

## Sztoczasztika 2 vizsga Felsőbb matematika tárgy.

2012. december 18. 12:00. Munkaidő: 70 perc. Minden feladat 5 pontot ér.

1. Használható-e a Hoeffding-egyenlőtlenség, és használható-e a Cramér nagy eltérés tétel a  $P(X_1 + X_2 + \dots + X_n < K)$  valószínűség becslésére (trükközés nélkül) az alábbi esetekben? *A válaszokat indokoljuk!*
  - a.) Az  $X_k$ -k független 1 paraméterű exponenciálisok.
  - b.) Az  $X_k$ -k független és azonos, de ismeretlen eloszlásúak, viszont  $P(2 \leq X_k \leq 5) = 1$ , továbbá ismert a várható értékük és a szórásuk.
  - c.)  $X_k$  egyenletes a  $[0, 1]$  intervallumon, és az  $X_k$ -k függetlenek.
  - d.)  $X_k$  egyenletes a  $[0, k]$  intervallumon, és az  $X_k$ -k függetlenek.
  - e.) Jancsi egy szabályos érmét dobál és  $X_k$ -val azt jelöli, hogy az első  $k$  dobásból hány fej.
2. Legyen  $X_n$  időben homogén diszkrét idejű Markov lánc az  $S = \{1, 2, 3, 4\}$  állapottéren a

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

átmenetmátrixszal.

- a.) Rajzoljuk le a Markov lánc gráf-reprezentációját.
  - b.) Feltéve, hogy  $X_0 = 1$ , hosszú távon az  $n$ -ek mekkora hányadában lesz  $X_n = 2$ ?
  - c.) Közelítőleg mennyi a  $P(X_{100} = 2 | X_0 = 1)$  valószínűség?
3. Pistike csillárjában három égő van, melyek élettartamai független azonos exponenciális eloszlású val.változók 1 év várható értékkel. Ha egy vagy két égő kiég, Pistike nem törődik vele, de ha kiég a harmadik is, akkor az összeset azonnal kicseréli. (Vagyis 0 működő égő soha nincs a csillárban, az „egy működik” állapotból csak a „mind működik” állapotba van ugrás.)
    - a.) Modellezzük a működő égők számát folytonos idejű Markov láncsal. Az időt mérjük években. Rajzoljuk fel a gráf-reprezentációt és írjuk fel az infinitezimális generátort, *nagyon odafigyelve az egyes állapotokban a tartózkodási idő paramétereire.*
    - b.) Tegnap 20:00-kor minden égő működött. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy ma 20:00-kor pontosan kettő fog működni?
    - c.) Tegnap 20:00-kor minden égő működött. Közelítőleg mennyi a valószínűsége, hogy tíz év múlva ugyanezen a napon 20:00-kor pontosan kettő fog működni?
  4. Egy radioaktív bomló atommag élettartamának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln 2}{T} e^{-\frac{\ln 2}{T}x}, & \text{ha } x > 0 \\ 0, & \text{ha nem} \end{cases},$$

ahol a  $T > 0$  paraméter a felezési idő. Az élettartamból 10-elemű mintát vettünk, és a következő eredményeket kaptuk (órában): 311; 61; 11; 200; 13; 298; 223; 76; 9; 250.

Adjunk maximum likelihood becslést a  $T$  felezési időre!

5. A villamosmérnök hallgatók a „Sztoczasztika 2” ZH-t két turnusban írták. A ZH-k turnus és pontszám szerinti csoportjaink a darabszámait az alábbi táblázat mutatja.

pontszám		0-4		5-8		9-12		13-16		17-21		összesen
1. turnus		10		16		47		4		17		94
2. turnus		12		15		24		17		14		82
összesen		22		31		71		21		31		176

Vizsgáljuk meg 95%-os szinten azt a hipotézist, hogy a két turnus pontszám-eloszlása azonos.