Matematika A1 2. Zárthelyi

2021. november 19.

A dolgozat írása során semmilyen segédeszköz nem használható! Rendelkezésre álló idő: 90 perc.

Jó munkát!

1. Hol folytonos az alábbi függvény? Osztályozzuk a szakadási helyeit, amennyiben vannak!
$$f(x) = \frac{\sin 3\pi x}{2x} + \frac{1}{5^{\frac{x}{x-2}}} + \frac{2x-6}{|x-3|}.$$

   A függvény a 0, 2, 3 pont kivételével folytonos, mert folytonos függvények kompozíciójának, illetve hányadosának összege. (2 pont)

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3\pi x}{3\pi x} \cdot \frac{3\pi}{2} + \frac{1}{5^{\frac{0}{0-2}}} + \frac{2\cdot 0 - 6}{|0-3|} = \frac{3\pi}{2} - 1 \qquad \text{(4 pont)}$$

   így a 0 pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. (2 pont)

$$\lim_{x\to 2\pm} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6\pi}{4} + \lim_{x\to 2\pm} \frac{1}{5^{\frac{x}{x-2}}} - 2. \qquad \text{(2 pont)}$$

   Itt
$$\lim_{x\to 2+} \frac{1}{5^{\frac{x}{x-2}}} = \frac{1}{\lim_{x\to 2+} 5^{\frac{x}{x-2}}} = 0 \qquad \text{(3 pont)}$$

   és
$$\lim_{x\to 2-} \frac{1}{5^{\frac{x}{x-2}}} = \frac{1}{\lim_{x\to 2-} 5^{\frac{x}{x-2}}} = \infty \qquad \text{(2 pont)}$$

   így a 2 pontban a függvénynek lényeges szakadása van. (1 pont)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \frac{\sin 9\pi}{6} + \frac{1}{5^3} + \lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{|x-3|} = \frac{1}{125} \pm 2, \qquad \text{(3 pont)}$$

   így a 3 pontban a függvénynek véges ugrása van. (1 pont)

2. Határozzuk meg, ha lehetséges, az a és b paraméterek értékét, úgy, hogy az
$$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+2)^2}{x^2-4}, & \text{ha } x < -2, \\ ax+b, & \text{ha } x \geq -2, \end{cases}$$

   függvény mindenütt differenciálható legyen!

Ha $x < -2$ vagy $x > -2$, akkor f differenciálható. (2 pont)
A differenciálhatósághoz kell a folytonosság (2 pont)
$\lim_{x\to-2-} f(x) = \lim_{x\to-2-} \frac{x+2}{x-2} = \lim_{x\to-2+} f(x) = -2a + b = f(-2)$ (5 pont)
tehát $2a = b$. (2 pont)
$f'(-2) = \lim_{h\to0-} \frac{\frac{-2+h+2}{-2-h-2} - 0}{h} = -\frac{1}{4} = \lim_{h\to0+} \frac{a(-2+h)+b-0}{h} = a$ (5 pont)
tehát $a = -\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{2}$. (4 pont)

3. Számoljuk ki az $f(x) = \sin\ln(x-1)$ függvény érintőegyenesének egyenletét az $x = 2$ pontban!

Az érintőegyenes átmegy a $(2, f(2)) = (2, 0)$ ponton. (5 pont)
$f'(x) = \frac{\cos\ln(x-1)}{x-1}$. (5 pont)
$f'(0) = 1$ (5 pont)
így az érintőegyenes egyenlete: $y = x - 2$. (5 pont)

4. Hol differenciálható függvény? Adjuk meg a deriváltját! $f(x) = \frac{2^{\arcsin(x+1)}\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{th}(2x)}$

$D_f = [-2, 0)$ (2 pont)
A deriválási szabályok alapján a

$$f(x) = \frac{\left(\ln 2 \cdot \frac{2^{\arcsin(x+1)}}{\sqrt{1-(x+1)^2}}\sqrt{x^2+1} + \frac{x2^{\arcsin(x+1)}}{\sqrt{x^2+1}}\right)\operatorname{th}(2x) - \frac{2\cdot 2^{\arcsin(x+1)}\sqrt{x^2+1}}{\operatorname{ch}^2(2x)}}{\operatorname{th}^2(2x)},$$

Hányados szabály: 2 pont, szorzat: 2 pont, 4 elemi függvény (2^x, arcsin, th, gyök) deriváltja: 2+2+2+2 pont, összetételek is stimmelnek: 1+1+1+1 pont.)
és $D_{f'} = (-2, 0)$ (2 pont)

5. Számoljuk ki az alábbi határértékeket:

$$a)\ \lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} \qquad b)\ \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right)$$

$a)$ 1^∞ típusú határérték. (1 pont)

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to0}\left(e^{\ln\cos x}\right)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x}} \qquad \text{(4 pont)}$$

A fenti $\frac{0}{0}$ típusú határértékre alkalmazható a l'Hospital-szabály: (1 pont)

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x} = \lim_{x\to0}\frac{-\sin x}{\cos x} = 0, \qquad \text{(3 pont)}$$

tehát e keresett határérték $e^0 = 1$. (1 pont)
b) $\infty - \infty$ típusú határértéket közös nevezőre hozva a kapott $\frac{0}{0}$ típusú határértékre alkalmazható a l'Hospital-szabály (2 pont)

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(x+1)}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-\sin x}{\sin x\ln(x+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-\cos x}{\cos x\ln(x+1)+\frac{\sin x}{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}+\sin x}{-\sin x\ln(x+1)+\frac{2\cos x}{x+1}-\frac{\sin x}{(x+1)^2}} = -\frac{1}{2} \qquad \text{(1+3+3+1 pont)}$$

6. (IMSC) 5 liter olajat szeretnénk egy alul henger, felül félgömb alakú flakonba önteni. Mekkora legyen a henger alakörének sugara, hogy a lehető legkevesebb műanyagot kelljen felhasználnunk a flakon készítéséhez? (Ha kiürült a flakon, pompás kis madáretetőt lehet belőle csinálni télre!)

Legyen r a henger sugara és h a magassága! Ekkor a flakon térfogata illetve felülete:

$$V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi, \qquad A = r^2\pi + 2rh\pi + 2r^2\pi \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel $V = 5\ \mathrm{dm}^3$, így az első egyenletből kifejezve h-t és beírva a másodikba:

$$A(r) = 3r^2\pi + 2r\frac{5-\frac{2}{3}r^3\pi}{r^2} = \frac{5}{3}r^2\pi + \frac{10}{r}. \qquad \text{(2 pont)}$$

Látható, hogy az $A(r)$ függvény differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon, ezért a lokális szélsőértékhely(ek)en deriváltja zérus.

$$A'(r) = \frac{10r\pi}{3} - \frac{10}{r^2}, \qquad \text{(2 pont)}$$

és ennek egyetlen pozitív zérushelye az $r_0 = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}}$ pontban (1 pont).

Mivel a derivált negatív a zérushely előtt, és pozitív utána, függvénynek valóban minimuma van a r_0 helyen (1 pont).