ZH

Alapok

Atomi formulák, kijelentésváltozók - $\Pi = \{p_1, ..., p_n\}$: a **formulák** belőlük épülnek fel, például úgy, hogy

- nem csinálunk semmit: Π
- tagadjuk: $\neg Form_\Pi$
- éseljük őket: $Form_\Pi \wedge Form_\Pi$

Magyarul a formula a legszűkebb olyan adathalmaz, ami zárt tagadásra és éselésre (konjukciónak is hívjuk). Formula más szóval állítás és mondat is. A formulák jele pl. φ, ψ, χ, bármilyen kis görög betű, a formulahalmazok meg nagy görög betűk. Semmilyen azonosság nem áll fenn, például $x \wedge y = y \wedge x$ nem feltétlenül igaz. Az atomi formulákra igaz állítások a formulára is igazak, öröklődik éselésen és tagadáson át is.

Extra jelölések:

- $\varphi \vee \psi = \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi)$ ("vagy")
- $\varphi \to \psi = \neg\varphi \vee \psi$ ("ha ..., akkor")
- $\bot = p_0 \wedge \neg p_0$
- $\top = \neg \bot$
- $\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (ekvivalencia, akkor és csak akkor)

Modell: a kijelentéslogikában $M = \Pi \to \{0, 1\}$, vagyis mindenre megmondja, hogy igaz vagy sem. $M \vDash \varphi$ jelöli, hogy φ igaz az M modellre, vagyis a semmittevés, a tagadás, és az éselés működik rá. Ez formulahalmazokra is kimondható.

Ha φ minden modellben igaz, magyarul ha egy logikai formula minden esetben igazat ad, akkor **érvényes**. φ **kielégíthető**, ha van modellje, magyarul léteznek hozzá olyan változóértékek, hogy igazat ad. Két formula **ekvivalens**, ha közös a modelljük, magyarul azonos az igazságtáblájuk.

Lovagok és lókötők

Egy szigeten lovagok és lókötők vannak, a lovag mindig igazat mond, a lókötők mindig hazudnak. Kezelhetjük őket kijelentésváltozóknak, és akkor átfordítható logikai formulákra az állításuk:

- A azt állítja, hogy B igazat mond (lovag): $A \leftrightarrow B$
- A azt állítja, hogy B hazudik (lókötő): $A \leftrightarrow \neg B$
- vagyis: állító a bal oldalon, állítás a jobb oldalon.

Példa: B azt mondja, hogy A azt mondja, hogy A lókötő. Ennek igazságtáblája:

A	B	$A \leftrightarrow \neg A$	$B \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg A)$
0	0	0	1
0	1	0	0
1	0	0	1

1	1	0	0

Itt pedig több olyan eset is van, ahol az állítása igaz, ez ellentmondás. Ha viszont B azt mondja, hogy mindketten lókötők:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \land \neg B$	$B \leftrightarrow (\neg A \land \neg B)$
0	0	1	1	1	0
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	0	0

Itt már csak egy eset igaz, vagyis az állítása helyes.

Bizonyításlogika

Egy formulahalmaz **konzisztens**, ha nem vezethető le belőle a fals formula. Ami kielégíthető, az konzisztens. Igazságtáblával vizsgáljuk, hogy van-e modellje, azaz bármi olyan értéke a változóknak, hogy minden formula eredménye azonos. Ha van ilyen, konzisztens.

Egy formulahalmaz **teljes**, ha levezethető belőle minden egyes formulája.

Vizsga

Elsőrendű logika

A kijelentéslogikával nem írható le minden, például egy adatbázisból való lekérdezés. Kétféle kifejezés van, a **termek** és a **formulák**. Ezekből épülnek fel:

- **Változók**, avagy Var (x, y, z..., végtelen van belőle)
- **Logikai konnektívumok** (és, csakkor, =, stb.) - új a “minden” (∀) és a “létezik” (∃). A létezik definíciója: $\exists x\ \varphi\ =\ \neg\forall x\ \neg\varphi$.
- **Relációjelek** (P, R, S…, ezek indexelve)
- **Függvényjelek** (f, g, h..., ezek indexelve)
- **Konstansjelek** (c, d, e..., ezek indexelve)

Termek: amikből összeáll a modell. **Formulák**: valami reláció a termeken, néhány példa:

- ha $t_1, t_2 \in Term$, akkor $t_1 = t_2 \in F$: az egyenlőség így leírva
- ha $\varphi \in F$ és $x \in Var$, akkor $\forall x\varphi \in F$: “minden x-re φ”. Ez azt jelenti, hogy bármi is x értéke, φ igaz lesz a modellben.
- Ha φ és ψ is kielégíti T-t, akkor $\neg x$, $\varphi \land \psi$, és $\forall x\varphi$ is.

Ha a szorzásjel jelöli a kapcsolatot változók közt, ilyen formában: $\cdot\ (x, y)$, akkor példa egy leírás több formájára:

- Minden x-re van olyan y, hogy $x \cdot y = e$, magyarul mindenkinek van inverze.
- $\forall x \exists y \cdot (x, y) = e$
- $\forall x \exists y\ x \cdot y = e$
- $\forall x\ \neg\forall y\ \neg x \cdot y = e$
- $\forall x\ \neg\forall y\ (x \cdot y \neq e)$

Példa feladatok

- Relációjelek: $A(x)$: alma, $R(x)$: rohadt. Ekkor a “minden alma rohadt” leírása: $\forall x(A(x) \rightarrow R(x))$. Ha csak “van rohadt alma”, akkor $\exists x(A(x) \wedge R(x))$, mert egymástól független az alma és a rohadás, tehát van csak alma, és csak rohadt cucc is. Ezért nem cserélhetjük le egyszerűen a “minden” kvantort “létezik”-re.
- Relációjelek: $F(x)$: fiú, $L(x)$: lány, $S(x, y)$: x szereti y-t. Ilyenkor példa:
  - Mindenki szeret valakit, azaz akárhogy veszünk két embert, van hozzá olyan, akit szeret: $\forall x \exists y\, S(x, y)$
  - Mindenkit szeret valaki, vagyis az előző, csak fordítva: $\forall x \exists y\, S(y, x)$
  - Minden lány szeret egy fiút: $\forall x\, L(x) \rightarrow \exists y\, (F(x) \wedge S(x, y))$
  - Van lány, aki minden fiút szeret: $\exists x\, L(x) \wedge \forall y\, (F(y) \rightarrow S(x, y))$
  - Van lány, aki csak fiúkat szeret: $\exists x\, L(x) \wedge \forall y\, (S(x, y) \rightarrow F(y))$

Modellek

Azt, hogy egy formula igaz-e vagy hamis, egy modellben tudjuk eldönteni, jele írott M. σ a modell kiértékelésének jele. Néhány példa modell:

- Vegyük a természetes számok modelljét, ahol az univerzum a természetes számok halmaza, ezen értelmezzünk összeadást és szorzást. Legyen σ az a kiértékelés, ami mindenhez 3-at rendel. Ekkor például a $\cdot\ (+\ (0, y), +\ (x, 1))^{N}[\sigma] = 12$, mert x és y helyére is 3-at helyettesítünk be.
- Az írásjelek átdefiniálhatók, például a + lehet a legnagyobb közös osztó, a · pedig a legkisebb közös többszörös, ekkor már $\cdot\ (+\ (0, y), +\ (x, 1))^{N}[\sigma] = 3$.

Modellek igazságdefiníciói:

- ⊨: “maga után vonja”
- $M \vDash R(a, b, c)[\sigma] \Leftrightarrow (a[\sigma], b[\sigma], c[\sigma])$
- $M \vDash (a = b)[\sigma] \Leftrightarrow a[\sigma] = b[\sigma]$
- $M \vDash \neg a[\sigma] \Leftrightarrow M \nvDash a[\sigma]$
- $M \vDash (a \wedge b)[\sigma] \Leftrightarrow M \vDash a[\sigma]$ és $M \vDash b[\sigma]$
- $M \vDash \forall x\, a[\sigma] \Leftrightarrow M \vDash a[\sigma^{x}]$
  - Kicsit máshogy: $M \vDash \forall x\, a[\sigma] \Leftrightarrow M$ univerzumában minden m elemre $M \vDash a[\sigma(x/m)]$, vagyis akárhogy változtatjuk meg a σ-t az x helyen, ugyanúgy igaz lesz a.
  - Következmény: $M \vDash \exists x\, a[\sigma] \Leftrightarrow M$ van olyan m elem, hogy $M \vDash a[\sigma(x/m)]$
- [σ] igazából elhagyható
- $M \vDash \varphi \Leftrightarrow M \vDash \forall x\, \varphi$ (a változók általános érvényűek, ha máshogy nincs megadva)
- $M \vDash \Sigma$ (formulahalmaz) akkor és csak akkor igaz, ha minden Σ-beli φ-re $M \vDash \varphi$
- Egy formula vagy formulahalmaz akkor **kielégíthető**, ha van olyan modell és kiértékelés, amiben igaz.
- Két formula ekvivalens (jele: ≡), ha ugyanazon modellen ugyanazon kiértékelések mellett igazak

Ezek tudatában már leírhatjuk a természetes számokat több módon:

- $N \vDash \forall x \, \neg(x + y = 0)$
- $N \vDash \forall x \, (x + y \neq 0)$
- $N \vDash \forall x \, (0 \leq x + y)$
- $N \nvDash \forall x \, (x \neq 0 \rightarrow \exists y \, (x \cdot y = 1)$, magyarul nincs olyan, hogy ha $x \neq 0$, lenne multiplikatív inverze. Ez a racionális számok halmazán már igaz lenne.

Tipikus vizsgás átalakítások (modellt már elhagyjuk):

- $\vDash \forall x \, (\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x \, \varphi \wedge \forall x \, \psi)$: mindig = "ez is igaz, az is igaz, amaz is igaz"
- $\vDash \exists x \, (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x \, \varphi \vee \exists x \, \psi)$: létezik = "vagy ez, vagy az, de valami már csak igaz"
- $\nvDash \forall x \, (\varphi \vee \psi) \rightarrow (\forall x \, \varphi \vee \forall x \, \psi)$: a jobboldalból már következik a baloldal, de így nem
- $\nvDash (\exists x \, \varphi \wedge \exists x \, \psi) \rightarrow \exists x \, (\varphi \wedge \psi)$: az előző sorvég annyit változott, mint az életkedvem
- $\vDash \forall x \, (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x \, \varphi \rightarrow \forall x \, \psi)$: tök menő, hogy ugyanolyan hosszúak a képletek
- $\nvDash \forall x \, (\forall x \, \varphi \rightarrow \forall x \, \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$: ez a menőség még mindig fennáll, nem úgy, mint a
- $\vDash \forall x \forall y \, \varphi \rightarrow \forall y \forall x \, \varphi$: univerzális kvantor sorrendje felcserélhető
- $\vDash \exists x \exists y \, \varphi \rightarrow \exists y \exists x \, \varphi$: egzisztenciális kvantor sorrendje felcserélhető
- $\vDash \exists x \forall y \, \varphi \rightarrow \forall y \exists x \, \varphi$: ez már nem fordítható meg
- $\nvDash \forall x \exists y \, \varphi \rightarrow \exists y \forall x \, \varphi$: azért nem, mert a "minden x-re létezik y" ellentéte nem az, hogy "létezik y, amire minden x". Erre jó példa, hogy a "minden férfi szeret egy nőt"-nek nem vonzata, hogy "van nő, aki minden férfit szeret".

Legyen a Alíz, b Béla, ekkor ha bevezetjük a $<$ relációjelet magasság összehasonlítására:

- Alíz kisebb, mint Béla: $a < b$
- Alíz kisebb, mint valaki, aki kisebb, mint Béla: $\exists x \, (a < x \wedge x < b)$
- Aki Bélánál kisebb, az Alíznál is kisebb: $\forall x \, (x < b \rightarrow x < a)$
- Mindenki, aki kisebb valakinél, aki kisebb Bélánál, az kisebb Alíznál is:
  - $\forall x \, (\exists y \, (x < y \wedge y < b) \rightarrow x < a)$
- Ha valaki mindenkinél kisebb, akkor valaki kisebb magánál:
  - $(\exists x \forall y \, x < y) \rightarrow \exists x \, x < x$
- Ha valaki kisebb bárkinél, akinél Alíz kisebb: $\exists x \forall y \, (a < y \rightarrow x < y)$

Meg tudunk fogalmazni dolgokat a matematikai $\leq$ műveletről:

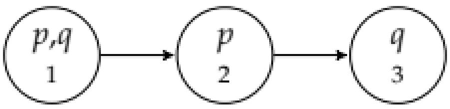
- Reflexív és tranzitív: $\forall x \, (x \leq x) \wedge \forall x \forall y \forall z \, (x \leq y \wedge y \leq z \rightarrow x \leq z)$
- Minden elemnek van közvetlen következője (nincs köztük semmi):
  - $\forall x \exists y \, (x \leq y \wedge x \neq y \wedge \forall z \, (x \leq z \wedge z \leq y \rightarrow x = z \vee y = z))$
- Ha egyik elemnek se lenne közvetlen következője (akárhogy veszünk valakiket, mindig lesz köztük valaki): $\forall x \forall y \, (x \leq y \rightarrow \forall z \, (x \leq z \wedge z \leq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z))$

Modális és temporális logika

Ebben olyasmiket is lehet mondani, mint "valaki tudja, hogy más nem biztos abban, hogy…", illetve programhelyességet is lehet velük vizsgálni. Jön egy új logikai konnektívum: $\Box$ (nem, ez nem unsupported emoji, ennek "doboz" a neve), ami a "szükségszerű" jelentéssel bír. Ennek duálisa a $\Diamond$ ("gyémánt"), aminek jelentése "lehetséges, hogy", és $\Diamond\varphi = \neg\Box\neg\varphi$. Ezeknek a frame ad majd értelmes definíciót:

Frame: világok vagy állapotok halmaza, elérhetőségi relációkkal, pl. sRt, ekkor az R művelettel s “látja” t-t. Úgy lesz belőle modell, hogy egy $v(p)$ függvény segít a kiértékelésben, ekkor F frame és v kiértékelés adja az M modellt.

Világ: van benne értelmezett művelet, láthat más világokat (irányított gráf élei):



Ennek leírása, hogy $W = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 2), (2, 3)\}$, $v(p) = \{1, 2\}$, $v(q) = \{1, 3\}$.

How to frame:

- $M\vDash_s p$, azaz a modell s világában igaz a p változó, ha $s \in v(p)$
- $M\vDash_s \neg p$, ha $M\nvDash_s p$
- $M\vDash_s p \wedge q$, ha $M\vDash_s p$ és $M\vDash_s q$
- $M\vDash_s \Box p$, ha $M\vDash_t p$ minden olyan $t \in W$-re (világra), amelyre sRt
  - magyarul ☐ = minden szomszédra igaz (igaz = bEnNe VaN a BeTű)
- $M\vDash_s \Diamond p$, ha $M\vDash_t p$ valamely olyan $t \in W$-re, amelyre sRt
  - magyarul ♢ = valamelyik szomszédra igaz

Az előbbi gráfról elmondható, hogy (vizsga time):

- $M\vDash_2 p \wedge \neg q$: 2-es világban igaz a p, de a q nem
- $M\vDash_1 \neg\Diamond q$: 1-es világban nem lehet, hogy q. Azért nem, mert a szomszédja csak p
- $M\vDash_1 \Diamond\Diamond q$: 1-nek van olyan szomszédja, aminek a szomszédjában igaz, hogy q
- $M\vDash_1 \Box\Diamond q$: 1-nek minden szomszédjának valamely szomszédjában igaz, hogy q
- $M\vDash_1 \Diamond\, (p \wedge \Diamond q)$: ez már igazából logikus (érted), csak nehéz volt a jeleket leírni
- $M\vDash_1 \Box\, (p \wedge \Diamond q)$: minden szomszéd = egyetlen szomszéd, szóval ez is igaz
- $M\vDash_3 \Box\, \bot$: 3-nak nincs szomszédja, így csak a *hamis* igaz a szomszédokra
- $M\vDash_2 \Box\, (p \rightarrow \neg q)$, mert az egyetlen szomszédban p nem igaz, így a → mindig igaz
- $F\vDash\Diamond p \rightarrow \Box p$: ez csak erről a gráfról írható le, mert mindenkinek legfeljebb 1 szomszédja van, ezért a “minden szomszédra igaz” és a “valamelyik szomszédra igaz” jelentése azonos

More magic:

- $\vDash\Box\, \top$ minden modellre igaz, $\vDash\Diamond\top$ már nem, mert az kell hozzá, hogy minden állapotnak legyen szomszédja
- $\vDash\Box\, (a \rightarrow b) \rightarrow (\Box a \rightarrow \Box b)$: visszafelé nem igaz
- $\vDash\Diamond\, (a \vee b) \leftrightarrow (\Diamond a \vee \Diamond b)$
- $\vDash\Diamond\, (a \rightarrow b) \rightarrow (\Box a \rightarrow \Diamond b)$
- Ha $K\vDash a$, akkor $K\vDash\Box a$
- $\nvDash a \rightarrow \Box a$

Klózhalmaz feladatok

Valójában csak fura felírás, amúgy átalakítható, a {}-n belüli vesszők vagy kapcsolatok, a külső vesszők pedig és kapcsolatok, pl. $\{a, \neg b, c\}, \{a, b, \neg c\}$ ugyanaz, mint $(a \lor \neg b \lor c) \land (a \lor b \lor \neg c)$. Innentől már igazságtáblával könnyű minden feladat.

Ha olyasmi a feladat, hogy $\Sigma = \{\forall x\, a, \forall x\, b\}$, akkor éselés van: $\forall x\, a \land \forall x\, b$, vagyis átalakítva $\forall x\, (a \land b)$. Innentől tovább oldható a korábban összegyűjtött átalakításokkal.