

3. Gyakorlat

3. Tantermi gyakorlat – Folytonosidejű lineáris szabályozások tervezése

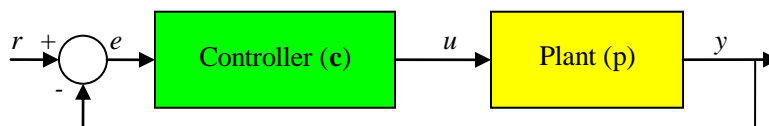
A tantermi gyakorlat célja, hogy a hallgatók gyakorlati ismereteket szerezzenek folytonosidejű, lineáris szabályozási körök tervezésében, soros kompenzátorok méretezésében. A kompenzátorok a különböző gyakorlati alkalmazásokban széles körben használt P/PI/PD/PID szabályozók köréből kerülnek ki.

Soros kompenzálás

A szabályozási körben a rendelkező jellel (hibajellel) meghajtott és a beavatkozó jelet előállító, a szakasszal *sorba* kapcsolt szabályozó tagot soros kompenzátornak is nevezzük. A soros kompenzátor átviteli függvényét úgy tervezzük meg, hogy a zárt szabályozási kör viselkedése az előírásoknak megfelelő legyen. A soros kompenzátort átviteli függvényével fogjuk megadni.

A szabályozási körrel szemben támasztott alapvető követelmény, hogy stabil legyen. Labilis működésű szabályozási kör tervezésének nincsen értelme. Ugyanakkor számos kívánatos tulajdonság, nevezetesen a statikus pontosság a zajelnyomás és a gyorsaság csak a stabilitás rovására növelhető bizonyos határon túl.

A 3.1. ábrán egy szabályozási kör látható.



3.1. ábra. Szabályozási kör soros kompenzátorral

A szakasz átviteli függvényét $W_p(s)$ -sel, a sorosan kapcsolt szabályzó átviteli függvényét pedig $W_c(s)$ -sel jelöljük. Mint ismeretes, a stabilitás vizsgálata szempontjából (is) fontos hurokátviteli függvény

$$W_o(s) = W_c(s)W_p(s) = \frac{K}{s^i} W_{o1}(s), \quad W_{o1}(0) = 1$$

alakú, ahol K a körerősítés és i a szabályozási kör típuszáma. Mindkettő megválasztása befolyásolja a szabályozási kör követési és zavarelnyomási tulajdonságait.

Soros kompenzátorok típusai

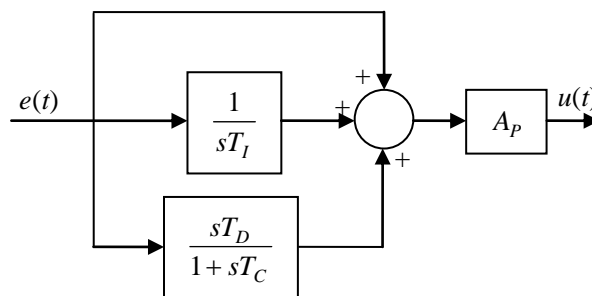
Elviekben tetszőleges módon megválasztható a szabályzó $W_c(s)$ átviteli függvénye. Gyakorlati szempontból célszerűtlen ugyanakkor labilis pólusokat is tartalmazó átviteli függvényt választani, vagy a nevező és számláló fokszámait olyan magasra emelni, hogy a behangolandó paraméterek száma túlságosan nagy legyen.

A leggyakrabban alkalmazott soros kompenzátorok három hatást kombinálnak. Ezeket alábbi táblázat foglalja össze.

Jelölés	Típus	Időtartománybeli összefüggés	Átviteli függvény	Paraméterek
P	Arányos	$u(t) = A_p e(t)$	$W_P(s) = A_p$	A_p erősítés
I	Integráló	$u(t) = \frac{1}{T_I} \int_{\tau=0}^t e(\tau) d\tau$	$W_I(s) = \frac{1}{sT_I}$	T_I integrálási időállandó
D_i	ideális Deriváló	$u(t) = T_D \frac{d}{dt} e(t)$	$W_{D_i}(s) = sT_D$	T_D deriválási időállandó
D	közelítő Deriváló	$T_D \dot{e}(t) = u(t) + T_C \dot{u}(t)$	$W_D(s) = \frac{sT_D}{1 + sT_C}$	T_D deriválási időállandó; T_C időállandó

Az ideális deriváló tag valós fizikai rendszerrel nem valósítható meg, viszont T_C megfelelően kis értékű megválasztásával tetszőlegesen közelíthető. A közelítő deriváló (approximate D) tagot (egytárolós) szűrővel kombinált D hatásnak (filtered D) is nevezhetjük.

A hatások kombinációit jelölő P, PI, PD, PID betűszavak szabályzó típusokat definiálnak. A PID szabályzó az összes hatást tartalmazza az alábbi kapcsolásban.



3.2. ábra. A PID szabályzó hatásvázlata

A szabályzó átviteli függvényeire rendre a $W_P(s)$, $W_{PI}(s)$, $W_{PD}(s)$, $W_{PID}(s)$ jelölésekkel hivatkozunk.

A korlátozott készlet ellenére a szabályzók megválasztása és paramétereik beállítása kreatív feladat, amelyet a szabályozási körrel szemben támasztott elvárások is befolyásolnak. A szakirodalomban ugyanakkor számos szisztematikus eljárás áll rendelkezésre a beállítások helyes megtalálásának segítésére. Itt néhány kitüntetett eljárás ismertetésére és az elgondolások gyakorlati indoklására szorítkozunk, a részletesebb kifejtést a tankönyv tartalmazza.

A P típusú szabályzó

A P típusú szabályzó átviteli függvénye

$$W_p(s) = A_p,$$

a szabályzó A_p erősítése pozitív szám. A szabályzó a felnyitott kör átviteli függvényének típuszámát és fáziszenetét nem változtatja meg, ugyanakkor a körerősítést A_p -szeresére módosítja. Általánosságban elmondható, hogy a körerősítés növelésével a vágási frekvencia nő, a fázistartalék csökken.

Tekintsük a

$$W_p(s) = \frac{A}{(1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3)}$$

átviteli függvényű szakaszt, és legyen a szakasz erősítése $A = 5$, az időállandók pedig rendre $T_1 = 10$, $T_2 = 4$ és $T_3 = 1$. Vizsgáljuk meg, hogy a fázistartalék és az egységugrás alapjel esetén keletkező statikus hiba hogyan alakul az $A_p = 1$ és $A_p = 3$ választások esetén.

Emlékeztetőül megjegyezzük, hogy a Matlab CST toolbox (röviden Matlab) `margin` parancsa teszi lehetővé a fázistartalék (P_m – phase margin) és a hozzá tartozó vágási frekvencia (crossover frequency) meghatározását.

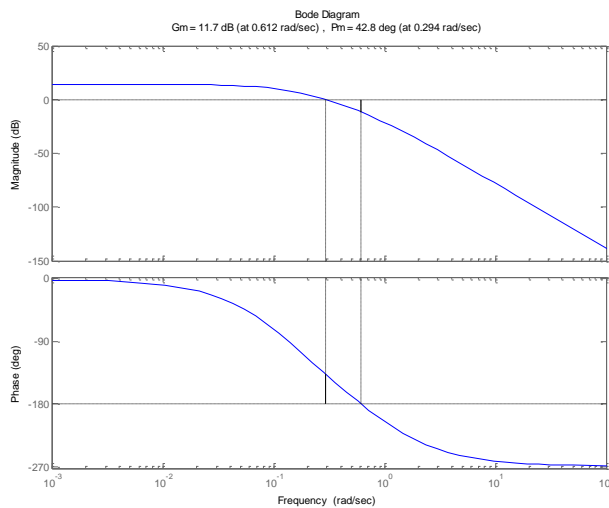
Elsőként tekintsük az $A_p = 1$ esetet. Ekkor a körerősítés $K = A \cdot A_p = 5$, a szabályozási kör típuszáma pedig nulla, tehát a statikus hiba

$$e_\infty = \frac{1}{1 + K} = \frac{1}{6} = 0.16667.$$

Most határozzuk meg a fázistartaléket és a vágási frekvenciát a `margin` utasítással.

```
>> szakasz=tf(5,conv(conv([10 1],[4 1]),[1 1]));
>> margin(series(tf(1,1),szakasz)); % Ap = 1
```

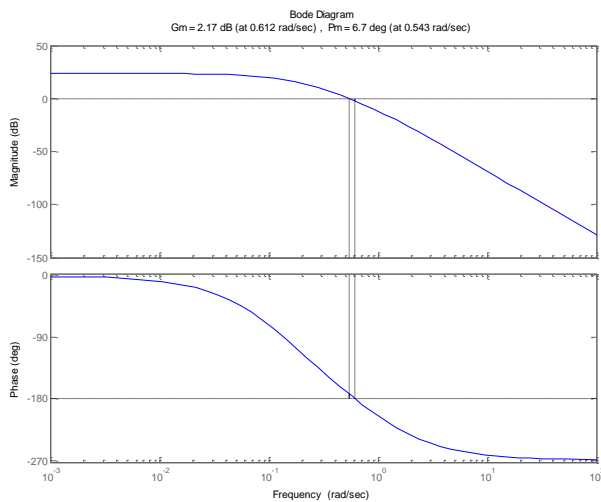
Leolvasható, hogy a fázistartalék $\varphi_t = 42.8^\circ$, a vágási frekvencia pedig $\omega_c = 0.294 \text{ rad/s}$.



3.3. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja P típusú szabályzóval $A_p = 1$ választás mellett.

Most vizsgáljuk meg az $A_p = 3$ esetet. A felnyitott kör Bode-diagramja és a fázistartalék látható a 3.4. ábrán.

```
>> margin(series(tf(3,1),szakasz));
```



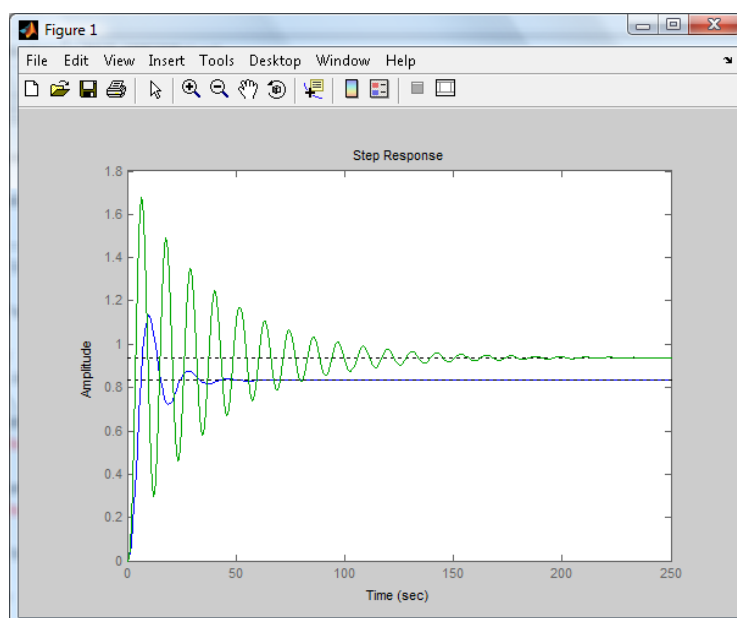
3.4. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja P típusú szabályzóval $A_p = 3$ választás mellett.

A körerősítés növelésével a vágási frekvencia nőtt ($\omega_c = 0.543\text{rad/s}$), a fázistartalék csökkent ($\varphi_t = 6.3^\circ$). Ez utóbbi a stabilitás szempontjából kritikusán alacsony. Az egységugrás alapjel esetén a maradó hiba ugyanakkor szintén csökkent

$$e_\infty = \frac{1}{1+K} = \frac{1}{16} = 0.0625.$$

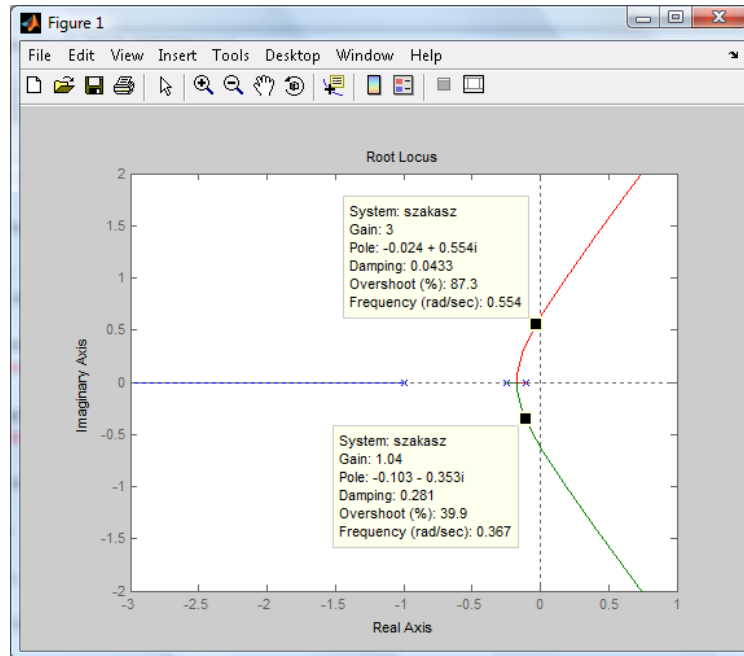
Következésképpen a kis maradó hiba és a stabilitás ellentmondó követelmények, ha a típuszám nulla. Vizsgáljuk most meg szabályozási kör a kimenetének transzienseit a két erősítés esetén.

```
>>step(feedback(series(tf(1,1),szakasz),tf(1,1),-1)); hold on;
>>step(feedback(series(tf(3,1),szakasz),tf(1,1),-1));
```



3.5. ábra. A szabályozott jellemző alakulása egységugrás alapjel esetén ($A_p = 1$ és $A_p = 3$).

Látható, hogy a kis fázistartalék jóval nagyobb amplitúdójú és lassabban csillapodó tranzienszt eredményez. Ugyanez olvasható le a gyökhelygörbéről is, hiszen az $A_p = 3$ erősítéshez tartozó konjugált komplex póluspár csillapítása jóval kisebb, mint az $A_p = 1$ erősítéshez tartozó póluspáré.



3.6. ábra. A gyökhelygörbe és a pólusok adatai az $A_p = 1$ és $A_p = 3$ erősítések (Gain) mellett

A PI típusú szabályzó

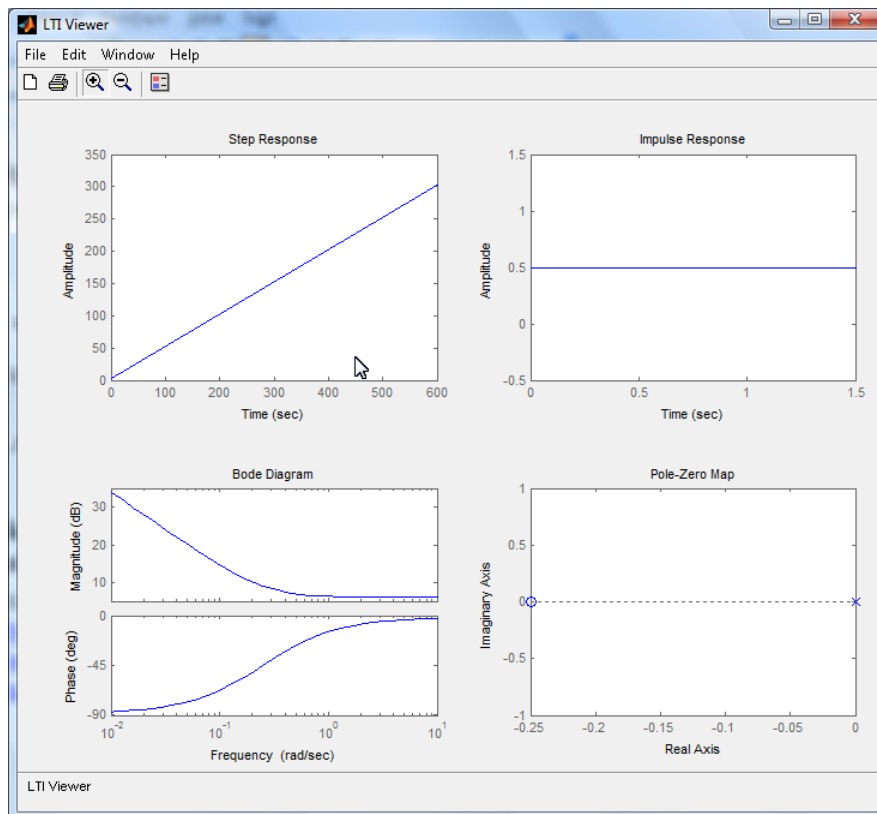
A PI típusú szabályzó átviteli függvénye

$$W_{PI}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_I} \right) = \frac{A_p}{T_I} \frac{1 + sT_I}{s},$$

ahol a szabályzó A_p erősítése és T_I integrálási időállandója pozitív számok. A szabályzó a körerősítést $\frac{A_p}{T_I}$ -szeresére változtatja, a szabályozási kör típuszámát

pedig eggyel növeli. A szabályzó egy $-\frac{1}{T_I}$ zérust is bevisz a felnyitott kör átviteli függvényébe. A 3.7. ábrán egy PI szabályzó idő- és frekvenciatartománybeli tulajdonságai láthatók.

```
>> Ti = 4;
>> Ap = 2;
>> PI = tf(Ap*[Ti 1],[Ti 0]);
>> ltiview(PI)
```



3.7. ábra. A PI szabályzó jellemzői (ugrásválasz, impulzusválasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

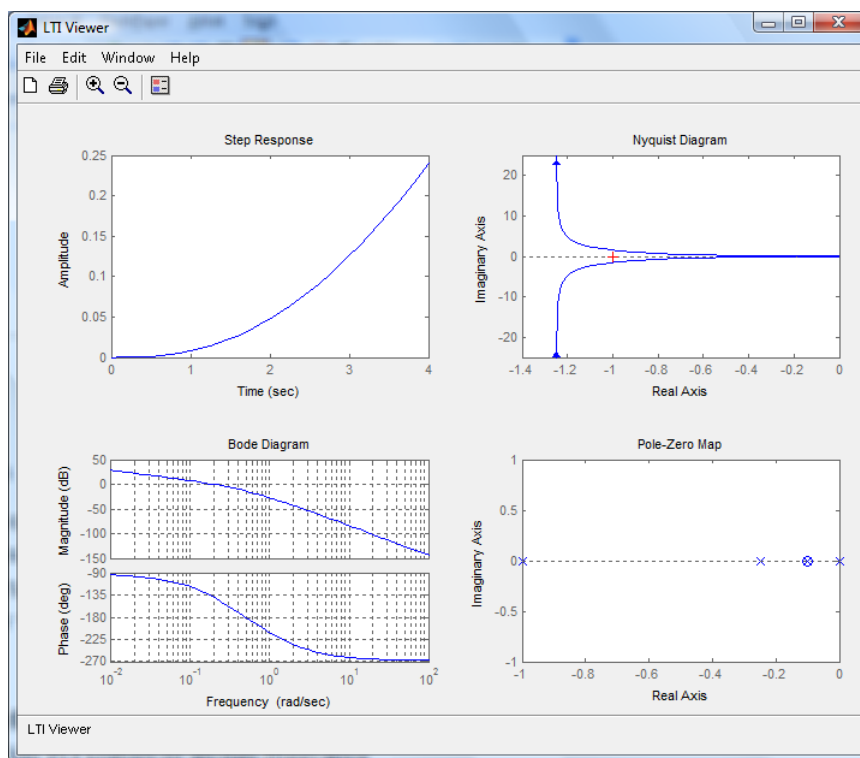
Az ugrásválasz $v_{PI}(t) = 1(t) \left(A_p + \frac{t}{T_I} \right)$ szerint alakul. Az I hatás miatt a szabályzó nulla hibajel bemenet esetén is képes nullától különböző értéket kimenetén megjeleníteni. A PI szabályzó a fázist az $\frac{1}{T_I}$ frekvenciánál kisebb értékeknél közel 90 fokkal rontja, annál nagyobb frekvenciáknál pedig jó közelítéssel változatlanul hagyja.

Használjuk most a PI típusú szabályzót a korábban vizsgált háromtárolós szakasz kompenzálására. Úgy határozzuk, hogy a szabályzó zérusával a szakasz egyik valós pólusát kiejtjük (más kompenzációs stratégia is lehetséges lenne). Mivel gyors működésre törekszünk zárt körben, ezért a leglassabb pólust ejtjük ki. A leglassabb pólus a $T_1 = 10\text{sec}$ (legnagyobb) időállandóhoz tartozó pólus. Ennek megfelelően most $T_I = 10\text{sec}$, a felnyitott kör átviteli függvénye pedig

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{10} \cdot \frac{1+10s}{s} \cdot \frac{1}{(1+10s)(1+4s)(1+s)},$$

tehát a körerősítés $K = \frac{5A_p}{10}$, a szabályozási kör típuszáma pedig $i=1$. A szabályozási kör típuszáma garantálja, hogy egységugrás alapjel esetén a maradó hiba nulla (ez az I hatásnak köszönhető), tehát A_p megválasztásakor csak a fázisstartalék beállítására (vagy a tranziens túllövésére) kell tekintettel lennünk. Először vizsgáljuk meg a felnyitott kör jellemzőit $A_p = 0.5$ választás esetén.

```
>> PI = tf(0.5/10*[10 1], [1 0]);
>> felnyitottKor = series(PI, szakasz);
>> ltiview(felnyitottKor)
```



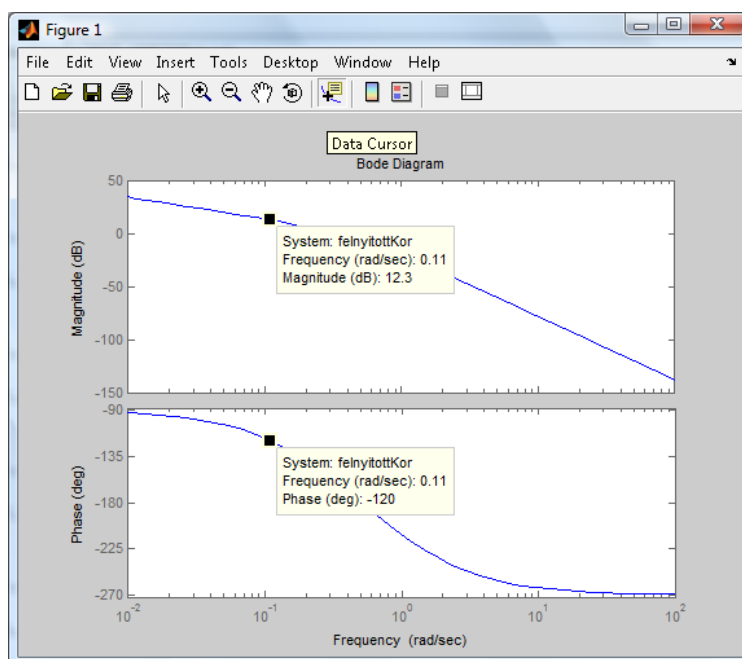
3.8. ábra. A PI kompenzátorral kapott felnyitott kör jellemzői; $T_I = 10$ sec, $A_p = 0.5$ (ugrásválasz, Nyquist-diagram, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

A Nyquist-diagram stabil zárt kört mutat hiszen nem kerüli meg a $-1+0j$ pontot, a Bode-diagramról pedig leolvasható, hogy a fázisstartalék körülbelül 45 fok. A pólus-

zérus eloszlásnál jól látszik a kiejtés (egy körrel jelölt zérus és egy kereszttel jelölt pólus egy helyre esik).

Szeretnénk ugyanakkor a fázistartalékot az $A_p = 0.5$ beállításakor adódó 45 foknál nagyobbra, körülbelül 60 fokra beállítani a túllövés további mérséklése miatt. Ehhez megjelenítjük a felnyitott kör Bode-diagramját az $A_p = 1$ érték mellett.

```
>> PI = tf(1/10*[10 1],[1 0]);
>> felnyitottKor = series(PI,szakasz);
>> bode(felnyitottKor);
```



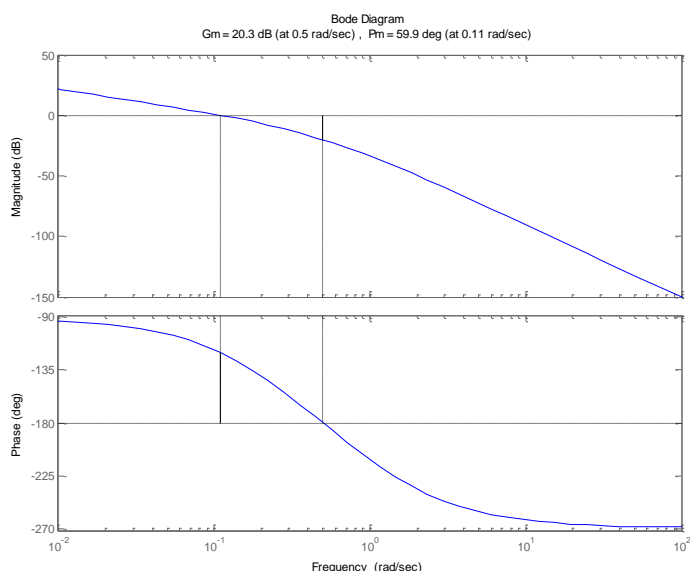
3.9. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja $A_p = 1$ beállítás mellett.

Az ábra Data Cursor eszközével leolvashatóak a diagramok pontjaihoz tartozó értékek. Először a fázisdiagramon kell megkeresni a 60 fokos fázistartalékhoz, tehát a -120 fokos fázistoláshoz tartozó frekvenciát, majd az amplitúdó-meneten leolvassuk ehhez a frekvenciához tartozó erősítést. A frekvencia érték itt $\omega_c = 0.11$ rad/s, az ehhez tartozó erősítés érték pedig $a_{dB}(\omega_c) = 12.3$ dB, amely

$$A_p = \frac{1}{10^{a_{dB}(\omega_c)/20}} = \frac{1}{10^{12.3/20}} = 0.2427$$

értéket eredményez.

A frekvenciát azért jelöltük ω_c -vel, mert ezzel az A_p választással ez lesz a vágási frekvencia értéke. Ezt le is ellenőrizhetjük a margin utasítás segítségével.



3.10. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja a választott A_p mellett.

Látható, hogy a választott erősítés mellett a fázistartalék ~ 60 fok. Írjuk fel a Matlab segítségével a zárt szabályozási kör átviteli függvényét és ábrázoljuk jellemzőit a felnyitott körrel közösen. A megoldás során az `ltiview` újabb szolgáltatásaival ismerkedünk meg.

```
>> szakasz = tf(5,conv(conv([1 1],[4 1]),[10 1]));
>> PI = tf(0.2427/10*[10 1],[1 0]);
>> felnyitottKor=series(PI,szakasz);
>> zartKor = feedback(series(PI,szakasz),tf(1,1),-1)
```

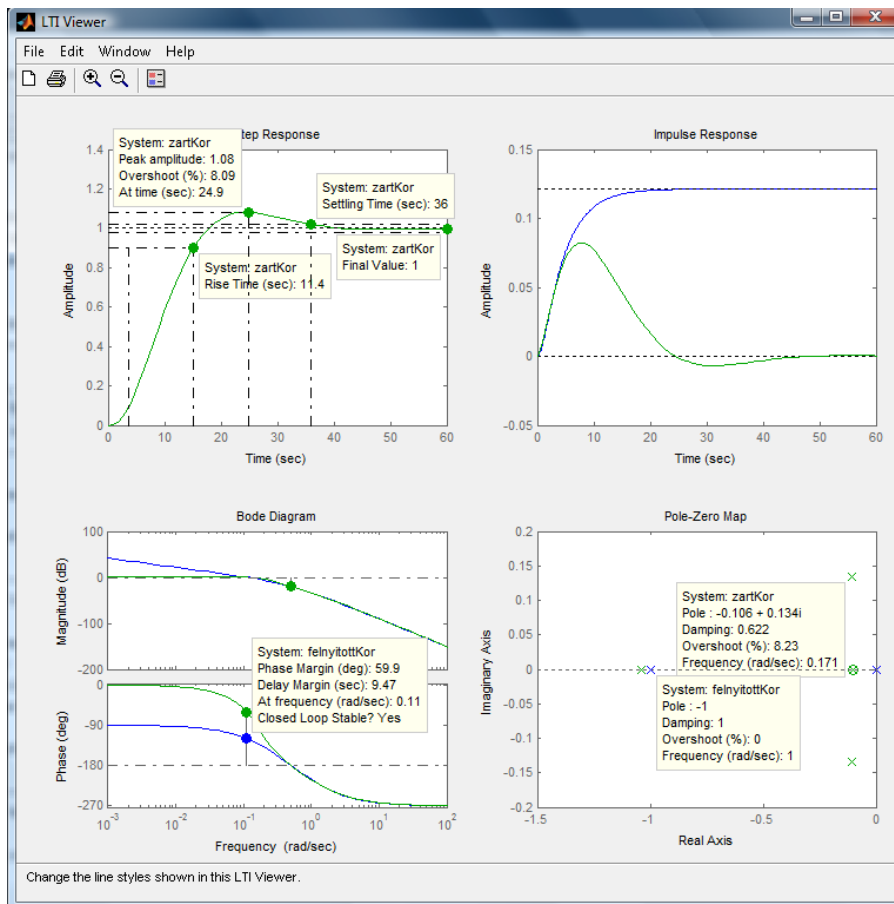
Transfer function:

$$1.214 s + 0.1214$$

$$40 s^4 + 54 s^3 + 15 s^2 + 2.213 s + 0.1214$$

```
>>ltiview({'step';'impulse';'bode';'pzmap'},felnyitottKor,zartKo
r)
```

Látható, hogy az `ltiview` eszköz indításakor közvetlenül is megadhatóak egyrészt az ábrázolni kívánt jellemzők, másrészt a vizsgálni kívánt rendszerek.



3.11. ábra. A felnyitott kör (kék színnel) és a zárt kör (zöld színnel) jellemzői (ugrásvlasz – csak a zárt kör, impulzusvlasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

Az ltiviewer esetében minden ábránál egyes jellemzők megjelölése kérhető. A megjelölni kívánt jellemzőt az ábrán az egér jobb gombjának kattintásával elérhető környezetfüggő menü *Characteristics* parancsának hatására megjelenő listáról választhatjuk ki, az értékeket pedig a bejelölt pontra kattintva jeleníthetjük meg. Az ugrásvlasz esetében megjelölhető az időfüggvény csúcserő (Peak Response), annak végértéke (Steady State), a felfutási idő (Rise Time) és a beállási idő (Settling Time). A Matlab a csúcserő esetében nem csak az ugrásvlasz maximális értékét és a hozzá tartozó időt jelöli meg, hanem a túllövést is (az ábrán látható érték $\Delta v = 8.09\%$). Vegyük észre, hogy ez az érték kisebb, mint amit a pólus-zérus eloszlás esetében a zárt kör konjugált komplex póluspárja esetében leolvasható (az ábrán látható érték $\Delta v = 8.23\%$). A különbség oka, hogy a zárt körben a

konjugált komplex póluspáron kívül egy gyors valós pólus is van, amelynek tranziense az eredő túllövést csökkenti.

A közelítő PD szabályzó

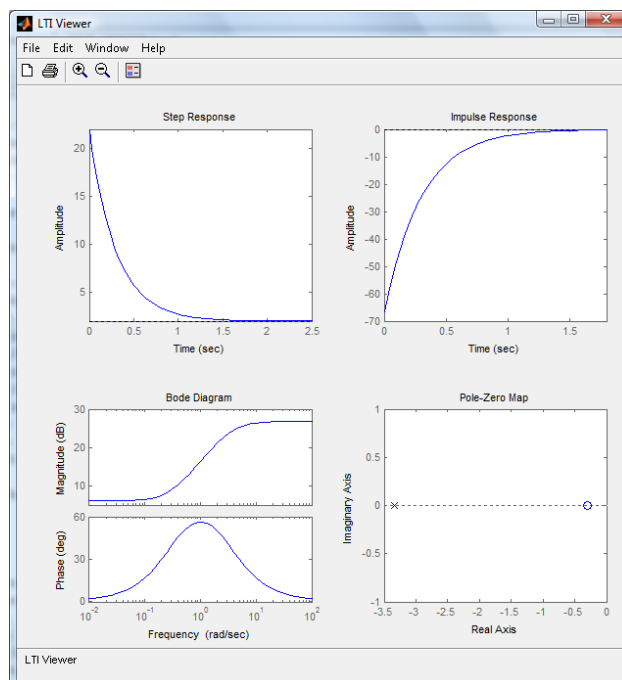
A közelítő PD szabályzó átviteli függvénye

$$W_{PD}(s) = A_p \left(1 + \frac{sT_D}{1 + sT_C} \right) = A_p \frac{1 + s(T_D + T_C)}{1 + sT_C},$$

ahol az A_p erősítés és a T_D, T_C időállandók pozitív paraméterek. A szabályzó a körerősítést A_p -szeresére változtatja, típuszámát változatlanul hagyja, a felnyitott kör átviteli függvényébe egy valós pólust és egy valós zérust visz be.

Általában a T_C időállandó a kisebb, a két időállandó $N = \frac{T_D}{T_C}$ arányát tehát egynél nagyobb értékre választják. A 3.12. ábrán egy PD szabályzó idő- és frekvenciatartománybeli tulajdonságai láthatók.

```
>> Ap=2; Td = 3; Tc = 3/10; % itt N = 10
>> PD = tf(Ap*[Td+Tc 1], [Tc 1]);
>> ltiview(PD)
```



3.12. ábra. A PD szabályzó jellemzői (ugrásválasz, impulzusválasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

Látható, hogy a PD szabályzónak a $\frac{1}{T_D + T_C}$ és $\frac{1}{T_C}$ frekvenciák között fázisnövelő (fázisjavító) tulajdonságai vannak. Az ugrásválaszának kezdeti értéke $A_p \left(1 + \frac{T_D}{T_C}\right) = A_p(N + 1)$, az ugrásválasz időfüggvénye pedig

$$v_{PD}(t) = A_p \left(1 + \frac{T_D}{T_C} e^{-t/T_C}\right) = A_p(1 + Ne^{-t/T_C}).$$

Használjuk most a PD típusú szabályzót a korábban vizsgált háromtárolós szakasz kompenzálására. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = 5A_p \frac{1 + s(T_D + T_C)}{1 + sT_C} \cdot \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 4s)(1 + s)},$$

ahonnan leolvasható, hogy a körerősítés $K = 5A_p$ és a szabályozási kör típuszáma $i = 0$.

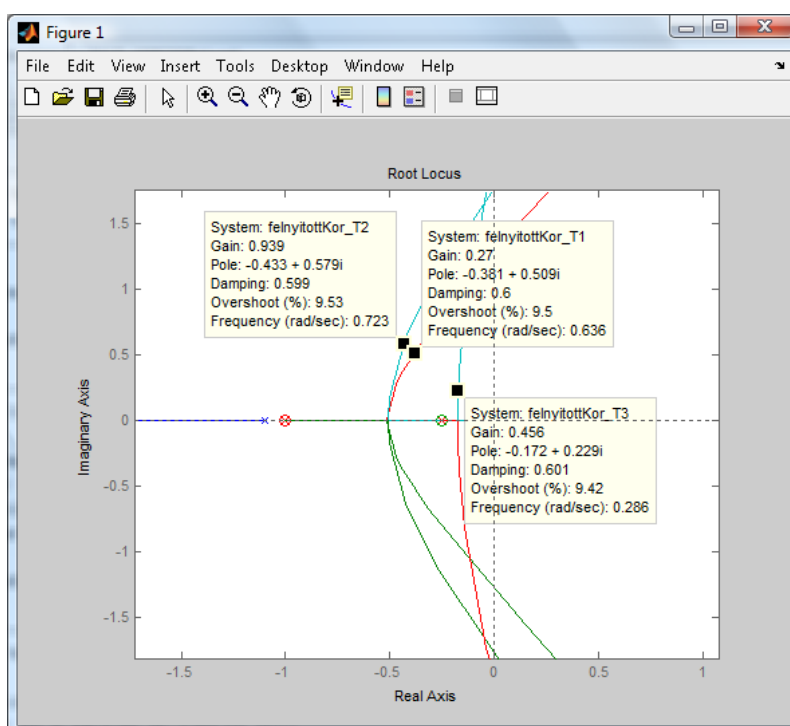
Úgy határozunk, hogy a szabályzó zérusával a szakasz egyik valós pólusát kiejtjük (más kompenzációs stratégia is lehetséges lenne). Ez azt jelenti, hogy a szakasz egy valós pólusát a felnyitott kör átviteli függvényében egy nála $(N+1)$ -szer gyorsabb pólusra „cseréljük”. Rögzítsük az N arányt tízre.

A kiejtés során figyelemmel kell lennünk arra, hogy a PD szabályzó nem változtatja meg a szakasz típusszámát, ami így nulla marad, tehát a legnagyobb statikus pontosság biztosítása a cél. Ezt a körerősítés növelésével érhetjük el, hiszen a statikus hiba jelen esetben $e_\infty = \frac{1}{1 + K}$. Ugyanakkor a P szabályzó esetében láttuk,

hogy a nagy körerősítés nagy túllövést és lassan csillapodó rezgést eredményez (azaz kis fázistartalékot). Ezért olyan kiejtést kell alkalmaznunk, amely azonos körerősítés mellett a legkisebb csillapítású konjugált komplex póluspárt eredményezi zárt körben. Ennek vizsgálatához a gyökhelygörbéket rajzoljuk fel egy ábrában az alábbi Matlab kód segítségével

```
>> PD_T1 = tf([10 1], [10/11 1]); % T1 = 10 pólus kiejtése
>> felnyitottKor_T1 = series(PD_T1, szakasz);
>> rlocus(felnyitottKor_T1); hold on;
>> PD_T2 = tf([4 1], [4/11 1]); % T2 = 4 pólus kiejtése
>> felnyitottKor_T2 = series(PD_T2, szakasz);
>> rlocus(felnyitottKor_T2);
>> PD_T3 = tf([1 1], [1/11 1]); % T3 = 1 pólus kiejtése
>> felnyitottKor_T3 = series(PD_T3, szakasz);
>> rlocus(felnyitottKor_T3);
```

Összegezve, a felnyitottKor_T1 a $T_1 = 10$ sec időállandóhoz tartozó leglassabb pólus kiejtésével kapott felnyitott kör átviteli függvénye, a felnyitottKor_T2 a $T_2 = 4$ sec időállandóhoz tartozó második leglassabb pólus kiejtésével kapott felnyitott kör átviteli függvénye, a felnyitottKor_T3 pedig a $T_3 = 1$ sec időállandóhoz tartozó leggyorsabb pólus kiejtésével kapott felnyitott kör átviteli függvénye. Mindhárom esetben $A_p = 1$. A három felnyitott körhöz a gyökhelygörbékét közösen ábrázolva az eredmény az alábbi, némileg zsúfolt de tanulságos ábra.



3.13. ábra. Gyökhelygörbék PD szabályzó esetén a lehetséges kiejtések után

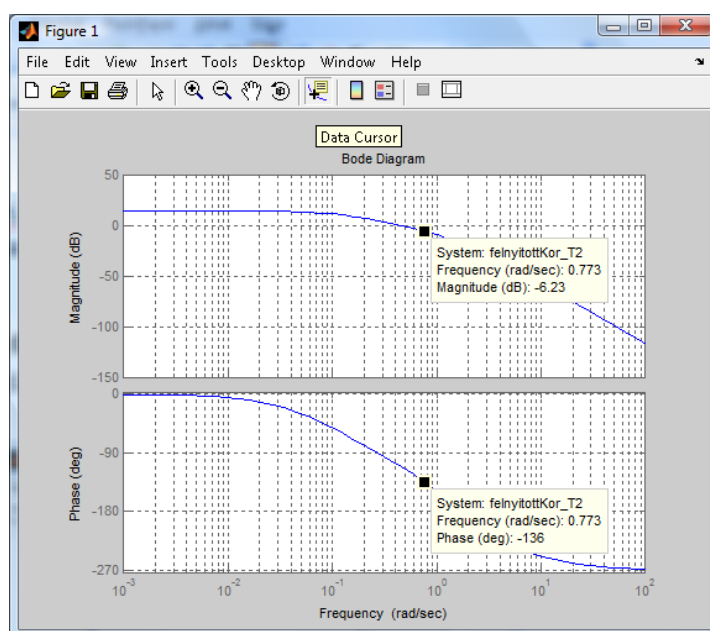
Azt a kiejtést kell választani, ahol a lehetséges legkisebb maradó hibát lehet elérni azonos csillapítás mellett, azaz azonos csillapításhoz a lehető legnagyobb körerősítést lehetővé tevő kiejtést kell végrehajtani. Az ábrán bejelöltük a $\xi = 0.6$ csillapításokhoz tartozó A_p értékeket (Gain) mindhárom lehetséges kiejtés mellett a gyökhelygörbéken. Jól látszik, hogy a legnagyobb körerősítés ($K = 5A_p = 5 \cdot 0.939$) akkor érhető el, ha a $T_2 = 4$ sec, második leglassabb időállandóhoz tartozó pólust ejtjük ki a PD szabályzó zérusával. Ez más csillapításértékek esetében is így van,

tehát PD szabályzó esetén általában is a második leglassabb valós pólust kell kiejteni. A kiejtésnek megfelelő időállandókat választva a felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = 5A_p \frac{1+4s}{1+\frac{4}{11}s} \cdot \frac{1}{(1+10s)(1+4s)(1+s)}$$

A PI szabályzónál megismert módon ezúttal ~45 fokos fázistartalékot szeretnénk beállítani A_p megválasztásával (ez közel -135 fokos fázistolásnak felel meg).

```
>> bode(felnyitottKor_T2); grid on;
```



3.14. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja PD szabályzó esetén a körerősítés beállításához szükséges értékekkel

Leolvasható, hogy a vágási frekvencia $\omega_c = 0.773$ rad/sec lesz. Az ehhez tartozó A_p erősítés pedig

$$A_p = \frac{1}{10^{a_{dB}(\omega_c)/20}} = \frac{1}{10^{-6.23/20}} = 2.0488,$$

amely alapján $e_\infty = \frac{1}{1+5A_p} = 0.0889$ maradó hibát kapunk egységugrás bemenet mellett.

Írjuk fel a Matlab segítségével a zárt szabályozási kör átviteli függvényét és ábrázoljuk jellemzőit a felnyitott körrel közösen.

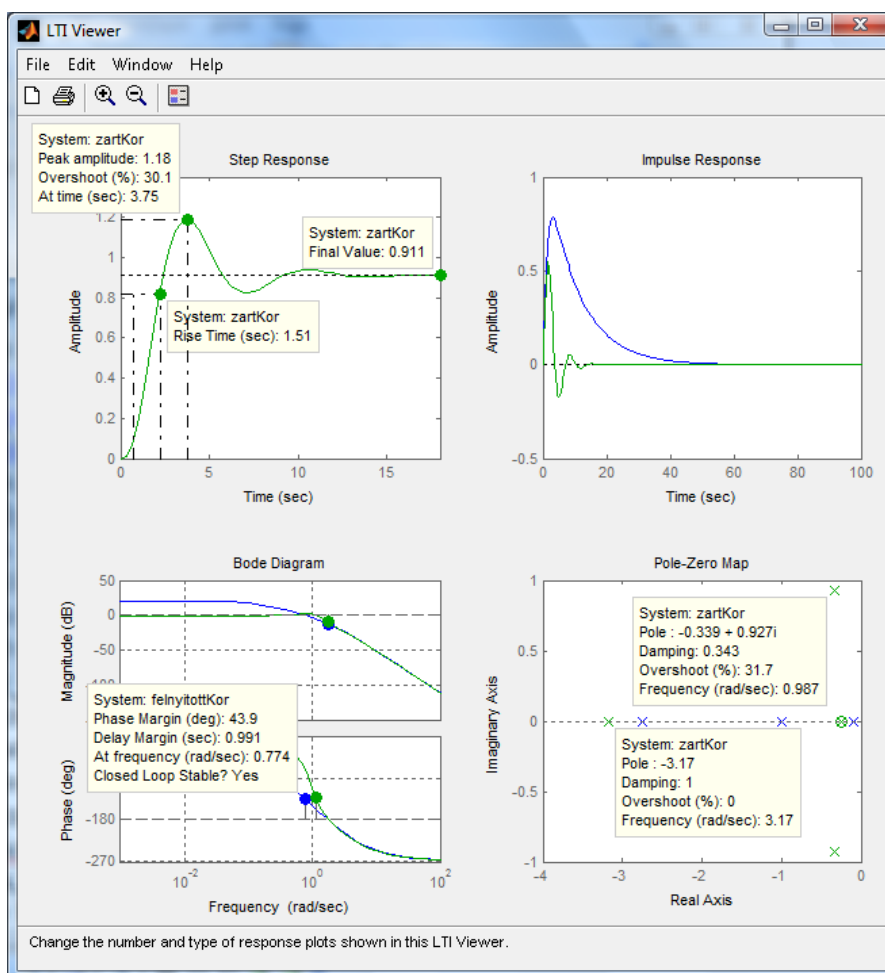
```
>> Ap=1/10^(-6.23/20);
>> PD = tf(Ap*[4 1],[4/11 1]);
>> felnyitottKor = series(PD,szakasz);
>> zartKor = feedback(series(PD,szakasz),tf(1,1),-1);
```

Transfer function:

$$40.98 s + 10.24$$

$$14.55 s^4 + 59.64 s^3 + 59.45 s^2 + 56.34 s + 11.24$$

```
>>ltiview({'step';'impulse';'bode';'pzmap'},...
    felnyitottKor,zartKor);
```



3.15. ábra. A felnyitott kör (kék színnel) és a zárt kör (zöld színnel) jellemzői (ugrásválasz – csak a zárt kör, impulzusválasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

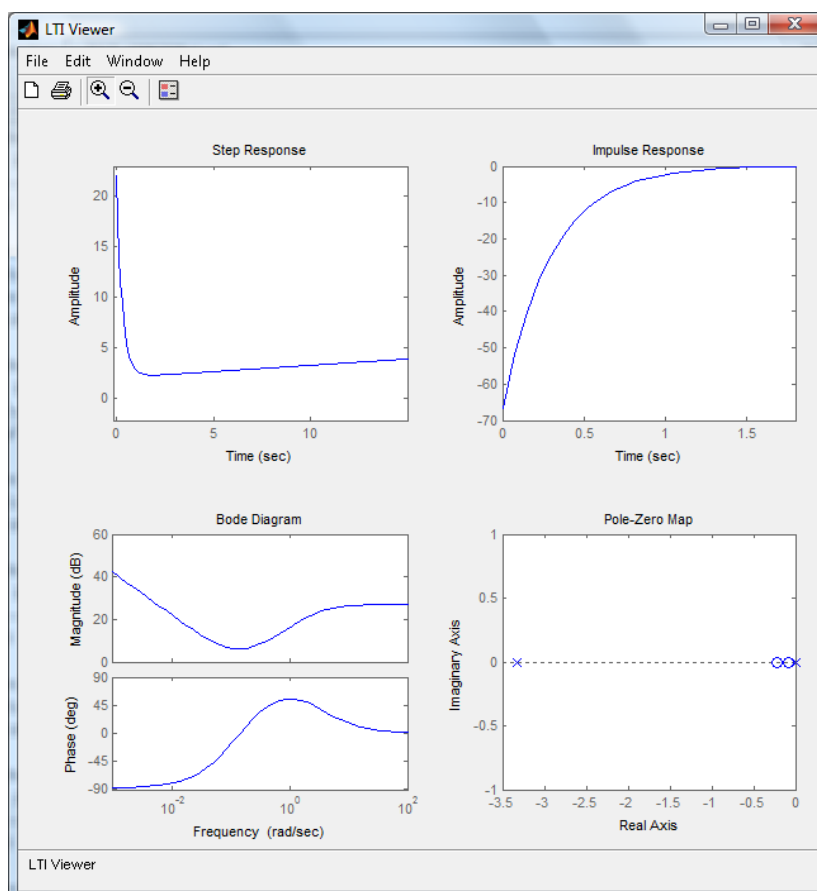
A közelítő PID szabályzó

A PID szabályzó átviteli függvénye

$$W_{PID}(s) = A_P \left(1 + \frac{1}{sT_I} + \frac{sT_D}{1+sT_C} \right) = \frac{A_P}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{s(1 + sT_C)}$$

```
>> Ap=2; Td = 3; Tc = 3/10; Ti = 16;
>> PID = tf(Ap/Ti*[Ti*(Td+Tc) Ti+Tc 1],[Tc 1 0]);
>> ltiview(PID)
```

A közelítő PID szabályzó idő- és frekvenciatartománybeli tulajdonságai láthatók a 3.16. ábrán.



3.16. ábra. A PID szabályzó jellemzői (ugrásválasz, impulzusválasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

A szabályzó a körerősítést $\frac{A_p}{T_I}$ -szeresére módosítja, a szabályozási kör típuszámát pedig eggyel növeli. Két zérust és két pólust visz be a felnyitott kör átviteli függvényébe. A két zérus az időállandók megfelelő megválasztása esetén akár konjugált komplex pár is lehet.

A kompenzátor alacsony frekvencián a fázismenetet rontja (ez az I hatás következménye), a két zérushoz tartozó frekvenciák környezetében viszont a fázismenetet javítja (ez a D hatás következménye).

Használjuk most a PID típusú szabályzót a korábban vizsgált háromtárolós szakasz kompenzálására. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{(1 + sT_C)s} \cdot \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 4s)(1 + s)},$$

ahonnan leolvasható, hogy a körerősítés $K = \frac{5A_p}{T_I}$ és a szabályozási kör típuszáma

$i = 1$. A típuszám I hatás következtében növelt értéke biztosítja, hogy egységugrás alapjel esetén a maradó hiba nulla legyen.

A szabályzó két zérusát ismét a szakasz két pólusának kiejtésére használjuk (más kompenzációs stratégia is lehetséges). A PD szabályzótól eltérő módon itt a két leglassabb (legnagyobb $T_1 = 10$ sec és $T_2 = 4$ sec) időállandóhoz tartozó pólus

kiejtése célszerű. Az $N = \frac{T_D}{T_C}$ arányt válasszuk ismét tíznek. Ekkor a felnyitott

átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + 11T_I T_C s^2}{(1 + sT_C)s} \cdot \frac{1}{(1 + 14s + 40s^2)(1 + s)},$$

ahonnan megállapítható az időállandók értéke, hiszen teljesül, hogy

$$11T_I T_C = 40$$

$$T_I + T_C = 14$$

A második egyenletet T_C eliminálására felhasználva a T_I időállandóra egy

$$11T_I^2 - 11 \cdot 14T_I + 40 = 0$$

másodfokú egyenletet kapunk, amelynek megoldásai:

```
>> Ti=roots([11 -11*14 40])
```

```
Ti =
    13.7353
     0.2647
```

Azt a megoldást választjuk, ahol $T_I > T_C$, tehát $T_I = 13.7353\text{sec}$, $T_C = 0.2647\text{sec}$ és $T_D = 2.6475\text{sec}$. Ezekkel a behelyettesítésekkel élve a felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{13.7353} \cdot \frac{1}{s(1+s)(1+0.2647s)}$$

Most állítsuk be az A_p erősítés megválasztásával az ~ 50 fokos fázistartalékot.

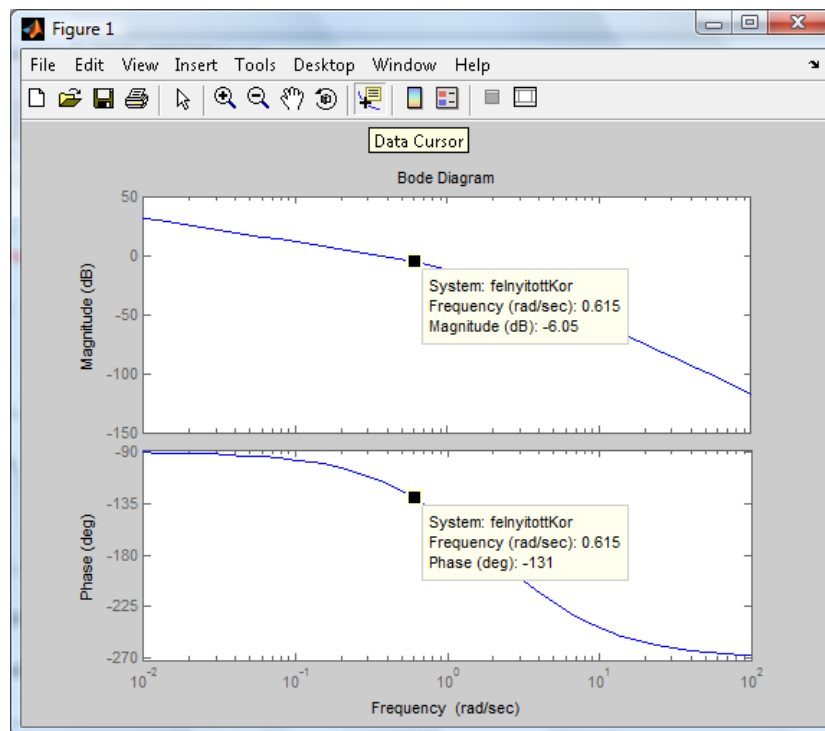
```
>> Ti = Ti(1); Tc = 14-Ti; Td = Tc * 10;
>> PID=tf(1/Ti*[Ti*(Tc+Td) Ti+Tc 1],conv([1 0],[Tc 1]))
```

Transfer function:

$$2.912 s^2 + 1.019 s + 0.07281$$

$$0.2647 s^2 + s$$

```
>> felnyitottKor=series(PID,szakasz);
>> bode(felnyitottKor);
```



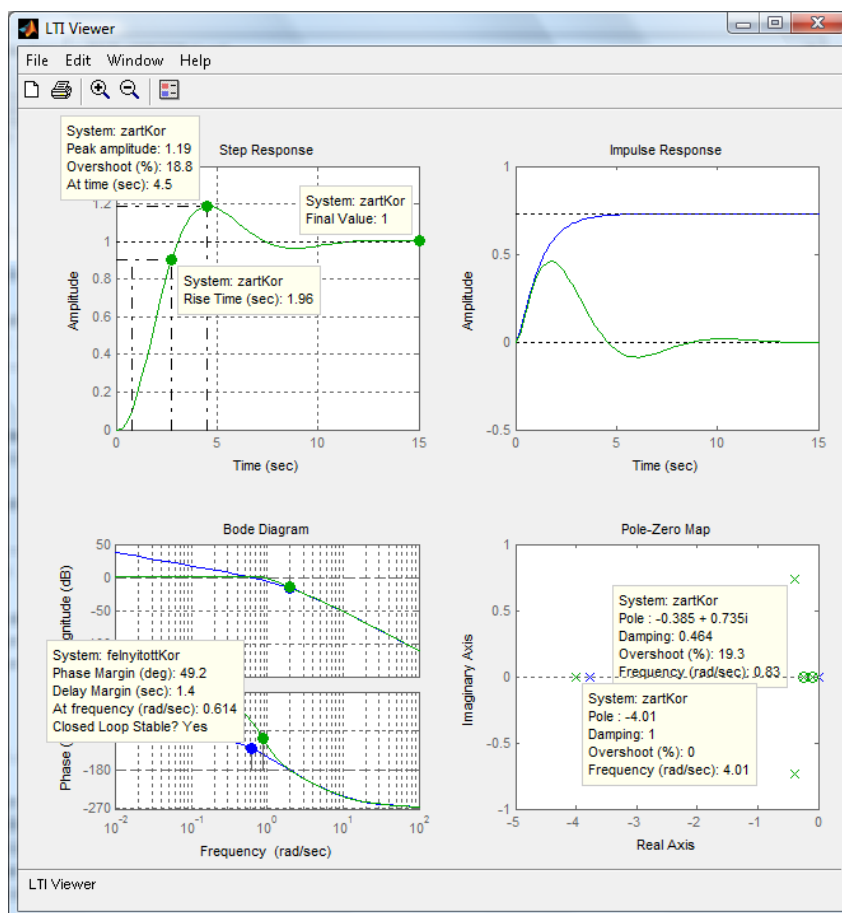
3.17. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja PID szabályzó esetén a körerősítés beállításához szükséges értékekkel

Leolvasható, hogy a vágási frekvencia $\omega_c = 0.615 \text{ rad/sec}$ lesz. Az ehhez tartozó A_p erősítés pedig

$$A_p = \frac{1}{10^{a_{dB}(\omega_c)/20}} = \frac{1}{10^{-6.05/20}} = 2.0068.$$

Írjuk fel a Matlab segítségével a zárt szabályozási kör átviteli függvényét és ábrázoljuk jellemzőit a felnyitott körrel közösen.

```
>> Ap=1/10^(-6.05/20);
>> PID = tf(Ap/Ti*[Ti*(Tc+Td) Ti+Tc 1],conv([1 0],[Tc 1]));
>> felnyitottKor=series(PID,szakasz);
```



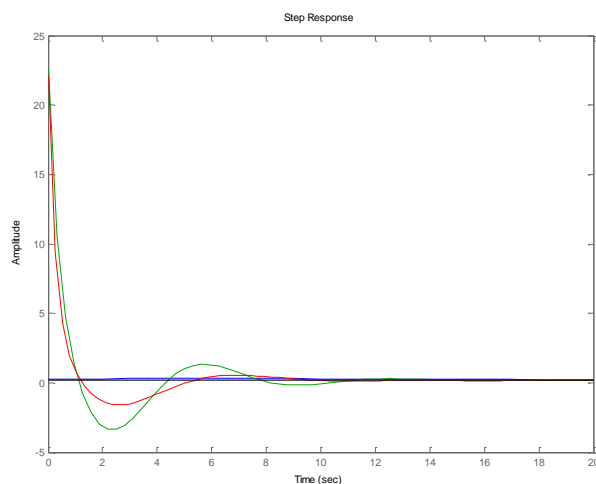
3.18. ábra. A felnyitott kör (kék színnel) és a zárt kör (zöld színnel) jellemzői (ugrásválasz – csak a zárt kör, impulzusválasz, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

```
>> zartKor = feedback(series(PID,szakasz),tf(1,1),-1)
Transfer function:
          29.22 s^2 + 10.23 s + 0.7305
-----
10.59 s^5 + 54.3 s^4 + 57.97 s^3 + 44.49 s^2 + 11.23 s + 0.7305
>>ltiview({'step';'impulse';'bode';'pzmap'},felnyitottKor,zartKor)
r)
```

Látható, hogy az I hatás következtében a maradó hiba eltűnt, ha az alapjel egységugrás. Egyebek tekintetében a viselkedés a PD kompenzátorral kapott zártkörű viselkedéshez hasonló. A lassabb felfutás a nagyobb fázistartalék következménye (PD esetén ~45 fok volt, PID esetében pedig ~50 fok).

A beavatkozó jel kezdeti ugrásának korlátozása

A szabályzó nem adhat ki tetszőlegesen nagy beavatkozó jelet, mert a beavatkozó szerv korlátossága annak határt szab. Egységugrás alapjel esetén, ha a kimenet nullán állt, és a szabályzó P és D hatást is tartalmazott, akkor a beavatkozó jel a nulla időpillanatban a legnagyobb, értéke $u(0) = \frac{A_P(T_C + T_D)}{T_C} = (N + 1)A_P$, ahol N a $\frac{T_D}{T_C}$ arány. A következő ábrán a beavatkozó jelek tranziensét láthatjuk egységugrás alapjel esetén a különböző korábban kapott szabályzó beállítások mellett.



3.19. ábra. Beavatkozó jelek tranziensei. **Kék** – PI szabályzó, **Zöld** – PD szabályzó, **Piros** – PID szabályzó

```
>> step(feedback(PI, szakasz, -1));
>> hold on;
>> step(feedback(PD, szakasz, -1));
>> step(feedback(PID, szakasz, -1));
```

Látható, hogy a PD és PID szabályzók kezdeti ugrása a legnagyobb, ez megfelel az elvárásoknak, hiszen a gyors beálláshoz nagy beavatkozó jeleket kell alkalmazni. Legyen a beavatkozó jel maximális értéke u_{\max} és elvárjuk, hogy $|u(t)| \leq u_{\max}$, ami a P és D hatást együttesen tartalmazó szabályzóknál és egységugrás alapjel esetében egyenértékű a

$$u_{\max} \geq A_p \left(1 + \frac{T_D}{T_C} \right)$$

feltétellel. A beavatkozó jel teljes kihasználása érdekében egyenlőségre törekszünk.

A tervezési specifikációk megfogalmazása egyenletekkel

A zárt szabályozási körrel szemben támasztott specifikációkat egyenletek formájában is megfogalmazhatjuk.

Feltesszük, hogy a tervezés egy korábbi szakaszában eldöntésre került, hogy a statikus pontosság biztosítására alkalmazunk-e integrátort. Feltesszük továbbá, hogy előírtuk a fázistartalék φ_t és a maximális beavatkozó jel u_{\max} értékét. A szabályzók zérusait kiejtésre használjuk fel az alábbi táblázat szerint

Szabályzó	Szakasz kiejtendő pólusa
PI	Leglassabb pólus (valós)
PD	Második leglassabb pólus (valós)
PID	Két leglassabb valós pólus (vagy konjugált komplex póluspár)

Az egyenleteket az alábbi táblázat összegzi

Szabályzó	Egyenletek
PI	$ W_{PI}(j\omega_c)W_p(j\omega_c) - 1 = 0$ $\pi + \arg(W_{PI}(j\omega_c)W_p(j\omega_c)) - \varphi_t = 0$
PD	$ W_{PD}(j\omega_c)W_p(j\omega_c) - 1 = 0$ $\pi + \arg(W_{PD}(j\omega_c)W_p(j\omega_c)) - \varphi_t = 0$ $A_p \frac{T_D + T_C}{T_C} - u_{\max} = 0$

PID	$\begin{aligned} W_{PID}(j\omega_c)W_p(j\omega_c) - 1 &= 0 \\ \pi + \arg(W_{PID}(j\omega_c)W_p(j\omega_c)) - \varphi_i &= 0 \\ A_p \frac{T_D + T_C}{T_C} - u_{\max} &= 0 \end{aligned}$
-----	---

Az egyenletek numerikus megoldása az `fsolve` függvény segítségével

Az egyenletek megoldása nagyobb foksámú szakaszok esetében nem adható meg zárt képlettel, ezért a megoldást valamilyen iterációt megvalósító numerikus eljárással számoljuk. Ezt a Matlab Optimization Toolbox-a az `fsolve` függvénnyel támogatja.

Az `fsolve` használatát egy példán keresztül mutatjuk be. Oldjuk meg az alábbi egyenletrendszer

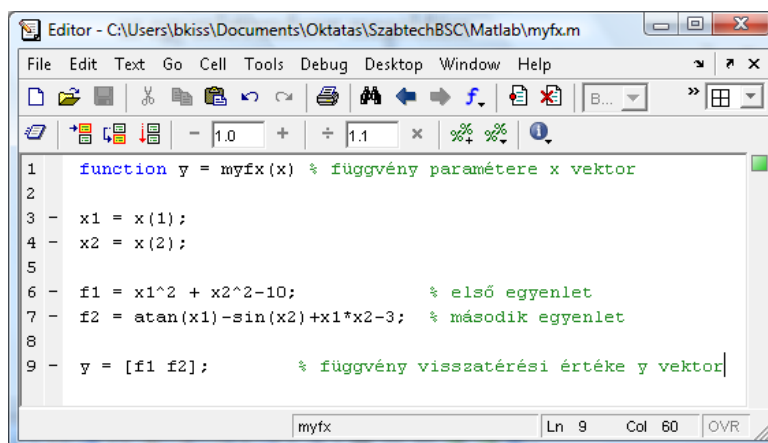
$$x_1^2 + x_2^2 = 10$$

$$\arctan x_1 - \sin x_2 = 3 - x_1 x_2$$

Átrendezve az egyenletrendszer úgy, hogy a jobb oldalon nullák álljanak (ez mindig lehetséges) a bal oldal egy hozzárendelés (függvény), amelynek nulla helye az egyenletrendszer megoldása

$$F(x) = \begin{bmatrix} x_1^2 + x_2^2 - 10 \\ \arctan x_1 - \sin x_2 + x_1 x_2 - 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Az `fsolve` alkalmazásához először az $F(x)$ függvényt kell a Matlab segítségével implementálni. Ezt megtehetjük a Matlab beépített szerkesztője segítségével.



```

Editor - C:\Users\bkiss\Documents\Oktatas\SzabtechBSC\Matlab\myfx.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
[Icons]
- 1.0 + ÷ 1.1 x % %
1 function y = myfx(x) % függvény paramétere x vektor
2
3 - x1 = x(1);
4 - x2 = x(2);
5
6 - f1 = x1^2 + x2^2 - 10; % első egyenlet
7 - f2 = atan(x1) - sin(x2) + x1*x2 - 3; % második egyenlet
8
9 - y = [f1 f2]; % függvény visszatérési értéke y vektor
myfx Ln 9 Col 60 OVR

```

3.21. ábra. Az $F(x)$ hozzárendelést megvalósító `myfx` Matlab függvény kódja

A függvényt el kell menteni. A példában a függvény a `myfx.m` állományba került. A megoldást visszaadó `fsolve` hívás

```
>> fsolve('myfx',[0,0])
Optimization terminated: first-order optimality is less
than options.TolFun.
```

ans =

```
3.576    0.8070
```

Az `fsolve` első argumentuma tehát annak a függvénynek a neve, amelynek zérushelyét keressük. Ügyelni kell rá, hogy a függvény vagy az aktuális könyvtárban, vagy valamelyik `Matlabpath` listában található könyvtárban kerüljön elmentésre. Az `fsolve` második argumentuma a függvény értékkészletének azon pontja, ahonnan a zérushelyet kereső iteráció indul.

Egy nemlineáris egyenletrendszernek több megoldása (akár végtelen számú) is lehet, amelyek közül az `fsolve` csak egyet ad vissza, ha kellő számú lépés után az iteráció konvergált. A megtalált megoldás, illetve az iteráció sikeressége az inicializálásától (is) függ.

```
>> fsolve('myfx',[10,10])
Optimization terminated: first-order optimality is less
than options.TolFun.
```

ans =

```
0.7875    3.0627
```

Látható, hogy más kezdeti értékekkel az iteráció más megoldást ad vissza. Előfordulhat, hogy az iteráció nem konvergál, ekkor adott lépésszám után az algoritmus leáll és jelzi a felhasználónak, hogy nem talált megoldást. Az `fsolve` függvény numerikus megvalósításának számos paramétere van, amelyeket a felhasználó módosíthat. Ezek ismertetésétől itt eltekintünk, az érdeklődő olvasó a `doc fsolve` hatására megjelenő súgóból kaphat bővebb leírást.

Most tekintsük a PID szabályzó méretezési problémáját a korábban már megismert szakaszhoz. Nem rögzítjük a $\frac{T_D}{T_C}$ arányt és olyan beállítást szeretnénk, hogy a beavatkozó jel ne haladja meg az $u_{\max} = 10$ értéket és a fázistartalék pedig legyen 60 fok, azaz radiánban $\frac{\pi}{3}$.

Írjuk fel a megoldandó egyenletrendszert (a korábbi táblázat alapján) és oldjuk meg a most megismert `fsolve` utasítás felhasználásával. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{(1 + sT_C)s} \cdot \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 4s)(1 + s)},$$

ahonnan a kiejtések miatt

$$T_I(T_D + T_C) = 40$$

$$T_I + T_C = 14$$

összefüggések adódnak. Ezeket felhasználva T_D és T_I időállandók kifejezhetők a T_C időállandó függvényében, ahonnan

$$T_I = 14 - T_C$$

$$T_D = \frac{40}{14 - T_C} - T_C,$$

amelyet visszahelyettesítve a felnyitott kör átviteli függvényébe a

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{14 - T_C} \cdot \frac{1}{s(1 + sT_C)(1 + s)}$$

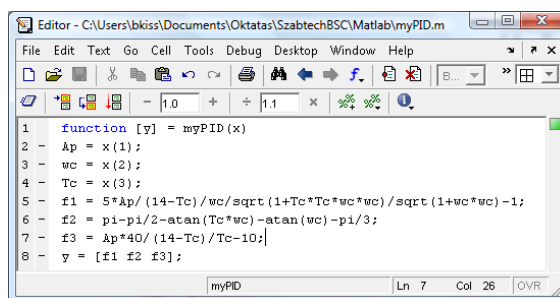
átviteli függvényt kapjuk. Kirészletezve a táblázatban a PID szabályzóhoz tartozó három egyenletet a

$$\frac{5A_p}{(14 - T_C)\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2 T_C^2} \sqrt{1 + \omega_c^2}} - 1 = 0$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \arctan T_C \omega_c - \arctan \omega_c - \frac{\pi}{3} = 0$$

$$A_p \frac{40}{14 - T_C} - 10 = 0$$

A három nemlineáris egyenlet ismeretleni A_p , T_C és ω_c . A megfelelő függvény kódját mutatja a 3.22. ábra.



```

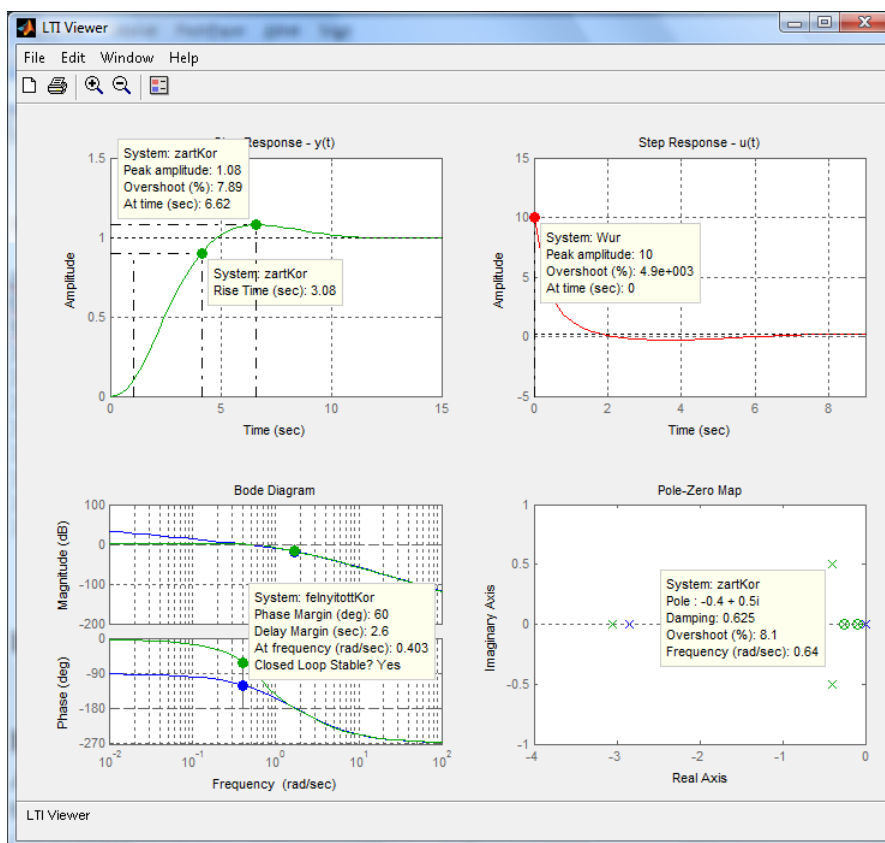
Editor - C:\Users\bkiss\Documents\Oktatas\SzabtechBSC\Matlab\myPID.m
File Edit Text Go Cell Tools Debug Desktop Window Help
1 function [y] = myPID(x)
2 - Ap = x(1);
3 - wc = x(2);
4 - Tc = x(3);
5 - f1 = 5*Ap / (14-Tc) / wc / sqrt(1+Tc*Tc*wc*wc) / sqrt(1+wc*wc) - 1;
6 - f2 = pi - pi/2 - atan(Tc*wc) - atan(wc) - pi/3;
7 - f3 = Ap*40 / (14-Tc) / Tc - 10;
8 - y = [f1 f2 f3];
myPID Ln 7 Col 26 OVR

```

3.22. ábra. A myPID függvény kódja

A paramétereket számító Matlab kód, amely előállítja az átviteli függvényeket is a megjelenítéshez:

```
params = fsolve('myPID',[10*(14-1)/40 1 1]);
Optimization terminated: first-order optimality is less
than options.TolFun.
>> Ap = params(1); Tc = params(3); Ti = 14-Tc;
>> Td = 40/Ti - Tc;
>> PID=tf(Ap/Ti*[Ti*(Tc+Td) Ti+Tc 1],conv([1 0],[Tc 1]));
>> szakasz = tf(5,conv(conv([1 1],[4 1]),[10 1]));
>> felnyitottKor=series(PID,szakasz);
>> zartKor = feedback(series(PID,szakasz),tf(1,1),-1);
>> Wur = feedback(PID,szakasz,-1);
>> ltiview({'step';'step';'bode';'pzmap'},...
    felnyitottKor,zartKor,Wur);
```



3.23. ábra. A felnyitott kör (kék színnel), a zárt kör (zöld színnel) és a $W_{ur}(s)$ átvitel (piros színnel) jellemzői (kimenet ugrásválasza, beavatkozó jel ugrásválasza, Bode-diagram, pólus-zérus eloszlás)

Az `fsolve` hívásához a kezdeti értékek az alábbiak szerint választhatók meg ($T_1=10\text{sec}$, $T_2=4\text{sec}$, és $T_3=1\text{sec}$ a háromtárolós szakasz nagyság szerint csökkenő sorrendbe rendezett időállandói).

Változó	Kezdeti érték
T_C	T_3 - a leggyorsabb időállandó
ω_c	$\frac{1}{T_3}$
A_P	$u_{\max} \frac{T_3}{T_1 T_2}$ $T_1 + T_2 - T_3$

Holtidős tagok kompenzálása

Az ideális holtidős tag (angolul time lag) átviteli függvénye

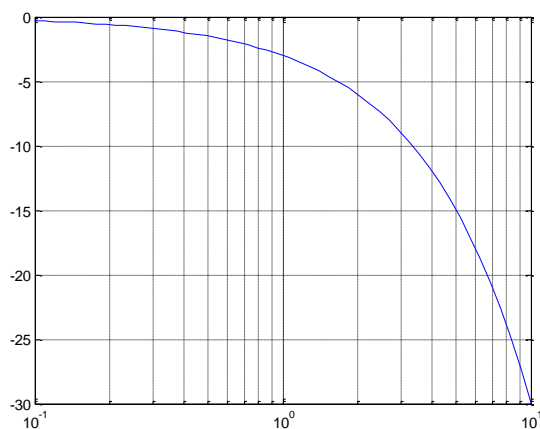
$$W_h(s) = e^{-sT_h},$$

ahol T_h a holtidő szekundumban kifejezett értéke. Az ideális holtidős tag frekvencia válassza

$$W_h(j\omega) = e^{-j\omega T_h} \quad |W_h(j\omega)| = 1 \quad \arg W_h(j\omega) = -\omega T_h \text{ [rad]}$$

A fázismenetet a Bode-diagramhoz hasonló módon ábrázolhatjuk

```
>> Th = 3; w = logspace(-1, 1);
>> fazis_holtido = -w*Th; %[rad]
>> semilogx(w, fazis_holtido); grid on
```



3.24. ábra. A holtidő fázismenete radiánban (itt $T_h = 3\text{sec}$)

A holtidő tehát az amplitúdó-menetet nem változtatja meg, de a fázismenetet rontja, ami a stabilitást veszélyeztetheti. (A 3.23. ábrán a Bode-diagramnál megjelölt fázistartalék mellett a Matlab `Delay Margin` paraméterként annak az ideális holtidős tagnak T_h késleltetését adja meg, amely a zárt kört a stabilitás határára viszi, azaz a fázistartalékot nullára csökkenti. Ennél kisebb holtidős tag esetében a zárt kör még stabil marad).

Most tegyük fel, hogy a szakasz 2 sec holtidővel is rendelkezik, és PID szabályzót szeretnénk használni. Ekkor a felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_o(s) = \frac{5A_p}{T_I} \cdot \frac{1 + (T_I + T_C)s + T_I(T_D + T_C)s^2}{(1 + sT_C)s} \cdot \frac{1}{(1 + 10s)(1 + 4s)(1 + s)} \cdot e^{-sT_h}$$

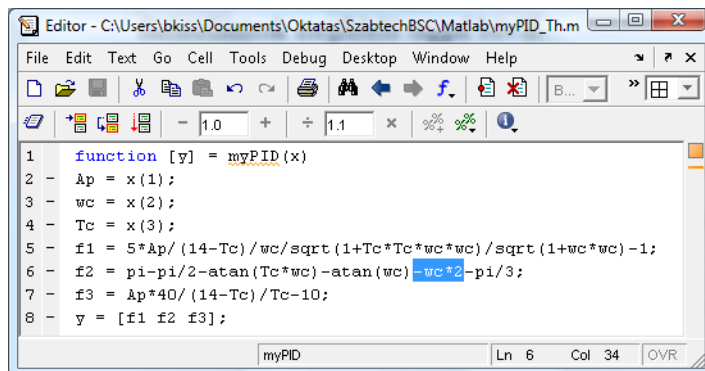
A korábbiakkal azonos kiejtési stratégiát alkalmazunk. Az egyenleteink is azonosak, kivéve a fázistartaléokra felírt második egyenletet, amely a holtidő fázistolásának megfelelő taggal bővül.

$$\frac{5A_p}{(14 - T_C)\omega_c \sqrt{1 + \omega_c^2 T_C^2} \sqrt{1 + \omega_c^2}} - 1 = 0$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \arctan T_C \omega_c - \arctan \omega_c - \omega_c T_h - \frac{\pi}{3} = 0$$

$$A_p \frac{40}{T_C} - 10 = 0$$

A módosított függvény kódját mutatja a 3.25. ábra.



```

1 function [y] = myPID(x)
2 - Ap = x(1);
3 - wc = x(2);
4 - Tc = x(3);
5 - f1 = 5*Ap / (14-Tc) / wc / sqrt(1+Tc*Tc*wc*wc) / sqrt(1+wc*wc) - 1;
6 - f2 = pi-pi/2 - atan(Tc*wc) - atan(wc) - wc*2 - pi/3;
7 - f3 = Ap*40 / (14-Tc) / Tc - 10;
8 - y = [f1 f2 f3];

```

3.25. ábra. A holtidős tag hatásával módosított egyenletrendszerhez tartozó Matlab kód

A Matlab segítségével a PID szabályzó meghatározása:

```
>> params = fsolve('myPID_Th', [10*(14-1)/40 1 1]);
```

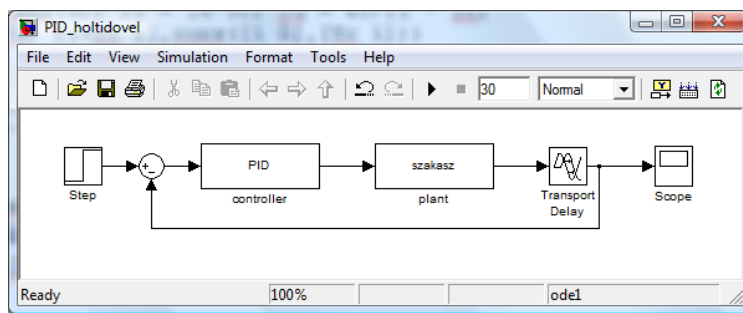
Optimization terminated: first-order optimality is less than options.TolFun.

```
>> Ap = params(1); Tc = params(3); Ti = 14-Tc; Td = 40/Ti - Tc;
>> PID = tf(Ap/Ti*[Ti*(Tc+Td) Ti+Tc 1],conv([1 0],[Tc 1]))
```

Transfer function:

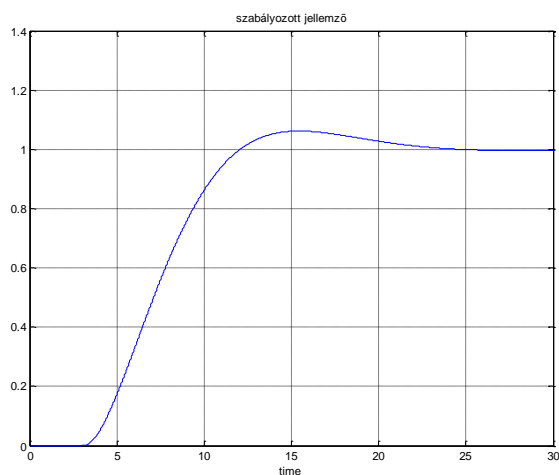
$$\frac{1.359 s^2 + 0.4755 s + 0.03397}{0.1359 s^2 + s}$$

A Matlab Control System Toolboxának adatstruktúrái nem kezelik a holtidős tagokat, ezért az időfüggvények előállítására a Simulinket használjuk, ahol az ideális holtidős tagot a Transport Delay elem modellezi (Continuous elemek könyvtára) a 3.26. ábrán.



3.26. ábra. A holtidős tagot tartalmazó szabályozási kör szimulációja Simulink segítségével

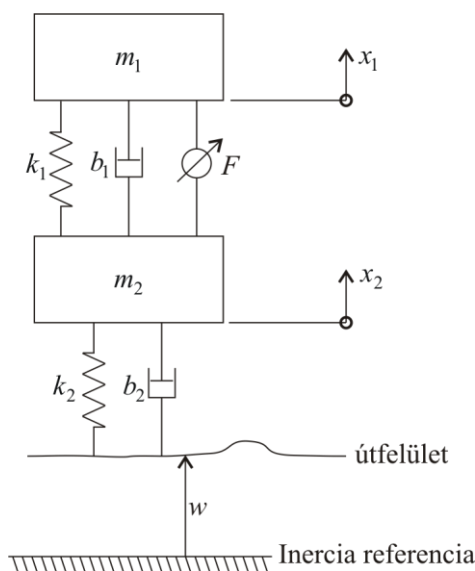
A kimenet alakulása látható az alábbi ábrán egységugrás alapjel esetén.



3.27. ábra. A holtidős tagot tartalmazó szabályozási kör kimenete egységugrás alapjel mellett

Busz aktív kerékfelfüggesztés szabályozása

A (negyed) busz aktív kerékfelfüggesztésének dinamikus modelljét a III.5 pontban tárgyaltuk. Megadtuk az aktív kerékfelfüggesztés egyszerűsített vázlatát, amelyet a 3.28. ábrán megismétlünk:



3.28. ábra. Busz aktív kerékfelfüggesztésének egyszerűsített vázlata

A busz 4 részre osztható 4 kerék esetén, minden rész egy összetett mechanikai lengőrendszer, amely a karosszéria negyedrészenek tömegéből (utasokkal együtt) és a kerék tömegéből áll, melyek függőleges helyzetét a felfelé mutató x_1 és x_2 írja le. Az útfelület és a kerék talppontja közötti távolság a mozgás közben az útfelülettel együtt változó w (zavaró jellemző). Az egyes részek közötti kapcsolat flexibilis, melyet viszkózus súrlódással és rugóállandóval modellezünk. A felfüggesztés aktív, amelyet az F erő képvisel (beavatkozó jel).

A (negyed) karosszéria és a kerék tömegét rendre m_1 és m_2 , az egyes komponensek közötti flexibilis kapcsolatot a viszkózus súrlódási tényezők (b_1, b_2) és rugóállandók (k_1, k_2) írják le.

A III.5 pontban megadtuk a mozgásegyenletet és abból kiindulva levezettük az eredő állapotegyenletet:

Mozgásegyenlet:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F - b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1(x_1 - x_2) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -F + b_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1(x_1 - x_2) - b_2(\dot{x}_2 - \dot{w}) - k_2(x_2 - w) \end{aligned}$$

Állapotegyenlet: $\dot{\bar{x}} = A\bar{x} + Bu, \quad y = C\bar{x}$

$$\begin{aligned} \bar{x} &:= (x_1, \dot{x}_1, y_1, \dot{y}_1)^T, \quad u = (F, w)^T, \quad y = x_1 - x_2 = y_1 \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} & 0 & \frac{b_1}{m_1} \left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2} + \frac{b_2}{m_2} \right) - \frac{k_1}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} \\ \frac{b_2}{m_2} & 0 & -\left(\frac{b_1}{m_1} + \frac{b_1}{m_2} + \frac{b_2}{m_2} \right) & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\left(\frac{k_1}{m_1} + \frac{k_1}{m_2} + \frac{k_2}{m_2} \right) & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & \frac{b_1 b_2}{m_1 m_2} \\ 0 & -\frac{b_2}{m_2} \\ \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) & -\frac{k_2}{m_2} \end{bmatrix} \\ C &= [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \end{aligned}$$

Numerikus értékek busz esetén SI egységekben:

$$\begin{aligned} m_1 &= 2500 & b_1 &= 350 & k_1 &= 80000 \\ m_2 &= 320 & b_2 &= 15020 & k_2 &= 500000 \end{aligned}$$

A paraméterek értéktartományából következik, hogy az F beavatkozó jel (N) értéktartománya is nagy kell, hogy legyen, amelynek biztosítására hidraulikus segédenergiát valamint rugós előfeszítést célszerű alkalmazni.

Elvárások a szabályozással szemben:

Az utazási komfort (kis $x_1 - x_2 = y_1 = y$) biztosításához 10sec-nál kisebb szabályozási idő és 5%-nál kisebb túllövés biztosítása szükséges. Az utazási komfortot a tervezés számára úgy specifikáljuk, hogy ha a busz felfut az útegyenetlenségek miatt egy 10cm-es lépcsőre (azaz $w(t) = 0.1 \cdot 1(t)$ [m] zavaró jellemző hat a rendszerre), akkor az oszcilláció maradjon ± 5 mm között (azaz ± 0.005 m között), és az oszcilláció szűnjön meg 5sec-on belül.

A szabályozott szakasz analízise

A szakasz vizsgálata a következő programrészlettel végezhető el:

```
%Suspension

clear all
close all
clc

%-----
%1/4 Bus Active Suspension
%See Section III.5 and Fig. III.5
%-----

%Parameters
m1=2500;
m2=320;
k1=80000;
k2=500000;
b1=350;
b2=15020;

%State Equation
%state x=(x1,dx1,y1,dy1)' where y1=x1-x2 (see comfort)
%input (u,w)' where u: active suspension force, w: road
disturbance
%output y=y1=x1-x2 (see comfort)
A=[0 1 0 0;...
   -b1*b2/(m1*m2) 0 b1/m1*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1 -
   b1/m1;...
   b2/m2 0 -(b1/m1+b1/m2+b2/m2) 1;...
   k2/m2 0 -(k1/m1+k1/m2+k2/m2) 0];
B=[0 0;...
   1/m1 b1*b2/(m1*m2);
   0 -b2/m2;
   (1/m1+1/m2) -k2/m2];
C=[0 0 1 0];
D=0;
sys=ss(A,B,C,D);

%Transfer functions
W=tf(sys); %Full Transfer Function
Wyu=W(1,1); %Transfer function u->y
Wyw=W(1,2); %Transfer function w->y
numyu=Wyu.num{1};
denyu=Wyu.den{1};
numyw=Wyw.num{1};
denyw=Wyw.den{1};
```



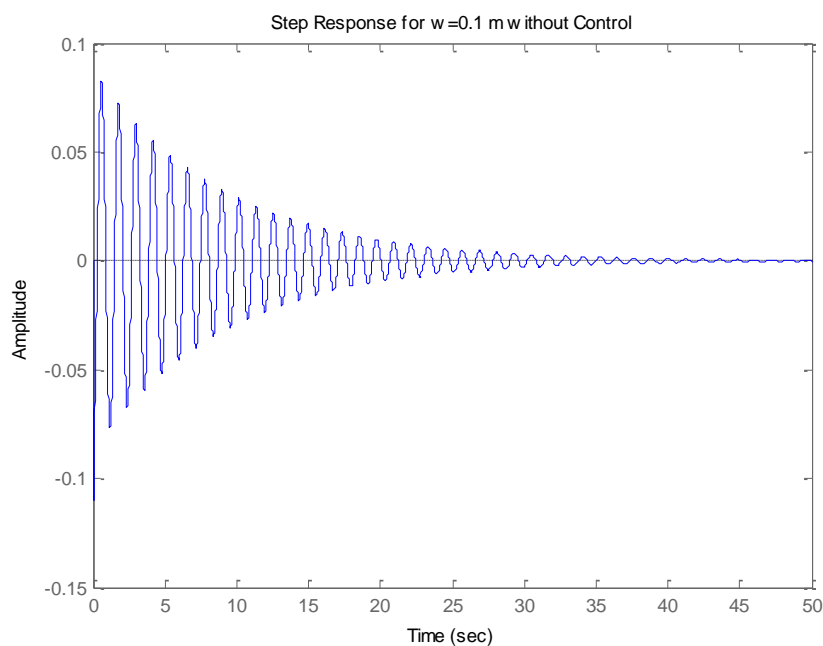
```

%Step response for disturbance input
figure(1)
step(0.1*Wyu);
title('Step Response for w=0.1 m without Control')

%Wyu Z/P distribution
[z,p,k]=zpkdata(Wyu,'v');
damp(z)
damp(p)
k

```

A szakasz $w(t)=0.1 \cdot 1(t)$ bemenetre és $y=x_1-x_2$ kimenetre vonatkozó átmeneti függvényét (ugrásválaszát) a 3.29. ábra mutatja, amiből jól látható a gyengén csillapított jelleg.



3.29. ábra. A szakasz ugrásválasza 10 cm-es zavaró jel ugrás esetén

A szakasz átviteli függvényei a következők:

```

Wyu Transfer function:
-46.94 s^3 - 1562 s^2 - 2.995e-012 s + 2.061e-012
-----
s^4 + 48.17 s^3 + 1851 s^2 + 1721 s + 5e004

```

W_{yu} Transfer function:

$$\frac{0.003525 s^2 + 0.01878 s + 0.625}{s^4 + 48.17 s^3 + 1851 s^2 + 1721 s + 5e004}$$

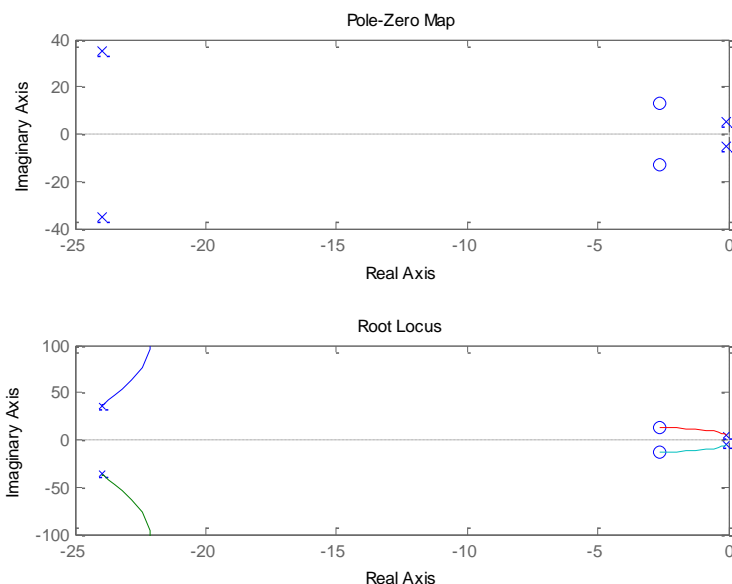
A $W_0 = W_c W_{yu}$ felnyitott körben a szakasz W_{yu} átviteli függvénye szerepel, amelynek Z/P eloszlása a következő:

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-2.66e+000 + 1.30e+001i	2.00e-001	1.33e+001
-2.66e+000 - 1.30e+001i	2.00e-001	1.33e+001

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-2.40e+001 + 3.52e+001i	5.63e-001	4.26e+001
-2.40e+001 - 3.52e+001i	5.63e-001	4.26e+001
-1.10e-001 + 5.25e+000i	2.09e-002	5.25e+000
-1.10e-001 - 5.25e+000i	2.09e-002	5.25e+000

$$k = 0.0035$$

Jól látható, hogy W_{yu} nagyfrekvenciás zérus helyekkel és pólusokkal, valamint gyengén csillapított alacsonyfrekvenciás pólusokkal is rendelkezik. Mivel W_{yu} és W_{yw} pólusai azonosak, a gyengén csillapított alacsonyfrekvenciás pólusok okozzák a W_{yw} -hez tartozó átmeneti függvény lassan megszűnő oszcillációját.



3.30. ábra. W_{yu} P/Z eloszlása és a gyökhelygörbe $W_c = A_p$ szabályozó esetén

A felnyitott körben szereplő W_{yu} átviteli függvény P/Z eloszlását és $W_c = A_p$ szabályozó esetén a gyökhelygörbét a 3.30. ábra mutatja.

Szabályozóbeállítás tervezése P szabályozó esetén

Jól látható a 3.30. ábrából, hogy nagy erősítés esetén a gyengén csillapított pólusok a zérushelyek felé mozognak. A zérusok a zárt rendszerben megmaradnak, mivel

$$\frac{W_{yu} W_c}{1 + W_{yu} W_c} = \frac{\frac{N_{yu} N_c}{D_{yu} D_c}}{1 + \frac{N_{yu} N_c}{D_{yu} D_c}} = \frac{N_{yu} N_c}{D_{yu} D_c + N_{yu} N_c},$$

ezért nagy szabályozó erősítés esetén a zárt rendszerben közel pólus-zérus kiesés keletkezik az alacsonyfrekvenciás tartományban, ezért a gyengén csillapított pólusok hatása megszűnik. Mivel a nagyfrekvenciás (42.6 rad/s) pólusok csillapítása 0.563 elfogadható, ezért célszerű ezek közelébe hozni a domináns pólusokat megfelelő körerősítés beállításával.

A következő programrészlet bemutatja, hogyan található meg a szabályozóbeállítás 45° fázistöbblet esetén:

```

%Design of P controller gain for Phm=45 degree
A=dcgain(Wyu)
Adb=20*log10(A)
figure(2)
subplot(211)
pzmap(Wyu)
subplot(212)
rlocus(Wyu)

[mag,phase]=bode(Wyu);
ix=max(find(phase>-135));
Phm=180+phase(ix)
Ap0=1/mag(ix)
Ap0dB=20*log10(Ap0)
figure(3)
margin(Ap0*Wyu)
K=A*Ap0;
fprintf('Loop Gain for P Controller K=%g\n',K);
pause

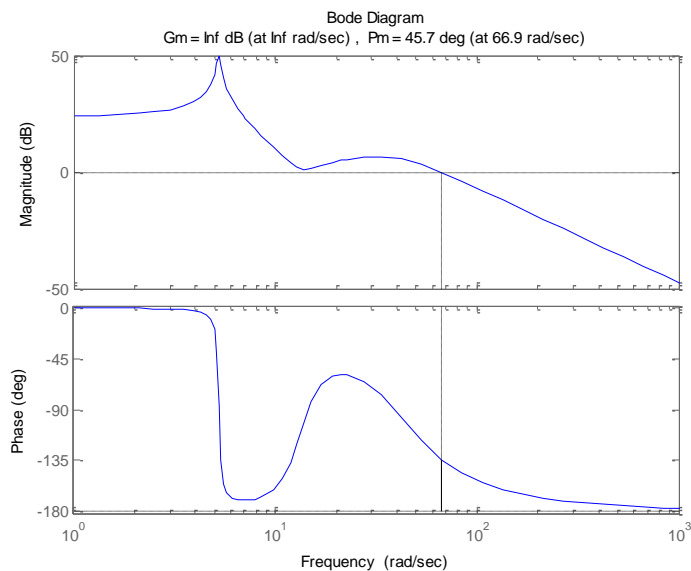
```

Ennek megfelelően a következő eredmények keletkeznek:

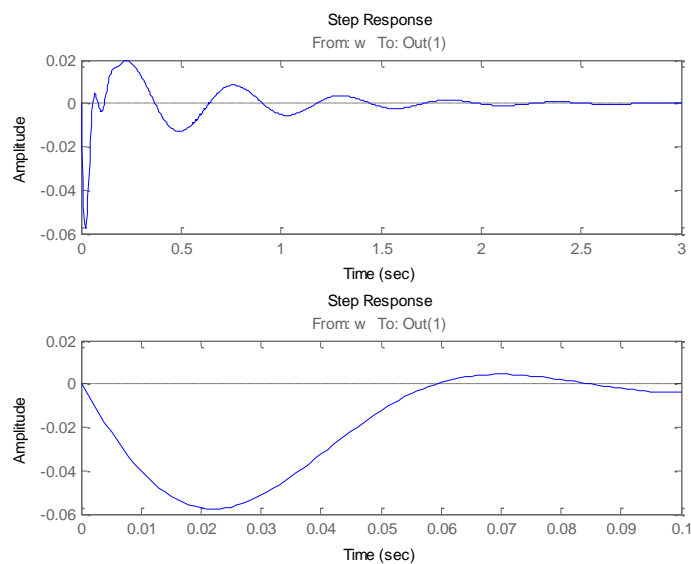
```

A = 1.2500e-005
Adb = -98.0618
Phm = 45.7075
Ap0 = 1.2216e+006
Ap0dB = 121.7385
Loop Gain for P Controller K=15.2699

```



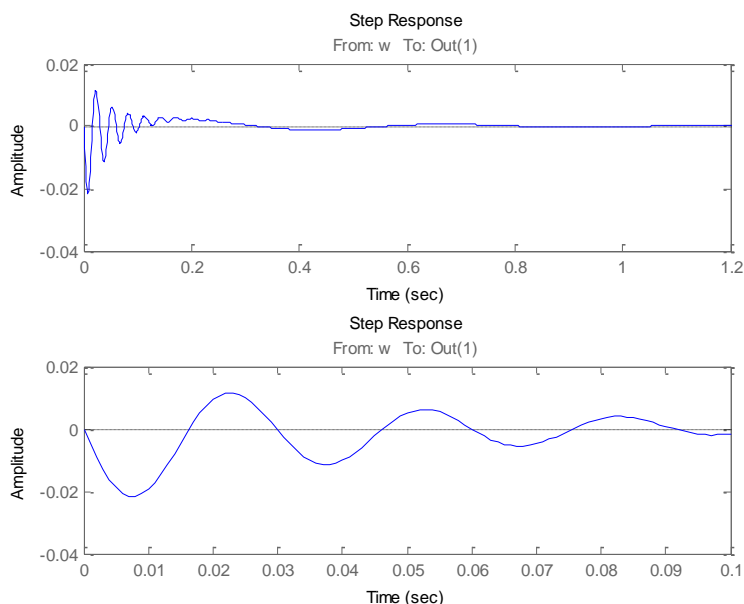
3.31. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja $A_p = A_{p0} = 1.2216e + 006$ esetén



3.32. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye $A_p = A_{p0} = 1.2216e+006$ esetén

A felnyitott kör Bode-diagramját a fázistöbblettel és a vágási frekvenciával $A_p = A_{p0}$ erősítés esetén a 3.31. ábra, a zárt rendszer ugrásválaszát $w(t) = 0.1 \cdot 1(t)$ zavaró jel bemenet esetén pedig a 3.32. ábra mutatja be, utóbbiból látható, hogy a pontossági elvárások messze nem teljesülnek.

Próbálkozhatunk az erősítés növelésével, de amint az a 3.33. ábrából látható, a pontossági elvárások $A_p = A_{p0} \cdot 10$ esetén sem biztosíthatók, miközben a fázistöbblet lecsökkent 12° -ra. Ezért a P szabályozás elvetendő, mivel az erősítés további növelésének a stabilitás biztosítása határt szab.



3.33. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye $A_p = A_{p0} \cdot 10$ esetén

Szabályozóbeállítás tervezése ideális PID szabályozó esetén

Először ideális PID szabályozóval próbálkozunk, amelynek szokásos alakjai:

$$W_c = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s = \frac{k_i + k_p s + k_d s^2}{s} = \frac{k_d \left(s^2 + \frac{k_p}{k_d} s + \frac{k_i}{k_d} \right)}{s}$$

$$W_c = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right) = \frac{A_p}{T_i} \cdot \frac{1 + sT_i + s^2 T_i T_d}{s}$$

A szabályozó paramétereinek megválasztásakor ki akarjuk használni, hogy a szakasz alacsonyfrekvenciás ($\omega_0 = 5.25$), gyengén csillapított ($\xi = 0.0209$) pólusai megfelelően nagy körerősítés esetén a konjugált komplex zérushelyek közelébe mozdíthatók ki, és közel P/Z kiesés jöhet létre a zárt rendszerben.

A nagy erősítés biztosításához a szabályozó két zérushelyét az alacsonyfrekvenciás tartományban $z_1 = -1$ és $z_2 = -3$ értékre választjuk, ami biztosítja, hogy még $\omega_0 = 5.25$ előtt a Bode-diagramban a fázisszög drasztikusan megnő pozitív irányban, jó irányban befolyásolva a felnyitott körben a fázisjelleggörbét, tekintettel az integrátor és a gyengén csillapított pólus negatív fázisára. Ekkor azonban $(s+1)(s+3) = s^2 + 4s + 3$ miatt teljesülnie kell a $k_p = 4k_d$ és

$k_i = 3k_d$ feltételeknek, ezért a megfelelő körerősítés és fázistöbblet biztosításához már csak k_d alkalmas értéke választható meg, amelyhez támpontul az aszimptotikus Bode-diagramot választjuk. Figyelembe véve, hogy ha az aszimptotikus Bode-diagramnak egy $k \cdot 20$ dB/dekad meredekségű szakaszán (A_L, ω_L) és (A_R, ω_R) két összetartozó pont, ahol $A = |W(j\omega)|$, akkor a 4 szám összefügg, nevezetesen

$$A_L = A_R \left(\frac{\omega_L}{\omega_R} \right)^k, \text{ ahol } k \text{ értéke előjelesen értendő.}$$

Ha tehát egy feltételezett $\omega_c = 100$ rad/sec értékből indulunk ki, és visszafelé haladunk a törésponti frekvenciák mentén, akkor a következő táblázat szerinti értékeket kapjuk.

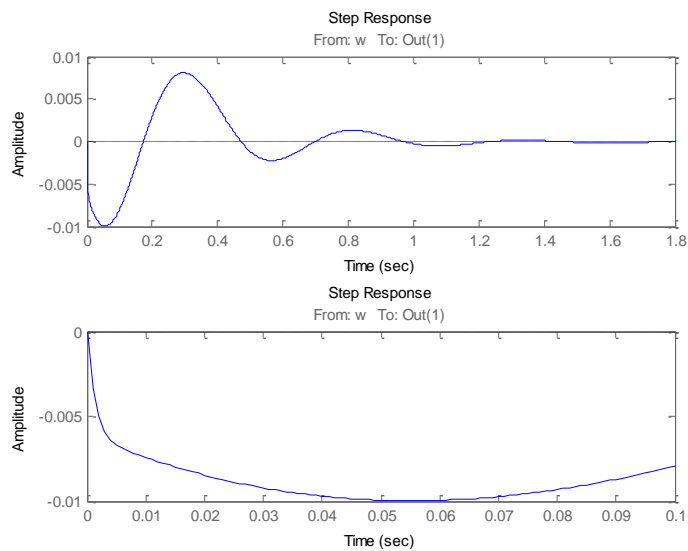
ω_L	ω_R	dB/dekad	k	A_R
0	1	-20	-1	1.0761
1	3	0	0	1.0761
3	5.25	20	1	1.883
5.25	13.3	-20	-1	0.743
13.3	42.6	20	1	2.381
42.6	100	-20	-1	1

Ezért $\omega_c = 100$ esetén az aszimptotikus Bode-diagram alapján k_d tájékoztató értéke $k_d = 1.0761/1.2500e-005 = 86088$. Mivel a szakasz pólusai és zérusai konjugált komplexek, a kapott értékek a pontos Bode-diagramhoz illesztendők. Próbálkozván a $k_d = 100000$ és $k_d = 200000$ értékekkel, az utóbbinál

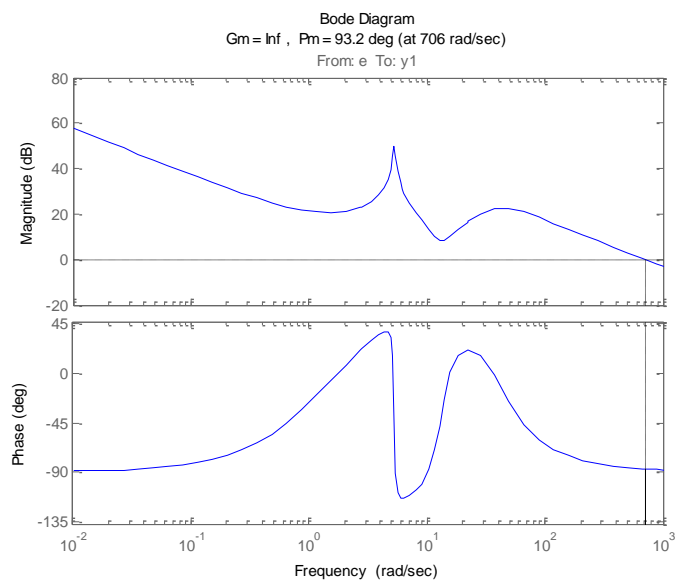
$$k_d = 200000 \quad k_p = 800000 \quad k_i = 600000$$

$$A_p = 800000 \quad T_i = 1.3333\text{sec} \quad T_d = 0.25\text{sec}$$

értékeket kapjuk az ideális PID szabályozó beállítására. Az ehhez tartozó ugrásválaszt $w(t) = 0.1 \cdot 1(t)$ zavarójel esetén, valamint a Bode-diagramot a 3.34.a-b ábrák mutatják.

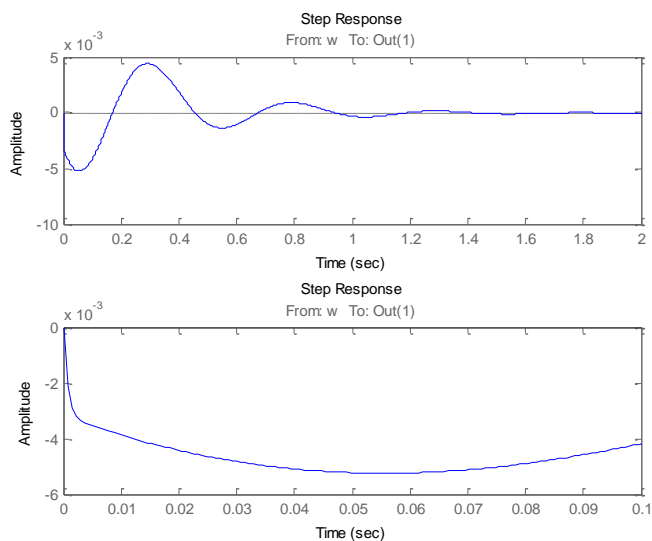


3.34.a. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye $k_d = 200000$ és $gainc = 1$ esetén

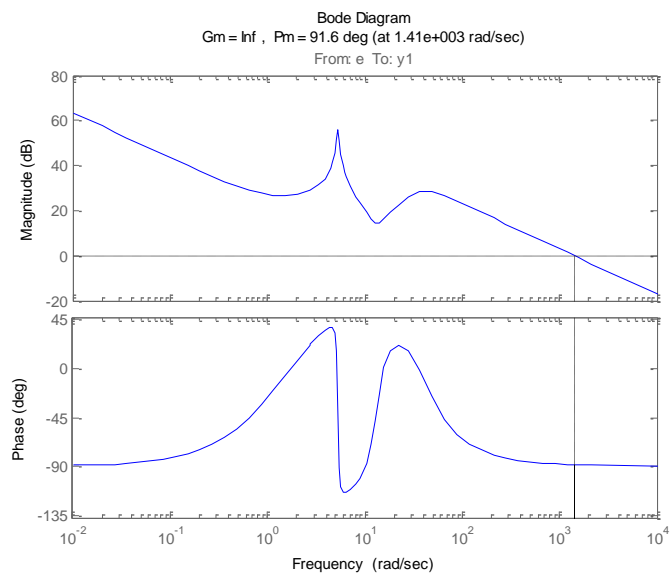


3.34.b. ábra. A zárt rendszer Bode-diagramja $k_d = 200000$ és $gainc = 1$ esetén

Látható, hogy az ugrásválasz a specifikációkat csak megközelíti, ezért a tranziens hiba csökkentésére az erősítést még meg kell növelni, amit $gainc = 2$ szorzóval biztosítunk, azaz $A_p = 800000 \cdot 2 = 1600000$. Ekkor már teljesül az összes specifikáció, amint azt a 3.35-36. ábrák mutatják.



3.35. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye $k_d = 200000$ és $gainc = 2$ esetén



3.36. ábra. A zárt rendszer Bode-diagramja $k_d = 200000$ és $gainc = 2$ esetén

A rendszerjellemzőket a következő eredmények foglalják össze:

```

%*****
Controller=PID Controller without Tc, gainc=2
%*****
%-----
%Open Loop Z/P Distribution
%-----

      Eigenvalue          Damping      Freq. (rad/s)

-2.66e+000 + 1.30e+001i    2.00e-001    1.33e+001
-2.66e+000 - 1.30e+001i    2.00e-001    1.33e+001
-3.00e+000                 1.00e+000    3.00e+000
-1.00e+000                 1.00e+000    1.00e+000

      Eigenvalue          Damping      Freq. (rad/s)

  0.00e+000                -1.00e+000    0.00e+000
-2.40e+001 + 3.52e+001i    5.63e-001    4.26e+001
-2.40e+001 - 3.52e+001i    5.63e-001    4.26e+001
-1.10e-001 + 5.25e+000i    2.09e-002    5.25e+000
-1.10e-001 - 5.25e+000i    2.09e-002    5.25e+000

k0 =

  1.4100e+003

%-----
%Controller Z/P Distribution
%-----

Eigenvalue      Damping      Freq. (rad/s)

-3.00e+000      1.00e+000    3.00e+000
-1.00e+000      1.00e+000    1.00e+000

Eigenvalue      Damping      Freq. (rad/s)

  0.00e+000      -1.00e+000    0.00e+000

kc =

  400000

```

```

%-----
%Closed Loop Disturbance to Output Z/P Distribution
%-----

```

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-3.33e+001	1.00e+000	3.33e+001
-1.48e-004	1.00e+000	1.48e-004
7.39e-005 + 1.28e-004i	-5.00e-001	1.48e-004
7.39e-005 - 1.28e-004i	-5.00e-001	1.48e-004

Eigenvalue	Damping	Freq. (rad/s)
-1.45e+003	1.00e+000	1.45e+003
-2.97e+000 + 1.26e+001i	2.29e-001	1.30e+001
-2.97e+000 - 1.26e+001i	2.29e-001	1.30e+001
-3.38e+000	1.00e+000	3.38e+000
-9.11e-001	1.00e+000	9.11e-001

kclw =

-46.9375

```

%*****

```

Szabályozóbeállítás tervezése közelítő PID szabályozó esetén

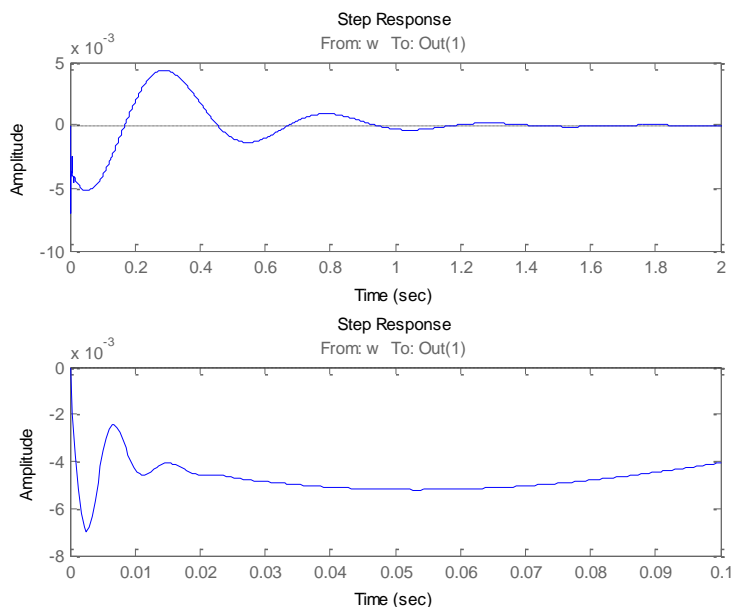
A PID szabályozó alakja közelítő D-hatás esetén

$$W_c = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_c} \right) = \frac{A_p}{T_i} \frac{1+s(T_i+T_c)+s^2T_i(T_d+T_c)}{s(1+sT_c)}$$

ahol $T_c = \alpha T_d$, továbbá a szabályozó kimenetének kezdeti értéke alapjelugrás esetén

$$A_p \left(1 + \frac{T_d}{T_c} \right) = A_p \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right).$$

Az aktív felfüggesztés szabályozás a specifikációkat folyamatirányításban gyakran alkalmazott $T_c = 0.1T_d$ esetén nem tudja teljesíteni, mivel már $\alpha = 0.01$ esetén a specifikációs határra kerül a rendszer tranziens hibája a korábbi $k_d = 200000$, $gainc = 2$ és $A_p = 800000 \cdot 2 = 1600000$ esetén, amint azt a 3.37. ábra mutatja.



3.37. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye $k_d = 200000$, $gainc = 2$ és $\alpha = 0.01$ ($T_c = 0.01T_d$) esetén

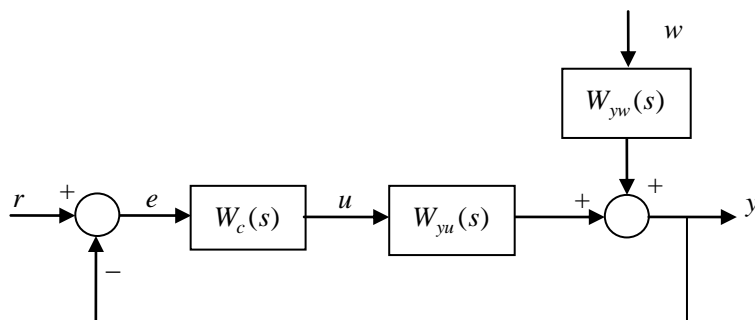
Az ábrán az erősítéssel felszorozott közelítő PID szabályozó beállításai $A_p = 800000 \cdot 2 = 1600000$, $T_i = 1.3333 \text{ sec}$, $T_d = 0.25 \text{ sec}$ és $T_c = 0.01T_d$.

Melléklet – Matlab kód az aktív kerékfelfüggesztés irányításának vizsgálatához

A program keretprogramból (Suspension.m) és a szabályozást analizáló függvényből (analyse.m) áll.

A `[w0,wclyw,wclfull]=analyse(sys,Wc,gainc,stringc)` függvény összekapcsolja a `sys` rendszert (`Wyu` és `Wyw`) a `Wc` szabályozóval. A hívás előtt a szabályozó nominális `Wc` átviteli függvényét meg kell szorozni a `gainc` erősítéssel, és az így kapott `Wc` szabályozó átviteli függvényt kell átadni a híváskor. A gyökhelygörbe rajzolásokor a `gainc` hatásától megfosztott felnyitott körhöz (benne a nominális szabályozóval) képezzük a gyökhelygörbét.

Az összekapcsolt rendszer hatásvázlatát a 3.38. ábra mutatja. Az összekapcsolást a jelek neveinek bevonásával írjuk elő (Name-based Interconnection, lásd `help connect`). Az összekapcsolás kódja az `analyse()` függvény elején található.



3.38. ábra. A zárt rendszer hatásvázlata

Suspension.m keretprogram

```

%Suspension

clear all
close all
clc

%-----
%1/4 Bus Active Suspension
%See Section III.5 and Fig. III.5
%-----

%Parameters
m1=2500;
m2=320;
k1=80000;
k2=500000;
b1=350;
b2=15020;

%State Equation
%state x=(x1,dx1,y1,dy1)' where y1=x1-x2 (see comfort)
%input (u,w)' where u: active suspension force, w: road
disturbance
%output y=y1=x1-x2 (see comfort)
A=[0 1 0 0;...
   -b1*b2/(m1*m2) 0 b1/m1*(b1/m1+b1/m2+b2/m2)-k1/m1 -
b1/m1;...
   b2/m2 0 -(b1/m1+b1/m2+b2/m2) 1;...
   k2/m2 0 -(k1/m1+k1/m2+k2/m2) 0];
B=[0 0;...
   1/m1 b1*b2/(m1*m2)];

```

```

    0 -b2/m2;
    (1/m1+1/m2) -k2/m2];
C=[0 0 1 0];
D=0;
sys=ss(A,B,C,D);

%Transfer functions
W=tf(sys); %Full Transfer Function
Wyu=W(1,1); %Transfer function u->y
Wyw=W(1,2); %Transfer function w->y
numyu=Wyu.num{1};
denyu=Wyu.den{1};
numyw=Wyw.num{1};
denyw=Wyw.den{1};

%Step response for disturbance input
figure(1)
step(0.1*Wyw);
title('Step Response for w=0.1 m without Control')

%Wyu Z/P distribution
[z,p,k]=zpkdata(Wyu,'v');
damp(z)
damp(p)
k

%Design of P controller gain for Phm=45 degree
A=dcgain(Wyu)
Adb=20*log10(A)
figure(2)
subplot(211)
pzmap(Wyu)
subplot(212)
rlocus(Wyu)

[mag,phase]=bode(Wyu);
ix=max(find(phase>-135));
Phm=180+phase(ix)
Ap0=1/mag(ix)
Ap0dB=20*log10(Ap0)
figure(3)
margin(Ap0*Wyu)
K=A*Ap0;
fprintf('Loop Gain for P Controller K=%g\n',K);
pause

%P or PID control design
%For P control Ap=gainc*Ap0, gainc=?

```

```

%For PID control z1=-1, z2=-3 fixed => kp=4*kd, ki=3*kd,
kd=?

ctype=1;

while ctype~=0
    ctype=input('Controller Type (1=P, 2=PID, 3=PID with
Tc, 0=exit) => ?');
    switch ctype
        case 0
            return
        case 1
            %P Controller
            fprintf('P Controller\n');
            stringc='P Controller';
            Ap0
            numc=Ap0;
            denc=1;
        case {2,3}
            %PID Controller
            fprintf('PID controller\n');
            kd=input('kd =>?')
            kp=4*kd
            ki=3*kd
            Ap0=kp; Ti=1/(ki/kp); Td=kd/kp; alpha=0;
            if ctype==3
                alpha=input('Tc=alpha*Td, alpha => ?');
                if alpha<=0, alpha=0; end;
            end;
            if alpha>0
                stringc='PID Controller with Tc';
                Tc=alpha*Td;
                numc=Ap0/Ti*[Ti*(Td+Tc) Ti+Tc 1];
                denc=[Tc 1 0];
            else
                stringc='PID Controller without Tc';
                Tc=0;
                numc=Ap0/Ti*[Ti*Td Ti 1];
                denc=[1 0];
            end;
            Ap0
            Ti
            Td
            Tc
        otherwise
            break;
    end;
    gainc=input('gainc => ?');
    Wc=tf(gainc*numc, denc);

```

```

%-----
%Analyse Plant with Controller
%-----
[W0,Wclyw,Wclfull]=analyse(sys,Wc,gainc,stringc);
end;

```

analyse.m függvény

```

function [W0,Wclyw,Wclfull]=analyse(sys,Wc,gainc,stringc)
%Analyse Suspension System sys with Control System Wc

W=tf(sys); %Full Transfer Function
Wyu=W(1,1); %Transfer function u->y
Wyw=W(1,2); %Transfer function w->y

Wc.InputName='e';
Wc.OutputName='u';
Sum=ss([1,-1], 'InputName',{ 'r', 'y' }, 'OutputName', 'e');
sys.InputName={ 'u', 'w' };
sys.OutputName='y';
syscl=connect(sys,Wc,Sum,{ 'r', 'w' }, 'y');
hf=figure;
subplot(211)
step(0.1*syscl(1,2));
subplot(212)
step(0.1*syscl(1,2),0.1);

Wyu.InputName='u';
Wyu.OutputName='y1';
W0=connect(Wyu,Wc,'e','y1');
[Gm,Pm,Wcg,Wcp]=margin(W0);
figure(hf+1)
margin(W0);

figure(hf+2)
rlocus(1/gainc*W0)

fprintf('%%*****\n');
fprintf('Controller=%s, gainc=%g\n',stringc,gainc);
fprintf('%%*****\n');

fprintf('%%-----
-----\n');
fprintf('%%Open Loop Z/P Distribution\n');
fprintf('%%-----
-----\n');
[z0,p0,k0]=zpkdata(W0,'v');
damp(z0)

```



```

damp(p0)
k0

fprintf('%%-----\n');
fprintf('%%Controller Z/P Distribution\n');
fprintf('%%-----\n');
[zc,pc,kc]=zpkdata(Wc,'v');
damp(zc)
damp(pc)
kc

Wcl=tf(syscl); %Full Closed Loop Transfer Function
Wcly=Wcl(1,1); %Closed Loop Transfer function u->y
Wclyw=Wcl(1,2); %Closed Loop Transfer function w->y

fprintf('%%-----\n');
fprintf('%%Closed Loop Disturbance to Output Z/P
Distribution\n');
fprintf('%%-----\n');
[zclyw,pclyw,kclyw]=zpkdata(Wclyw,'v');
damp(zclyw)
damp(pclyw)
kclyw

Wclfull=Wcl;

fprintf('%%*****\n');
fprintf('\n');

```

Kereskedelmi forgalomban kapható soros kompenzálást megvalósító eszközök

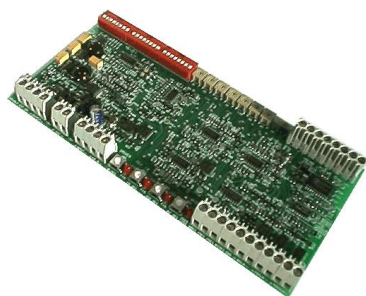
A ipari irányítástechnika piacának valamennyi nagyobb szereplője (ABB – www.abb.com, Rockwell Automation – www.rockwellautomation.com, Siemens – www.siemens.com, Honeywell – www.honeywell.com, Endress & Hauser – www.endress.com, National Instruments – www.ni.hu, stb.) kínál soros kompenzátorokat. Ezek a berendezések a kompenzátor megvalósításán kívül annak behangolását is támogatják, illetve valamilyen ipari szabványú busz felhasználásával hálózatba köthetőek és adott esetben számos más funkciót is megvalósítanak. Hálózatba kapcsolva komplex irányítási és (redundáns vagy más módon tartalékolt) felügyeleti rendszerek (erőművek, gyártósorok, energiaelosztó rendszerek, intelligens épületgépészeti rendszerek) építőköveiként is szolgálnak.

Egy összetettebb rendszer esetében a szabályozási körök száma akár többszáz vagy ezer is lehet, különösen fontossá téve a berendezések kábelezési és moduláris beépíthetőségi jellemzőit is.

Soros kompenzátorok néhány kiemelkedően fontos alkalmazási területe a hajtásszabályozás, továbbá az angol betűszóval élve HVAC (Heating, Ventillation, Air Conditioning) rendszerek szabályozása, illetve erőmű környezetben hőmérséklet, nyomás, áramlás, stb. szabályozások.

Egy berendezés akár több szabályozási kör szabályozójaként is működhet. Egyes típusokat az alkalmazási terület függvényében speciális kivittelel szerelnek (rezgés és rázóállóság járművekben történő felhasználáshoz, robbanásbiztos kivitel (gyújtószikramentes kivitel vagy nyomásálló tokozás, stb.) erőművi, olajipari vagy bányaiipari alkalmazásokhoz, szennyeződésmentes és különleges korrózióálló kivitelek orvosi vagy élelmiszeripari alkalmazásokhoz, stb.). A követelményeket szabványok rögzítik.

Egyszerű alkalmazásokhoz kisebb gyártók jóval olcsóbb egységei is megfelelőek lehetnek. Néhány ilyen berendezéssel az alapképzés egyes labormérései során is találkozhatnak a hallgatók.



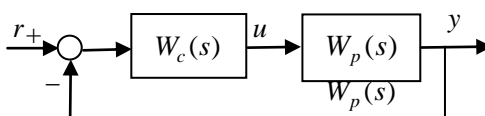
3.39. ábra. Egykártyás PID szabályzó; Kijelző pannellel ellátott, tokozott PID szabályzó



3.40. *ábra.* Mozgásszabályozáshoz használható PID szabályzó WLAN csatlakozóval (a paramétereket egy webes felületen állathatjuk be, az egység webszerverként is üzemel); Ipari buszokra csatlakoztatható, PID funkciókat is megvalósító PLC (Programmable Logic Controller).

3. Számítógéptermi gyakorlat – PID szabályozótervezés

A 3. számítógéptermi gyakorlat célja P, PI, PD és PID tagokkal történő szabályozótervezés frekvenciatartományban a Matlab és a Control System Toolbox (CST) szolgáltatásainak felhasználásával. A 3.41. ábrán látható szabályozási körben a $W_c(s)$ átviteli függvénnyel jelölt szabályozó tervezéseket a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszra végezzük el.



3.41. ábra. A mintarendszer

Az irányítandó szakasz három egytárolós tagból áll, T_1 , T_2 , T_3 időállandóval, az átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A = 2$$

$$T_1 = 10 \text{ sec}$$

$$T_2 = 4 \text{ sec}$$

$$T_3 = 1 \text{ sec}$$

A szabályozót megtestesítő $W_c(s)$ egyelőre legyen egy egységnyi erősítésű tag, azaz $W_c(s)=1$. A szakasz és a szabályozó megadása Matlab környezetben (többek között) a következő utasításokkal tehető meg:

```
>> A=2; T1=10; T2=4; T3=1;
    numps=A;
    denps=conv(conv([T1 1],[T2 1]),[T3 1]);
    sysp_tf=tf(numps,denps)
```

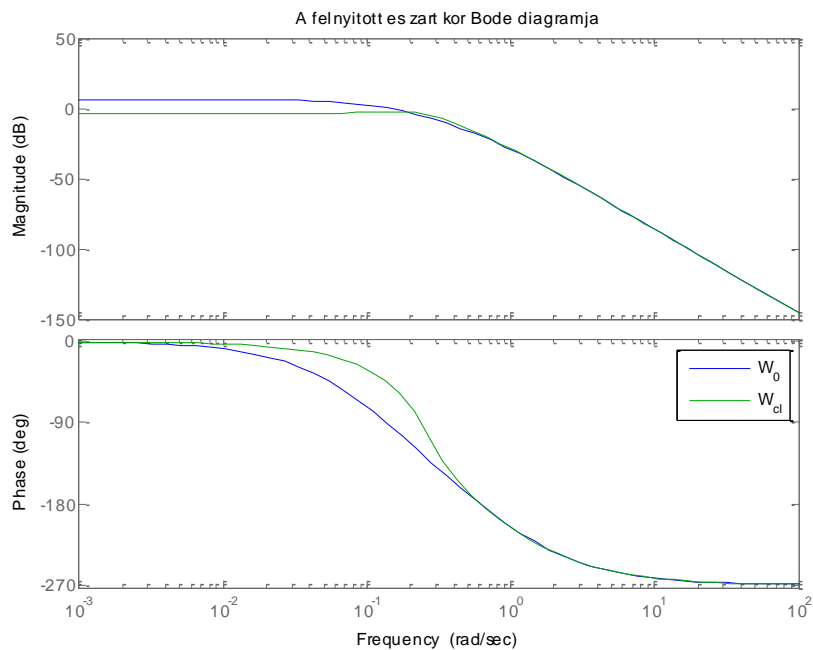
A rendszer Bode-diagramja és átviteli függvénye a korábbiak alapján a következő Matlab parancsokkal rajzolhatók ki:

```

figure(1)
    bode(sysp_tf)
    title('Bode diagram (szakasz)')
figure(2)
    step(sysp_tf)
    title('Ugrasvalasz (szakasz)')

```

A 2. gyakorlat során láthattuk, hogy a szabályozás egyik alapvető célja, hogy a kimeneti jel megfelelő specifikációk betartása mellett kövesse az alapjelet. Ehhez elengedhetetlen a visszacsatolás megvalósítása. A legegyszerűbb esetben a szabályozó egy $W_c(s)=1$ átviteli függvénynek felel meg és egy P (proportional - arányos) tagot realizál. Ebben az esetben a felnyitott kör Bode-diagramját összehasonlítva a zárt rendszer Bode-diagramjával, megállapítottuk, hogy a gyakran előírt gyorsan lecsengő tranziens eléréséhez érdemes a vágási frekvenciát növelni (eddig a frekvenciáig a zárt kör közelítőleg ideálisan viselkedik a kis frekvencián nagy amplitúdó erősítéssel rendelkező rendszereknél). Ezt a 3.42. ábra is alátámasztja,



3.42. ábra. A felnyitott kör és a zárt kör Bode-diagramja

ami a

```

sysdrot_tf=tf(1,1);
sys0_tf=series(sysp_tf,sysc_tf);
[syscl_tf]=feedback(sys0_tf,sysdrot_tf);

figure(4)
hold on
bode(sys0_tf,syscl_tf)
%bode(syscl_tf)
title('A felnyitott es zart kor Bode diagramja')
legend('W_0','W_{cl}')
hold off

```

programkóddal állítható elő. A zárt rendszer átmeneti függvényét előállító

```

%Ugrásválasz
figure(5)
step(syscl_tf)
title('Ugrasvalasz - visszacsatolt rendszer')

```

programkód eredményeként látható, hogy a szabályozás maradó hibát eredményez. A vágási frekvencia növelésének legkézenfekvőbb módja a körerősítés növelése. Ez egy

$$W_c(s) = A_p$$

átviteli függvénnyel rendelkező P taggal történhet meg. Sajnos a hurokerősítés nem növelhető korlátlanul, egyrészt, mert a beavatkozó jel telítésbe megy egy fizikai beavatkozó szerv esetén, másrészt pedig egy erősítési érték felett a szabályozási kör fázistartaléka nullára csökken és a rendszer instabillá válik (lásd Nyquist és Bode stabilitási kritériumok.). Mindezek miatt szükség van az erősítési tényező előírt stabilitást biztosító értékének megtalálására, amely egy P szabályozó megtervezését jelenti. A szakaszhoz tervezett szabályozók sorát egy ilyen szabályozó megtervezésével kezdjük. A tervezéseket Matlab környezetben végezzük el.

1. Feladat. P szabályozó tervezése előírt fázistartalékra.

Feladat: Tervezzünk $W_c(s) = A_p$ átviteli függvénnyel adott P szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely előírt φ_t fázistartalékot biztosít. Legyen $\varphi_t = 45$ fok.

Megoldás:

Koncepció: Induljunk ki egy olyan P szabályozóból, aminek az erősítése $A_p = 1$.

Nézzük meg, hogy emellett az erősítés mellett melyik (kör)frekvencián éri el a felnyitott kör fázismenete a $\varphi = -180 + \varphi_t = -180 + 45 = -135$ fokot. Legyen ez a

frekvencia ω_1 A feladat kiírásának megfelelően ezt a frekvenciát kell vágási frekvenciává tenni. Ez egyszerűen megtehető, hiszen az ω_1 frekvencián a felnyitott kör erősítését 1-re kell állítani. Ha ω_1 frekvencián a $A_p = 1$ erősítés mellett a felnyitott kör amplitúdó erősítése A_1 , akkor az

$$A_p = \frac{1}{A_1}$$

erősítési tényező P szabályozóval a felnyitott kör amplitúdó erősítése az ω_1 frekvencián

$$A_p A_1 = \frac{1}{A_1} A_1 = 1 \leftrightarrow 0dB$$

lesz, ami az $\omega_c = \omega_1$ vágási frekvenciát és az előírt $\varphi_t = 45$ fok fázistöbbletet valósítja meg.

A megoldás menete Matlab környezetben:

1. Először megkeressük azt a frekvenciát, ahol az $A_p = 1$ erősítésű szabályozó (sysc_p1) mellett a felnyitott kör fázisa $\varphi = 180 - \varphi_t = 180 - 45 = 135$ fok. Ehhez előállítjuk a felnyitott kör sys0_p1 átviteli függvényét:

```
pm=45;      % az előírt fázistartalék
numcs_p1=1
dencs_p1=1
sysc_p1=tf(numcs_p1,dencs_p1)
sys0_p1=series(sysc_p1,sysp_tf)

[mag,phase,w]=bode(sys0_p1);
dpm=abs((180+phase)-pm);
[minV,minInd]=min(dpm);
```

A programkódban megjelenő tf, series, bode utasítások már korábbi gyakorlaton szerepeltek. Az abs függvény egy vektor/mátrix elemeinek az abszolút értékét veszi elemenként (és nem a vektor hosszát). A dpm vektorból azt az elemet kell kiválasztani a min függvénnyel, ami a nullához legközelebb van (minV), hisz ekkor teljesül az előírt fázistartalék. Ennek az elemnek megfelelő sorszámindex (minInd) definiálja a w vektorban azt az ω_1 frekvenciát, amit vágási frekvenciának kell megtenni. Itt a felnyitott kör amplitúdó erősítése mag(minInd). (A w változót

Matlab programkódban sokszor használjuk az ω változó megfeleltetésére a betűk alak hasonlósága miatt).

2. A P szabályozó A_p paraméterének meghatározása:

$$A_p = 1 / \text{mag}(\text{minInd})$$

Az eredményül kapott szabályozó:

$$A_p = 2.3318$$

Az eredmények verifikálása:

Természetesen az eredményt ellenőrizni kell, amely a következő programkóddal elvégezhető:

```
numcs_p1=Ap;
dencs_p1=1;

sysc_p1=tf(numcs_p1,dencs_p1)

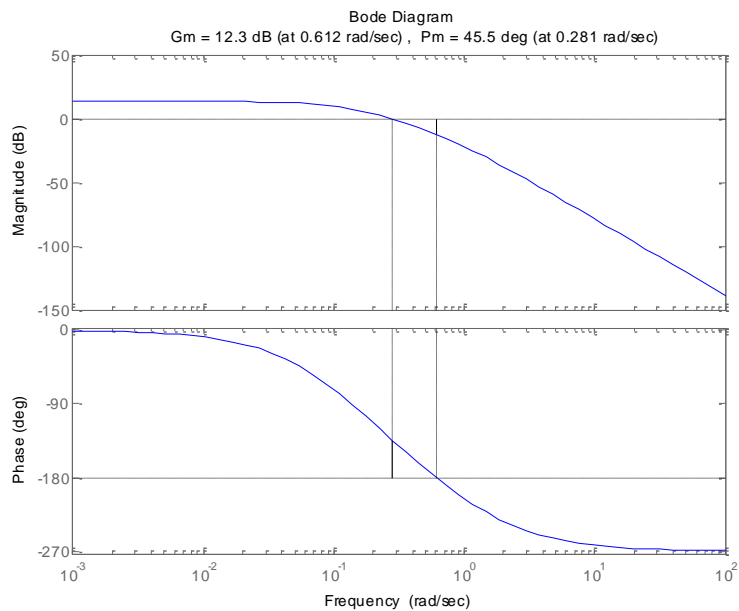
figure(6);
sys0_p1=series(syso_tf,sysc_p1);
margin(sys0_p1)
```

A fenti programkód a 3.43. ábrát eredményezi

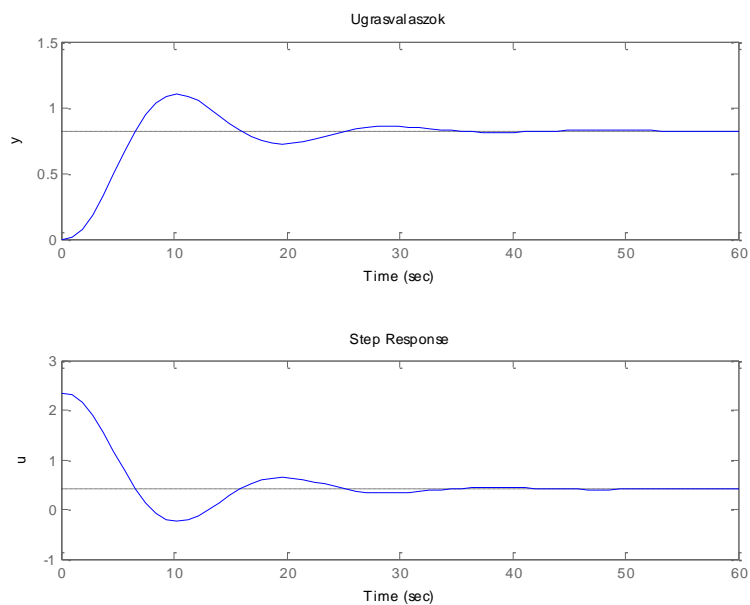
A zárt kör átmeneti függvénye (y) és a szabályozó által kiadott beavatkozó jel (u) szintén megadható:

```
%Ugrásválasz
syscl_p1=feedback(sys0_p1,sysdrot_tf);
figure(7)
subplot(211)
step(syscl_p1)
ylabel('y')
title('Ugrasvalaszok')
subplot(212);
sysclru_p1=feedback(sysc_p1,sysp_tf);
step(sysclru_p1)
ylabel('u')
```

A tranziensek a 3.44. ábrán láthatók.



3.43. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja a megtervezett P szabályozásnál.



3.44. ábra. A zárt rendszer kimenő és beavatkozó jele egységugrás bemenet esetén, 45 fok fázistartalékra tervezett P szabályozásnál.

Látható, hogy a beavatkozó jel kirajzolásához szükség van az alapjel (mint bemenet) és a beavatkozó jel, mint kimenet közötti átviteli függvényre (`sysclru_p1`). A feedback függvénnyel ez úgy tehető meg, hogy az előrevezető ágnak a szabályozó átviteli függvényét, míg a visszavezető ágnak a szakasz átviteli függvényét adjuk meg (a 3.41. ábra alapján könnyen belátható).

A szabályozástervezés ellenőrzésére szolgáló Bode-diagramot, átmeneti függvényt és beavatkozó jelet kirajzoló programkódot a továbbiakban is alkalmazhatjuk (csak a szabályozó átviteli függvényét megtestesítő `numcs_p1`, `dencs_p1` vektorokat kell lecserélni), ezért ezt a programrészletet érdemes függvényként megvalósítani. Egy másik lehetőség az `ltiview` szolgáltatás használata, amely a szabályozó, a felnyitott kör, és a zárt rendszer átviteli függvényének ismeretében a fent ábrázolt Bode-diagramot és tranzienseket pár egérgattintással felrajzolja. A fentiek miatt a továbbiakban a verifikációra alkalmazott programkódok közlésétől eltekintünk, a továbbiakban csak *ellenőrző szubrutinként* hivatkozunk rá.

Konklúzió: A P szabályozással az előírt fázistöbbletet elértük. A megjelenő kis mértékű numerikus hiba (45.5 fokot értünk el 45 fok helyett) annak köszönhető, hogy a Matlab függvénye az amplitúdó és fázisdiagramot diszkrét frekvenciaértékeken értékeli ki. A szabályozással kapcsolatban további megoldandó feladatok:

- A korábbi fázistartalék biztosítása magasabb vágási frekvencián (gyorsítás).
- Az állandósult hiba megszüntetése.

2. Feladat. P szabályozó tervezése előírt állandósult hibára.

Feladat: Tervezzünk $W_c(s) = A_p$ átviteli függvénnyel adott P szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely előírt e állandósult hibát biztosít. Legyen $e = 0.1$.

Megoldás:

Koncepció: Rögtön a szabályozótervezés előtt szögezzük le, hogy tetszőlegesen kis statikus hiba megvalósítása P szabályozással nem lehetséges. A P szabályozás ugyanis minden A_p erősítésre

$$v(\infty) = \frac{K}{1+K}$$

állandósult értéket ér el egységugrás bemenet esetén, ami

$$e = 1 - \frac{K}{1+K} \quad K = A_p A$$

állandósult hibát eredményez (amennyiben a szakasz nem tartalmaz integrátort), a hiba csökkentésére pedig lehet, hogy olyan nagy mértékű K körerősítés szükséges, ami negatív fázistartalékhoz vezet és instabilitást okoz a rendszerben. Az elérhető legkisebb statikus hibát az erősítéstartalék minimalizálja. Amennyiben $A_p = 1$ mellett az erősítéstartalék (Gain margin) G_m , akkor az elérhető legkisebb statikus hiba $A_{G_m} = 10^{G_m/20}$ jelölés mellett:

$$e = 1 - \frac{K}{1+K} = 1 - \frac{A_{G_m} A}{1+A_{G_m} A}, \text{ de ekkor már } \varphi_t = 0 \text{ lenne.}$$

Az 1. feladat alapján könnyen belátható, hogy az előírt statikus hiba teljesíthető (Figyelem, ehhez vegyük észre, hogy a 3.43. ábrán látható $G_m = 12.3$ db erősítéstartalék $A_p = 2.3318$ -hoz tartozik.) Az előírt statikus pontosság eléréséhez

$$e = 1 - \frac{K}{1+K} \Rightarrow K = \frac{1-e}{e}$$

$$A_p A = \frac{1-e}{e}$$

$$A_p = \frac{1-e}{Ae}$$

A megoldás menete Matlab környezetben:

```
stathiba=0.1;
K=(1-stathiba)/stathiba;
Ap=K/A;
```

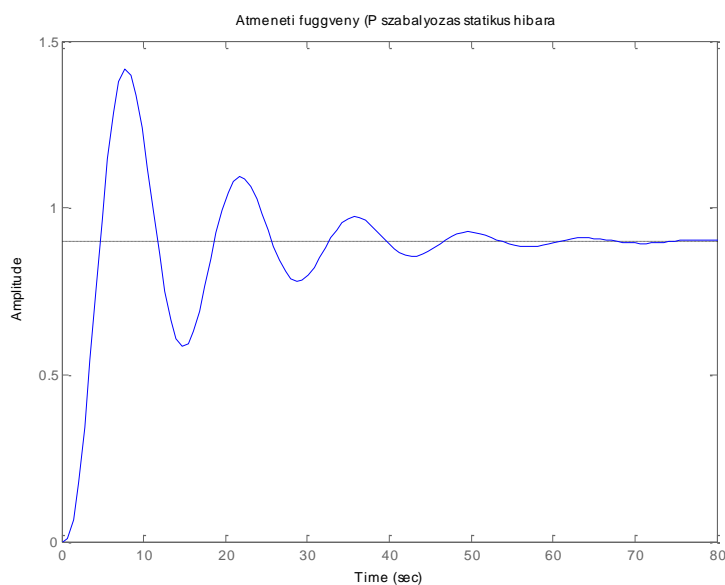
Az eredményül kapott szabályozó: $A_p = 4.5$

Az eredmények verifikálása:

A szabályozó az előírt statikus hiba-fétélt teljesíti. Mindez könnyen ellenőrizhető a már korábban közölt ellenőrző szubrutinnal, a numcs_p1 változó új értékét alkalmazva. A zárt kör egységugrás bemenetre adott válasza (átmeneti függvénye) a 3.45. ábrán látható. Leolvasható, hogy a kimenő jel teljesíti az előírt 0.1 maradó hiba előírást. Az ábra kinagyításával, vagy numerikusan erről pontosabban is meggyőződhetünk. Ellenőrizzük, hogy a fázitöbblet ekkor csak $\varphi_t = 21.9$ fok.

Konklúzió: Látható, hogy a korábbi P szabályozáshoz képest nagyobb A_p szerepel, ami kisebb fázistartaléket, és emiatt az átmeneti függvényekben nagyobb lengéseket okoz. Ezen kívül továbbra sem teljesülnek maradéktalanul az eredeti elvárások:

- Gyorsabb rendszer biztosítása magas elfogadható (kb. 45-60 fok) fázistartalék mellett.
- Az állandósult hiba megszüntetése.



3.45. ábra. A zárt rendszer kimenő jele egységugrás bemenet esetén, 0.1 statikus hibára tervezett P szabályozásnál.

3. Feladat. Ideális PD szabályozó tervezése

Feladat: Tervezzünk $W_c(s) := W_{pd1}(s) = A_p(1 + sT_d)$ átviteli függvénnyel adott ideális PD szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely $\omega_c = 2$ rad/sec vágási frekvenciát biztosít.

Megjegyzés: Vegyük észre, hogy a korábban tervezett P szabályozásokban a vágási frekvencia nem léphette túl az 0.612rad/sec értéket. Most ennek több mint háromszorosát tűzzük ki célul a dinamikát is tartalmazó ideális PD szabályozóval.

Megoldás:

Koncepció: A PD szabályozásoknál alkalmazott módszer többnyire a zérus-pólus kiejtés koncepcióját követi. Amennyiben ugyanis az ideális PD szabályozó zérusával kiejtjük a leglassabb pólust ($-1/T_1$), akkor a felnyitott kör amplitúdó jelleggörbéjének kezdeti vízszintes szakasza hosszabb lesz és később kezdődik meg a -20dB/dekád meredekségű törés, vagyis később metszi a jelleggörbe a 0dB tengelyt, ami a vágási frekvencia növekedéséhez vezet. Az 1. feladathoz hasonlóan természetesen itt is tervezhetnénk szabályozót fázistartalékra (és a pólus-zérus kiejtés után az 1. feladattal analóg módon ezt meg is tehetnénk), azonban figyeljük meg, hogy a felnyitott kör átviteli függvényében a pólus-zérus kiejtés miatt csupán két pólus szerepel (és nincs zérus), azaz a zárt rendszer strukturálisan stabilis lesz. Az ideális PD szabályozóval az előírt ω_c vágási frekvenciát a következő lépések végrehajtásával érhetjük el:

1. Megnézzük, hogy mekkora a felnyitott kör amplitúdó erősítése $T_d = T_1$ (pólus-zérus kiejtés) és $A_p = 1$ esetén az ω_c frekvencián. Legyen ez az erősítés A_1 .
2. Ahhoz, hogy az ω_c legyen ténylegesen a vágási frekvencia,

$$A_p = \frac{1}{A_1}$$

paraméter beállítás szükséges a szabályozóban.

A megoldás végrehajtása Matlab környezetben:

Reprezentálja a T_d időállandót T_d , az elérni kívánt vágási frekvenciát w_c , a szabályozó átviteli függvényének számlálóját `numcs_pd1`, a szabályozó átviteli függvényének nevezőjét `dencs_pd1`, a szakasz átviteli függvényét `sysp_tf`, a szabályozó A_p paraméterét A_p .

```
Td=T1;
wc=2;

numcs_pd1=[Td 1];
dencs_pd1=1;
sysc_pd1=tf(numcs_pd1,dencs_pd1)
sys0_pd1=series(sysc_pd1,sysp_tf);

[mag,phase,w]=bode(sys0_pd1,wc);

Ap=1/mag(1);
```

Vegyük észre, hogy a bode függvénynek az argumentumok között csak egy frekvenciát adtunk meg, nevezetesen az elérni kívánt vágási frekvenciát. Máshol felesleges kiszámítani az amplitúdó erősítést és a fázist.

Az eredményül kapott szabályozó:

$$A_p = 9.014$$

$$T_d = 10$$

$$W_{pd1}(s) = A_p(1 + sT_d) = 9.014(1 + 10s)$$

Az eredmények verifikálása:

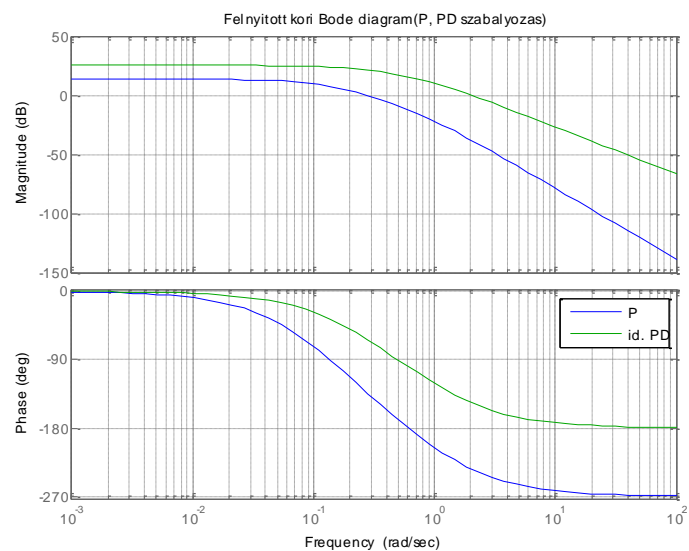
A 3.46 ábrán látható a Bode-diagramok összehasonlítása P és ideális PD szabályozás esetén, míg a 3.47. ábra a zárt rendszer átmeneti függvényét mutatja a két szabályozás esetén. Látható, hogy az ideális PD szabályozóval sikerült a kívánt $\omega_c = 2$ rad/sec vágási frekvenciát biztosítani, ami nem volt lehetséges P szabályozóval. Ezen kívül a maradó hiba láthatóan csökkent (nagyobb $K = A_p A$ körerősítést lehetett elérni, mint korábban), a vágási frekvencia növelésével összhangban pedig a kimenő jel tranziense rövidebb idő alatt cseng le. Probléma csak akkor adódik, ha kíváncsiak vagyunk a szabályozó által kiadott beavatkozó jelre. Ezt ugyanis a Matlab nem tudja előállítani. A probléma súlyát könnyen érezhetjük, ha megnézzük, hogy az egységugrás bemenetre a szabályozó milyen jelet ad ki $t = 0$ időpontban. Mivel az átviteli függvényben a számláló polinomja az s -ben magasabb fokszámú, mint a nevező polinomja, a végérték tételek alapján megállapítható $t = 0$ időpontnak megfelelő $s \rightarrow \infty$ helyen az átviteli függvények és így a $t = 0$ helyen vett beavatkozó jel is végtelen. Ez azt jelenti, hogy a szabályozó nem realizálható (A valóságban sincs olyan beavatkozó szerv, amely végtelen jelet ki tudna adni).

Konklúzió:

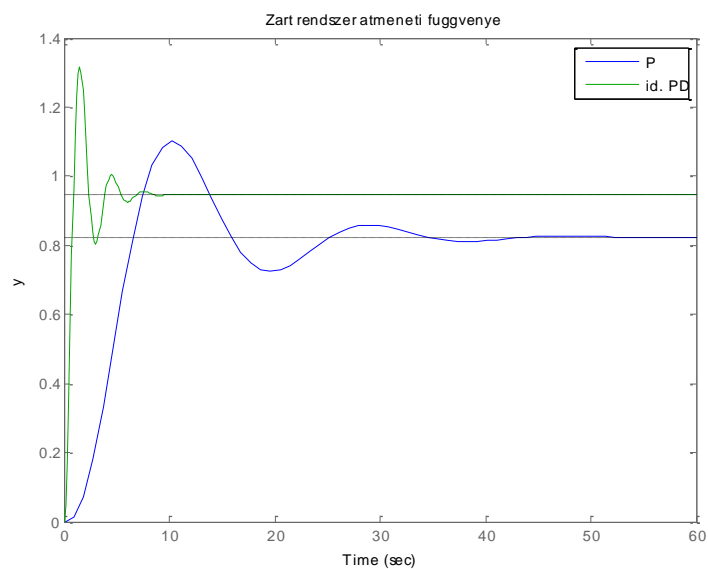
Az ideális PD szabályozóval

- a vágási frekvencia növelhető a P szabályozáshoz képest
- a maradó hiba csökkenthető

A probléma csak az, hogy ilyenkor a szabályozó kimenete kezdetben végtelen.



3.46. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja a megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál.



3.47. ábra. A zárt kör átmeneti függvénye megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál.

4. Feladat. Közelítő PD szabályozó tervezése

Feladat: Tervezzünk

$$W_c(s) := W_{pd2}(s) = A_p \left(1 + \frac{sT_d}{1 + sT_c} \right) = A_p \frac{1 + s(T_d + T_c)}{1 + sT_c}$$

átviteli függvénnyel adott közelítő PD szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely $\omega_c = 1$ rad/sec vágási frekvenciát biztosít (tehát a korábbi P szabályozóhoz képest gyors), de emellett realizálható és stabilis zárt rendszert eredményez.

1. *Megjegyzés:* Vegyük észre, hogy a korábban tervezett ideális PD szabályozással szemben most $\omega_c = 2$ helyett csak $\omega_c = 1$ vágási frekvenciát célzunk meg, ami még mindig nagyobb mint a korábban a P szabályozásánál limitált 0.612 rad/sec érték.

2. *Megjegyzés:* Csakúgy mint korábban, akár fázistöbblet biztosítása is lehetne a feladat. Ez az alkalmazott pólus-zérus kiejtés miatt az 1. feladatban alkalmazott számítási lépéseket jelenti, azzal a különbséggel, hogy most a felnyitott kör átviteli függvényében a T_1 időállandó helyett egy célszerűen kisebbre választott T_c időállandó szerepel.

Megoldás:

Koncepció: Ha az ideális PD szabályozó mellé még egy pólust is beépítünk az átviteli függvénybe (közelítő PD szabályozó, a továbbiakban egyszerűen csak PD szabályozó), akkor az átviteli függvény számlálója és nevezője azonos fokszámú, így a realizálhatósági problémák megszűnnek. Amennyiben a specifikációk megengedik (a betartandó feltételek száma kisebb, mint a PD szabályozó 3 paramétere), akkor gyakorlatban a $T_c = 0.1T_d$ választás a tipikus. Ekkor nagyfrekvencián a +20 dB/dekád meredekségű szakasz kb. 1 dekádig tart.

Válasszuk ezért a szabályozó paramétereinek a következőket:

$$\begin{aligned} T_d &= T_1 \\ T_c &= 0.1T_d \end{aligned}$$

Ezután A_p megválasztása az $\omega_c = 1$ rad/sec megvalósítása érdekében a 3. feladatban bemutatott lépésekben történik.

A megoldás végrehajtása Matlab környezetben:

```
Td=T1;
wc=1;
```



```

Tc=0.1*Td
numcs_pd2=[Td+Tc 1];
dencs_pd2=[Tc 1];
sysc_pd2=tf(numcs_pd2,dencs_pd2)
sys0_pd2=series(sysc_pd2,sysp_tf);

[mag,phase,w]=bode(sys0_pd2,wc);

Ap=1/mag(1);

```

Az eredményül kapott szabályozó:

$$A_p = 3.7515$$

$$T_d = 10$$

$$T_c = 1$$

$$W_{pd2}(s) = 3.7515 \frac{1+10s}{1+s}$$

Az eredmények verifikálása:

A közelítő PD szabályozás esetén a felnyitott kör Bode-diagramja a 3.48. ábrán, míg a zárt szabályozási kör átmeneti függvénye a 3.49. ábrán látható. Az ábrák az 1. feladatban szereplő P szabályozó és a 3. feladatban szereplő ideális PD szabályozó Bode-diagramját és átmeneti függvényeit is tartalmazzák. A közelítő PD szabályozó által kiadott beavatkozó jel a 3.50. ábrán látható. A megvalósító program kód a korábban közölt ellenőrző szubrutin utasításaihoz hasonlóan képezhető:

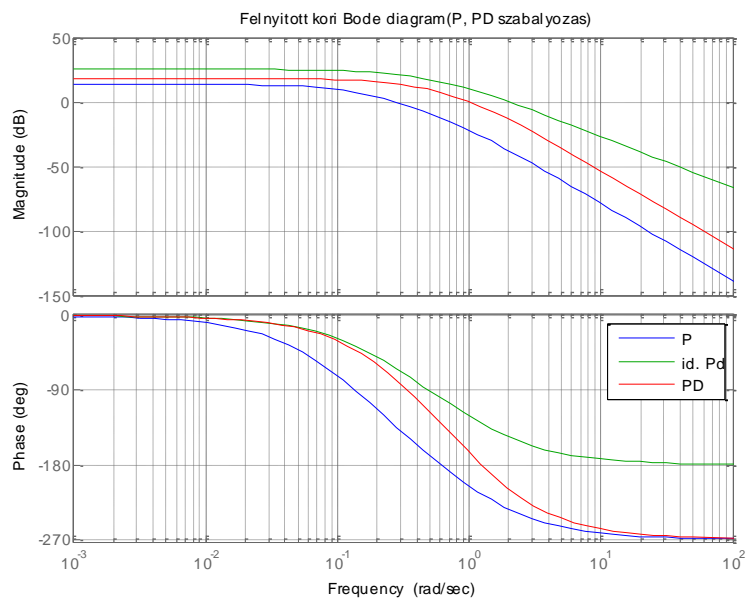
```

Ap=3.7515
Td=10
Tc=1

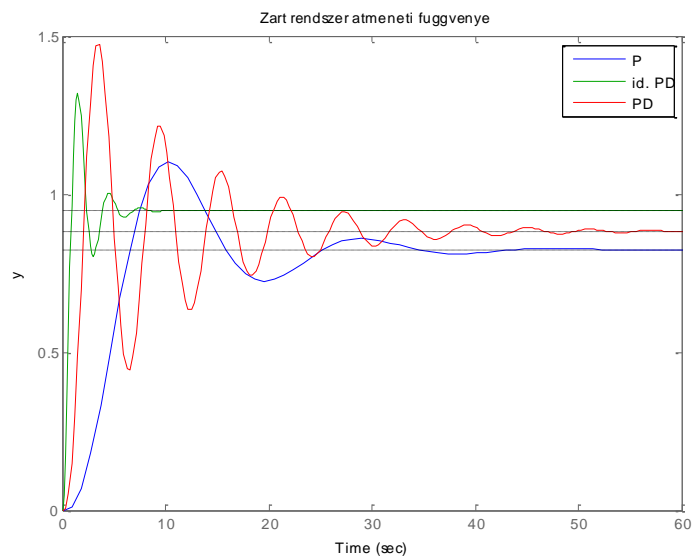
numcs_pd2=Ap*[Td+Tc 1];
dencs_pd2=[Tc 1];
sysc_pd2=tf(numcs_pd2,dencs_pd2)

figure(3);
sys0_pd2=series(sysp_tf,sysc_pd2);
bode(sys0_p1,sys0_pd1,sys0_pd2);
grid;
title('Felnyitott kori Bode diagram(P, PD szabalyozas)')
legend('P','id. Pd','PD')

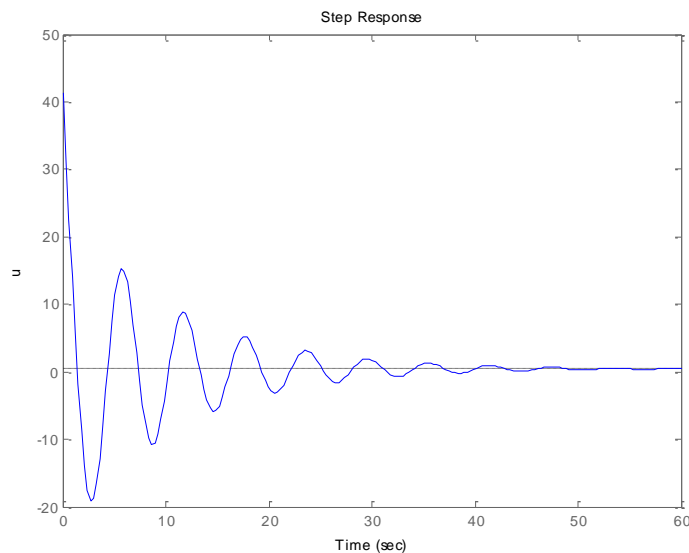
```



3.48. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál (3. feladat) és közelítő PD szabályozásnál.



3.49. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál (3. feladat) és közelítő PD szabályozásnál.



3.50. ábra. Beavatkozó jel a közelítő PD szabályozásnál.

```
%Ugrásválasz
syscl_pd2=feedback(sys0_pd2,sysdrot_tf);
sysclru_pd2=feedback(syssc_pd2,sysp_tf);
figure(4)
step(syscl_p1,syscl_pd1,syscl_pd2)
legend('P','id. PD','PD')
ylabel('y')
title('Zart rendszer atmeneti fuggvenye')
figure(5)
step(sysclru_pd2)
ylabel('u')
```

A 3.48. ábrából látható, hogy a célként kitűzött $\omega_c = 1$ vágási frekvencia megvalósult. Valójában az ideális PD szabályozónál előírt $\omega_c = 2$ vágási frekvencia már nem valósítható meg, hisz a PD szabályozó egy pólust is tartalmaz, ami a felnyitott kör fázisát rontja és $\omega_c = 2$ az A_p hangolásával nem érhető el (3.48. ábra). Észrevehető továbbá a 3.10 ábrából és a 3.51. ábrából, hogy a közelítő PD szabályozó nagy lengéseket gerjeszt a szakasz és a szabályozó kimenetén. Ennek oka az, hogy ha a 2. törésponti frekvencia 10-szeresével van a vágási frekvencia, akkor a törésponti közelítés szerint 0 a fázistartalék (stabilitás határhelyzete). Ha ezt meghaladja, akkor instabil. Látható, hogy, ha a vágási frekvencia a második

törésponti frekvenciánál van, akkor 45 fok a fázistartalék, ha a -20dB/dekád egyenesen, akkor ennél több, ha a -40 dB/dekád (vagy ennél negatívabb meredekségű) szakaszon, akkor kevesebb. Általában az a jó, ha a vágási frekvencia a -20dB/dekád szakaszon van és ez a szakasz elég hosszú (ha 2 dekád hosszú, akkor $\varphi_t \approx 90$ fok).

Ha a $T_1 = 10$ (legnagyobb) időállandót ejtjük ki, akkor az $\omega = [0, 1]$ tartományban $1/T_2 = 0.25$, $1/T_1 = 1/(0.1T_1) = 1/1$ és $1/T_3 = 1$ törésponti frekvenciák hatása érvényesül, amelyek -180 fokos fázisrontást (0 fok fázistartalék) eredményeznek. Ellenben ha a $T_2 = 4$ (második legnagyobb) időállandót ejtjük ki, akkor az $\omega = [0, 1]$ tartományban $1/T_1 = 0.1$ az $1/T_3 = 1$ törésponti frekvenciának lesz csak észrevehető hatása, ami -135 fokos fázisromlást eredményez és 45 fokos fázistartalékot ad. Az $1/T_c = 1/(0.1T_2) = 2.5$ sarokponti frekvencia ez utóbbi esetben nem játszik jelentős szerepet, mivel $\omega_c = 1$ után helyezkedik el. Ezért közelítő PD szabályozás esetén ne a leglassabb T_1 időállandót, hanem kb. a második leglassabb T_2 időállandót ejtsük ki:

$$T_d = T_2$$

$$T_c = 0.1T_d$$

Az $\omega_c = 1$ vágási frekvencia eléréséhez ekkor az alábbi közelítő PD szabályozót kapjuk:

$$A_p = 6.9938$$

$$T_d = 4$$

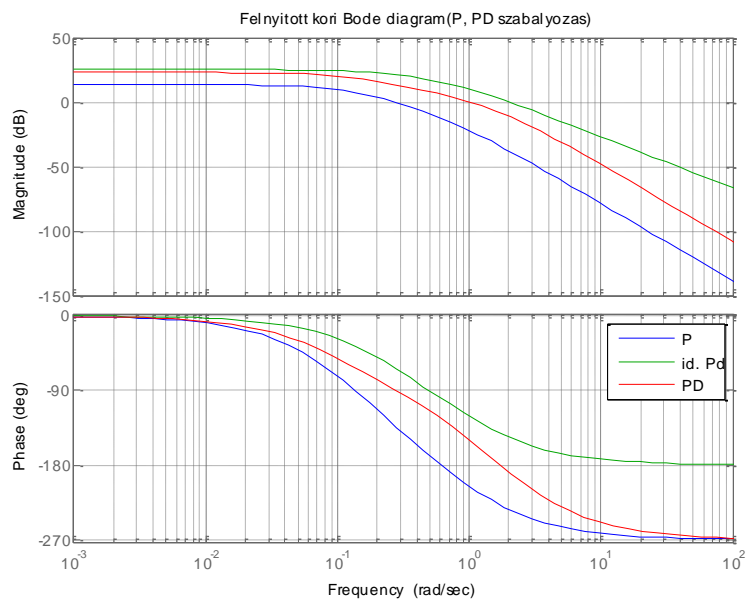
$$T_c = 0.4$$

$$W_{pd2}(s) = 6.9938 \frac{1 + 4.4s}{1 + 0.4s}$$

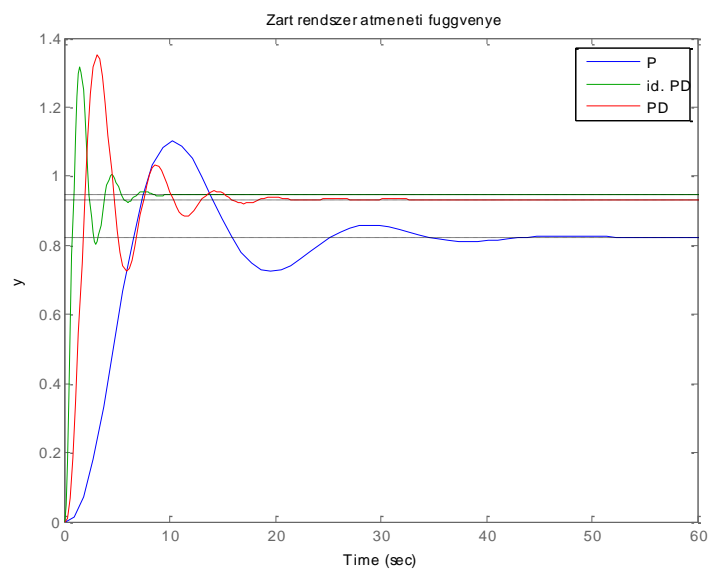
Ekkor a Bode-diagramok és a tranziensek a 3.11 ábra, 3.12 ábra és a 3.13 ábra szerint alakulnak. Láthatóan a tranziensekben kisebbek a lengések, ugyanakkor a kitézött cél teljesül.

Konklúzió:

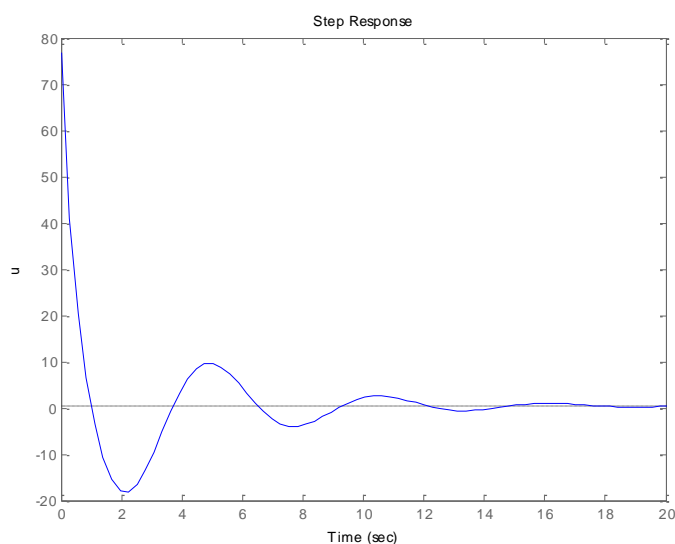
- A közelítő PD szabályozó is alkalmas a vágási frekvencia növelésére, de nem olyan mértékben, mint az ideális PD (mivel pólus van a szabályozóban is)
- A korábbiakkal ellentétben a közelítő PD szabályozó esetén sokszor célszerűbb nem a leglassabb, hanem a második leglassabb pólust kiejteni.
- A maradó hiba is csökken a P szabályozáshoz képest (de nem olyan mértékben, mint ideális PD esetében)
- A közelítő PD szabályozás realizálható.
- További probléma: maradó hiba van.



3.51. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál (3. feladat) és közelítő PD szabályozásnál ($T_d = T_2$).



3.52. ábra. A zárt rendszer átmeneti függvénye megtervezett P szabályozásnál (1. feladat) és ideális PD szabályozásnál (3. feladat) és közelítő PD szabályozásnál ($T_d = T_2$).



3.53. ábra. Beavatkozó jel a közelítő PD szabályozásnál ($T_d = T_2$).

5. Feladat. PI szabályozó tervezése

Feladat: Tervezzünk

$$W_c(s) := W_{pi}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = A_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}$$

átviteli függvénnyel adott PI szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely gyors működést, $\varphi_l = 45$ fok fázistartalékot és nulla maradó hibát (azaz statikus pontosságot) biztosít.

Megoldás:

Koncepció: A szabályozóban megtalálható integrátor önmagában biztosítja a statikus pontosságot egységugrás alapjelre, így a fennmaradó két paraméter (A_p és T_i) segítségével a gyors működést és az előírt fázistartalékot valósítjuk meg. A gyors működéshez kijelöljük a szakasz leglassabb pólusát:

$$T_i = T_1$$

A fázistartalék biztosítására a már korábban is követett koncepciót követjük, azaz $A_p/T_i = 1$ mellett megnézzük, hogy a felnyitott kör fázisa melyik frekvencián éri el a $\varphi = 180 - \varphi_t = 180 - 45 = 135$ fokot (jelen esetben nem A_p , hanem A_p/T_i tekinthető a szabályozó statikus erősítésének). Legyen ez a frekvencia ω_1 . A feladatnak megfelelően ezt az ω_1 frekvenciát kell vágási frekvenciává tenni. Ha az ω_1 frekvencián a $A_p/T_i = 1$ erősítés mellett a felnyitott kör amplitúdó erősítése A_1 , akkor a

$$A_p = \frac{T_i}{A_1}$$

összefüggéssel számítható a PI szabályozó A_p paramétere, hiszen az ω_1 frekvencián az amplitúdó erősítés

$$\frac{A_p}{T_i} A_1 = \frac{T_i}{A_1 T_i} A_1 = 1,$$

ami $\omega_c = \omega_1$ vágási frekvenciát, és ezért az előírt φ_t fázistartalékot eredményezi.

A megoldás végrehajtása Matlab környezetben:

```
pm=45;
Ti=T1;
numcs_pil=[Ti 1]
dencs_pil=[1 0]
sysc_pil=tf(numcs_pil,dencs_pil)
sys0_pil=series(sysc_pil,sysp_tf)
[mag,phase,w]=bode(sys0_pil);

dpm=abs((180+phase)-pm);
[minV,minInd]=min(dpm);
Ap=Ti/mag(minInd);
```

Az eredményül kapott szabályozó:

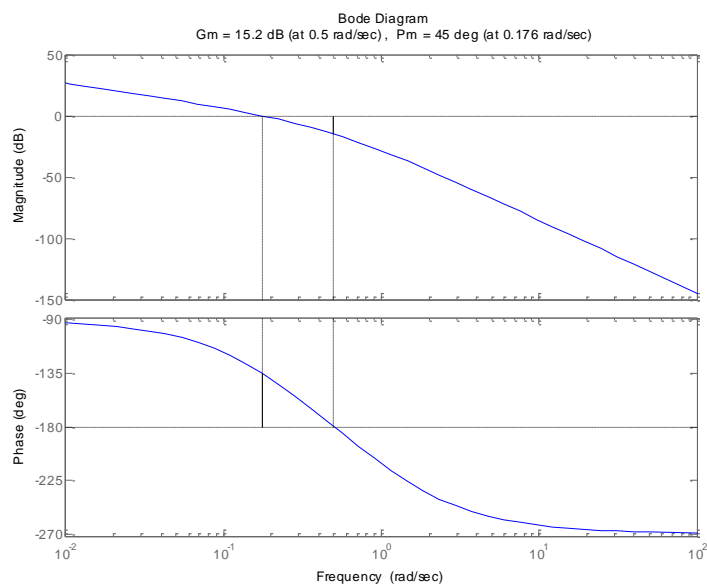
$$A_p = 1.0886$$

$$T_i = 10$$

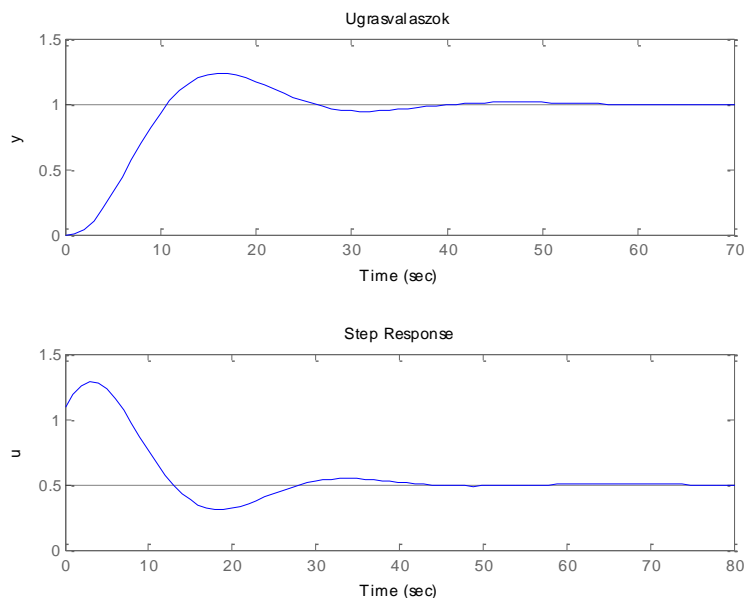
$$W_{pi}(s) = 0.1089 \frac{1+s10}{s}$$

Az eredmények verifikálása:

Az ellenőrző rutin segítségével a felnyitott kör Bode-diagramja kirajzolható (3.54. ábra). Megállapítható, hogy az előírt fázistartalék teljesül. A 3.15 ábrán illusztrált zárt körű átmeneti függvényből látható, hogy a szabályozás előírt statikus pontosságot biztosít.



3.54. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja megtervezett PI szabályozásnál



3.55. ábra. Zárt kör kimenő jele és beavatkozó jele PI szabályozásnál.

Vegyük észre, hogy kis frekvencián az amplitúdó-menet egy -20 dB/dekád meredekségű egyenes, ami kis frekvencián kiemelést biztosít (relatív nagy erősítéseket) és elősegíti a statikus pontosságot. A PI szabályozó ezen kívül képes a szabályozó után belépő konstans (egységugrás alakú) zavarjelek eltüntetésére (gyakorlásképpen ellenőrizzük!)

Konklúzió:

PI szabályozóval biztosítható a statikus pontosság. Az integrátor azonban konstans 90 fokos fázisromlást eredményez, ezért a stabilitás megtartására fokozottan ügyelni kell.

6. Feladat. PID szabályozó tervezése

Feladat: Tervezzünk

$$W_c(s) := W_{pid1}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_c} \right)$$

átviteli függvényrel adott PID szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvényrel rendelkező szakaszhoz, amely gyors működést, $\varphi_t = 45$ fok fázistartalékot és nulla maradó hibát (azaz statikus pontosságot) biztosít.

Megoldás:

Konceptió: A szabályozó tervezésében egyesítjük a P, PI és PD szabályozás előnyeit. A tervezési lépések is ennek megfelelően történnek. A PID szabályozó átviteli függvénye (közös nevezőre hozás és a számláló gyöktényezős alakban való felírása után) az alábbi alakra hozható:

$$W_{pid1}(s) = \frac{A_p}{T_i} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s(1 + sT_c)}$$

$$\begin{aligned} \tau_1 + \tau_2 &= T_i + T_c \\ \tau_1\tau_2 &= T_i(T_d + T_c) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Ez a pólus-zérus kiejtés tervezéséhez előnyös felírása a PID szabályozónak. A PID szabályozóban négy paraméter van, és ezekkel valójában két feltételt kell teljesíteni (a statikus pontosságot az integrátor jelenléte biztosítja). Ezért a már korábban is alkalmazott $T_c = 0.1T_d$ választás mellett a fennmaradó három szabad paraméterrel most lehetőség nyílik a szakasz két pólusának kiejtésére és az előírt fázistartalék biztosítására. Így a

$$\begin{aligned} T_c &= 0.1T_d \\ \tau_1 &= T_1 \\ \tau_2 &= T_2 \end{aligned}$$

választás mellett T_d , T_i meghatározható a (3.1) egyenletrendszer megoldásával. Ennek lépései:

$$\begin{aligned} 0.11T_d^2 - 1.1(\tau_1 + \tau_2)T_d + \tau_1\tau_2 &= 0 \rightarrow T_{d,1}, T_{d,2} \\ T_i &= \tau_1 + \tau_2 - 0.1T_d \end{aligned}$$

Ügyeljünk arra, hogy csak olyan megoldaspár megfelelő, ahol mindkét időállandó pozitív (és $T_i > T_d$). A kiejtés után az A_p paramétert a korábbiak szerint úgy állítjuk be, hogy a felnyitott körben előírt fázistartalékot biztosítsuk:

$$A_p = \frac{T_i}{A_1}$$

Itt A_i a felnyitott kör amplitúdó erősítése $A_p/T_i = 1$ mellett azon a frekvencián, ahol

$$\varphi = 180 - \varphi_i = 180 - 45 = 135.$$

A megoldás végrehajtása Matlab környezetben:

```
pm=45;

tau1=T1;
tau2=T2;

Td=min(roots([0.11 -1.1*(tau1+tau2) tau1*tau2 ] ));
if Td<0
    Td=max(roots([0.11 -1.1*(tau1+tau2) tau1*tau2 ] ));
end;
Ti=tau1+tau2-0.1*Td;

numcs_pid1=1/Ti*conv([tau1 1],[tau2 1]);
dencs_pid1=[0.1*Td 1 0];

sysc_pid1=tf(numcs_pid1,dencs_pid1);
sys0_pid1=series(sysc_pid1,sysp_tf);
sys0_pid1=minreal(sys0_pid1);
[mag,phase,w]=bode(sys0_pid1);
dpm=abs((180+phase)-pm);
[minV,minInd]=min(dpm);

Ap=1/mag(minInd);
```

A T_d időállandó meghatározásánál a `roots` függvény gyökei közül a kisebbet vesszük (`min`). Azonban, ha ez negatív időállandót eredményezne, akkor a nagyobbikat (`max` függvénnyel, ami jó eséllyel pozitív). A `minreal` függvény az átviteli függvény pólus-zérus kiejtése által okozott algebrai egyszerűsítéseket végzi el, ami pontosabb számítást és kisebb futási időt eredményez. A programkód maradék része korábbi feladatok megoldásaival megegyezik. A `numcs_pid1` változó a szabályozó számlálója, `dencs_pid1` a szabályozó nevezője, `sysc_pid1` a szabályozó átviteli függvénye, `sys0_pid1` a felnyitott kör átviteli függvénye, T_d a szabályozó T_d paramétere, T_i a szabályozó T_i paramétere, A_p a szabályozó A_p paramétere, τ_1 megfelel τ_1 -nek, τ_2 megfelel τ_2 -nek, pm pedig az előírt φ_i fázistartalék.

Az eredményül kapott szabályozó:

$$A_p = 6.512$$

$$T_d = 2.6475$$

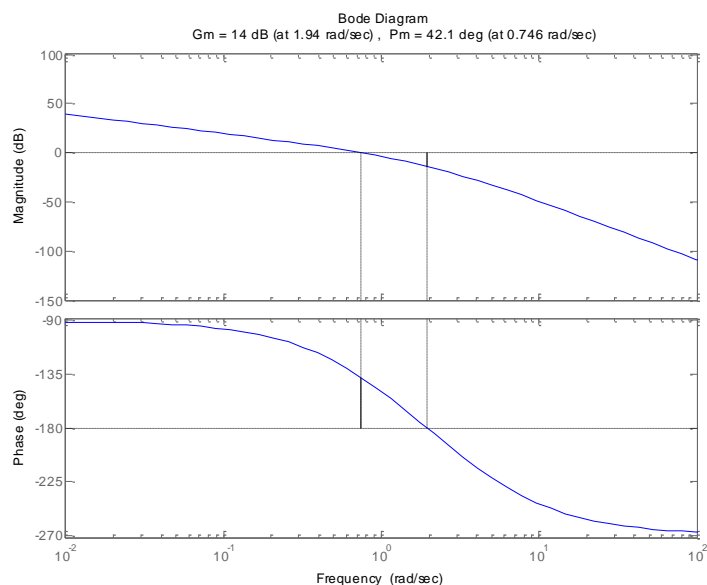
$$T_c = 0.1T_d = 0.2648$$

$$T_i = 13.7353$$

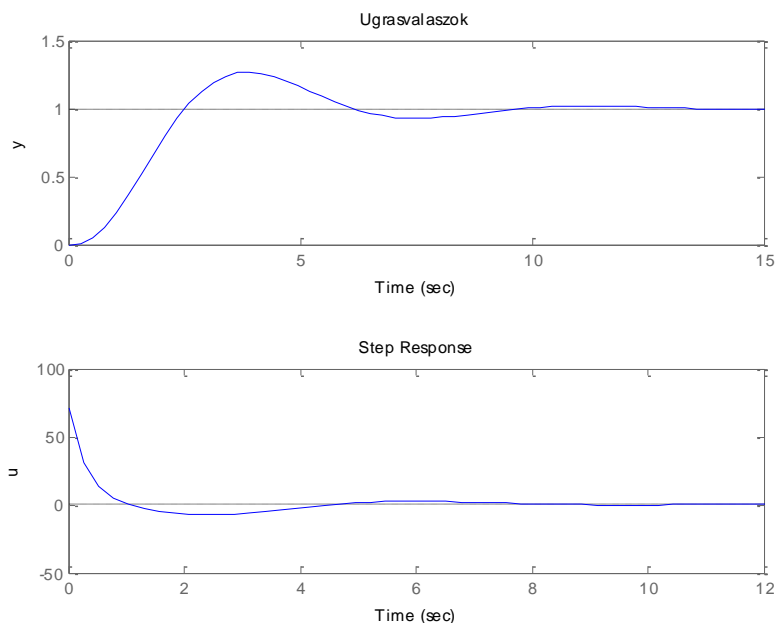
$$W_{pid1}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1+sT_c} \right) = 6.512 \left(1 + \frac{1}{13.7353s} + \frac{2.6475s}{1+0.2648s} \right)$$

Az eredmények verifikálása:

A PID szabályozásnál a felnyitott kör Bode-diagramja a 3.55. ábrán látható, a kimenő jel és a beavatkozó jel a zárt körben a 3.56. ábrán látható. Megállapíthatjuk, hogy a tervezés során sikerült az összes előírt feltételt teljesíteni. Ezt annak ellenére állíthatjuk, hogy a 45 fokos fázistartalék helyett 42.1 fok fázistartalékot valósítottunk meg. Ez az elfogadható hibahatáron belül van az alkalmazások legtöbbszörénél. A pontatlanság oka az, hogy a Matlab a Bode-diagramot diszkrét frekvenciapontokban értékeli ki, és azt a frekvenciát állította be a program vágási frekvenciának, ahol a fázistartalékra előírt feltétel legjobban teljesül. A frekvenciatartomány felbontásának finomításával a pontosság természetesen tovább növelhető. Az ábrából leolvasható az is, hogy a gyors működés mellett a kimenő jel az előírt 1 értékhez tart.



3.56. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja megtervezett PID szabályozásnál



3.57. ábra. A zárt kör kimenő és beavatkozó jele egységugrás alapjelnél megtervezett PID szabályozás mellett

Konklúzió: A PID szabályozó P, I és D tagot is tartalmaz, ezzel mindhárom tag előnyös tulajdonságait egyesíti. A gyors működés mellett képes a statikus pontosság biztosítására és adott fázistartalék elérésére is.

7. Feladat. PID szabályozó tervezése korlátozott beavatkozó jel mellett

Feladat: Tervezzünk

$$W_c(s) := W_{pid1}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{1 + sT_c} \right)$$

átviteli függvénnyel adott PID szabályozót a $W_p(s)$ átviteli függvénnyel rendelkező szakaszhoz, amely gyors működést, $\varphi_t = 45$ fok fázistartalékot, $u_{\max} = 10$ maximális beavatkozó jel korlátot és (alapjelugrás esetén) nulla maradó hibát (azaz statikus pontosságot) biztosít.

Megoldás:

Koncepció: A korábbi feladathoz hasonlóan a gyors működés érdekében itt is a szakasz két leglassabb pólusát ejtjük ki. Mivel azonban a beavatkozó jel maximális értékére is van egy korlátozás, egy extra paramétert kell bevezetnünk a tervezéshez. Ezt a paraméter a T_c időállandó lesz. A tanulmányokból ismeretes, hogy a

$$W_{pid1}(s) = \frac{A_p}{T_i} \cdot \frac{(1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)}{s(1 + sT_c)}$$

$$\tau_1 + \tau_2 = T_i + T_c$$

$$\tau_1\tau_2 = T_i(T_d + T_c)$$

szabályozó tervezéséhez a

$$\tau_1 = T_1$$

$$\tau_2 = T_2$$

választással biztosítjuk a gyors működést, ami a szabályozó T_i , T_d paramétereit is determinálja, ha T_c már ismert lenne.

$$T_i = \tau_1 + \tau_2 - T_c$$

$$T_d = \frac{\tau_1\tau_2}{T_i} - T_c$$

A T_c és A_p szabályozóparaméterek értékét (az ω_c) vágási frekvenciával együtt a

$$|W_0(j\omega_c)| - 1 = 0$$

$$\pi + \varphi(\omega_c) - \varphi_m = 0$$

$$v_{pid}(0) - u_{\max} = 0$$

egyenletrendszer megoldásával határozzuk meg ($v_{pid}(0)$ a beavatkozó jel kezdeti értéke a zárt körben alapjelugrás esetén). Az egyenletrendszer a konkrét szabályozási körben:

$$\frac{A_p A}{(T_1 + T_2 - T_c) \omega_c \sqrt{(1 + \omega_c^2 T_3^2)(1 + \omega_c^2 T_c^2)}} - 1 = 0$$

$$\pi - \frac{\pi}{2} - \operatorname{atan}(\omega_c T_3) - \operatorname{atan}(\omega_c T_c) - \varphi_m = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{A_p T_1 T_2}{(T_1 + T_2 - T_c) T_c} - u_{\max} = 0$$

A megoldás végrehajtása Matlab környezetben:

```
%Specifikációk
phim=pi/4;
umax=10

% Polus zerus kiejtes
tau1=T1;
tau2=T2;

TT=[T1 T2 T3];

global A TT umax phim

%----- kezdeti ertekek fsolvenak -----
wc=1/TT(3);
Ap=umax*(TT(1)+TT(2)-TT(3))*TT(3)/TT(1)/TT(2);
Tc=TT(3);
x0=[Ap Tc wc]';
x=fsolve('gyak3fs',x0);
Ap=x(1); Tc=x(2); wc=x(3); tau1=T1; tau2=T2;

%----- PID parametereinek beallitasa -----
Ti=tau1+tau2-Tc;
Td=tau1*tau2/Ti-Tc;
vpid0=Ap*(1+Td/Tc)

numcs_pid2=Ap/Ti*[Ti*(Td+Tc) Ti+Tc 1];
dencs_pid2=[Tc 1 0];
syscs_pid2=tf(numcs_pid2,dencs_pid2)
```

A szakasz időállandóit a TT vektorban tároljuk. A $vpid0$ változó reprezentálja a beavatkozó jel kezdeti $v_{pid}(0)$ értékét. A változók elnevezése a korábbiakhoz

hasonlóan értelemszerű. A programkód jelentős része a korábbi PID szabályozással megegyező lépéseket tartalmaz, ezért attól most eltekintünk. Az egyetlen új elem a (3.2) nemlineáris egyenletrendszer megoldása $x = (A_p, T, \omega_c)^T$ változókra, amely a Matlab `fsolve` függvényével történik numerikusan. Ehhez szükségünk van egy jó kezdeti értékekre, amelyet az `x0` vektor tartalmaz (ennek felállítására különböző elméleti megfontolások léteznek). Az `fsolve` rendre meghívja a paraméterként megadott `gyak3fs` függvényt, ami nem csinál semmi mást, mint kiértékeli a (3.2) egyenletrendszer bal oldalát az `x` helyen, és az egyenletek bal oldalának kiszámított értékeit oszlopvektorba rendezve visszaadja `fsolve`-nak:

```
function f=gyak3fs(x)

global A TT umax phim

Ap=x(1); Tc=x(2); wc=x(3);

f1=Ap*A/(TT(1)+TT(2)-Tc)/(wc*sqrt((1+wc^2*TT(3)^2)*...
    (1+wc^2*Tc^2)))-1;
f2=pi-pi/2-atan(wc*TT(3))-atan(wc*Tc)-phim;
f3=Ap*TT(1)*TT(2)/(TT(1)+TT(2)-Tc)/Tc-umax;
f=[f1 f2 f3]';
```

A visszaadott érték alapján az `fsolve` úgy hangolja a `gyak3fs` függvénynek átadott `x` vektort (numerikus technikákon alapuló optimalizálási módszerekkel), hogy a `gyak3fs` hívásakor visszaadott értékek fokozatosan konvergáljanak a nulla vektorhoz. Amikor az iterációk után a (paraméterbeállítással megadható, lásd `optimset`) megfelelő pontosságot elértük, az `fsolve` függvény visszaadja a `gyak3fs` függvénynek utoljára átadott `x` értéket. Ez lesz az egyenletrendszer x megoldása. Ez a vektor tartalmazza a szabályozó A_p és T_c paramétereit, valamint az ω_c vágási frekvenciát. Vegyük észre, hogy a hívó programkódban és a `gyak3fs` függvényben is szerepel a

```
global A TT umax phim
```

sor, ami globális változókat definiál és lehetővé teszi, hogy ezeket a változókat a hívó program és a `gyak3fs` függvény is lássa. Ügyeljünk arra, hogy az `fsolve` hívásakor próbáljunk a megoldáshoz közeli `x0` kezdeti értékről indulni. Ha a kezdeti érték a megoldástól messze van, akkor könnyen elképzelhető, hogy a lokális optimumok miatt egy rendszertechnikailag rossz megoldást kapunk.

Az eredményül kapott szabályozó:

$$A_p = 3.294$$

$$T_i = 12.985$$

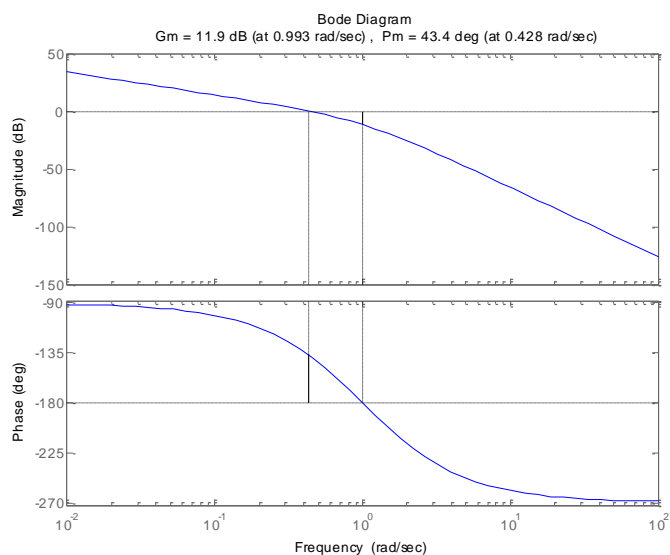
$$T_d = 2.066$$

$$T_c = 1.0146$$

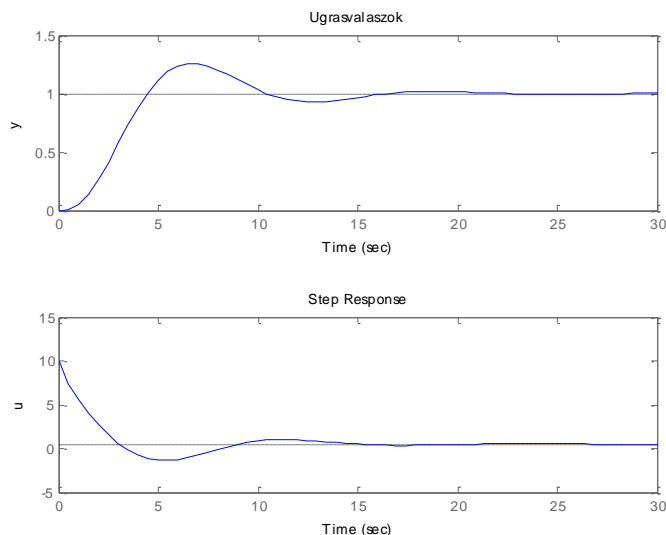
$$W_c(s) := W_{pid1}(s) = 3.294 \left(1 + \frac{1}{12.985s} + \frac{2.066s}{1+1.0146s} \right)$$

Az eredmények verifikálása:

A korábban használt ellenőrző rutint felhasználva az 3.57 ábra és a 3.58. ábra alapján megállapítható, hogy a szabályozás teljesíti a gyors működésre, a fázistartalékra, és a maximális megengedett beavatkozó jelre előírt korlátokat.



3.58. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja megtervezett PID szabályozásnál, beavatkozó jel korlátozás mellett



3.59. ábra. A zárt kör kimenő és beavatkozó jele PID szabályozásnál, beavatkozó jel korlátozás mellett ($u_{\max} = 10$)

Konklúzió: A PID szabályozás tervezése sokszor nemlineáris egyenletrendszer numerikus megoldására vezethető vissza. Ekkor ügyelni kell a numerikus módszert befolyásoló paraméterek kiinduló értékének megválasztására. A megtervezett PID szabályozás a korábbi módszerekkel összehasonlítva a szabályozástechnikában kívánatos fontosabb elvárásokat (gyors működés, nulla maradó hiba, megfelelő fázistartalék) teljesíteni tudja.

8. Feladat. PI szabályozás egytárolós holtidős szakasz esetén

Feladat: Tervezzünk

$$W_c(s) := W_{pih}(s) = A_p \left(1 + \frac{1}{sT_i} \right) = A_p \frac{1 + sT_i}{sT_i}$$

átviteli függvénnyel adott PI szabályozót a

$$W_p(s) = \frac{1}{1 + sT_1} e^{-sT_h}$$

átviteli függvényű, ú.n. egytárolós holtidős szakaszhoz, amely $\varphi_t = 45$ fok fázistartalékot biztosít.

Megoldás:

Koncepció: A PI szabályozó zérusával kiejtjük a szakasz pólusát, majd az erősítést úgy hangoljuk, hogy a fázistöbblet 45 fok legyen. Ehhez kihasználjuk, hogy a felnyitott kör amplitúdó-menete megegyezik K/s amplitúdó-menetével, a fázisment pedig az integrátor fázisa (konstans 90 fok), hozzáadva a holtidős tag $-\omega \cdot T_h \cdot 180/\pi$ fázisát, ezért

$$\omega_c = K = \frac{90 - \varphi_t [\text{deg}]}{T_h} \cdot \frac{\pi}{180}, \quad \text{ahol } K = \frac{A_p}{T_i} A.$$

A megoldás meghatározása Matlab környezetben:

```
% Szakasz
phm=45;
A=1;
T1=10;
Th=1;

% Ti=T1 valasztassal kiejtjuk a szakasz polusat
Ti=T1;

% Meghatarozzuk a vagasi frekvenciat
wc=(90-phm)/Th*pi/180 %wc=K=Ap/Ti*A

% Szabalyozo erositese
K=wc
Ap=wc*Ti/A

% Felnyitott kor amplitudo es fazis menete
% mag,phase 3-dimenzios bode utan, ertekek a 3. dimenzioban
van => shiftdim 2-vel
W_noth=tf(K,[1 0]);
wbase=ceil(log10(wc));
wL=wbase-2; wH=wbase;
w=logspace(wL,wH);
[mag_noth,phase_noth,w]=bode(W_noth,w);
adb=20*log10(shiftdim(mag_noth,2));
phase=shiftdim(phase_noth,2)-w*Th*180/pi;

%Ellenorzes rajzon
figure(1)
subplot(211)
```

```

semilogx(w,adb)
title('Bode diagram');
ylabel('Magnitude (dB)');
grid;
subplot(212)
semilogx(w,phase)
ylabel('Phase (deg)');
xlabel('Frequency (rad/sec)');
grid;

```

A `shftdim` hívásra azért volt szükség, mert a `bode` függvény a `mag`, `phase` kimeneti változókat 3-dimenziós tömbben adja vissza, ahonnan 2-vel shiftelve kapjuk meg a valódi értéket.

Az eredményül kapott szabályozó: $\omega_c = K = 0.7854 \Rightarrow$

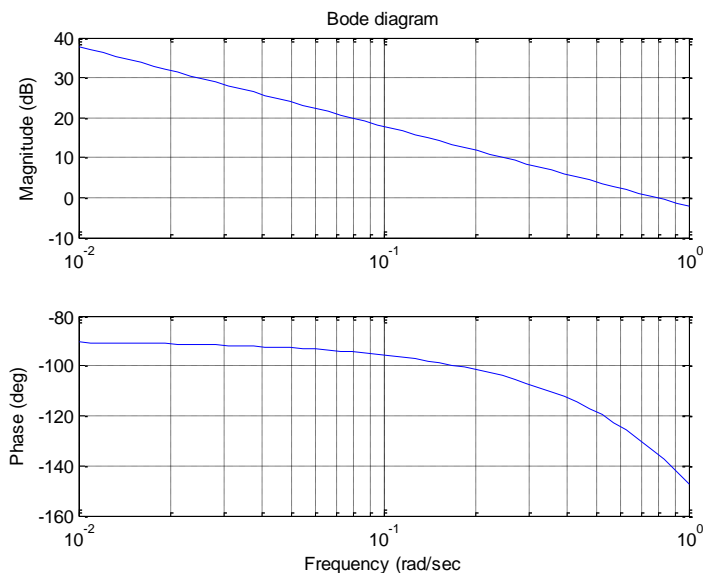
$$A_p = 7.854$$

$$T_i = 10$$

$$W_{pih}(s) = 7.854 \left(1 + \frac{1}{10s} \right)$$

Az eredmények verifikálása:

A holtidővel rendelkező egytárolós tag PI szabályozóval történő szabályozásának eredményeit a 3.60 ábra alapján ellenőrizhetjük. Az ábrából látható, hogy a holtidő ellenére az előírt $\varphi_t = 45$ fok fázistartalék a PI szabályozóval teljesíthető.



3.60. ábra. A felnyitott kör Bode-diagramja holtidős szakasz PI kompenzálása esetén.

Konklúzió:

A PI szabályozóval a holtidővel rendelkező egytárolós tag kompenzálása megoldható. Általában véve a holtidő a frekvenciatartományban állandó meredekségű fázisromlást eredményez (lineáris frekvencia lépték esetén), ami a szabályozótervezést sok esetben megnehezíti.

3. Ellenőrző kérdések a gyakorlathoz

- Adja meg az ideális PID szabályozó átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos alakját. Adja meg a szabályozó pólus/zérus eloszlását és annak feltételét a paraméterek függvényében, hogy a zérushelyek valósak legyenek.
- Adja meg az ideális PID szabályozó átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos alakját. Adja meg a szabályozó pólus/zérus eloszlását, aszimptotikus amplitúdó-menetét és a pontos fázisfüggvényt.
- Adja meg a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos alakját és átmeneti függvényét. Rajzolja fel az átmeneti függvény alakját, és adja meg, hogyan határozhatók meg abból a szabályozó paraméterei.
- Adja meg a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos alakját. Adja meg a szabályozó pólus/zérus eloszlását és annak feltételét a paraméterek függvényében, hogy a zérushelyek valósak legyenek.
- Adja meg a (D-hatásban) közelítő PID szabályozó átviteli függvényének szabályozástechnikában szokásos alakját. Adja meg a szabályozó pólus/zérus eloszlását, aszimptotikus amplitúdó-menetét és a pontos fázisfüggvényt. Milyen előnyös tulajdonságai vannak a szabályozónak, amelyeket ki lehet használni a kompenzálásban?
- Adja meg a Hurwitz-stabilitáskritériumot, ha a felnyitott kör karakterisztikus egyenlete $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_n = 0$ és $a_n > 0$.
- A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_0(s) = \frac{b_{n-1} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_n}.$$

Adja meg a zárt rendszer karakterisztikus egyenletét és a gyökök összefüggését a zárt rendszer stabilitásával.

- A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen

$$W_0(s) = \frac{25(s+0.1)}{s(s+1)(s+5)}.$$

Adja meg a zárt rendszer karakterisztikus egyenletét és döntse el a Hurwitz-kritérium alkalmazásával, stabil lesz-e a zárt rendszer.

9. Adja meg a Nyquist-féle stabilitáskritérium általános alakját, ha a felnyitott körnek P darab labilis pólusa van.
10. Adja meg a Nyquist-féle stabilitáskritérium alakját, ha a felnyitott kör labilis pólusai $s_{1,2} = 1 \pm j10$.
11. Adja meg a Bode-féle stabilitáskritérium általános alakját, ha a felnyitott körnek nincsenek labilis pólusai. Mi a vágási frekvencia és a fázistöbblet definíciója?

12. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen

$$W_0(s) = \frac{25(s+0.1)}{s(s+1)(s+5)}.$$

Adja meg a felnyitott kör aszimptotikus amplitúdó-diagramját és határozza meg abból a vágási frekvenciát. Adja meg a fázisfüggvény pontos kifejezését a vágási frekvencia helyén és a fázistöbblet számítására szolgáló képletet. Stabil lesz-e a zárt rendszer?

13. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen

$$W_0(s) = \frac{10}{s(1+0.1s)}.$$

Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbáját, jelölje be abban K értékét, és az ábrát egészítse ki a pontos $\varphi(\omega)$ fázis-jelleggörbével! Határozza meg az ábrák alapján az ω_c vágási frekvenciát és a φ_t fázistöbbletet! Mi lesz a zárt rendszer domináns pólusának a csillapítása és csillapítatlan sajátfrekvenciája?

14. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen

$$W_0(s) = \frac{10(1+s)}{s^2(1+0.1s)}.$$

Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbáját, jelölje be abban K értékét. Segítség: Mennyi K/ω^2 értéke $\omega=1$ estén? Határozza meg az ábra alapján az ω_c vágási frekvenciát. Adja meg a fázistöbblet kifejezését és értékét, ha $\arctan(0.1) \approx 5^\circ$ és $\arctan(10) \approx 85^\circ$.

15. A felnyitott kör $W_0(s)$ átviteli függvénye legyen

$$W_0(s) = \frac{0.05(1+100s)}{s(1+10s)(1+2s)}.$$

Rajzolja fel a felnyitott kör $a_{dB}(\omega)$ aszimptotikus amplitúdó-jelleggörbáját és határozza meg az abból következő ω_c vágási frekvenciát! Adja meg a fázistöbblet számításának képletét, és a fázistöbblet értékét, ha $\arctan(0.1) \approx 5^\circ$ és $\arctan(1) \approx 45^\circ$.

16. Egy szabályozott szakasz átviteli függvénye:

$$W_p(s) = \frac{A}{(1+sT_1)(1+sT_2)(1+sT_3)}$$

A statikus erősítés és az időállandók értéke legyen rendre:

$$A=10, T_1=100\text{sec}, T_2=10\text{sec}, T_3=1\text{sec}.$$

Adja meg a szakasz pólus/zérus eloszlását, és jelölje be, hová célszerű helyezni a szabályozó zérushelyét (zérushelyeit) PI, közelítő PD, és közelítő PID szabályozók esetén.

17. A felnyitott kör átviteli függvénye

$$W_0(s) = \frac{K}{s} e^{-sT_h}.$$

Adja meg ω_c és K számítási szabályát, ha az előírt fázistöbblet $\varphi_t = 45^\circ$.

18. A szabályozott szakasz átviteli függvénye

$$W(s) = \frac{A}{1+sT} e^{-sT_h}.$$

Kompenzálja a szakaszt PI szabályozóval. Adja meg a szabályozó paramétereit a szabályozástechnikában szokásos alakban a szakasz A, T, T_h paramétereinek függvényében, ha az előírt fázistöbblet $\varphi_t = 45^\circ$.

19. A szabályozott szakasz átviteli függvénye

$$W(s) = \frac{A}{1+sT} e^{-sT_h}$$

Kompenzálja a szakaszt PI szabályozóval! Adja meg a szabályozó paramétereit a szabályozástechnikában szokásos alakban a szakasz A, T, T_h paramétereinek

függvényében, ha az előírt fázistöbblet $\varphi_t = \frac{\pi}{4}$! (A szakasz pólusát a szabályozó zérusával ejtse ki!)

20. A szabályozott szakasz átviteli függvénye legyen

$$W_p(s) = \frac{3}{(1+s)(1+3s)}.$$

PI vagy PD szabályozót alkalmazna, ha egységugrás alapjel esetén az előírás a nulla maradó hiba? Határozza meg a kiválasztott szabályzó paramétereit, ha az előírt fázistartalék $\varphi_t = \frac{\pi}{4}$!

21. A szabályozott szakasz átviteli függvénye

$$W_p(s) = \frac{1}{s(1+5s)}$$

PI vagy PD szabályozót alkalmazna, ha egységugrás alapjel esetén az előírás a nulla maradó hiba és minimális túpuszámra törekszünk? Határozza meg a kiválasztott szabályzó paramétereit, ha az előírt fázistartalék $\varphi_t = \frac{\pi}{4}$!

(Segítség: PI szabályzó esetén ejtse ki a szakasz pólusát, PD szabályzó esetén a kiejtés mellett legyen $T_d = 4T_c$!)