Villamosmérnök A3X (2018 tavasz) — 1. pót ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Oldja meg az $y' = \big(x+y\big)^2$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Lineáris argumentumú, szétválaszthatóra visszavezethető. $u = x+y \rightsquigarrow u' = 1+u^2$, és ez szétválasztható.

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \int 1\,dx \rightsquigarrow \operatorname{arctg} u = x+c \rightsquigarrow u = \operatorname{tg}(x+c)$$

amiből $y = u - x = \operatorname{tg}(x+c) - x$.

2. Oldja meg a $\sin y - y\sin x + y'(\cos x + x\cos y) = 0$ differenciálegyenletet!

Megoldásvázlat. Az egyenlet egzakt, mert $\frac{d}{dy}(\sin y - y\sin x) = \cos y - \sin x = \frac{d}{dx}(\cos x + x\cos y)$. Kell $u = u(x,y)$, amire $u_x = \sin y - y\sin x$ és $u_y = \cos x + x\cos y$. Az elsőből $u = \int \sin y - y\sin x\; dx = x\sin y + y\cos x + c(y)$, amiből a második miatt $\cos x + x\cos y = u_y = x\cos y + \cos x + c'(y)$, vagyis $c(y) = c$, tehát $u = x\sin y + y\cos x + c$, és így az általános megoldás $c = x\sin y + y\cos x$.

3. Oldja meg Laplace-transzformáció segítségével az $y''+4y'+3y = \sin t$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$ kezdetiérték-problémát!

Megoldásvázlat. $\frac{1}{s^2+1} = \mathfrak{L}\{y''\} + 4\mathfrak{L}\{y'\} + 3\mathfrak{L}\{y\} = (s^2+4s+3)Y + 2s + 6$ a kezdetiérték-feltételeket figyelembe véve. Ebből $Y = \frac{1}{(s^2+1)(s+1)(s+3)} - 2\frac{1}{s+1} = -\frac{1}{5}\frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{10}\frac{1}{s^2+1} - \frac{7}{4}\frac{1}{s+1} - \frac{1}{20}\frac{1}{s+3}$, visszatranszformálva: $y = -\frac{1}{5}\cos t + \frac{1}{10}\sin t - \frac{7}{4}e^{-t} - \frac{1}{20}e^{-3t}$.

4. Számítsa ki az $r(t) = e^t(\cos t, \sin t)$, $t \in [0,\pi]$ görbe ívhosszát!

Megoldásvázlat. $\dot r(t) = e^t(\cos t - \sin t, \cos t + \sin t)$, tehát az ívhossz $\int_0^\pi |\dot r(t)|\; dt = \int_0^\pi e^t\sqrt{2}\; dt = \sqrt{2}(e^\pi - 1)$.

5. Számítsa ki a $v(x,y,z) = (-y, x, x^2 z)$ vektorfüggvény vonalintegrálját a $(0,0,3)$ középpontú, az xy síkkal párhuzamos síkbeli, 2 sugarú, a z tengely pozitív feléből nézve pozitívan irányított körvonalon!

Megoldásvázlat. A körvonal egyenlete $r(t) = (2\cos t, 2\sin t, 3)$, $t \in [0, 2\pi]$, amiből $\dot r(t) = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$, és így

$$\int_K v\; dr = \int_0^{2\pi} v(r(t))\dot r(t)\; dt = \int_0^{2\pi} (-2\sin t, 2\cos t, 12\cos^2 t)(-2\sin t, 2\cos t, 0)\; dt$$

$$= 4\int_0^{2\pi} 1\; dt = 8\pi$$

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \mathfrak{L}\{g(t)\}(s-a)$, ahol $\mathfrak{L}\{f(t)\}(s)$ jelöli az f függvény Laplace-transzformáltját!

Megoldásvázlat. $\mathfrak{L}\left\{e^{at}g(t)\right\}(s) = \int_0^\infty e^{at}g(t)e^{-st}\; dt = \int_0^\infty g(t)e^{-(s-a)t}\; dt = \mathfrak{L}\{g(t)\}(s-a)$.