Valószínűségszámítás vizsga Műszaki informatikus BSc
2016. január 14.

1. Két pontot véletlenszerűen egymástól függetlenül kiválasztunk az egységnégyzeten. Mennyi a valószínűsége annak, hogy legalább az egyik pont távolabb lesz a négyzet középpontjától mint $\frac{1}{4}$?
Megoldás: Annak valószínűsége, hogy egy pont a középponttól $\frac{1}{4}$-nél távolabb essék: $p = 1 - \frac{\pi}{16}$. A Poincare formulából számolva, így a keresett valószínűség: $2p - p^2$. A keresett valószínűség tehát $2 \cdot (1 - \frac{\pi}{16}) - (1 - \frac{\pi}{16})^2 = 0.96145$

2. Az X és Y valószínűségi változók együttes eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

$Y \backslash X$	-1	0	1
-1	p	p	$10p$
1	$10p$	$10p$	$20p$

Mekkora a p paraméter értéke? Függetlenek-e X és Y? $\mathbf{cov}(X,Y) = ?$
Megoldás: A táblázatban álló valószínűségek összege 1, így $p = \frac{1}{52}$. Pl.
$\mathbf{P}(X = -1) = \frac{11}{52}, \mathbf{P}(Y = -1) = \frac{12}{52}, \mathbf{P}(X = -1, Y = -1) = \frac{1}{52}$. Mivel $\frac{1}{52} \neq \frac{11}{52} \cdot \frac{12}{52}$, nem teljesül a függetlenségi feltétel, azaz X, Y **nem** függetlenek! $\mathbf{E}XY = \frac{1}{52} + \frac{20}{52} - \frac{20}{52} = \frac{1}{52}, \mathbf{E}X = \frac{-11}{52} + \frac{30}{52} = \frac{19}{52}, \mathbf{E}Y = \frac{-12}{52} + \frac{40}{52} = \frac{28}{52}$
$\operatorname{cov}(X,Y) = \mathbf{E}XY - \mathbf{E}X \cdot \mathbf{E}Y = \frac{-480}{2704} \approx -0.17751$

3. Egy gépjármű-biztosítótársaság az ügyfeleit három osztályba sorolja: jó vezető, átlagos vezető, rossz vezető. A társaság tapasztalata alapján a jó, átlagos és rossz vezetők 0,01, 0,1, illetve 0,25 eséllyel lesznek baleset részesei egy év alatt. Hogyha az ügyfelek 15%-a jó vezető, 55%-a átlagos vezető, és 30%-a rossz vezető, hány százalékuk lesz baleset részese a jövő év folyamán? Hogyha egy adott ügyfélnek nem volt tavaly balesete, milyen valószínűséggel rossz vezető?
Megoldás: J, A, R : Az ügyfél jó, átlagos vagy rossz vezető;
B : Az ügyfélnek balesete lesz;
$\mathbf{P}(J) = 0.15, \mathbf{P}(A) = 0.55, \mathbf{P}(R) = 0.3,$
$\mathbf{P}(B \mid J) = 0.01, \mathbf{P}(B \mid A) = 0.1, \mathbf{P}(B \mid R) = 0.25$
A teljes valószínűség tételéből:
$\mathbf{P}(B) = 0.01 \cdot 0.15 + 0.1 \cdot 0.55 + 0.25 \cdot 0.3 = 0.1315$
A Bayes tételt kell alkalmazni:
$\mathbf{P}(R \mid \bar{B}) = \frac{\mathbf{P}(\bar{B} \mid R) \cdot \mathbf{P}(R)}{1 - \mathbf{P}(B)} = \frac{0.75 \cdot 0.3}{1 - (0.01 \cdot 0.15 + 0.1 \cdot 0.55 + 0.25 \cdot 0.3)} = 0.25907$

4. Legyen $X \in B(3, \frac{1}{4})$, és $Y = X^2 + 1$. Mi Y eloszlása, és mennyi a várható értéke és szórása?
Megoldás: $R_Y = \{1, 2, 5, 10\}$,
$\mathbf{P}(Y = 1) = \mathbf{P}(X = 0) = \frac{27}{64}, \mathbf{P}(Y = 2) = \mathbf{P}(X = 1) = \frac{27}{64}$
$\mathbf{P}(Y = 5) = \mathbf{P}(X = 2) = \frac{9}{64}, \mathbf{P}(Y = 10) = \mathbf{P}(X = 3) = \frac{1}{64}$
$\mathbf{E}Y = \mathbf{E}X^2 + 1 = \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + 1 = \frac{17}{8}, \mathbf{E}Y^2 = \frac{27 + 4 \cdot 27 + 25 \cdot 9 + 100}{64} = \frac{115}{16},$
$\sigma Y = \sqrt{\frac{115}{16} - \frac{17^2}{64}} = \frac{3}{8}\sqrt{19} = 1.6346$

5. Legyen az $(X,Y)^T$ vektor valószínűségi változó sűrűségfüggvénye
$f(x,y) = \frac{1}{7}[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18],\ x \in [0,1], y \in [0,1].$
Számolja ki a perem sűrűségfüggvényeket! Függetlenek a komponensek?
Megoldás:
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{1}{7}[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18]\,dy =$$
$$= \frac{1}{7}[3x^2y^2 - 6xy^2 + 3y^2 + 18x^2y - 36xy + 18y]_0^1 = 3(x-1)^2, x \in [0,1]$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{7}[6x^2y - 12xy + 6y + 18x^2 - 36x + 18]\,dx =$$
$$\frac{1}{7}[2x^3y - 6x^2y + 6xy + 6x^3 - 18x^2 + 18x]_0^1 = \frac{1}{7}(2y+6), y \in [0,1].$$
Mivel az együttes sűrűségfüggvény $f_X(x) \cdot f_Y(y)$ alakban felírható, X, Y függetlenek!