ANALÍZIS 2. **VIZSGADOLGOZAT** **2013. május 30.**

Mérnök informatikus szak Munkaidő: 90 perc

1. feladat (4+12 pont)

a) Igazolja, hogy az n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet megoldásai lineáris teret alkotnak.

b) Írja fel az

$$y'' + 6y' + 9y = 32e^{-3x} + 12$$

általános megoldását.

---

a) Ha y_1, y_2 megoldásai az

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0$$

diffegyenletnek, akkor

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)(y_1+y_2)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)\left(y_1^{(i)} + y_2^{(i)}\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y_1^{(i)} + \sum_{i=0}^{n} a_i(x)y_2^{(i)} = 0$$

vagyis $y_1 + y_2$ is megoldás (**2 pont**), és ha y megoldás, akkor

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(x)(cy)^{(i)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(x)cy^{(i)} = c\sum_{i=0}^{n} a_i(x)y^{(i)} = 0,$$

vagyis cy is megoldás (**2 pont**).

b) A homogén egyenlethez megoldjuk a $0 = \lambda^2 + 6\lambda + 9 = (\lambda + 3)^2$ egyenletet. Ennek megoldásai $\lambda_{1,2} = -3$, tehát

$$y_h = (c_1x + c_2)e^{-3x} \qquad \textbf{(5 pont)}$$

A külső rezonancia miatt az inhomogén egyenlet partikuláris megoldását $y_{ip} = Ax^2e^{-3x} + B$ alakban keressük (**2 pont**).

$$\begin{array}{rcl|l} y_{ip} & = & Ax^2e^{-3x} + B & \cdot 9+ \\ y'_{ip} & = & (2Ax - 3Ax^2)e{-3x} & \cdot 6+ \\ y''_{ip} & = & (2A - 6Ax - 6Ax + 9Ax^2)e^{-3x} & \\ \hline \end{array} \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$(9A-18A+9A)x^2e^{-3x}+(12A-6A-6A)e^{-3x}+2Ae^{-3x}+9B = 32e^{-3x}+12,$
így $A = 16,\ B = 4/3.$

$$y_{\text{á}} = (c_1x + c_2)e^{-3x} + 16x^2e^{-3x} + \frac{4}{3} \qquad \textbf{(2 pont)}$$

---

2. feladat (13 pont)
Írja fel az $x_0 = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát és annak konvergenciasugarát:

$$f(x) = \frac{x^3}{\sqrt[3]{8+x^2}}$$

Mennyi $f^{(100)}(0) = ?\,,\qquad f^{(99)}(0) = ?$

$$f(x) \overset{\textbf{1 pont}}{=} x^3(8+x^2)^{-\frac{1}{3}} \overset{\textbf{1 pont}}{=} \frac{x^3}{2}\left(1+\frac{x^2}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \overset{\textbf{3 pont}}{=}$$
$$= \frac{x^3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{2n}}{8^n} \overset{\textbf{1 pont}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{3}}{n}\frac{x^{2n+3}}{2\cdot 8^n},$$

ha $\left|\frac{x^2}{8}\right| < 1$, vagyis $x^2 < 8$, tehát a konvergenciasugár $\sqrt{8}$ (**2 pont**).

$f^{(100)}(0) \overset{\textbf{2 pont}}{=} 0$, mert nincs olyan egész n, melyre $2n+3 = 100$, de $2\cdot 48+3 = 99$, így

$$f^{(99)}(0) \overset{\textbf{3 pont}}{=} \frac{99!}{2\cdot 8^{48}}\binom{-\frac{1}{3}}{48}.$$

---

3. feladat (6+11 pont)

a) Hogyan definiáljuk egy 2π szerint periodikus függvény Fourier sorát?

b) Adja meg az $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ függvény Fourier- sorát, és annak összegfüggvényét.

---

a) Az f függvény Fourier-sora

$$\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right), \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

ahol

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (\mathbf{2\ pont})$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (2k\pi, (2k+1)\pi) \\ 0, & x = k\pi \\ -1, & x \in ((2k+1)\pi, (2k+2)\pi) \end{cases}$$

f páratlan, így $a_n = 0$, $n = 0, 1, \ldots$. (**3 pont**)

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \overset{\mathbf{2\ pont}}{=} \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} \sin(nx) dx \overset{\mathbf{1\ pont}}{=}$$
$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{-\cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} \overset{\mathbf{1\ pont}}{=} \frac{2}{\pi} \left(\frac{-(-1)^n + 1}{n}\right)$$

így a Fourier-sor

$$\Phi(x) \overset{\mathbf{2\ pont}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n+1)} \sin((2n+1)x),$$

összegfüggvénye:

$$\phi(x) \overset{\mathbf{2\ pont}}{=} \begin{cases} f(x), & x \neq k\pi, \\ \frac{1+(-1)}{2}, & x = k\pi, \end{cases}$$

vagyis $\phi(x) = f(x)$.

---

4. feladat (6+8=14 pont)

a) Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény. Írja le f $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ pontbeli totális differenciálhatóságának és az iránymenti deriváltjainak definícióját. Mit tudunk az iránymenti deriváltakról, ha teljesül a totális differenciálhatóság?

b) Legyen $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x \sin(yz^2)$, $P_0 = (1, 0, 1)$. Mennyi az f függvény $v = (1, -2, 3)$ irányú iránymenti deriváltja?

---

a) Totális diffhatóság: létezik $\underline{A} = \operatorname{grad} f(\underline{x}_0)$, melyre

$$\lim_{|\underline{h}| \to 0} \frac{(\underline{x}_0 + \underline{h}) - f(\underline{x}_0) - \underline{A}h}{|\underline{h}|} = 0. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

$\underline{v}$ irányú iránymenti derivált:

$$\frac{df}{d\underline{e}}(\underline{x}_0) = \lim_{t \to 0} \frac{(\underline{x}_0 + t\underline{e}) - f(\underline{x}_0)}{t}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

ahol $\underline{e} = \frac{\underline{v}}{|\underline{v}|}$.

Ha f totálisan differenciálható az $\underline{x}_0$ pontban, akkor az iránymenti deriváltak léteznek és

$$\frac{df}{d\underline{e}}(\underline{x}_0) = \operatorname{grad} f(\underline{x}_0) \cdot \underline{e}. \qquad \textbf{(2 pont)}$$

b) $\operatorname{grad} f \overset{\textbf{3pont}}{=} (\sin(yz^2), xz^2 \cos(yz^2), 2xyz \cos(yz^2))$, tehát

$$\frac{df}{d\underline{e}}(\underline{x}_0) \overset{\textbf{1pont}}{=} \operatorname{grad} f(P_0) \cdot \frac{(1, -2, 3))}{\sqrt{1 + 4 + 9}} \overset{\textbf{2pont}}{=} (0, 1, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}} \right) \overset{\textbf{2pont}}{=} \frac{-2}{\sqrt{14}}.$$

---

5. feladat (10 pont)*

Számolja ki az

$$f(x, y, z) = \cos(x^2 + y^2)$$

függvény integrálját az $1 \leq x^2 + y^2 < 4$, $0 \leq z \leq 3$, $x \leq 0$ halmazon.

Az $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$ hengerkoordinátákra áttérve a halmaz téglatestre transzformálódik: $r \in [1,2)$, $\varphi \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $z \in [0,3]$ (**5 pont**), így

$$\int \cos(x^2+y^2)dV \overset{\textbf{2 pont}}{=} \int_0^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^2 r\cos r^2 dr d\varphi dz \overset{\textbf{3 pont}}{=} 3\pi\left[\frac{\sin r^2}{2}\right]_1^2 = \frac{3\pi(\sin 4 - \sin 1)}{2}$$

---

6. feladat (4+7+7 pont)*

a) Igazolja, hogy reguláris függvény valós illetve képzetes része harmonikus.

b) Hol differenciálható és hol reguláris az

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 - 2ixy$$

függvény?

c) Számolja ki az f függvény integrálját a 0 kezdőpontú i végpontú szakaszon.

---

a) Ha $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ reguláris, akkor $u'_x = v'_y$ és $u'_y = -v'_x$ (**1 pont**), vagyis

$$v''_{yy} = u''_{xy} = u''_{yx} = -v''_{xx}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

így $v''_{xx} + v''_{yy} = 0$, tehát v harmonikus (**1 pont**).

b) Itt $u = x^2 - y^2$, $v = -2xy$, tehát ahol f differenciálható, ott

$$u'_x = 2x = -2x = v'_y, \qquad u'_y = -2y = -(-2y) = -v'_x, \qquad \textbf{(3 pont)}$$

így f csak a $z = 0$ pontban lehet diffható (**1 pont**), és itt az is, mert a parciális deriváltak folytonosak (**1 pont**). A függvény csak egy pontban differenciálható, így sehol sem reguláris (**2 pont**).

c) A szakasz pontjait $z(t) = it$, $t \in [0,1]$ írja le (**2 pont**). $z'(t) = i$ (**1 pont**), tehát

$$\int_{[0,i]} f(z)dz \overset{\textbf{1 pont}}{=} \int_0^1 f(z(t))z'(t)dt \overset{\textbf{2 pont}}{=} i\int_0^1 -t^2 dt \overset{\textbf{1 pont}}{=} -i\left[\frac{t^3}{3}\right] = \frac{-i}{3}.$$

---

7. feladat (12 pont)*
Mennyi

$$\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{\mathrm{sh} z}{z^3 - 5z^2} dz?$$

Izolált szingularitások: $0, 5$, mindkettő a görbe, (vagyis a 2 középpontú 4 sugarú kör) belsejében van (**3 pont**), így

$$\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{\mathrm{sh}\, z}{z^3 - 5z^2} dz \overset{\textbf{3 pont}}{=} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\mathrm{sh} z}{z-5}}{z^2} dz + \oint\limits_{|z-5|=1} \frac{\frac{\mathrm{sh} z}{z^2}}{z-5} dz$$

Itt

$$\oint\limits_{|z|=1} \frac{\frac{\mathrm{sh}\, z}{z-5}}{z^2} dz \overset{\textbf{3 pont}}{=} 2\pi i \left(\frac{(0-5)\,\mathrm{ch}\, 0 - \mathrm{sh}\, 0}{(0-5)^2} \right)$$

és

$$\oint\limits_{|z-5|=1} \frac{\frac{\mathrm{sh}\, z}{z^2}}{z-5} dz \overset{\textbf{2 pont}}{=} 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{sh}\, 5}{5^2},$$

vagyis

$$\oint\limits_{|z-2|=4} \frac{\mathrm{sh}\, z}{z^3 - 5z^2} dz \overset{\textbf{1 pont}}{=} 2\pi i \cdot \frac{\mathrm{sh}\, 5 - 5}{25}$$

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.):

8. feladat (10 pont)
Oldja meg az

$$y' = \frac{y^2 + 4}{y^2 + 1} x e^{2x^2}$$

differenciálegyenletet (elég az implicit alak).

$$\int \frac{y^2+1}{y^2+4}dy = \int xe^{2x^2}dx \qquad \textbf{(3 pont)}$$

$$\int \frac{y^2+1}{y^2+4}dy == \int 1 - \frac{3}{4}\frac{1}{\left(\frac{y}{2}\right)^2+1}dy = y - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} \qquad \textbf{(4 pont)}$$

$$\int xe^{2x^2}dx = \frac{1}{4}e^{2x^2}, \qquad \textbf{(2 pont)}$$

így a megoldás

$$y - \frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{y}{2} = \frac{1}{4}e^{2x^2} + c \qquad \textbf{(1 pont)}$$

---

9. feladat (10 pont)

Adja meg az

$$f(x) = \frac{3}{2x+4}$$

függvény $x_0 = -1$ körüli Taylor-sorát és annak konvergenciatartományát.

$$f(x) \overset{\textbf{2 pont}}{=} \frac{3}{2(x+1)+2} \overset{\textbf{2 pont}}{=} \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{1-(-(x+1))} \overset{\textbf{3 pont}}{=} \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x+1)^n$$

ha $|x+1| < 1$ (**1 pont**), vagyis $KT = (-2, 0)$, (**2 pont**).