T polinomok meghatározása

A T polinom számítása egyszerűbb.

$$T = B'_m \cdot A_o$$

```
>> T = Bmv*Ao
```

```
T =  
586.9991 -464.4335 91.8649
```

A diophantoszi egyenlet ismeretlen polinomjai (a példában szereplő fokszámokkal):

$$R'_1 = z^2 + r_1 z + r_2$$

$$S = s_0 z^2 + s_1 z + s_2$$

Először a diophantoszi egyenlet általános alakját vizsgáljuk

$$\bar{A}X + \bar{B}Y = C,$$

ahol

$$\bar{A} = z^n + \bar{a}_1 z^{n-1} + \dots + \bar{a}_n$$

$$\bar{B} = \bar{b}_0 z^m + \bar{b}_1 z^{m-1} + \dots + \bar{b}_m$$

$$X = z^k + x_1 z^{k-1} + \dots + x_k$$

$$Y = y_0 z^h + y_1 z^{h-1} + \dots + y_h$$

$$C = z^{n+k} + c_1 z^{n+k-1} + \dots + c_{n+k}.$$

Az ismeretlen polinomok (X , Y) együtthatói egy lineáris egyenletrendszer megoldásaként adódnak, ahol az együtthatók mátrixa két ún. Toeplitz-blokkból épül fel. (Toeplitz-mátrixokat a Matlab `toeplitz` utasítása állítja elő).

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & . & . & . & 0 & \bar{b}_0 & 0 & . & . & . & 0 \\
 \bar{a}_1 & . & . & . & . & . & \bar{b}_1 & . & . & . & . & . \\
 \bar{a}_2 & . & . & . & . & . & \bar{b}_2 & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & . & \bar{b}_0 & . \\
 \bar{a}_n & . & . & . & . & \bar{a}_1 & \bar{b}_m & . & . & . & \bar{b}_1 & . \\
 0 & . & . & . & . & \bar{a}_2 & 0 & . & . & . & \bar{b}_2 & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
 0 & . & . & . & . & \bar{a}_n & 0 & . & . & . & \bar{b}_m & .
 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ y_0 \\ . \\ . \\ y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - \bar{a}_1 \\ c_2 - \bar{a}_2 \\ c_3 - \bar{a}_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_n - \bar{a}_n \\ c_{n+1} \\ . \\ . \\ c_{n+k} \end{bmatrix}$$

A példánk esetében $\bar{A} = A \cdot (z-1)^0$ (hiszen $l=0$), $\bar{B} = B^-$, $C = A_m A_o$. Az együtthatókat számító Matlab kód az alábbi:

```

>> C=conv(Am,Ao)
C =
    1.0000   -3.3610    4.4037   -2.7929    0.8521   -0.1000

>> Amat=[toeplitz([A 0]',',[A(1) 0]) toeplitz([B 0 0]',',[B(1) 0 0])]
Amat =
    1.0000         0    0.0000         0         0
   -2.8554    1.0000    0.0000    0.0000    0.0000
    2.7160   -2.8554    0.0000    0.0000    0.0000
   -0.8606    2.7160         0    0.0000    0.0000
         0   -0.8606         0         0    0.0000

>> bvec=[C-[A 0 0]]';

>> bvec=bvec(2:6)
bvec =
   -0.5056
    1.6877
   -1.9323
    0.8521
   -0.1000

>> rs=inv(Amat)*bvec
rs =
    1.0e+004 *
   -0.0001
    0.0000
    1.4677
   -2.6102
    1.1639

```

```

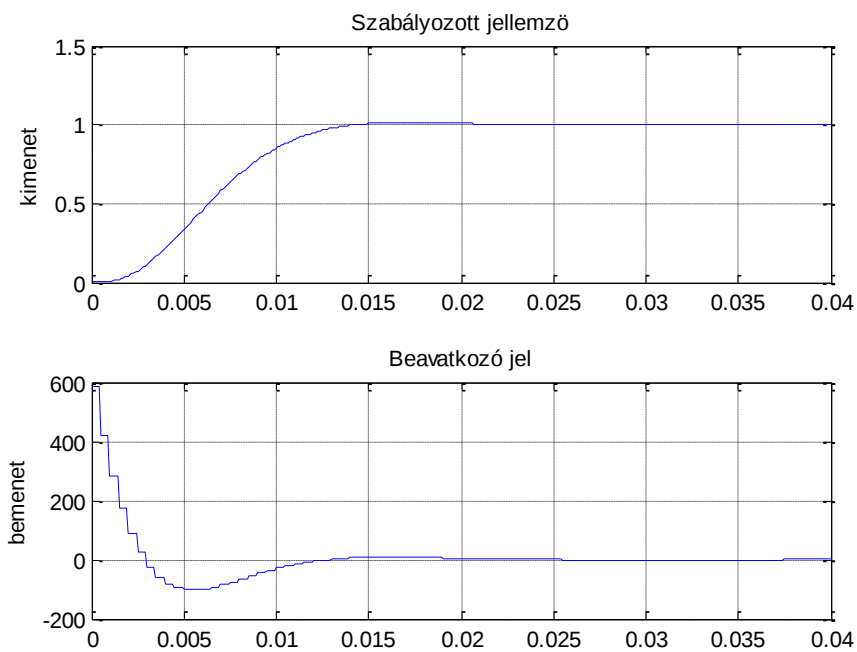
>> R1v=[1; rs(1:2)]'
R1v =
    1.0000   -0.5277    0.1351

>> S=rs(3:5)'
S =
    1.0e+004 *
    1.4677   -2.6102    1.1639

>> R=conv(Bplus,R1v)
R =
    1.0000   -0.5277    0.1351
>>

```

A zárt szabályozási kör tranzienseit a 4.17. ábra mutatja be.



4.17. ábra. A zárt szabályozási kör tranziensei DC motor pozíciószabályozása esetén kétszabadságfokú szabályozóval

4. Számítógéptermi gyakorlat: Mintavételes szabályozók tervezése

A szabályozók megvalósítása manapság számítógéppel történik, amelynek működése diszkrét időben történik. A 4. számítógéptermi gyakorlat célja mintavételes szabályozások tervezése, amelyek a mai digitális számítógépeken is megvalósíthatók. Két alapvető módszert mutatunk be. Először módszert adunk arra, hogy a már korábban megtervezett folytonosidejű szabályozókat hogyan ültessük át mintavételes tartományba. Ezt követően kétszabadságfokú mintavételes szabályozás tervezésére kerül sor, ahol a tervezés eleve a mintavételes tartományban történik. A szabályozások tervezése mindkét esetben a korábbi gyakorlatokon már szereplő háromtárolós szakaszhoz történik:

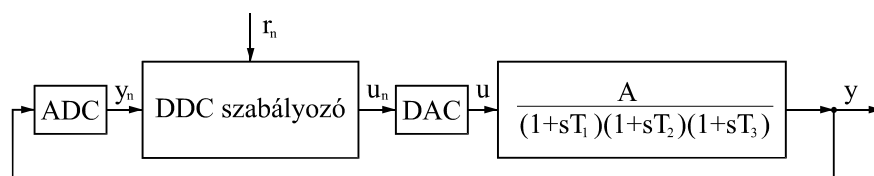
$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

ahol a szakasz paraméterei most legyenek:

PID szabályozó esetén: $A=2$, $T_1=10$ sec, $T_2=4$ sec, $T_3=1$ sec

2DOF szabályozó esetén: $A=5$, $T_1=10$ sec, $T_2=4$ sec, $T_3=1$ sec

A mintavételes szabályozások általános blokkvázlatát a 4.18. ábra mutatja.



4.18. ábra. A mintavételes szabályozás blokkvázlatja

Itt r_n a mintavételezett referencia jel, y_n a mintavételezett kimenő jel, u_n pedig a szabályozó (számítógép) által kiadott mintavételes beavatkozó jel. A digitális-analóg átalakító (DAC) tipikusan egy zérusrendű tartószervet (ZOH) valósít meg a legtöbb alkalmazásban, míg az analóg-digitális átalakító (ADC) felfogható egy elektronikus kapcsolónak, amely T mintavételi időpontonként zár egy pillanatra (mintát vesz). Az ábrából is levezethető a kétféle koncepció: amennyiben az ADC és a DAC rendszertechnikailag a szabályozóhoz tartozik, akkor egy folytonosidejű szabályozás mintavételes megvalósításáról beszélünk, ha azonban az ADC és a DAC rendszertechnikailag az irányítandó szakaszhoz tartozik, akkor a szakasz mintavételes modelljéhez kell mintavételes szabályozót tervezni.

Feladat: Közelítő PID szabályozó mintavételes megvalósítása

Folytonosidejű szabályozó mintavételes megvalósítására több lehetőség is kínálkozik. Egy lehetséges megközelítés a folytonosidejű differenciáló (s) vagy integráló ($1/s$) operátor valamilyen közelítése z -beli kifejezéssel. Egy másik megközelítés szerint egy olyan mintavételes ekvivalenst állítunk elő, amely egy adott (mintavételezett) bemenő jel hatására diszkrét időben ugyanazt a jelet adja ki, mint amit ezekben az időpontokban a folytonosidejű kimenő jel. A gyakorlatban leggyakrabban az egységugrás ekvivalenciát használjuk (ekkor egységugrás bemenő jelre követeljük meg a folytonos és mintavételezett kimenő jel egyezőségét a mintavételi pontokban). A Matlab-ban az egységugrás ekvivalenciával történő mintavételes realizációt a `c2d` függvénnyel határozhatjuk meg, mivel az egységugrás ekvivalencia is a $D(z) = (1 - z^{-1})Z\{v(nT)\}$ kifejezésre vezet.

Tekintsük a korábbi gyakorlaton megtervezett PID szabályozót (3. gyakorlat 7. feladata):

$$W_c(s) := W_{pid}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_c} \right)$$

ahol

$$A_p = 3.294, \quad T_i = 12.985, \quad T_d = 2.066, \quad T_c = 1.0146$$

A szabályozó egységugrás ekvivalens PID szabályozója:

$$D_{PID}(z) = (1 - z^{-1})Z\{v_{PID,n}\}$$

ahol $v_{PID,n}$ a folytonosidejű PID szabályozó átmeneti függvényének mintavételezett értéke, $Z\{\cdot\}$ pedig a Z -transzformáció operátorát jelöli. A fenti számításokat elvégezve a folytonosidejű PID szabályozó egységugrás ekvivalenciával meghatározott mintavételes megvalósítása a következő diszkrét átviteli függvényre vezet:

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$

ahol

$$\begin{aligned} p_0 &= 1 & q_0 &= A_p \left(1 + \frac{T_d}{T_c} \right) \\ p_1 &= -\left(1 + e^{-T/T_c} \right) & q_1 &= A_p \left(1 + e^{-T/T_c} - \frac{T}{T_i} + \frac{2T_d}{T_c} \right) \\ p_2 &= e^{-T/T_c} & q_2 &= A_p \left\{ e^{-T/T_c} \left(1 - \frac{T}{T_i} \right) + \frac{T_d}{T_c} \right\} \end{aligned}$$

A képletben szereplő együtthatókat az átmeneti függvény kiértékelésével és néhány nevezetes Z -transzformált felhasználásával nyertük, azonban Matlab környezetben megkaphatjuk a diszkrétidejű átviteli függvényt (z -ben) a Matlab `c2d` függvényével is, ha azt $W_{PID}(s)$ -re alkalmazzuk.

Az áttéréshez szükséges a mintavételi idő helyes megválasztása. A mintavételi idő megválasztásánál két szempontot kell figyelembe venni:

- A mintavételi időt úgy kell megválasztani, hogy a Shannon-tétel érvényben maradjon a zárt szabályozási kör minden jelére. Ehhez feltételezhető, hogy a zárt rendszer határfrekvenciája jól közelíthető a felnyitott kör vágási frekvenciájával.
- A DAC egységben található zérusrendű tartószerv (ZOH) rontja a fázismenetet. Célszerű lerögzíteni, hogy mekkora fázisromlást engedélyezünk a vágási frekvencián. Tipikusan

$$\omega_c T \in \left[5^\circ, 15^\circ\right] \frac{\pi}{180} \approx [0.17, 0.51]$$

Egy gyakori választás:

$$\omega_c T = 0.2 \rightarrow T = \frac{0.2}{\omega_c}$$

Ezek alapján a korábban megtervezett analóg PID szabályozó diszkrétidejű átviteli függvénye a következő Matlab kóddal határozható meg (megjegyezzük, hogy korábban az $\omega_c = 0.4278$ vágási frekvencia már meghatározásra került):

```
Ts=0.2/wc;
```

```
%A szabalyozo ekvivalense
syscz_pid2=c2d(syscs_pid2,Ts,'zoh');
```

A mintavételes szabályozó ennek megfelelően az alábbi lesz:

$$D_{PID}(z) = \frac{10 - 18.67_1 z^{-1} + 8.7 z^{-2}}{1 - 1.63 z^{-1} + 0.63 z^{-2}}$$

A mintavételes PID szabályozás a 4.19. és a 4.20. ábrákon összehasonlítható a folytonosidejű PID szabályozással. Az ábrák a korábbiaknak megfelelően az alábbi Matlab kóddal állíthatók elő:

```
% a szakasz diszkrét modellje
syspz_tf=c2d(sysp_tf,Ts,'zoh');

%felnyitott kor
sys0z=series(syspz_tf,syscz_pid2)
```

```

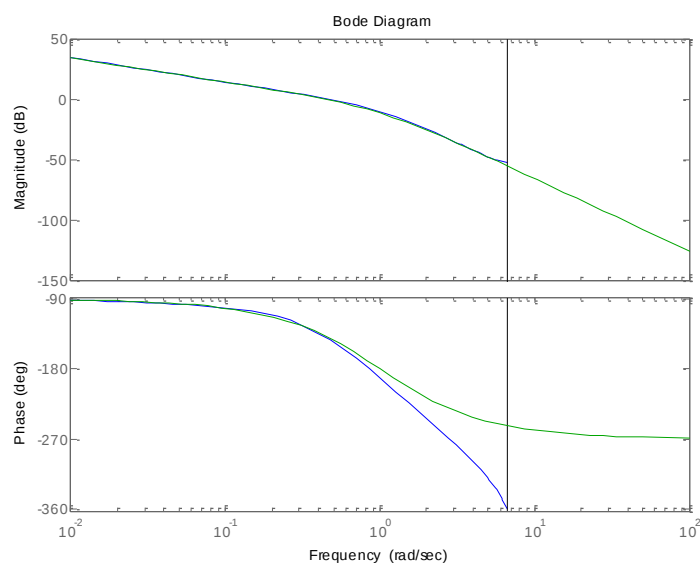
%zart kor
sysdrotz_tf=c2d(sysdrot_tf,Ts,'zoh')
sysclz_ry=feedback(sys0z,sysdrotz_tf);
sysclz_ru=feedback(syscz_pid2,sypz_tf);

%Bode diagram
figure(3)
bode(sys0z,sys0_pid2);

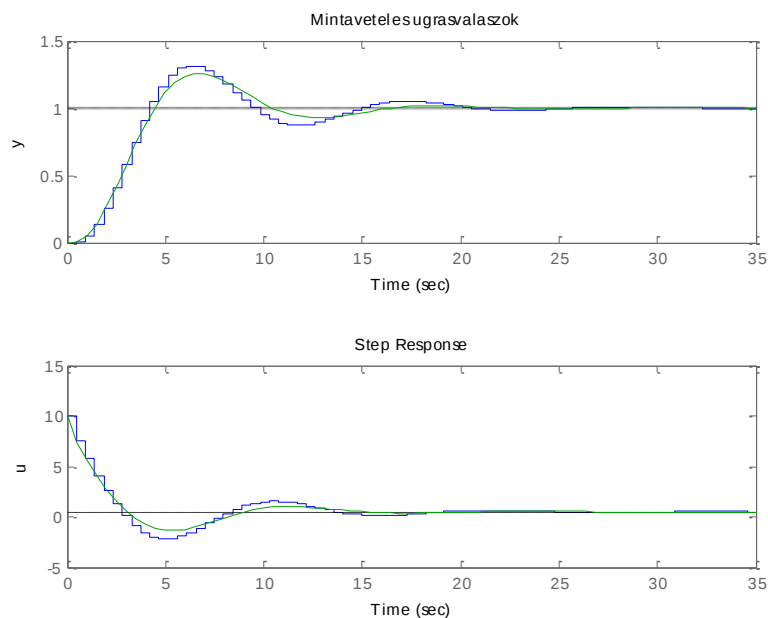
%kimenő és beavatkozó jelek rajzolása
figure(4)
subplot(211)
step(sysclz_ry,syscl_pid2)
ylabel('y')
title('Mintavételes és folytonos ugrasvalaszok')
subplot(212);
step(sysclz_ru,sysclru_pid2)
ylabel('u')

```

Vegyük észre, hogy a bode és step függvények automatikusan érzékelik, hogy folytonosidejű vagy mintavételes rendszerről van-e szó, és eszerint végzik a rajzolást is.



4.19. ábra. A folytonosidejű (zöld) és a mintavételes (kék) felnyitott kör Bode diagramja



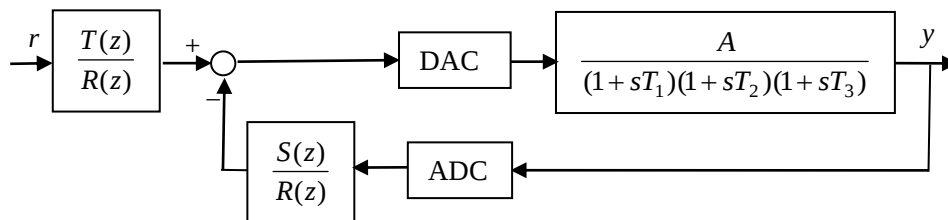
4.20. ábra. A folytonosidejű (zöld) és a mintavételes (kék) szabályozás esetén a zárt rendszer kimenő jele (fent) és beavatkozó jele (lent)

Pl. a mintavételes rendszer esetén a Bode diagram csak az $\omega_N = \pi/T$ Nyquist-frekvenciáig kerül megrajzolásra, az átmeneti függvények pedig a zérusrendű tartószerv miatt lépcsősen jelennek meg. A bode és step függvényen belül több rendszerleíró struktúrát is meg lehet adni, amelyek keverték is lehetnek (pl. egyik folytonos, a másik diszkrét). Megemlítjük, hogy amennyiben a bode és step függvény nem sys struktúrát kap paraméterként (hanem pl. az átviteli függvény számlálóját és nevezőjét), akkor a mintavételes eset megkülönböztetésére a dbode és dstep függvények használandók. A Bode-diagramból látható, hogy a vágási frekvenciáig a folytonosidejű és mintavételes rendszer felnyitott körének Bode-diagramja megegyezik. Ennél nagyobb frekvenciákon a zérusrendű tartószerv miatt a fázismenet fokozatosan romlik a folytonosidejű esethez képest.

Kétszabadságfokú mintavételes szabályozás tervezése

Feladat: Tervezze meg a 4.21. ábrán látható kétszabadságfokú szabályozó $T(z)$, $S(z)$, $R(z)$ polinomokkal adott diszkrét átviteli függvényeit a korábban bevezetett háromtárolós szakaszra $T_s = 0.2$ sec mintavételi idő mellett úgy, hogy a következő specifikációk teljesüljenek:

- A zárt kör elérni kívánt dinamikus minőségi tulajdonsága legyen adott egy domináns konjugált komplex póluspárral, amelyre teljesül, hogy $\omega_0 = \frac{1}{3}$, $\xi = 0.7$.
- A zárt kör dinamikus viselkedését lényegében már nem befolyásoló további pólus(ok): $s_{\infty} = -1$ (akár többszörös multiplicitással).
- A megfigyelőhöz tartozó sajátérték(ek) legyen(ek): $s_{co} = -5$ (akár többszörös multiplicitással).
- A zárt kör maradó hiba nélkül kövesse az egységugrás alapjelet.



4.21. ábra. A kétszabadságfokú szabályozás blokkvázlata

Megoldás: A folyamatot a következő programsorral adjuk meg Matlab-ban:

```
%Plant
A=5;
T1=10; T2=4; T3=1;
num=A;
den=conv([T1 1], conv([T2 1], [T3 1]));
W=tf(num,den)
%Sampling time
Ts=0.2;
```

A feladatban kiírt specifikációk Matlab környezetben:

```
%Specification in s
xi=0.7; w0=1/3;
scinf=-1;
soinf=-5;
lint=1;
```

Mivel a szakasz nem tartalmaz integrátort, és az egységugrás alapjel maradó hiba nélkül követése előírásként szerepel, ezért egy integrátort helyezünk el a szabályozóban, amelyet az `lint=1` utasítás jelképez. A kétszabadságfokú

szabályozó megtervezéséhez egy külön függvényt írunk, amelyet a következőképpen hívunk meg:

```
%2-DOF Controller Design
[R, S, T, Am, A0, Bplus, Bminus, Bmprime, Bm]=...
TwodofController(W, xi, w0, scinf, soinf, linf, Ts)
```

A változók elnevezése értelemszerű. A visszatérési paraméterek között R a szabályozó $R(z)$ polinomja, S a szabályozó $S(z)$ polinomja, T a szabályozó $T(z)$ polinomja, B_{plus} felel meg a szakasz kiejthető zérusait tartalmazó B^+ polinomnak, B_{minus} felel meg a szakasz nem kiejthető zérusait tartalmazó B^- polinomnak, B_{mprime} felel meg a B'_m polinomnak (amelyet konstansnak választunk), B_m felel meg az elérni kívánt zárt kör modelljében szereplő számlálónak, azaz a B_m polinomnak, A_m felel meg az elérni kívánt zárt kör modelljében szereplő nevezőnek, azaz a A_m polinomnak, A_0 felel meg az A_0 megfigyelő polinomnak. A bemeneti paraméterek között W a szakaszt, xi , w_0 , $scinf$, $soinf$ a specifikációkat, $linf$ az integrátorok számát és Ts a mintavételi időt definiálja. A szabályozótervezést megvalósító függvény az alábbi lépésekből áll.

Először az előírt modell domináns pólusait állítjuk elő folytonos időben az előírt csillapítatlan sajátfrekvencia (w_0) és csillapítás (xi) függvényében:

```
%Dominating pole in s
s1=-xi*w0+i*sqrt(1-xi^2)*w0;
```

Ezek után az összes specifikációt megadhatjuk z tartományban:

```
%Specification in z
z1=exp(s1*Ts);
zcinf=exp(scinf*Ts);
zoinf=exp(soinf*Ts);
```

ahol az áttérésre a $z = \exp(sT)$ képletet alkalmazzuk minden s tartományban megadott pólusra. Itt a $z_{c\infty}$ pólusokat a $zcinf$ változó reprezentálja, míg a megfigyelő polinom gyökeinek megfelelő a $z_{o\infty}$ pólusokat a $zoinf$ változó reprezentálja. A szabályozó megtervezéséhez szükséges tudnunk a szakasz mintavételes modelljét. Ezt Matlab-ban a

```
%Conversion W(s) to D(z)
D=c2d(W, Ts, 'zoh')
B=D.num{1};
B=B(min(find(B~=0)):length(B)); %omit leading zeros in B
A=D.den{1};
```

Programkóddal érhetjük el, ahol B a szakasz diszkrétidejű átviteli függvényének számlálója (egy polinom z -ben), míg A a szakasz diszkrétidejű átviteli függvényének nevezője (egy polinom z -ben). A szabályozó polinomjainak meghatározásához elengedhetetlen tudni a polinomok fokszámát (és azt, hogy egy vezetőegyütthatójú-e), hiszen ez determinálja azt, hogy hány ismeretlent kell megoldani. Az ismeretlenek a polinomok különböző fokszámú tényezőinek együtthatói. A fokszámok együtthatóit azonban befolyásolja a szakasz kiejthető és nem kiejthető zérusainak száma is. Ezért előbb a $B = B^+ B^-$ felbontását kell elvégezni:

```
%Decomposition of B
z=roots(B);
zm=z(find(abs(z)>=1 | (abs(z)<1 & imag(z)==0 & real(z)>-1 &
real(z)<0)));
zp=z(find(~(abs(z)>=1 | (abs(z)<1 & imag(z)==0 & real(z)>-1 &
real(z)<0))));
Bplus=poly(zp);
Bminus=poly(zm);
Bminus=polyval(B,1)/(polyval(Bminus,1)*...
polyval(Bplus,1))*Bminus;
```

A B^- polinom zm gyökeinek megtalálásához a `find` függvénnyel azokat a gyököket kell kiválasztani a B polinom z gyökei közül, amelyek a komplex félsíkon az egységkörön kívül ($\text{abs}(z) \geq 1$) vagy a negatív valós tengelyen helyezkednek el ($(\text{abs}(z) < 1 \ \& \ \text{imag}(z) == 0 \ \& \ \text{real}(z) > -1 \ \& \ \text{real}(z) < 0)$). A zm gyökök segítségével a B^- polinom közvetlenül előállítható a `Bminus=poly(zm)` függvényhívással (a `poly` függvény gyakorlatilag a gyöktényezős alakban található szorzatok kiértékelését végzi el). A B^+ polinom meghatározása ezzel analóg, azonban ezt a polinomot a B polinomban eddig fel nem használt gyökök (zp) definiálják.

Ezek után az egyes polinomok fokszámai meghatározhatóak az elmélet szerint. Először a már ismert és későbbiekben szükséges polinom fokszámokat határozzuk meg (a `gr` jelölés a változónévben az adott polinom fokszámára utal):

```
%Polynomial degrees
grA=length(A)-1;
grB=length(B)-1;
grBplus=length(Bplus)-1;
grBminus=length(Bminus)-1;
if grBminus==0, corr=1; else corr=0; end;
```

A corr változó biztosítja azt, hogy az előírt modell nevezőjének fokszáma legalább kettő legyen (hisz egy domináns konjugált komplex polúspárt írtunk elő).

Az A_m polinom fokszáma ennek megfelelően:

$$\text{gr } A_m = \begin{cases} 2 & \text{ha } \text{gr } B^- = 0 \\ 1 + \text{gr } B^- & \text{különben} \end{cases}$$

A megvalósító Matlab kód:

```
grAm=1+grBminus+corr;
```

Az S polinom fokszáma az elmélet szerint:

$$\text{gr } S = \text{gr } A + l - 1$$

A megvalósító Matlab kód:

```
grS=grA+lint-1;
```

Az A_o megfigyelő polinom fokszáma az elmélet szerint:

$$\text{gr } A_o = \text{gr } A + l - 1 - \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

A megvalósító Matlab kód:

```
grA0=grA+lint-1-corr;
```

A szabályozó R_1' polinomjának fokszáma az elmélet szerint:

$$\text{gr } R_1' = \text{gr } B^-$$

A megvalósító Matlab kód:

```
grR1prime=grBminus;
```

A fentiek alapján az A_m , A_o , B_m , B_m' polinomok már meghatározhatók a specifikációk alapján. Mivel az A_m polinom a tranzienszt ténylegesen befolyásoló domináns póluspárnál (2 gyök) több gyököt is tartalmazhat a fokszámától függően, ezért

```
grAmdiff=grAm-2;
```

darab extra pólust kell a modellbe tennünk. Ezek azonban a tranzienszt nem befolyásolhatják jelentősen, ezért az A_m polinom grAmdiff darab $z_{c\infty}$ gyököt tartalmaz:

```
zAm=[z1 conj(z1) repmat(zcinf,1,grAmdiff)]';
Am=poly(zAm);
```

A `repmat` függvény általánosan egy olyan hipermátrixot állít elő, ami a `zcinf` mátrixból álló blokkot (jelen esetben egy skalár) egyszer ismétli a sorok dimenziójában és `grAmdiff` számúszor az oszlopok dimenziójában. Hasonlóan előállíthatók az A_0 , B_m , B'_m polinomok is:

```
zA0=[repmat(zoinf,1,grA0)]';
A0=poly(zA0);
Bmprime=polyval(Am,1)/polyval(Bminus,1);
Bm=Bmprime*Bminus;
```

A `polyval(Am,1)` függvény az A_m polinomba 1-et helyettesít, így a B'_m előállítása az elméletnek megfelelően a

$$B'_m = \frac{A_m(1)}{B^-(1)}$$

kifejezésnek felel meg (B'_m biztosítja a nulla maradó hibát a szabályozásban).

A fenti polinomok előállítása után már csak a szabályozót meghatározó $T(z)$, $S(z)$, $R(z)$ illetve $R'_1(z)$ polinomok ismeretlenek. A polinomokat a

$$\begin{aligned} A &:= A(z-1)^l; \quad B := B^-; \quad C := A_m A_0 \\ X &:= R'_1 \text{ monic}; \quad Y := S \text{ nem monic} \end{aligned}$$

jelölések mellett az

$$AX + BY = C$$

diophantoszi egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. A polinomokat

$$\begin{aligned} A &= z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \\ B &= b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m \\ X &= z^k + x_1 z^{k-1} + \dots + x_k \\ Y &= y_0 z^h + y_1 z^{h-1} + \dots + y_h \\ C &= z^{n+k} + c_1 z^{n+k-1} + \dots + c_{n+k} \end{aligned}$$

alakban írhatjuk fel, amely Matlab környezetben a következő programkódhoz vezet:

```
CC=conv(Am,A0);
switch lint
case 0
    PolyInt=1;
case 1
    PolyInt=[1 -1];
case 2
    PolyInt=[1 -2 1];
otherwise
    fprintf('lint>2 is not recommended\n');
    R=[]; S=[]; T=[];
    return;
end;
AA=conv(A,PolyInt);
BB=Bminus;
```

Itt PolyInt reprezentálja az l változót. A diophantoszi egyenlet ezek alapján

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 & b_0 & 0 & . & . & . & 0 \\ a_1 & . & . & . & . & . & b_1 & . & . & . & . & . \\ a_2 & . & . & . & . & . & b_2 & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & 1 & . & . & . & . & b_0 & . \\ a_n & . & . & . & . & . & a_1 & b_m & . & . & b_1 & . \\ 0 & . & . & . & . & . & a_2 & 0 & . & . & b_2 & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . & . & a_n & 0 & . & . & b_m & . \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ x_k \\ y_0 \\ . \\ . \\ . \\ y_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \\ . \\ . \\ . \\ c_n - a_n \\ c_{n+1} \\ . \\ . \\ . \\ c_{n+k} \end{bmatrix},$$

ami Matlab kóddal:

```
nr=grRlprime;
ns=grS+1;
nvec=nr+ns;
if nr~=0
    arow=zeros(1,nr); arow(1)=AA(1);
    brow=zeros(1,ns); brow(1)=BB(1);
    atilde=[AA zeros(1,nvec-length(AA))]';
```

```

    btilde=[BB zeros(1,nvec-length(BB))];
    DiophMat=[toeplitz(atilde,arow) toeplitz(btilde,brow)];
    nca=length(AA);
    ncc=length(CC);
    vc1=CC(2:nca)';
    vc2=CC(nca+1:ncc)';
    va1=AA(2:nca)';
    DiophVec=[vc1-va1; vc2];
else
    brow=zeros(1,ns); brow(1)=BB(1);
    btilde=[BB zeros(1,nvec-length(BB))];
    DiophMat=[toeplitz(btilde,brow)];
    nca=length(AA);
    ncc=length(CC);
    vc1=CC(2:nca)';
    vc2=CC(nca+1:ncc)';
    va1=AA(2:nca)';
    DiophVec=[vc1-va1; vc2];
end;

```

Itt az `atilde` oszlopvektor adja a baloldali mátrix (`DiophMat`) első oszlopát, míg `arrow` a `DiophMat` mátrix baloldali blokkjának első sorát (az első elem értéke közömbös, mivel azt az `atilde` oszlopvektor első eleme determinálja). A függvény a mátrix első sorának és oszlopának alapján létrehozza a Toeplitz-struktúrájú mátrixot. Az elméletnek megfelelően a `DiophMat` mátrix két Toeplitz-struktúrájú blokkot tartalmaz. A `DiophVec` oszlopvektor a diophantoszi egyenlet jobboldalát reprezentálja (a `vc1`, `vc2`, `va1` vektorok a C és A polinomoknak a megoldáshoz szükséges együtthatóit tartalmazzák). Jegyezzük meg, hogy ebben nem szerepel a $C = A_m A_o$ polinom első együtthatója (ami egyébként a monik tulajdonság miatt 1). Vegyük észre azt is, hogy az elágazásra azért van szükség, mert

$$\text{gr } R'_1 = \text{gr } B^- = 0$$

esetén a `DiophMat` mátrix csak egy darab Toeplitz-blokkot tartalmazó mátrixszá degenerálódik.

Végezetül a diophantoszi egyenletet megoldása kiszámítható a

```

%Solution
rs=pinv(DiophMat)*DiophVec;

```

utasítással (a `pinv` függvény egy mátrix Moore-Penrose pszeudoinverzét állítja elő, amely numerikus szempontból robusztusabb az `inv` függvényénél), ahonnan a szabályozó polinomjai:

```

Rlprime=[1; rs(1:nr)]';

```

```
S=[rs(nr+1:length(rs))];
```

Az elmélet alapján

$$R = B^+ R' = B^+ (z-1)^l R'_l$$

$$T = B'_m A_0,$$

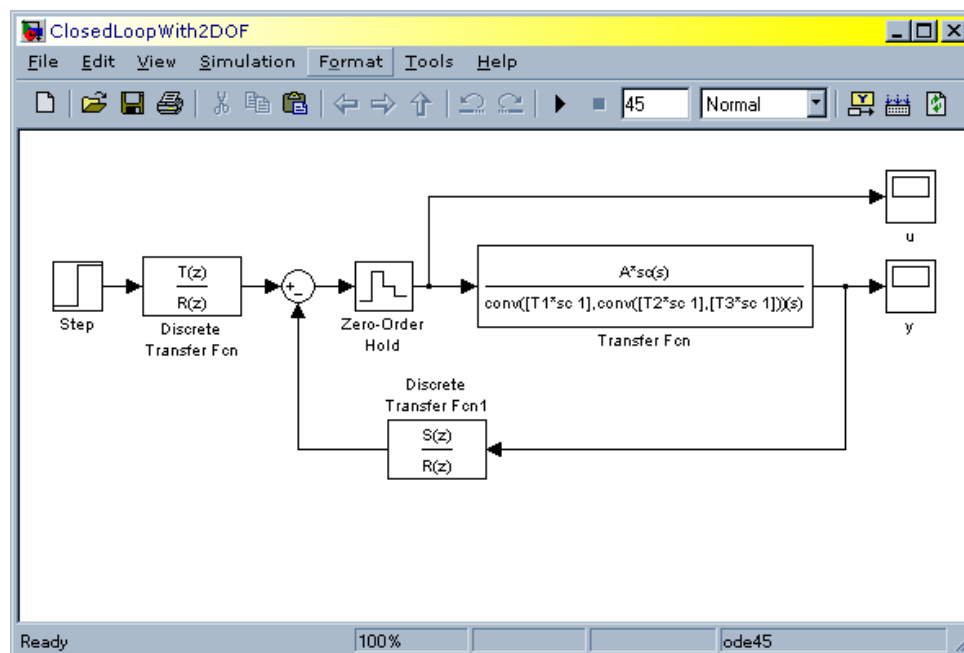
ezért a még hiányzó polinomok:

```
R=conv(Bplus,conv(PolyInt,Rlprime));
T=Bmprime*A0;
```

Ezzel a kétszabadságfokú szabályozótervezést elvégeztük. A függvény teljes forráskódja a függelékben található. A tervezést ellenőrző simulációt legegyszerűbben Simulink segítségével végezhetjük el (lásd 4.22. ábra):

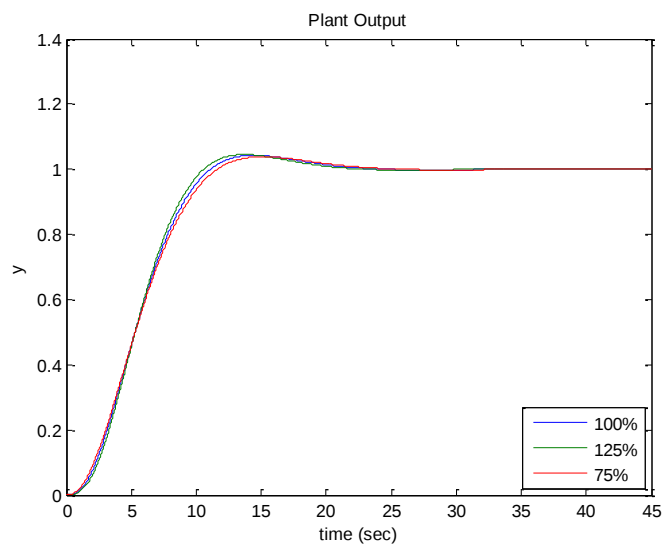
```
%Simulation
sc=1;
open_system('ClosedLoopWith2DOF')
sim('ClosedLoopWith2DOF')
```

Az *sc* változóval szimulálható a szabályozás robusztussága (azonos mértékben) megváltozott szakasz paraméterek esetén. Az *sc* paraméter egy szorzáson keresztül módosítja a szakasz paramétereit.

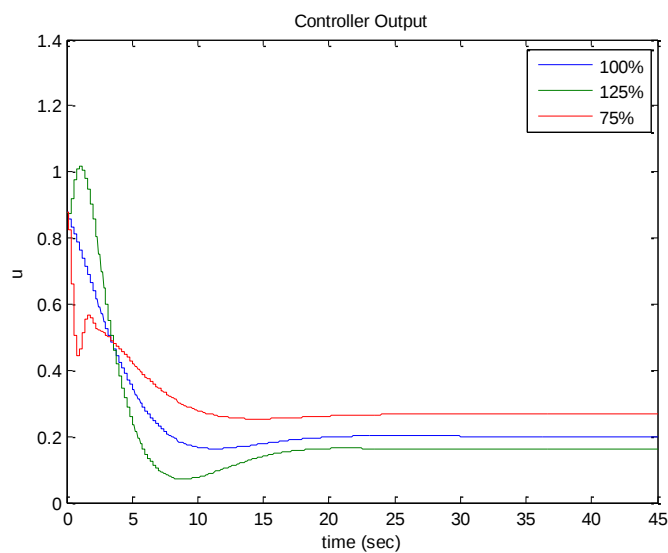


4.22. ábra. A kétszabadságfokú szabályozás Simulink modellje.

A szimulációkat $sc=1$, $sc=1.25$, $sc=0.75$ paraméterek mellett a 4.23. ábra és 4.24. ábra szemlélteti. Az ábrák kirajzolása úgy történt, hogy az oszcilloszkóp beállításával a kirajzolt jelet elmentjük a munkaterületre (workspace).



4.23. ábra A zárt rendszer kimenete egységugrás alapjel mellett $sc=1$ (kék), $sc=1.25$ (zöld) és $sc=0.75$ (piros) esetén.



4.24. ábra Beavatkozó jel alakulása a zárt rendszerben egységugrás alapjel mellett $sc=1$ (kék), $sc=1.25$ (zöld) és $sc=0.75$ (piros) esetén.

A kimenő jel túllövéséből és a túllövéshez tartozó időpont értékéből ellenőrizhető, hogy a specifikációban megkívánt zárt körű csillapítás és a csillapítatlan sajátfrekvenciával jellemzett tranziens gyorsaság elvárásai teljesülnek. Ennek belátását a korábbi tanulmányok alapján az olvasóra bizzuk. A jelek alakulásából látható, hogy a statikus pontosságot a kétszabadságfokú szabályozás még $\pm 25\%$ paraméterváltozás mellett is képes biztosítani a vizsgált rendszer esetén.

Függelék: A kétszabadságfokú szabályozó tervezését megvalósító függvény teljes programkódja:

```
function [R,S,T,Am,A0,Bplus,Bminus,Bmprime,Bm]=...
    TwodofController(W,xi,w0,scinf,soinf,lint,Ts)
%2DOF Controller Design
%W is sys
%xi: damping, w0: undamped eigenfrequency (dominating pole)
%scinf: further poles for Am (closed loop)
%soinf: poles for A0 (observer polynomial)
%lint: number of integrators in the controller
%Ts: sampling time
%R,S,T: controller polynomials
%Am: closed loop denominator polynomial
%A0: observer polynomial
%Bmprime: constant part in closed loop nominator polynomial
%Bm=Bmprime*Bminus

%Dominating pole in s
s1=-xi*w0+i*sqrt(1-xi^2)*w0;

%Specification in z
z1=exp(s1*Ts);
zcinf=exp(scinf*Ts);
zoinf=exp(soinf*Ts);

%Conversion W(s) to D(z)
D=c2d(W,Ts,'zoh')
B=D.num{1};
B=B(min(find(B~=0)):length(B)); %omit leading zeros in B
A=D.den{1};

%Decomposition of B
z=roots(B);
zm=z(find(abs(z)>=1 | (abs(z)<1 & imag(z)==0 & real(z)>-1 &
real(z)<0)));
zp=z(find(~(abs(z)>=1 | (abs(z)<1 & imag(z)==0 & real(z)>-1
& real(z)<0))));
```

```

Bplus=poly(zp);
Bminus=poly(zm);
Bminus=polyval(B,1)/(polyval(Bminus,1)*polyval(Bplus,1))*Bm
inus;

%Polynomial degrees
grA=length(A)-1;
grB=length(B)-1;
grBplus=length(Bplus)-1;
grBminus=length(Bminus)-1;
if grBminus==0, corr=1; else corr=0; end;
grAm=1+grBminus+corr;
grS=grA+lint-1;
grA0=grA+lint-1-corr;
grRlprime=grBminus;
grAmdiff=grAm-2;

%Compensation
zAm=[z1 conj(z1) repmat(zcinf,1,grAmdiff) ]';
Am=poly(zAm);
zA0=[repmat(zoinf,1,grA0) ]';
A0=poly(zA0);
Bmprime=polyval(Am,1)/polyval(Bminus,1);
Bm=Bmprime*Bminus;

%Diophantine Equation
CC=conv(Am,A0);
switch lint
    case 0
        PolyInt=1;
    case 1
        PolyInt=[1 -1];
    case 2
        PolyInt=[1 -2 1];
    otherwise
        fprintf('lint>2 is not recommended\n');
        R=[]; S=[]; T=[];
        return;
end;
AA=conv(A,PolyInt);
BB=Bminus;
nr=grRlprime;
ns=grS+1;
nvec=nr+ns;
if nr~=0
    arow=zeros(1,nr); arow(1)=AA(1);
    brow=zeros(1,ns); brow(1)=BB(1);
    atilde=[AA zeros(1,nvec-length(AA)) ]';
    btilde=[BB zeros(1,nvec-length(BB)) ]';
    DiophMat=[toeplitz(atilde,arow) toeplitz(btilde,brow)];

```

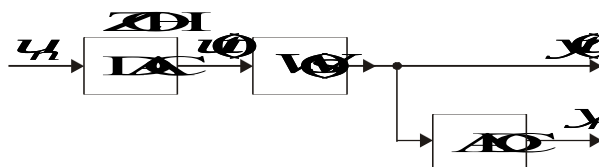
```
nca=length(AA);
ncc=length(CC);
vc1=CC(2:nca)';
vc2=CC(nca+1:ncc)';
va1=AA(2:nca)';
DiophVec=[vc1-va1; vc2];
else
    brow=zeros(1,ns); brow(1)=BB(1);
    btilde=[BB zeros(1,nvec-length(BB))];
    DiophMat=[toeplitz(btilde,brow)];
    nca=length(AA);
    ncc=length(CC);
    vc1=CC(2:nca)';
    vc2=CC(nca+1:ncc)';
    va1=AA(2:nca)';
    DiophVec=[vc1-va1; vc2];
end;
%Solution
rs=pinv(DiophMat)*DiophVec;
Rlprime=[1; rs(1:nr)]';
S=[rs(nr+1:length(rs))];
R=conv(Bplus,conv(PolyInt,Rlprime));
T=Bmprime*A0;
```

4. Ellenőrző kérdések a gyakorlathoz

1. A matematikai mintavételezés T mintavételi idővel felfogható modulációs eljárásnak, ahol a hordozó jel $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ eltolt Dirac-impulzusokból áll. Adja meg a hordozó jel $I_T(s)$ Laplace-transzformáltját és annak pólusait. Segítség: Használja a geometriai sor összegképletét.
2. Legyen $f(t)$ az analóg jel, $F(s)$ az analóg jel Laplace-transzformáltja, T a mintavételi idő, $i_T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT)$ a hordozó jel és $f^*(t) = f(t) \cdot i_T(t)$ a matematikailag mintavételezett jel. Adja meg a matematikailag mintavételezett jelnek a komplex konvolúciós tételből következő $F^*(s)$ Laplace-transzformáltját. Periódikus-e az $F^*(j\omega)$ függvény és ha igen, akkor mi a periódus hossza.
3. Legyen az $f(t)$ analóg jel sávkorlátozott és határ-körfrekvenciája $\omega_h = 2\pi f_h$. Adja meg a Shannon-tételt az analóg jel rekonstruálásáról a matematikailag mintavételezett jelből. Rajzolja fel a matematikailag mintavételezett jel frekvencia függvényének $|F^*(j\omega)|$ amplitúdó-függvényét és illusztrálja azon a Shannon-tételt. Mi az ω_N Nyquist-frekvencia definíciója a szabályozástechnikában?
4. Ábrázolja a matematikai mintavevő szerv és a nulladrendű tartószerv együttes hatását rajzon az időtartományban. Adja meg a nulladrendű tartószerv $w_{H_0}(t)$ súlyfüggvényét és $W_{H_0}(s)$ átviteli függvényét. Adja meg az abból következő tömör alakot a $|W_{H_0}(j\omega)|$ és a $\varphi_{H_0}(\omega)$ függvényekre.
5. Adja meg a nulladrendű tartószerv $W_{H_0}(s)$ átviteli függvényét és az abból következő tömör alakot a $|W_{H_0}(j\omega)|$ és a $\varphi_{H_0}(\omega)$ függvényekre. Ábrázolja a függvényeket ω -ban lineáris léptékben, és tüntesse fel a rajzon az ideális aluláteresztő függvény amplitúdó és fázis függvényeit is. Miért használunk tartószervet az ideális aluláteresztő szűrő helyett?
6. Legyen a megtervezett analóg szabályozóval a vágási frekvencia ω_c . Az analóg szabályozót mintavételes szabályozóval közelítjük, ahol a mintavételi idő T . Tekintettel arra, hogy a szabályozó kimenetén a DAC átalakító nulladrendű tartószerv funkcióval is rendelkezik, vezessen le a nulladrendű

tartószerv $\varphi_{H_0}(\omega)$ fázisfüggvényéből feltételt az $\omega_c T$ szorzatra, ha azt akarjuk, hogy a tartószerv ne rontson többet a fázistöbbleten, mint 5 fok.

7. A matematikailag mintavételezett $u^*(t)$ jelet keresztülküldjük a $w(t)$ súlyfüggvényű és $W(s)$ átviteli függvényű analóg tagon, amelynek hatására a kimenetén $y(t)$ analóg kimenő jel keletkezik, melyet matematikailag mintavételezve $y^*(t)$ keletkezik. Rajzolja fel az ennek megfelelő blokkvázlatot. Adja meg az $Y^*(s)$, $W^*(s)$, $U^*(s)$ közötti kapcsolatot olyan alakban, amelyből következik $Z\{y(nT)\} = Z\{w(nT)\} \cdot Z\{u(nT)\}$. Milyen összefüggés áll ekkor fenn z és s között?
8. Tekintsük a folytonosidejű $W(s)$ lineáris tagot bemenetén DAC és kimenetén ADC átalakítóval az alábbi ábra szerint:

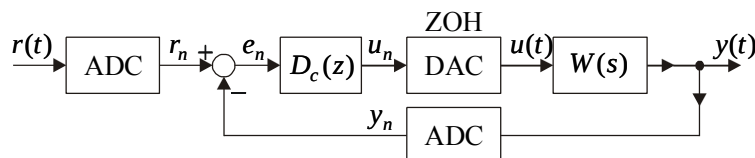


A DAC átalakító nulladrendű tartószerv tulajdonsággal is rendelkezik. Adja meg az együttes $D(z)$ eredő diszkrétidejű átviteli függvény és az analóg tag $v(t)$ átmeneti függvénye közötti kapcsolatot. Hogyan határozható meg $D(z)$ a MATLAB Control System Toolbox (CST) szolgáltatásaival? Hova képződnek le $W(s)$ -nek az s_i pólusai? Igaz ez a zérushelyekre is?

9. Vezesse le, hogyan számítható a stabil, integrátort nem tartalmazó $D(z)$ diszkrétidejű átviteli függvényű, $u_0 1(t)$ bemenő jelű és y kimenő jelű tag ekvivalens $A := y(\infty)/u_0$ statikus átviteli tényezője.

Segítség: Alkalmazza a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) F(z)$ végérték tételt.

10. Tekintsük egy egyszerű mintavételes szabályozási kör hatásvázlatát az alábbi ábra szerint:



Hogyan határozható meg a DAC, $W(s)$, ADC együttes eredő $D(z)$ diszkrétidejű átviteli függvénye? Adja meg a zárt rendszer eredő $D_{yr}(z)$ és $D_{ur}(z)$ átviteli függvényeit $D(z)$ -vel és $D_c(z)$ -vel kifejezve.

11. Adja meg az s differenciáló operátor közelítését z -ben hátrtartó differenciálással (BWD) és előretartó differenciálással (FWD). Adja meg az $1/s$ integráló operátor közelítését z -ben bal oldali téglalap szabállyal (LSR) és jobb oldali téglalap szabállyal (RSR), valamint az ebből s -re következő alakot. Van-e hasonlóság a differenciáló és az integráló operátorok közelítései között?
12. Vezesse le a trapézszabályt (TR) az $1/s$ integráló operátor közelítésére z -ben, vagy más néven a Tustin-képletet. Adja meg az $s \rightarrow z$ és a $z \rightarrow s$ helyettesítések képleteit. Hogyan végezhetők el az áttérések $W(s)$ és $D(z)$ között a MATLAB CST szolgáltatásaival?
13. Egységugrás ekvivalencia esetén azt akarjuk, hogy a $W(s)$ analóg tag és annak $D(z)$ közelítése az $u(t) = 1(t)$ bemenő jelre egyformán válaszoljon (a mintavételi időpontokban). Vezesse le az egységugrás ekvivalens $W(s) \rightarrow D(z)$ áttérésre szolgáló képletet. Hogyan valósítható meg az áttérés a MATLAB CST szolgáltatásaival?
14. Vezessen le képletet az ideális PID szabályozó mintavételes közelítésére az integráló tagot jobb oldali téglalap szabállyal (RSR), a differenciáló tagot pedig hátrtartó differenciálással (BWD) közelítve. Adja meg

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

fenti elvű közelítésében a q_0, q_1, q_2 együtthatók kifejezését az analóg szabályozó A_p, T_i, T_d paramétereivel és a T mintavételi idővel.

15. Vezessen le képletet a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó mintavételes közelítésére az egységugrás ekvivalencia elve alapján. Adja meg

$$D_{PID}(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{p_0 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2}}$$

fenti elvű közelítésében a q_0, q_1, q_2 és p_0, p_1, p_2 együtthatók kifejezését az analóg szabályozó A_p, T_i, T_d, T_c paramétereivel és a T mintavételi idővel.

16. Adja meg a blokkvázlatát a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó mintavételes közelítésének integrátor antiwindup kiegészítéssel. Magyarázza el az kiegészítés célját. Vezesse le az egyes blokkokban álló tagok z -átviteli függvényét.

Segítség: Használja $V_{PD}(s)$ három blokkját, az egységugrás ekvivalencia elvét, valamint a következő összefüggéseket:

$$Z\{1, 1, 1, \dots\} = \frac{1}{1 - z^{-1}}, \quad Z\{0, T, 2T, 3T, \dots\} = \frac{Tz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2},$$

$$Z\{1, e^{s_i T}, e^{s_i 2T}, e^{s_i 3T}, \dots\} = \frac{1}{1 - e^{s_i T} z^{-1}}.$$

17. A zárt rendszer s -ben specifikált domináns konjugált komplex póluspárjának csillapítása és csillapítatlan sajátfrekvenciája legyen rendre ξ és ω_0 . Fejezze ki ezekkel az $s_{1,2}$ domináns konjugált komplex póluspárt valós rész és képzetes rész alakban. A zárt rendszer további és a megfigyelő polinom specifikált pólusai (sajátértékei) legyenek rendre s_{∞} és $s_{o\infty}$. Adja meg a specifikációk átszámítási szabályát $z_{1,2}, z_{\infty}, z_{o\infty}$ -be.
18. Adja meg a Nyquist-féle stabilitáskritérium általános alakját diszkrét időben. Rajzolja fel a kontúrgörbét a bizonyításhoz az argumentum-elv alapján. Indokolja ez alapján, mit kell helyettesíteni z -be és milyen ω tartományban a stabilitáskritérium alkalmazásakor.
19. Adja meg a Bode-féle stabilitáskritérium általános alakját, ha a felnyitott körnek nincsenek labilis pólusai. Mi a vágási frekvencia és a fázistöbblet definíciója? Mit helyettesít z -be és milyen ω tartományban a MATLAB `CST dbode` függvénye?
20. Adja meg a kétszabadságfokú (2-DOF) szabályozó elvi felépítését és célszerű megvalósítását. Jelölje $D(z) = B(z)/A(z)$ a szakasz diszkrétidejű átviteli függvényét. Legyen a zárt rendszer referenciamodellje $B_m(z)/A_m(z)$, és legyen a megfigyelő (observer) polinom $A_o(z)$. Mi a szakasz $B(z)$ polinomjának szabályozástechnikai szempontból helyes $B^+(z)B^-(z)$ faktorizációja, ha a zárt rendszerben $B^+(z)$ kiejtésére törekszünk? Legyen a szabályozóban az integrátorok száma l , a szabályozó az előrevezető ágban $T(z)/R(z)$, a visszacsatoló ágban pedig $S(z)/R(z)$. Adja meg ekkor $R(z), B_m(z), T(z)$ alakját, továbbá a szabályozóban még megválasztható részek meghatározására szolgáló diophantoszi polinomegyenletet.
21. A kétszabadságfokú (2-DOF) szabályozó tervezésekor a realizálhatósági (kauzalitási) és más rendszertechnikai feltételek alapján megállapítást nyert, hogy ha a szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye $B(z)/A(z)$, a szabályozóban az integrátorok száma l , a szabályozó az előrevezető ágban $T(z)/R(z)$, a visszacsatoló ágban pedig $S(z)/R(z)$, továbbá a referencia

modell $B_m(z)/A_m(z)$ és a megfigyelő polinom $A_o(z)$, akkor a következő fokszámfeltételek betartására kell törekedni:

$$gr A_m = 1 + gr B^- + \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad gr A_o = gr A + l - 1 - \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

$$gr S = gr A + l - 1, \quad gr R'_1 = gr B^-, \quad B'_m = A_m(1)/B^-(1)$$

Legyen $B^+ = 1$, $gr B^- = 2$, $gr A = 3$, $l = 1$, továbbá a specifikációk z -ben $z_{1,2}$ (domináns konjugált komplex póluspár), $z_{c\infty}$ és $z_{o\infty}$. Határozza meg a polinomok fokszámát, válassza meg az A_m, A_o polinomokat, adja meg az S, R'_1 polinomokat a benne szereplő ismeretlenekkel, és írja fel a megoldandó diophantoszi egyenletet lineáris egyenletrendszer alakjában.

22. A kétszabadságfokú (2-DOF) szabályozó tervezésekor megállapítást nyert, hogy ha a szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye $B(z)/A(z)$, a zárt rendszer előírt modellje $B^-(z)B'_m/A_m(z)$, a megfigyelő polinom $A_o(z)$ és a szabályozó $l=1$ integrátort is tartalmaz, akkor a kauzalitási és más rendszertechnikai előírások betartása érdekében a helyes választás:

$$\begin{aligned} A_m &= (z - z_1)(z - \bar{z}_1)(z - z_{c\infty}) & A_m A_o &= z^6 + c_1 z^5 + \dots + c_6 \\ A_o &= (z - z_{o\infty})^3 & A(z-1) &= z^4 + \tilde{a}_1 z^5 + \dots + \tilde{a}_4 \\ S &= s_0 z^3 + s_1 z^2 + s_2 z + s_3 & B &= B^- = b_0 z^2 + b_1 z + b_2 \\ R'_1 &= z^2 + r_1 z + r_2 \end{aligned}$$

Írja fel megoldandó diophantoszi polinomegyenlettel ekvivalens lineáris egyenletrendszert az ismeretlen együtthatók meghatározására. Adja meg B'_m számítási szabályát és a szabályozó $T(z)$, $R(z)$ és $S(z)$ polinomjait.

23. Adja meg a $z \rightarrow w$ bilineáris (Tustin) transzformációt, és ebből a z helyettesítésére szolgáló kifejezést a $D(z) \rightarrow D(w)$ áttéréskor. Hová képződik $z - z_i$ és $z - 1$? Adja meg ezek felhasználásával $D(w)$ alakját, ha $D(z)$ alakja a következő volt:

$$D(z) = A_z \frac{\prod_1^m (z - z_{Di})}{(z - 1)^l \prod_1^n (z - z_i)}.$$

Van-e $D(w)$ -nek jobb félsíkon lévő zérus helye, és ha igen, akkor hol és milyen multiplicitással, továbbá milyen hatást fejt ki a fázistöbbletre?

24. Adja meg a bilineáris transzformáción alapuló szabályozótervezés során a $W(s) \rightarrow D(z) \rightarrow D(w) \rightarrow D_c(w) \rightarrow D_c(z)$ áttérések megvalósítását a

MATLAB CST szolgáltatásaival, ügyelve az alkalmazott modell helyes megválasztására az egyes lépéseknél. Adja meg az egyenletrendszert a $D_c(w)$ szabályozó tervezésére az `fsolve` függvény segítségével.

25. Adja meg a véges beállási idejű (dead-beat) szabályozás tervezési célkitűzéseit. Legyen a szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye $D(z^{-1}) = B(z^{-1})/A(z^{-1})$. Mi lesz a véges beállási idejű $D_c(z^{-1})$ szabályozó alakja, ha $L(z^{-1})$ korrekciós polinomot is alkalmazunk? Hol lesznek a zárt szabályozási kör pólusai dead-beat szabályozásnál?
26. Adja meg a véges beállási idejű (dead-beat) szabályozás tervezésekor az $L(z^{-1}) = l_0 + l_1 z^{-1}$ korrekciós polinom együtthatói megválasztásának elvét. Indokolja a képleteket, felhasználván a diszkrétidejű konvolúciós tételt, továbbá hogy $D_{yr}(z^{-1}) = K(z^{-1})$ és $D_{ur}(z^{-1}) = M(z^{-1})$ FIR rendszerek és a referencia jel (alapjel) egységugrás. Adja meg a szakasz u bemenő és y kimenő jeleinek ideális alakját rajzban, ha a bemenetre $u_{\max}$ feltétel van előírva. Adja meg az $f(T)$ függvény alakját, ha a mintavételi idő megválasztásához az `fsolve` függvényt használjuk fel.
27. Holtidőt is tartalmazó rendszer esetén célszerű úgy szabályozni, hogy az eredő rendszer legyen olyan, mint egy jól megtervezett szabályozási rendszer a holtidő nélküli szakasszal, kiegészítve egy extra holtidős taggal. Adja meg a Smith-prediktorral történő fenti elvű szabályozás elvét illusztráló hatásvázlatokat. Vezesse le ebből, hogy ha a holtidő nélküli rendszerhez tervezett szabályozó $W_c(s)$, akkor minek kell lennie a $W_{cs}(s)$ Smith-prediktornak. Tegyük fel ezután, hogy a holtidő egész számú többszöröse a mintavételi időnek: $T_h = d \cdot T$, tehát $e^{-sT_h} = z^{-d}$ shift-operátor a memóriában. Legyen a holtidő nélküli szakasz diszkrétidejű átviteli függvénye $D(z) = B(z)/A(z)$, a hozzá tervezett szabályozóé pedig $D_c(z) = S(z)/R(z)$. Adja meg a $D_{cs}(z)$ Smith-prediktort és az ebből következő differenciaegyenletet, ha a szabályozó bemenete az e hibajel, kimenete pedig az u beavatkozó jel.