Kombinatorikus optimalizálás (VISZMA06)

3. pZH javítókulcs (2016. 05. 25.)

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámok tájékoztató jelleggel lettek megállapítva az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésenk az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában hibánként 1 pontot vonunk le.

1. Legyen $\mathcal{M}$ a jobboldalon látható M mátrix meghatározta lineáris matroid. Döntsük el, hogy $\mathcal{M}^*$ duális matroidnak bázisát alkotja-e az M első három oszlopa.

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & 1 & 3 & 9 & 7 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 & -2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

Az $\mathcal{M}^*$ definíciója szerint ezen oszlopok pontosan akkor alkotják $\mathcal{M}^*$ bázisát, ha a komplementer halmaz elemei (azaz M fennmaradó oszlopai $\mathcal{M}$) bázisát alkotják. (2 pont)
Ezért azt kell ellenőriznünk, hogy az $\mathcal{M}$ matroidnak bázisa-e a 4-dik, 5-dik és 6-dik oszlop. (1 pont)
Ennek érdekében úgy rendezzük át M oszlopait, hogy balodalon az iménti oszlopok álljanak, majd a matroidon nem változtató ESÁ-k segítségével lépcsős alakra hozunk, abból állapítjuk meg a választ. (2 pont)

Nosza:

$$\begin{array}{rrrrrr}
3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
-2 & -6 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ \hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
3 & 9 & 7 & -5 & 6 & 1 \\
-2 & -6 & -1 & -3 & 4 & 0 \\ \hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 3 & -5 & 8 & 0 \\ \hline
1 & 3 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 8 & -3 \\ \hline
\end{array}$$

(3 pont)

Azt kaptuk, hogy vizsgált három oszlop nem alkot bázist, hiszen a második oszlopban nincs vezéregyes, ezért az eredetileg kérdezett oszlopok sem alkotják az $\mathcal{M}^*$ matroid bázisát. (2 pont)

Aki egyszerűen észreveszi, hogy M 4-dik és 5-dik oszlopa egymás skalárszorosa, ezért nem lehetnek egy bázisban, annak is jár az utolsó $3 + 2$ pont.

---

2. Legyenek M_1 ill. M_2 a jobb oldalon látható mátrix első három ill. utolsó három sora alkotta mátrixok, és legyenek $\mathcal{M}_1$ ill. $\mathcal{M}_2$ az ezen mátrixokhoz tartozó lineáris matroidok. Igaz-e, hogy a második, harmadik és negyedik oszlopok az $\mathcal{M}_1$ és $\mathcal{M}_2$ matroidok közös független halmazát alkotják? Ha igen, akkor e három oszlop vajon maximális méretű közös független halmaz-e?

$$\begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 6 & 2 & 0 & 9 \\ 2 & 9 & 3 & 1 & 5 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Azt kell eldönteni, hogy a feladatban szereplő oszlopok lineárisan függetlenek-e a két mátrix mindegyikében. (1 pont)
Ehhez felírjuk az ezen oszlopok alkotta két 3×3 méretű mátrixról kell eldönteni azt, hogy lineárisan függetlenek-e az oszlopai. (2 pont)

Mivel az oszloprang megegyezik a determinánsranggal, elegendő a determinánsokat kiszámítani. Mivel egyik sem 0, ezért a kérdezett oszlopok lineárisan függetlenek, így valóban a két matroid közös függetlenjéről van szó. (4 pont)

(Ugyanúgy 4 pont jár azért, ha valaki hivatkozik hivatkozik arra, hogy ESÁ hatására a matroid nem változik, és a két mátrixot lépcsős alakra hozva megállapítja, hogy 3 vezéregyes keletkezik.)

Mivel a mátrixoknak 3 sora van, ezért 3-nál nagyobb méretű független halmaz egyik matroidban sem lehet, tehát az iménti közös független maximális méretű is. (3 pont)

---

3. Tegyük fel, hogy a G gráfon a Nagamochi-Ibaraki algoritmus futtatva a max-vissza sorrendek utolsó csúcsainak fokszámai rendre $9, 11, 7, 8, 11, 5, 13, 6$ és 8. Igazoljuk, hogy G-ből bárhogyan is hagyunk el 3 élt, az így kapott G' gráf bizonyosan 2-élösszefüggő lesz.

A Nagamochi-Ibaraki algoritmusról tanultak szerint a G gráfban a minimális vágás élszáma a felsorolt fokszámok minimuma, azaz $\lambda(G) = 5$. (3 pont)

Ezek szerint a G gráf 5-szörösen élösszefüggő, vagyis G-ből bárhogyan is hagyunk el legfeljebb 4 élt, a kapott gráf összefüggő marad. (3 pont)

Ezért ha G-ből elhagyunk 3 élt, akkor az így kapott G' gráfra az lesz igaz, hogy bárhogyan is hagyunk el G'-ből egy élt, a maradék gráf összefüggő marad. (2 pont)

Ez utóbbi tulajdonság pedig pontosan a G' gráf 2-szeres élösszefüggőségét jelenti, nekünk pedig éppen ezt kellett igazolnunk. (1 pont)