Síkhullámú terjedés

Maxwell-egyenletek szinuszos időfüggésre

$$rot\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{J} \qquad ()$$

$$rot\mathbf{E} = -j\omega\mu\mathbf{H} \qquad ()$$

$$div\mathbf{E} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad ()$$

$$div\mathbf{H} = 0 \qquad ()$$

Áram és forrásmentes térre, levegőben (ε_0,μ_0):

$$rot\mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0\mathbf{E} \qquad ()$$

$$rot\mathbf{E} = -j\omega\mu_0\mathbf{H} \qquad ()$$

Alkalmazzuk a () egyenletre a rot operátort:

$$rotrot\mathbf{H} = graddiv\mathbf{H} - \nabla^2\mathbf{H} = j\omega\varepsilon_0 rot\mathbf{E} = j\omega\varepsilon_0(-j\omega\mu_0\mathbf{H}) = \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{H} \quad ()$$

A graddiv ≡0 kihasználva és a ∇^2 operátort a **H** vektorra alkalmazva és a három komponens egyenletet felírva kapjuk az alábbi homogén Helmholtz-egyenletet:

$$\mathbf{e}_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mathbf{H}) + \mathbf{e}_y\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mathbf{H}) + \mathbf{e}_z\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\mathbf{H}) + \omega^2\varepsilon_0\mu_0\mathbf{H} = 0 \qquad ()$$

A három komponens egyenlet pedig:

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 H_x = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 H_y = 0$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 H_z = 0$$

Az ()-() egyenleteket elégítsük ki az alábbi megoldással:

$$H_x = H_z = 0$$

$$H_y = H_y^0 \cdot e^{-j\beta z}$$

A () kifejezéseket helyettesítsük a () egyenletekbe:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 H_y = H_y^0 (-j\beta)^2 e^{-j\beta z} + \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 H_y^0 e^{-j\beta z} = 0$$

A () kifejezés a () egyenlet alapján akkor megoldás, ha

$$\beta^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0$$

Az (I) Maxwell egyenletből pedig az elektromos térerősséget fejezzük ki:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} rot\mathbf{H} = \frac{1}{j\omega\varepsilon_0} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{vmatrix} = \frac{-1}{j\omega\varepsilon_0} \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial z} H_y \qquad ()$$

$$\mathbf{E} = \frac{-\mathbf{e}_x}{j\omega\varepsilon_0} H_y^0 (-j\beta) e^{-j\beta z} = E_x \mathbf{e}_x \qquad ()$$

Az elektromos és mágneses térerősségek kifejezéséből látszik, hogy azok egymásra merőlegesek, ha hányadosukat kiszámítjuk, akkor pedig

$$\frac{E_x}{H_y} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi$$

tehát hányadosuk 120π, és azonos fázisúak.