A Pocklington féle egyenlet redukált magfüggvénnyel

Egyenes dipólantennák árameloszlása és bemeneti impedanciája a Hallén féle, vagy a Pocklington féle integrálegyenlet megoldásával határozható meg. A jegyzetben a Hallén féle integrálegyenlet megoldását ismertettük a klasszikus módszerrel és a momentum módszer pontillesztéses változatával, melynél impulzus bázisfüggvényt alkalmaztunk.

Most a Pocklington féle egyenletet oldjuk meg a momentum módszer említett változatával. A Pocklington egyenletet a jegyzet (4. Fejezet) (100) képlete adja.

Eszerint

$$-j\omega\varepsilon_0 \mathbf{E}_i(z) = \left(\beta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right)\int_{-l}^{+l} \mathbf{I}(z')G(z,z')dz' \tag{1}$$

ahol

$\mathbf{E}_i(z)$ a gerjesztő függvény

$\mathbf{I}(z')$ a meghatározandó árameloszlás

$G(z,z')$ a magfüggvény

Az (1) egyenlet integro-differenciál egyenlet, melyben a gerjesztő térerősséget adóantenna esetén a táppontba iktatott feszültség hozza létre, vevőantenna esetén pedig $\mathbf{E}_i(z)$ a beeső térerősség antennával párhuzamos komponense.

A most megoldandó feladatban a (103) és (104) képlet szerinti redukált magfüggvénnyel dolgozunk. Ez vékony antenna (Ω≥10) esetén elegendő pontosságot ad, ugyanakkor megtakarítható az egzakt magban (101) képlet szereplő integrálás, ami egyébként a számítási időt jelentősen megnövelné.

A redukált mag tehát

$$G(z,z') = \frac{e^{j\beta R}}{4\pi R} \tag{2}$$

ahol

$R = \sqrt{(z-z')^2 + a^2}$	a forráspont és megfigyelési pont távolsága	(3)
a	az antenna sugara	

A redukált mag használata olyan fizikai modell használatának felel meg, melynél az áram a z tengelyben lévő végtelen vékony szálban folyik, a peremfeltételeket pedig az antenna felületén érvényesítjük. A redukált mag használatának további előnye az is, hogy ez nem szinguláris ha a forráspont és a megfigyelési pont egybe esik, ezáltal az integrálás egyszerűbb lesz.

A továbbiakban először a momentum módszert tekintjük át, valamivel általánosabban, mint ahogy az a jegyzetben szerepel, majd részletesen ismertetjük azt a változatot, mellyel egy rövid egyenes dipólus árameloszlását és bemeneti impedanciáját meghatározhatjuk.

A momentum módszer alapjai

A feladat általánosan az L lineáris operátorral felírt

$$LI=g \tag{4}$$

operátoregyenlet megoldása.

Az L operátor a Hallén féle integrálegyenletnél integráloperátor, a Pocklington féle egyenletnél pedig az alábbi integro-differenciáloperátor

$$L=\left(\beta^2+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{dz}^2}\right)\int_{-\ell}^{\ell}...G(z,z')dz' \tag{5}$$

A g gerjesztő függvény a Pocklington féle egyenletnél

$$g(z)=-j\omega\varepsilon_0 E^i(z) \tag{6}$$

A momentum módszer lényege az, hogy az ismeretlen $I(z')$ függvényt egy véges, M elemű függvényhalmaz soraként állítjuk elő, azaz

$$I(z')\cong\hat{I}(z')=\sum_{m=1}^{M}a_m f_m(z') \tag{7}$$

ahol

$f_m(z')$ az ismert, m-edik bázisfüggvény

a_m az m-edik bázisfüggvény ismeretlen együtthatója.

A megoldás során feladatunk az, hogy adott M esetén az a együtthatókat úgy válasszuk meg, hogy a (7) képlet szerinti közelítés valamilyen norma szerint a legjobb legyen.

A (7) képletet a (4) képletbe helyettesítve, és felhasználva, hogy a lineáris műveletek sorrendje felcserélhető.

$$LI \cong L\hat{I} = L\sum_{m=1}^{M} a_m f_m = \sum_{m=1}^{M} a_m L f_m \cong g \tag{8}$$

A (7) közelítés bevezetése miatt fellépő hiba

$$R(z, a_1, a_2 ... a_M) = \left[\sum_{m=1}^{M} a_m L f_m(z)\right] - g(z) \tag{9}$$

Mint látható, a hiba a z változó és az a_m együtthatók függvénye. Ez utóbbiakat a hiba-feltételtől függően többféle módszerrel is meg lehet határozni [1]. Közülük az antennás gyakorlatban kettő terjedt el.

Az egyik módszer szerint előírhatjuk, hogy *M* számú, előre meghatározott pontban a hiba legyen zérus. Ekkor a (10) képletből az ismeretlen együtthatókra az alábbi, *M* egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapjuk.

$$\left[\sum_{m=1}^{M} a_m L f_m(z_m)\right] - g(z_m) = 0 \tag{11}$$

E módszer neve kollokáció, vagy másnéven pontillesztés. Kollokációval tehát olyan a_m együtthatókat kapunk, melyek a keresett árameloszlást *M* számú pontban pontosan adják meg, de e pontok között a hiba tetszőleges lehet.

A másik módszer szerint legalább *N=M* számú lineárisan független $w_n(z)$ súlyfüggvényt választunk, és előírjuk, hogy a $-\ell \le z \le +\ell$ tartományon (az antenna mentén) a súlyozott hibák legyenek zérussal egyenlőek, vagyis

$$\int_{-\ell}^{\ell} w_n^*(z) R(z, a_1, a_2 ... a_M) \mathrm{dz} = 0 \tag{12}$$

ahol * komplex konjugáltat jelent.

A súlyfüggvényeket úgy kell megválasztani, hogy (12) értelmezve legyen.

Ha *N=M,* akkor *M* számú egyenletből álló lineáris egyenletrendszert kapunk, melyből a keresett a_m együtthatók meghatározhatók. A (12) képlet a lineáris algebra nyelvén belső szorzat, vagyis

$$\int_{-\ell}^{\ell} w_n^*(z) R(z, a_1, a_2 ... a_M) dz = \langle R, w_n \rangle \tag{13}$$

A súlyfüggvények módszere tehát így írható

$$< R, w_n >= 0 \qquad \text{n=1,2...M} \tag{14}$$

azaz

$$\left\langle \left(\sum_{m=1}^{M} a_m L f_m \right) - g, w_n \right\rangle = 0 \qquad \text{n=1,2...M} \tag{15}$$

Ebből a lineáris algebra szabályai szerint az alábbi képletet kapjuk

$$\sum_{m=1}^{M} a_m \langle L f_m, w_n \rangle = \langle g, w_n \rangle \qquad \text{n=1,2...M} \tag{16}$$

mely mátrix alakban a következő

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}\,\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{g}} \tag{17}$$

ahol

$$K_{m,n} = \langle L f_m, w_n \rangle \qquad \text{m=1,2...M} \qquad \text{n=1,2...M} \tag{18}$$

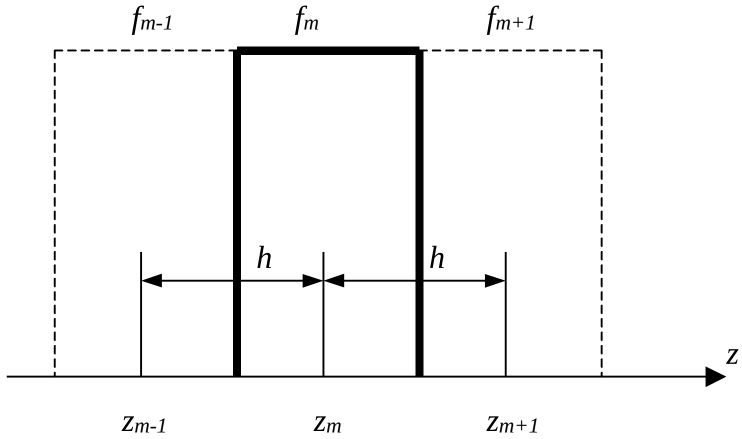
$$g_n = \langle g, w_n \rangle \tag{19}$$

$$\underline{\mathbf{a}}^T = [a_1; a_2 ... a_M] \tag{20}$$

Bázisfüggvények és súlyfüggvények

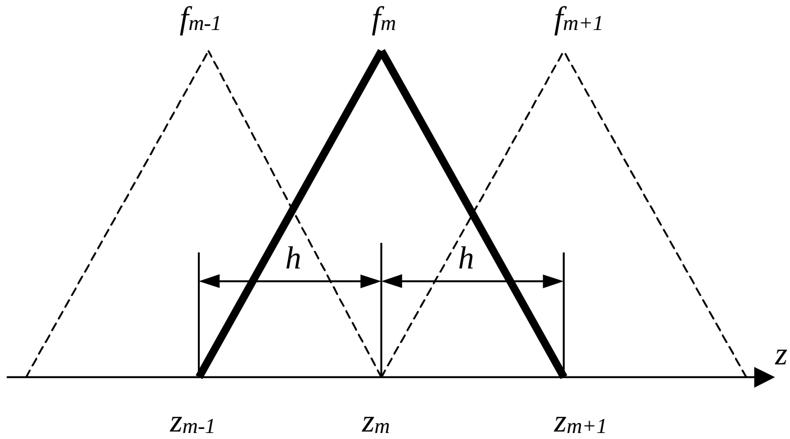
Az $f_m(z)$ bázisfüggvények lehetnek z teljes tartományán (most $-\ell \leq z \leq +\ell$) vagy résztartományán értelmezett függvények. A teljes tartományú bázisfüggvények gyakran szinusz és koszinusz függvények, vagy polinomok, esetleg ezek kombinációja. A résztartományú bázisfüggvényeket viszonylag gyakrabban alkalmazzák ezért itt most csak ezekkel foglalkozunk.

A három leggyakrabban alkalmazott bázisfüggvény az impulzus-, a lineáris-, és a szinusz-függvény. Ezeket az 1-3. ábrákon mutatjuk be és a (21-23) képletekkel adjuk meg.



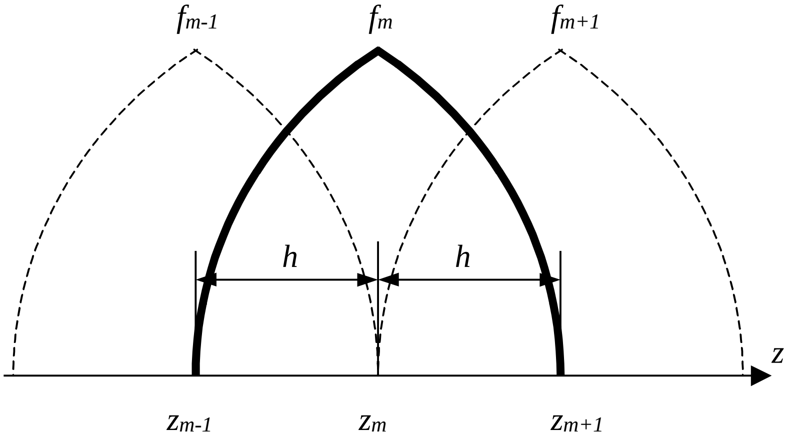
1. ábra Impulzus bázisfüggvény

$$f_m(z) = \begin{cases} 1 & \text{ha} \left(z_m - \dfrac{h}{2} \right) \le z \le \left(z_m + \dfrac{h}{2} \right) \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{21}$$



2. ábra Háromszög bázisfüggvény

$$f_m(z) = \begin{cases} \dfrac{z - z_{m-1}}{z_m - z_{m-1}} & \text{ha } z_{m-1} \le z \le z_m \\ \dfrac{z_{m+1} - z}{z_{m+1} - z_m} & \text{ha } z_m \le z \le z_{m+1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{22}$$



3. ábra Szinuszos bázisfüggvény

$$f_m(z) = \begin{cases} \dfrac{\sin[\beta(z - z_{m-1})]}{\sin[\beta(z_m - z_{m-1})]} & \text{ha} \ z_{m-1} \le z \le z_m \\ \dfrac{\sin[\beta(z_{m+1} - z)]}{\sin[\beta(z_{m+1} - z_m)]} & \text{ha} \ z_m \le z \le z_{m+1} \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \tag{23}$$

Súlyfüggvénynek rendszerint a bázisfüggvényként ismertetett három függvényt alkalmazzák. Ha a bázisfüggvények és a súlyfüggvények azonosak, akkor e súlyfüggvény módszert Galerkin módszernek nevezzük. A Galerkin módszernél a **K** mátrix szimmetrikus.

Megjegyezzük, hogy ha a súlyfüggvénynek a w_n=δ(z-z_n) Dirac delta függvényt választunk, akkor a kollokáció (pontillesztés) módszere besorolható a súlyfüggvények módszerébe.

A következőkben a Pocklington féle egyenletet impulzus bázisfüggvényekkel, kollokáció alkalmazásával oldjuk meg.

Pontillesztés adóantenna esetén

A (18) képlet alapján pontillesztésnél a **K** mátrix egy eleme a következő

$$K_{m;n} = \langle L f_m ; w_n \rangle = \int_{-\ell}^{+\ell} \left[\left(\beta^2 + \frac{d^2}{dz^2} \right) \int_{-\ell}^{+\ell} f_m(z')\, G(z;z')\,dz \right] \delta(z - z_n)\,dz \tag{24}$$

Elvégezve az első integrálást

$$K_{m;n} = \left(\beta^2 + \frac{d^2}{dz^2}\right) \left. \int_{-\ell}^{+\ell} f_m(z')\, G(z_n;z')dz' \right|_{z=z_n} \tag{25}$$

A (25)-ben a második deriváltat numerikusan, centrális differencia formulával (M3.4) állítjuk elő a következő képlet szerint

$$\left. \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\alpha(z) \right|_{z_n} = \frac{\alpha(z_{n-1}) + \alpha(z_{n+1}) - 2\alpha(z_n)}{h^2} \tag{26}$$

ahol

$h=(z_{n+1}-z_n)$

A (25) és (26) képletek alapján

$$K_{m;n} = \beta \int_{z_m-\frac{h}{2}}^{z_m+\frac{h}{2}} G(z_n;z')dz' + \frac{1}{h^2} \int_{z_m-\frac{h}{2}}^{z_m+\frac{h}{2}} \left[G(z_{n-1};z') + G(z_{n+1};z') - 2G(z_n;z') \right] dz \tag{27}$$

A (27) képletből látható, hogy $K_{m;n}$ értéke csak (z_n-z_m)-től függ, melyben a z_n értékek a pontillesztés helyeit, a z_m értékek pedig a bázisfüggvények résztartományainak középpontjait jelentik.

Ha a résztartományokat és az illesztési pontokat egyenletesen osztjuk el akkor a mátrix elemei csak (n-m)-től függenek. Könnyen belátható, hogy az ilyen mátrix egyetlen sorával, vagy oszlopával jellemezhető, és a többi sorban, vagy oszlopban ezek az elemek ciklikusan ismétlődnek az alábbi általános struktúra szerint

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & t_3 \\ t_1 & t_0 & t_1 & t_2 \\ t_2 & t_1 & t_0 & t_1 \\ t_3 & t_2 & t_1 & t_0 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Az ilyen mátrixot szimmetrikus Töplitz mátrixnak [2] nevezzük, s ciklikus tulajdonságát kihasználva a vele való műveletek száma és a szükséges tárkapacitás jelentősen csökkenthető.
Hátra van még a belső szorzat meghatározása az egyenletrendszer gerjesztő függvényével. Tételezzük fel, hogy antennánk adóantenna, melyet $z=z_k$ –nál d szélességű résben $E_i(z=z_k)=U_0/d$ térerősséggel gerjesztünk. A többi helyen a térerősség zérus. Vegyük fel az illesztőpontokat úgy, hogy a k-adik a rés közepére essen, vagyis

$$w_k(z) = \delta(z - z_k) \qquad (29)$$

Így a (6) és (19) képletek alapján a **g** vektor egyetlen nem zérus eleme a következő

$$g_k = -j\omega\varepsilon_0 \langle E_i(z), w_k(z) \rangle \qquad (30)$$

Az állandók összevonásával és a (29) képlet behelyettesítésével

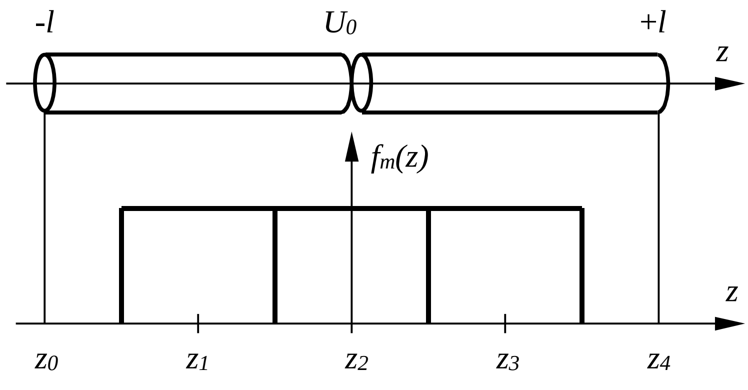
$$g_k = -j\frac{U_0}{60d\lambda} \qquad (31)$$

Itt jegyezzük meg, hogy ebben az esetben nem megengedett a gerjesztés $E_i(z) = U_0\delta(z)$, u.n. delta generátoros megadása, mert ehhez a pontillesztést nem lehet elvégezni.

A feladat és megoldása

Egy dipólantenna hossza $2\ell=10$ m, átmérője $2a=5$ mm.
Határozza meg az antenna bemeneti impedanciáját $f=3$ MHz-en.

Megoldás



4. ábra

Az antenna végén az áram elemi fizikai meggondolások alapján zérus. Ennek biztosítására egy-egy illesztő pontot veszünk fel, ahol $f(z)=0$, tehát a **K** mátrix mérete

3x3. A (28) képlet alapján, feltételezve, hogy a mátrixot az első oszlopával adjuk meg a K mátrix a következő

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{21} & K_{31} \\ K_{21} & K_{11} & K_{21} \\ K_{31} & K_{21} & K_{11} \end{bmatrix} \qquad (32)$$

Az első oszlop elemei a (27) képlet alapján az alábbi módon írhatók fel

$$K_{11} = \frac{1}{h^2}\left[s_o + s_2 + (h^2\beta^2 - 2)s_1\right]$$

$$K_{21} = \frac{1}{h^2}\left[s_1 + s_3 + (h^2\beta^2 - 2)s_2\right]$$

$$K_{31} = \frac{1}{h^2}\left[s_2 + s_4 + (h^2\beta^2 - 2)s_3\right]$$

ahol

$$s_m = \int_{z_m-\frac{h}{2}}^{z_m+\frac{h}{2}} G(z_1;z')dz' \; ; \; m = 0;1;2;3;4$$

$$z_m = -1 + m\,h$$

$$G(z_1;z') = \frac{e^{-j\beta\sqrt{(z_1-z')^2+a^2}}}{4\pi\left[(z_1-z')^2+a^2\right]^{1/2}}$$

(33,34,35,36,37,38)

A (36) képlet felírásánál figyelembe vettük, hogy az egyenletes felosztás miatt, (37) és (38) alapján

$$\int_{z_m-\frac{h}{2}}^{z_m+\frac{h}{2}} G(z_n;z')dz' = \int_{z_{m+p}-\frac{h}{2}}^{z_{m+p}+\frac{h}{2}} G(z_{n+p};z')dz' \qquad (39)$$

ahol

p tetszőleges nemnegatív egész szám (ebben a példában m+p≠0 és m+p≠4)

Az integrálokat numerikusan kiszámítva a kapott eredményeket az I. táblázatban foglaljuk össze.

Megjegyezzük, a (38) képletet gyakran 4π osztó nélkül írják fel. Ebben az esetben a kapott S_m értékek és g_k (31) szerinti értéke is 4π-vel szorzandó.

I. Táblázat

S_0	0,086445-j0,012446
S_1	1,09914-j0,012494
S_2	0,086445-j0,012446
S_3	0,038707-j0,012295
S_4	0,023889-j0,012040

Mint látható, $S_0=S_2$, ami a (36)-(38) képlet alapján belátható, ugyanis z_0 és z_2 a z_1-re szimmetrikusan helyezkedik el.
A mátrix elemeit a II. Táblázatban tüntettük fel.

II. Táblázat

K_{11}	$-0.3197-j3.291\cdot10^{-5}$
K_{21}	$0.1547-j3.283\cdot10^{-5}$
K_{31}	$5.421\cdot10^{-5}-j3.259\cdot10^{-5}$

A gerjesztő vektor nem zérus komponense a 4. ábra szerint a g_2, mely a (31) képletből U_0=1 Volt feszültség és $d=h$ választással

$$g_2=-j6.667\cdot10^{-5}$$

Megoldva a $\underline{\underline{\mathbf{K}}}\,\underline{\mathbf{a}}=\underline{\mathbf{g}}$ egyenletrendszert a keresett $\underline{\mathbf{a}}$ vektor komponenseire a III. Táblázat szerinti eredményt kapjuk.

III. Táblázat

az együtthatók Amperben

a_1	$2.34\cdot10^{-7}+j1.96\cdot10^{-4}$
a_2	$3.078\cdot10^{-7}+j3.98\cdot10^{-4}$
a_3	$2.34\cdot10^{-7}+j1.96\cdot10^{-4}$

A bemeneti impedancia

$$Z_{be}=\frac{U_{be}}{I_{be}}=\frac{U_0}{a_2}=\frac{1}{a_2}$$

melyből

$$Z_{be}=1.94-j2513\ \Omega$$

Ellenőrzésül, a valós rész meghatározására használhatjuk a sugárzási ellenállás

$$R_s=R_{be}=80\pi^2\left(\frac{\ell}{\lambda}\right)^2$$

képletét, melyből

R_{be}=1.97 Ω

a képzetes részt pedig kiszámíthatjuk a hosszegységre jutó statikus kapacitás

$$C_A' = \frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\left(\frac{\ell^2}{3a^2}\right)} \cong \frac{28}{\ln\left(\frac{\ell}{a}\right) - 0.55} \qquad \text{[pF/m]}$$

képlete segítségével, melyből

X_{be}=-j2757 Ω

Mint látható, a valós rész esetén az egyezés egészen jó, a képzetes rész esetében is majdnem elfogadható. Természetesen a felbontás növelésével a pontosság gyorsan javul.

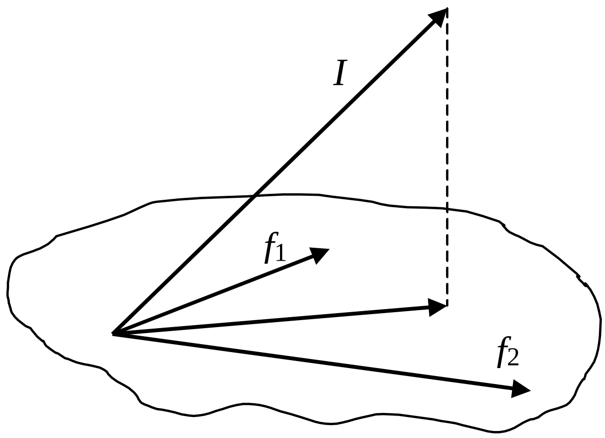
Irodalom

[1] Korn-Korn: Matematikai kézikönyv műszakiaknak, Műszaki Könyvkiadó, 1975.

[2] Rózsa Pál: Lineáris algebra és alkalmazásai, Műszaki Könyvkiadó, 1974.

Melléklet

A Galerkin módszer



Projekció alkalmazása lineáris altéren történő közelítéshez

Numerikus integrálás Gauss kvadraturával

A kvadratúraformulák általános használhatóságához az általánosság korlátozása nélkül első lépésként végezzünk el az x integrálási változó

$$x = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}c$$

lineáris transzformációját. Ennek felhasználásával bármely (a,b) intervallumon vett integrál felírható a (-1,+1) tartományon vett integrállal.

$$\int_a^b \varphi(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi(c)dc$$

A továbbiakban ezért elegendő a (-1,+1) integrálok közelítésével foglalkozni. Írjuk fel az integrálközelítő összeget

$$\int_{-1}^{+1}\varphi(x)dx \cong \sum_{i=1}^{N} w_i\varphi(c_i)$$

alakban, ahol a w_i súlyok és c_i mintavételi helyek egyelőre ismeretlenek. Ezen együtthatók meghatározására írjuk elő, hogy a kvadratúraformula az integrált pontosan adja meg a $\varphi(x)=x^k$ alakú függvényekre.

$$\int_{-1}^{+1} x^k dx = \sum_{i=1}^{N} w_i c_i^{\,k} \qquad k=0,1,2,..,M$$

Ílymódon M+1 egyenletből álló nemlineáris egyenletrendszer írható fel a súlyokra és mintavételi helyekre. Az ismeretlenek száma ezért $2N$.

A nemlineáris egyenletrendszer egyértelműen megoldható, ha $M+1=2N$.

$$\int_{-1}^{+1} x^0 dx = \int_{-1}^{+1} 1dx = 2 = \sum_{i=1}^{N} w_i = w_1 + w_2$$

$$\int_{-1}^{+1} x^1 dx = 0 = \sum_{i=1}^{N} w_i c_i = w_1 c_1 + w_2 c_2$$

$$\int_{-1}^{+1} x^2 dx = \frac{2}{3} = \sum_{i=1}^{N} w_i c_i^{\,2} = w_1 c_1^2 + w_2 c_2^2$$

$$\int_{-1}^{+1} x^3 dx = 0 = \sum_{i=1}^{N} w_i c_i^{\,3} = w_1 c_1^3 + w_2 c_2^3$$

Az (M2.2) nemlineáris egyenletrendszert megoldva a w_1,w_2, súlyokra és c_1, c_2 mintavételi pontokra

$w_1 = w_2 = 1$

$$c_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \text{ és } c_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

értékeket kapunk.

Magasabbrendű differenciálás centrális differenciaformulákkal

A magasabbrendű differenciálhányadosokat a Taylor sorfejtés felhasználásával fejezhetjük ki véges differenciaformulákkal. Ehhez írjuk fel egy tetszőleges $\varphi(x)$ függvény Taylor sorát az $x+\Delta x$ ill. $x-\Delta x$ helyen.

$$\varphi(x+\Delta x) = \varphi(x) + \frac{d}{dx}\varphi\bigg|_z \Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\varphi\bigg|_z \Delta x^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\varphi\bigg|_z \Delta x^3 + \ldots \tag{M3.1}$$

$$\varphi(x-\Delta x) = \varphi(x) - \frac{d}{dx}\varphi\bigg|_z \Delta x + \frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\varphi\bigg|_z \Delta x^2 - \frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\varphi\bigg|_z \Delta x^3 + \ldots \tag{M3.2}$$

Az (M3.1) és (M3.2) közzelítéseket a harmadrendű tagokig végezve és a két egyenletet összeadva

$$\varphi(x+\Delta x) + \varphi(x-\Delta x) \cong 2\varphi(x) + \frac{d^2}{dx^2}\varphi\bigg|_z \Delta x^2 \tag{M3.3}$$

Végül az (M3.3)-ból fejezzük ki $d^2\varphi / dx^2\big|_z$ -et

$$\frac{d^2}{dx^2}\varphi\bigg|_z \cong \frac{\varphi(x+\Delta x) + \varphi(x-\Delta x) - 2\varphi(x)}{\Delta x^2} \tag{M3.4}$$

Az előzőekhez hasonlóan fejezhetőek ki a magasabbrendű differenciálhányadosok is.