

# Jelek és rendszerek II.

## I. HÁZI FELADAT VILLAMOSMÉRNÖK SZAKOS HALLGATÓK RÉSZÉRE

|                    |                 |
|--------------------|-----------------|
| Név                | Seyler Lajos    |
| Neptun kód         | EGWIB4          |
| Házi feladat kódja | 1612030402      |
| Beadási határidő:  | 7. oktatási hét |

**Megjegyzések:** Le kell töltenie a feladatlapot (a hálózat és a gerjesztőjel adataival együtt), továbbá a hálózat ábráját, és ezeket a megoldással együtt írásban kell benyújtani. Ha javítás, illetve részfeladat külön beadása miatt többször adja be a házi feladatot, minden alkalommal az előző részeket is és a feladatlapot is be kell adni. Javítás esetén a hibás részt kicserélni nem szabad még akkor sem, ha valamelyik feladat megoldását előlről kezdi. A javítást külön lapon kell mellékelni, megjelölve, melyik pont korrekciójáról van szó. Ügyeljen az áttekinthető és világos kialakokra! A teljes megoldást minden esetben részletesen le kell írni, nem elegendő a végeredményeket közölni! A numerikus számításokra és az ábrák elkészítésére természetesen alkalmazhat számítógépi programokat (MATLAB, DERIVE stb.), de a megoldás elvi lépéscit ekkor is részletesen ismertetni kell.

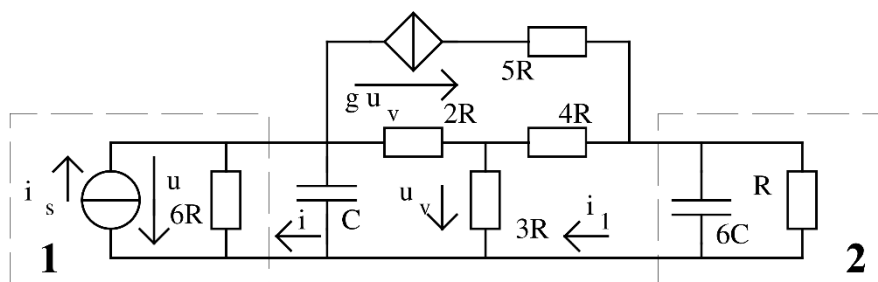
Gyakorlatvezető neve:

Javító véleménye (elfogadás, javítások):

Az ábrán megadott lineáris invariáns hálózat gerjesztése az áramforrás árama, válasza a 02 kimeneti jel.

H16

Válaszjel:  $u$ ,  $i$ ,  $i_1$  A vizsgált kétpólus: 1, 2

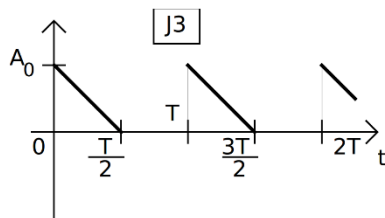


$R =$        $C =$        $g =$

| $R$         | $C$    | $g$       |
|-------------|--------|-----------|
| $25k\Omega$ | $10nF$ | $80\mu S$ |

## 1. feladat

A hálózat gerjesztése az alábbi periodikus jel:



| $A_0$              | $T/\tau$ | $\tau$              |
|--------------------|----------|---------------------|
| $(10 \text{ V})/R$ | $0.95$   | $\tau = 2 \cdot CR$ |

- 1.1 Határozza meg ezen periodikus jel legalább négy (nem zérus) harmonikust tartalmazó Fourier-polinomját! Írja fel a Fourier-polinomot komplex és valós együttthatós alakban!
- 1.2 Határozza meg a jel effektív értékét pontosan és a választott Fourier-polinom közelítésben is! Adja meg a közelítés relatív hibáját!

- 1.3 Határozza meg a rendszer átviteli karakterisztikáját!
- 1.4 Határozza meg a válasz Fourier-polinomját az előző feladatban számított közelítésben!  
Határozza meg közelítőleg a válasz effektív értékét!
- 1.5 (Nem kötelező!) Rajzolja fel az átviteli karakterisztika Bode- és Nyquist-diagramját!

## 2. feladat

A gerjesztés az 1. feladatban megadott jel első periódusa; a  $(0, T)$  intervallumon kívül zérus a jel értéke.

- 2.1 Határozza meg az aperiodikus gerjesztő jel komplex spektrumát!
- 2.2 Ábrázolja az amplitúdóspektrumot, és ennek alapján adja meg a jel sávszélességét!  
( $\varepsilon = 0.05$ )
- 2.3 Írja fel a válasz komplex spektrumát!

## 3. feladat

- 3.1 Határozza meg az átviteli függvényt! Számítsa ki az átviteli függvény pólusait és zérusait, vázolja fel a pólus-zérus elrendezést!
- 3.2 Határozza meg az impulzusválaszt az átviteli függvény alapján, és vázolja az impulzusválasz időfüggvényét!
- 3.3 Határozza meg a választ, ha a gerjesztőjel a 2. pont szerinti aperiodikus jel! Vázolja a válaszjelet!

## 4. feladat

A feladat megoldása nem kötelező! Ellenőrizze a számításokat a TINA hálózatanalízis program segítségével!

## Jelek és rendszerek 2.

### I. Házi feladat

#### 1. Feladat

##### 1.1. rész

$$A_0 = \frac{10V}{25k\Omega} = 0,4 \text{ mA}$$

A gerjesztés függvénye:  $i_s(t) = A_0 - A_0 \cdot \frac{2t}{T}$

**Fourier-sor valós alak:**  $i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left( I_k^A \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) + I_k^B \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) \right)$

Együtthatók meghatározása:

$$I_0 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) dt$$

$$I_k^A = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$I_k^B = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad I_0 &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T \left( A_0 - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t \right) dt = \frac{A_0}{T} \cdot \int_0^T 1 dt - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^T t dt = \\ &= \frac{A_0}{T} \cdot \left[ t \right]_0^T - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^T = \frac{A_0}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \frac{\left( \frac{T}{2} \right)^2}{2} = \frac{A_0}{2} - \frac{A_0}{4} = \frac{A_0}{4} \\ \bullet \quad I_k^A &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \left( A_0 - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t \right) \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \\ &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T A_0 \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt - \frac{2}{T} \cdot \int_0^T \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot t \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \\ &= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^T t \cdot \cos(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \\ &= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left[ t \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \int_0^T 1 \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} dt \right] = \\ &= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left[ t \cdot \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^T - \left[ \frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^T \right] = \\ &= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 2}\right)}{k \cdot \omega_0} - 0 \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 2}\right)}{k \cdot \omega_0} - 0 - \left[ \frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T \cdot 2}\right)}{(k \cdot \omega_0)^2} - \frac{1}{(k \cdot \omega_0)^2} \right] \right] = \\ &= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi)}{k \cdot \omega_0} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left( \frac{T}{2} \cdot \frac{\sin(k \cdot \pi)}{k \cdot \omega_0} \right) - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{\left( k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \right)^2} - \frac{1}{\left( k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T} \right)^2} \right] = \\ &= \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \frac{(-1)^k}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} \right] = \frac{A_0 \cdot ((-1)^k - 1)}{k^2 \cdot \pi^2} = \begin{cases} \frac{2 \cdot A_0}{k^2 \cdot \pi^2}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{ha } k \text{ páros} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet \quad I_k^B &= \frac{2}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot \sin(k \cdot \omega_0 \cdot t) dt = \\
&= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ -\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left[ t \cdot \left( -\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} 1 \cdot \left( -\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) dt \right] = \\
&= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ -\frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} - \frac{\cos(0)}{k \cdot \omega_0} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left[ t \cdot \left( -\frac{\cos(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{k \cdot \omega_0} \right) \right]_0^{\frac{T}{2}} + \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right] = \\
&= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{1}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ \left[ \frac{T}{2} \cdot \left( -\frac{\cos\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{2}\right)}{k \cdot \omega_0} \right) + \frac{1}{k \cdot \omega_0} \right] + \left[ \frac{\sin(k \cdot \omega_0 \cdot t)}{(k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right] = \\
&= \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \frac{1}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} - \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} \right] - \frac{4 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left[ -\frac{T}{2} \cdot \frac{\cos(k \cdot \pi)}{k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} + \frac{1}{k \cdot \omega_0} + \underbrace{\frac{\sin\left(k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{2}\right)}{(k \cdot \omega_0)^2} - 0}_0 \right] = \\
&= \frac{A_0}{k \cdot \pi} - \frac{A_0 \cdot (-\cos(k \cdot \pi))}{k \cdot \pi} + \frac{A_0 \cdot (\cos(k \cdot \pi))}{k \cdot \pi} = \frac{A_0}{k \cdot \pi}
\end{aligned}$$

Tehát:

$$I_0 = \frac{A_0}{4}$$

$$I_k^A = \frac{2 \cdot A_0}{k^2 \cdot \pi^2}, \text{ ha } k \text{ páratlan, egyébként } 0$$

$$I_k^B = \frac{A_0}{k \cdot \pi}$$

$$\begin{aligned}
i_s(t) &= \frac{A_0}{4} + \frac{2 \cdot A_0}{\pi^2} \cdot \cos(1 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A_0}{\pi} \cdot \sin(1 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + \frac{A_0}{2 \cdot \pi} \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \\
&+ \frac{2 \cdot A_0}{9 \cdot \pi^2} \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + \frac{A_0}{3 \cdot \pi} \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + \frac{A_0}{4 \cdot \pi} \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t)
\end{aligned}$$

$$A_0 = 0,4 \text{ mA}$$

$$\begin{aligned}
i_s(t) &= 0,1 + 0,081 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + 0,127 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + 0 + 0,0636 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \\
&+ 0,009 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0,042 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + 0,031 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t) \text{ ű}
\end{aligned}$$

**Fourier-sor komplex alak:**

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} I_k^c \cdot e^{j \cdot \omega_0 \cdot t}$$

$$\omega_0 = \frac{2 \cdot \pi}{T} = 13,228 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

$$T = 0,475 \text{ ms}$$

$$A_0 = 0,4 \text{ mA}$$

Együtthatók kiszámítása:

$$I_0^c = I_0 = 0,1$$

$$\begin{aligned}
I_k^c &= \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i(t) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( A_0 - A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T} \right) \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \\
&= \frac{A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt = \frac{A_0}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t} dt =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A_0}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \frac{T}{2}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} - \frac{1}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right] - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{ \left[ t \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} dt \right\} = \\
&= \frac{A_0}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \frac{T}{2}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} + \frac{1}{j \cdot k \cdot \omega_0} \right] - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{ \frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \frac{T}{2}}}{-j \cdot k \cdot \omega_0} - \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \omega_0 \cdot t}}{(-j \cdot k \cdot \omega_0)^2} \right]_0^{\frac{T}{2}} \right\} = \\
&= \frac{A_0}{T} \cdot \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T^2 \cdot 2}}}{-j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} + \frac{1}{j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} \right] - \frac{2 \cdot A_0}{T^2} \cdot \left\{ \frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T^2 \cdot 2}}}{-j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi}{T}} - \left[ \frac{e^{-j \cdot k \cdot \frac{2 \cdot \pi \cdot T}{T^2 \cdot 2}}}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} - \frac{1}{k^2 \cdot \frac{4 \cdot \pi^2}{T^2}} \right] \right\} = \\
&= -\frac{A_0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi}}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{A_0}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{A_0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi}}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{A_0 \cdot e^{-j \cdot k \cdot \pi}}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} - \frac{A_0}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} = \\
&= \frac{A_0}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} + \frac{A_0 \cdot (-1)^k}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} - \frac{A_0}{2 \cdot k^2 \cdot \pi^2} = \begin{cases} \frac{A_0}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi}, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{A_0}{j \cdot 2 \cdot k \cdot \pi} - \frac{A_0}{k^2 \cdot \pi^2}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$k = \pm 1$$

$$I_1^C = \frac{A_0}{j \cdot 2 \cdot \pi} - \frac{A_0}{\pi^2} = -0,0405 - j \cdot 0,0637 = 0,0755 \cdot e^{-j \cdot 2,1371}$$

$$I_{-1}^C = 0,0755 \cdot e^{j \cdot 2,1371}$$

$$k = \pm 2$$

$$I_2^C = \frac{A_0}{j \cdot 4 \cdot \pi} = 0 - j \cdot 0,318 = 0,318 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$I_{-2}^C = 0,318 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$k = \pm 3$$

$$I_3^C = \frac{A_0}{j \cdot 6 \cdot \pi} - \frac{A_0}{9 \cdot \pi^2} = 0,0045 - j \cdot 0,0212 = 0,217 \cdot e^{-j \cdot 1,78}$$

$$I_{-3}^C = 0,217 \cdot e^{j \cdot 1,78}$$

$$k = \pm 4$$

$$I_4^C = \frac{A_0}{j \cdot 8 \cdot \pi} = 0 - 0,00159 \cdot j = 0,00159 \cdot e^{-j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

$$I_{-4}^C = 0,00159 \cdot e^{j \cdot \frac{\pi}{2}}$$

Ez alapján a Fourier sor:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 0,1 + 0,0755 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - 2,1371)} + 0,0755 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + 2,1371)} + 0,318 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2})} + \\
&+ 0,318 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2})} + 0,217 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - 1,78)} + 0,217 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + 1,78)} + 0,00159 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t - \frac{\pi}{2})} + \\
&+ 0,00159 \cdot e^{j \cdot (\omega_0 \cdot t + \frac{\pi}{2})} \\
\omega_0 &= \frac{2 \cdot \pi}{T} = 13,228 \frac{\text{krad}}{s}
\end{aligned}$$

## 1.2. rész

A gerjesztés effektív értéke pontosan

$$\begin{aligned} I_{eff} &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T u^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( A_0 - \frac{2 \cdot A_0}{T} t \right)^2 dt} = \\ &= \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} \left( A_0^2 - \frac{4 \cdot A_0^2}{T} \cdot t + \frac{4 \cdot A_0^2}{T^2} \cdot t^2 \right) dt} = \sqrt{\frac{A_0^2}{T} \cdot \frac{T}{2} - \frac{4 \cdot A_0^2}{T^2} \cdot \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^2}{2} + \frac{4 \cdot A_0^2}{T^3} \cdot \frac{\left(\frac{T}{2}\right)^3}{3}} = \\ &= \sqrt{\frac{A_0^2}{2} - \frac{A_0^2}{2} + \frac{A_0^2}{6}} = \frac{A_0}{\sqrt{6}} = 0,1633 \text{ mA} \end{aligned}$$

A gerjesztés értéke a Fourier polinomból:

$$I_{eff, Fourier} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

Ez csak kezdőfázisos alakra igaz, ezért ehhez használnunk kell a következő azonosságot:

$$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

$$k = 1\text{-re:} \quad I_1 = \sqrt{0,081^2 + 0,127^2} = 0,15$$

$$k = 2\text{-re:} \quad I_2 = 0,0636$$

$$k = 3\text{-ra:} \quad I_3 = \sqrt{0,009^2 + 0,042^2} = 0,042953$$

$$k = 4\text{-re:} \quad I_4 = 0,031$$

$$\text{Tehát: } I_{eff, Fourier} = \sqrt{0,1^2 + \frac{0,15^2}{2} + \frac{0,0636^2}{2} + \frac{0,042953^2}{2} + \frac{0,031^2}{2}} = 0,157 \text{ mA}$$

$$\text{Relatív hiba: } H = \frac{0,1633 - 0,157}{0,1633} \cdot 100\% = 3,858\%$$

## 1.3 rész

Hálózati egyenletek

$$1, \quad i_s = \frac{U_{c1}}{6 \cdot R} + C \cdot \dot{U}_{c1} + g \cdot U_v + \frac{U_{c1} - U_v}{2 \cdot R}$$

$$2, \quad \frac{U_v}{3 \cdot R} + \frac{U_v - U_{c1}}{2 \cdot R} + \frac{U_v - U_{c2}}{4 \cdot R} = 0$$

$$3, \quad \frac{U_{c2}}{R} + 6 \cdot C \cdot \dot{U}_{c2} + \frac{U_{c2} - U_v}{4 \cdot R} - g \cdot U_v = 0$$

$$4, \quad i = i_s - \frac{U_{c1}}{6 \cdot R}$$

MAPLE programmal rendezve az egyenleteket megkapjuk az állapotváltozós leírás normálalakját:

```
restart;
e1:=is=Uc1/(6*R)+C*Uc1d+g*Uv+(Uc1-Uv)/(2*R);
e2:=Uv/(3*R)+(Uv-Uc1)/(2*R)+(Uv-Uc2)/(4*R)=0;
e3:=Uc2/R+6*C*Uc2d+(Uc2-Uv)/(4*R)-g*Uv=0;
e4:=i=is-Uc1/(6*R);
Uc1d:=solve(e1,Uc1d);
Uc2d:=solve(e3,Uc2d);
```

```

R:=25;
C:=0.01;
g=0.08;
i:=solve(e4,i)
Uc1d
-5.435897437*Uc1-1.384615386*Uc2+100.0000000*is
Uc2d
0.6923076925*Uc1-0.4871794871*Uc2
i
is-1/150*Uc1

```

$$\dot{U}_{c1} = -5,436 \cdot U_{c1} - 1,385 \cdot U_{c2} + 100 \cdot i_s$$

$$\dot{U}_{c2} = 0,6923 \cdot U_{c1} - 0,487 \cdot U_{c2}$$

$$i = i_s - \frac{1}{150} \cdot U_{c1}$$

Koherens egységrendszer:  $[k\Omega, mA, V, \mu F, ms, \frac{krad}{s}, H, ms \text{ (siemens)}]$

Az egyenletek alapján:

$$A = \begin{pmatrix} -5,436 & -1,385 \\ 0,69 & -0,487 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C = (-0,0067 \quad 0) \quad D = 1$$

A mátrix sajátértékeinek meghatározása MATLAB-bal:

```

>>A=[-5.436 -1.385;0.69 -0.487];
>>[la]=eig(A);

```

$$\lambda_1 = -5,2347, \lambda_2 = -0,6833$$

Mivel minden sajátérték negatív, ezért a rendszer asszimptotikusan stabilis, így létezik az átviteli karakterisztika.

Meghatározása MATLAB-bal:

```

>>[szam,nev]=ss2tf(A,B,C,D);

```

$$szam = 1 \quad 5,2531 \quad 3,2805$$

$$nev = 1 \quad 5,9231 \quad 3,6069$$

Tehát az átviteli karakterisztika:

$$H(j \cdot \omega) = \frac{(j \cdot \omega)^2 + 5,2531 \cdot j \cdot \omega + 3,2805}{(j \cdot \omega)^2 + 5,9231 \cdot j \cdot \omega + 3,6069}$$

#### 1.4. rész

A válasz Fourier-polinomjának meghatározása

A gerjesztés Fourier-polinomja:

$$i_s(t) = 0,1 + 0,081 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t) + 0,127 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t) + 0 + 0,0636 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t) + \\ + 0,009 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0,042 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t) + 0 + 0,031 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 13,228 \frac{\text{krad}}{\text{s}} \quad T = 0,475 \text{ ms}$$

$$\omega = 0$$

$$0,1 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,1 \cdot \frac{0+0+3,2805}{0+0+3,6069} = 0,0909$$

$$\omega = \omega_0 = 13,228 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

$$0,081 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,081 \cdot \frac{174,98 \cdot j^2 + 69,49 \cdot j + 3,2805}{174,98 \cdot j^2 + 78,35 \cdot j + 3,6069} = 0,0795 \cdot e^{j \cdot 2,535^\circ}$$

$$0,127 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,127 \cdot \frac{174,98 \cdot j^2 + 69,49 \cdot j + 3,2805}{174,98 \cdot j^2 + 78,35 \cdot j + 3,6069} = 0,1248 \cdot e^{j \cdot 2,535^\circ}$$

$$\omega = 2 \cdot \omega_0 = 26,456 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

$$0,0636 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,0636 \cdot \frac{699,92 \cdot j^2 + 138,976 \cdot j + 3,2805}{699,92 \cdot j^2 + 156,7 \cdot j + 3,6069} = 0,0633 \cdot e^{j \cdot 1,4^\circ}$$

$$\omega = 3 \cdot \omega_0 = 39,684 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

$$0,009 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,009 \cdot \frac{1574,82 \cdot j^2 + 208,46 \cdot j + 3,2805}{1574,82 \cdot j^2 + 235,05 \cdot j + 3,6069} = 0,00898 \cdot e^{j \cdot 0,95^\circ}$$

$$0,042 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,042 \cdot \frac{1574,82 \cdot j^2 + 208,46 \cdot j + 3,2805}{1574,82 \cdot j^2 + 235,05 \cdot j + 3,6069} = 0,0419 \cdot e^{j \cdot 0,95^\circ}$$

$$\omega = 4 \cdot \omega_0 = 52,912 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$$

$$0,031 \cdot H(j \cdot \omega) = 0,031 \cdot \frac{2799,679 \cdot j^2 + 277,95 \cdot j + 3,2805}{2799,679 \cdot j^2 + 313,4 \cdot j + 3,6069} = 0,0309 \cdot e^{j \cdot 0,719^\circ}$$

A válasz Fourier-polinomja tehát:

$$u(t) = 0,0909 + 0,0795 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + 2,535^\circ) + 0,1248 \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + 2,535^\circ) + \\ + 0,0633 \cdot \sin(2 \cdot \omega_0 \cdot t + 1,4^\circ) + 0,00898 \cdot \cos(3 \cdot \omega_0 \cdot t + 0,95^\circ) + \\ + 0,0419 \cdot \sin(3 \cdot \omega_0 \cdot t + 0,95^\circ) + 0,0309 \cdot \sin(4 \cdot \omega_0 \cdot t + 0,719^\circ)$$

A válasz effektív értéke:

$$U_{eff, Fourier} = \sqrt{I_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2}$$

Ez csak kezdőfázisos alakra igaz, ezért ismét használnunk kell a következő azonosságot:

$$a \cdot \sin(x) + b \cdot \cos(x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sin(x + \varphi)$$

$$k = 1\text{-re:} \quad I_1 = \sqrt{0,0798^2 + 0,1248^2} = 0,148$$

$$k = 2\text{-re:} \quad I_2 = 0,0633$$

$$k = 3\text{-ra:} \quad I_3 = \sqrt{0,00898^2 + 0,0419^2} = 0,04285$$

$$k = 4\text{-re:} \quad I_4 = 0,0309$$

$$\text{Tehát: } U_{eff, Fourier} = \sqrt{0,0909^2 + \frac{0,148^2}{2} + \frac{0,0633^2}{2} + \frac{0,04285^2}{2} + \frac{0,0309^2}{2}} = 0,1504 \text{ mA}$$

## 2. feladat

### 2.1. rész

$$i(t) = \left( A_0 - A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T} \right) \cdot \left( \varepsilon(t) - \varepsilon\left(t - \frac{T}{2}\right) \right)$$

$$\mathcal{F}\{i(t)\} = \int_0^{\frac{T}{2}} i(t) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \left( A_0 - A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T} \right) \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \int_0^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt - \int_0^{\frac{T}{2}} A_0 \cdot \frac{2 \cdot t}{T} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt =$$

$$= \left[ A_0 \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} t \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt = \left[ A_0 \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \left[ t \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} dt \right] =$$

$$= \left[ A_0 \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left[ \left[ t \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot t}}{-j \cdot \omega} \right]_0^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{j \cdot \omega} \cdot \int_0^{\frac{T}{2}} e^{-j \cdot \omega \cdot t} dt \right] =$$

$$= A_0 \cdot \left( \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} - 1}{-j \cdot \omega} \right) - \frac{2 \cdot A_0}{T} \cdot \left( \frac{T}{2} \cdot \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} - 1}{-j \cdot \omega} - 0 - \frac{e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} - 1}{(j \cdot \omega)^2} \right) =$$

$$= \frac{A_0}{j \cdot \omega} \cdot \left( 1 - e^{j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} \right) + \frac{A_0}{j \cdot \omega} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} + \frac{2 \cdot A_0}{T \cdot (j \cdot \omega)^2} \cdot \left( e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{A_0}{j \cdot \omega} + \frac{2 \cdot A_0}{T \cdot (j \cdot \omega)^2} \cdot \left( e^{-j \cdot \omega \cdot \frac{T}{2}} - 1 \right)$$

$$I_0 = 0,4$$

$$T = 0,475$$

$$I(j \cdot \omega) = \frac{0,4}{j \cdot \omega} + \frac{1,68 \cdot e^{-0,2375 \cdot j \cdot \omega}}{(j \cdot \omega)^2} - \frac{1,68}{(j \cdot \omega)^2}$$

### 2.2. rész

Ábrázoláshoz egyszerűbb alak

$$I(j \cdot \omega) = \frac{0,8421 \cdot (0,475 \cdot j \cdot \omega + 2 \cdot e^{-0,2375 \cdot j \cdot \omega} - 2)}{(j \cdot \omega)^2}$$

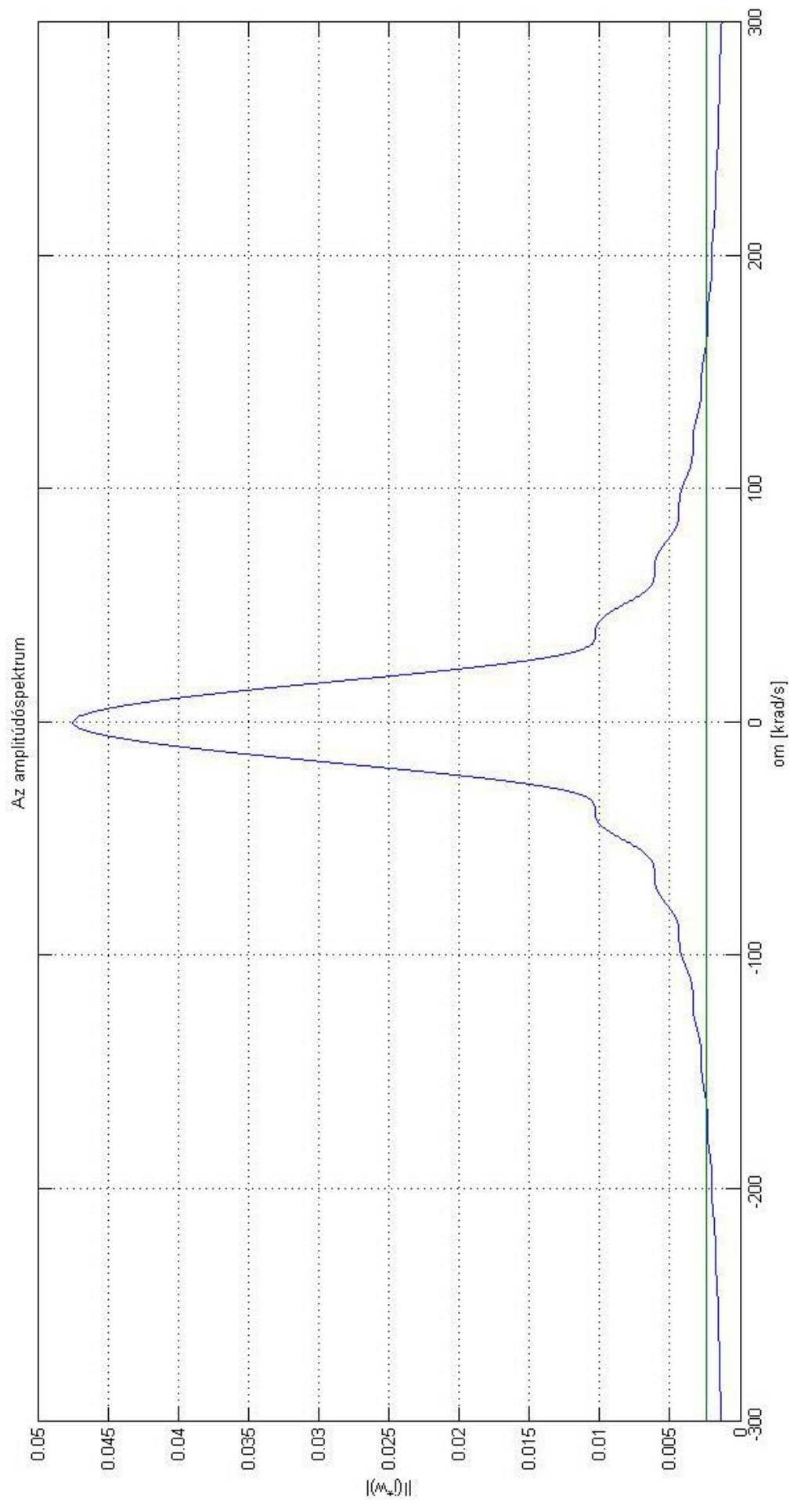
Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>>om=-198:0.01:198;
>>lom=(0.8421.*(0.475.*j.*om+2.*exp(-0.2375.*j.*om)-2))./((j.*om)).^2;
>>plot(om,abs(lom),om,0.05.*(max(abs(lom)))*ones(size(om)));
>>grid;
```

Az amplitúdóspektrum maximuma  $\omega_1 = 0 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$ -nál van, értéke 0,0475.

MATLAB segítségével megfelelő nagyítással leolvasható, hogy a jel az  $\omega_2 = 164,25 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$  érték felett kerül a maximumának 5%-a alá. Így a jel sávszélessége  $\Delta\omega_x = \omega_2 - \omega_1 = 164,25 \frac{\text{krad}}{\text{s}}$ -nak adódik.

( $\varepsilon = 0,05$ )



### 2.3. rész

A válasz komplex spektruma

$$Y(j \cdot \omega) = H(j \cdot \omega) \cdot I(j \cdot \omega)$$

$$\begin{aligned} Y(j \cdot \omega) &= \frac{(j \cdot \omega)^2 + 5,2531 \cdot j \cdot \omega + 3,2805}{(j \cdot \omega)^2 + 5,9231 \cdot j \cdot \omega + 3,6069} \cdot \left( \frac{0,4}{j \cdot \omega} + \frac{1,68 \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0,2375}}{(j \cdot \omega)^2} - \frac{1,69}{(j \cdot \omega)^2} \right) = \\ &= \frac{0,4 \cdot ((j \cdot \omega)^2 + 5,2531 \cdot j \cdot \omega + 3,2805)}{(j \cdot \omega)^3 + 5,9231 \cdot (j \cdot \omega)^2 + 3,6069 \cdot j \cdot \omega} + \frac{1,68 \cdot ((j \cdot \omega)^2 + 5,2531 \cdot j \cdot \omega + 3,2805)}{(j \cdot \omega)^4 + 5,9231 \cdot (j \cdot \omega)^3 + 3,6069 \cdot (j \cdot \omega)^2} \cdot e^{-j \cdot \omega \cdot 0,2375} - \\ &- \frac{1,68 \cdot ((j \cdot \omega)^2 + 5,2531 \cdot j \cdot \omega + 3,2805)}{(j \cdot \omega)^4 + 5,9231 \cdot (j \cdot \omega)^3 + 3,6069 \cdot (j \cdot \omega)^2} \end{aligned}$$

### 3.1. rész

Mivel a rendszer kauzális, ezért az átviteli karakterisztikából adódik az átviteli függvény  $j \cdot \omega = s$  helyettesítéssel.

$$H(s) = \frac{s^2 + 5,2531 \cdot s + 3,2805}{s^2 + 5,9231 \cdot s + 3,6069}$$

Pólusok: ahol az átviteli függvény értéke  $\infty$ , tehát a nevező 0

$$s^2 + 5,9231 \cdot s + 3,6069 = 0$$

$$p_1 = -5,234$$

$$p_2 = -0,6891$$

Zérusok: ahol az átviteli függvény értéke zérus, tehát a számláló 0

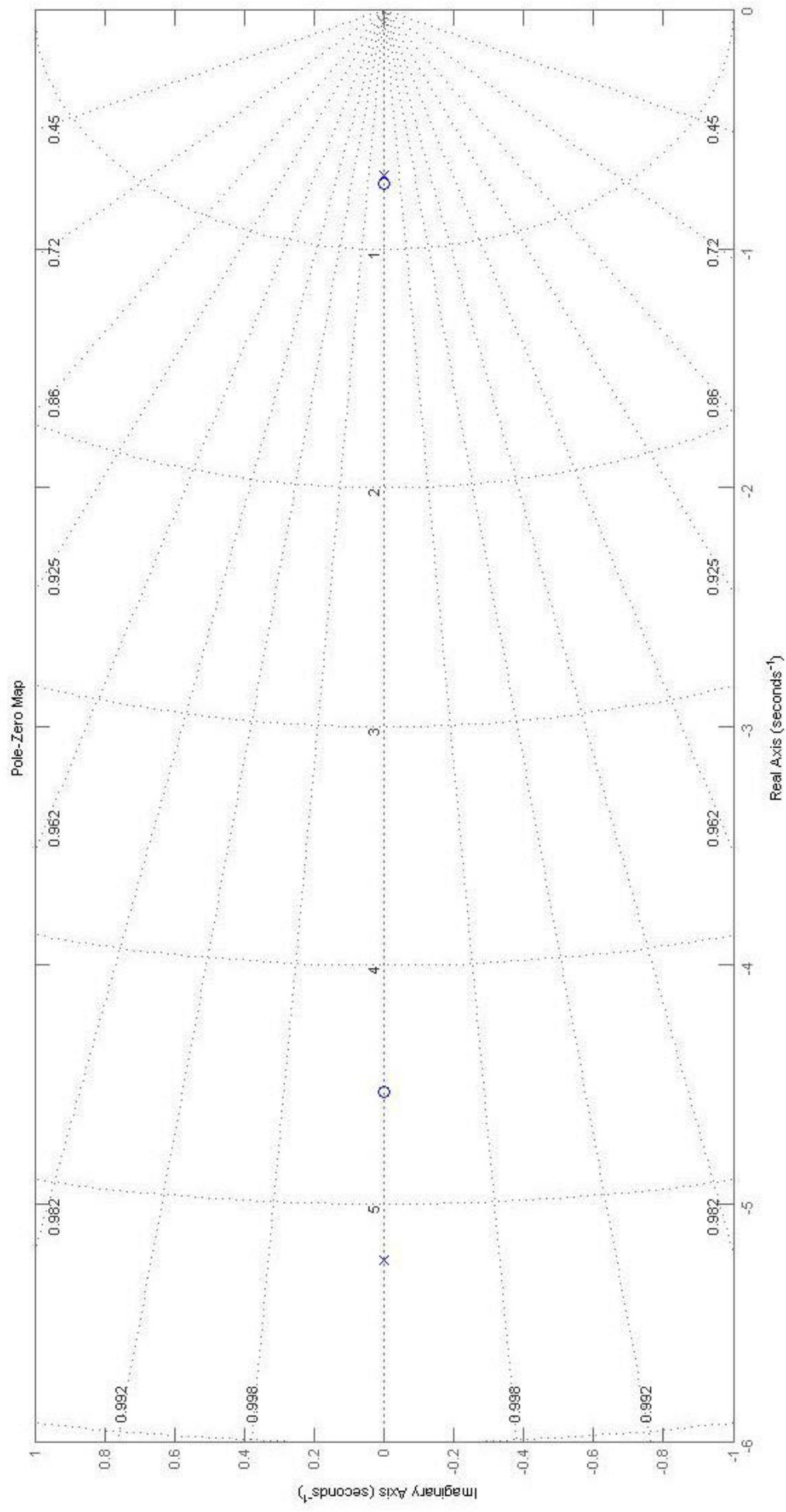
$$z_1 = -4,5287$$

$$z_2 = 0,7244$$

Ábrázolás MATLAB-bal:

```
>>pzmap(szam,nev);
```

```
>>grid;
```



### 3.2. rész

Az impulzusválaszt az átviteli függvény inverz Laplace transzformálásával kaphatjuk meg.

Parciális törtekre bontás MATLAB segítségével:

```
>>[r,p,k]=residue(szam,nev);
```

$$r_1 = \frac{-0,6998}{0,0298} \quad p = \frac{-5,234}{-0,6891} \quad k = 1$$

$$H(s) = \frac{s^2 + 5,2531 \cdot s + 3,2805}{s^2 + 5,9231 \cdot s + 3,6069} = A + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2} = 1 + \frac{-0,6988}{s + 5,234} + \frac{0,0298}{s + 0,6891}$$

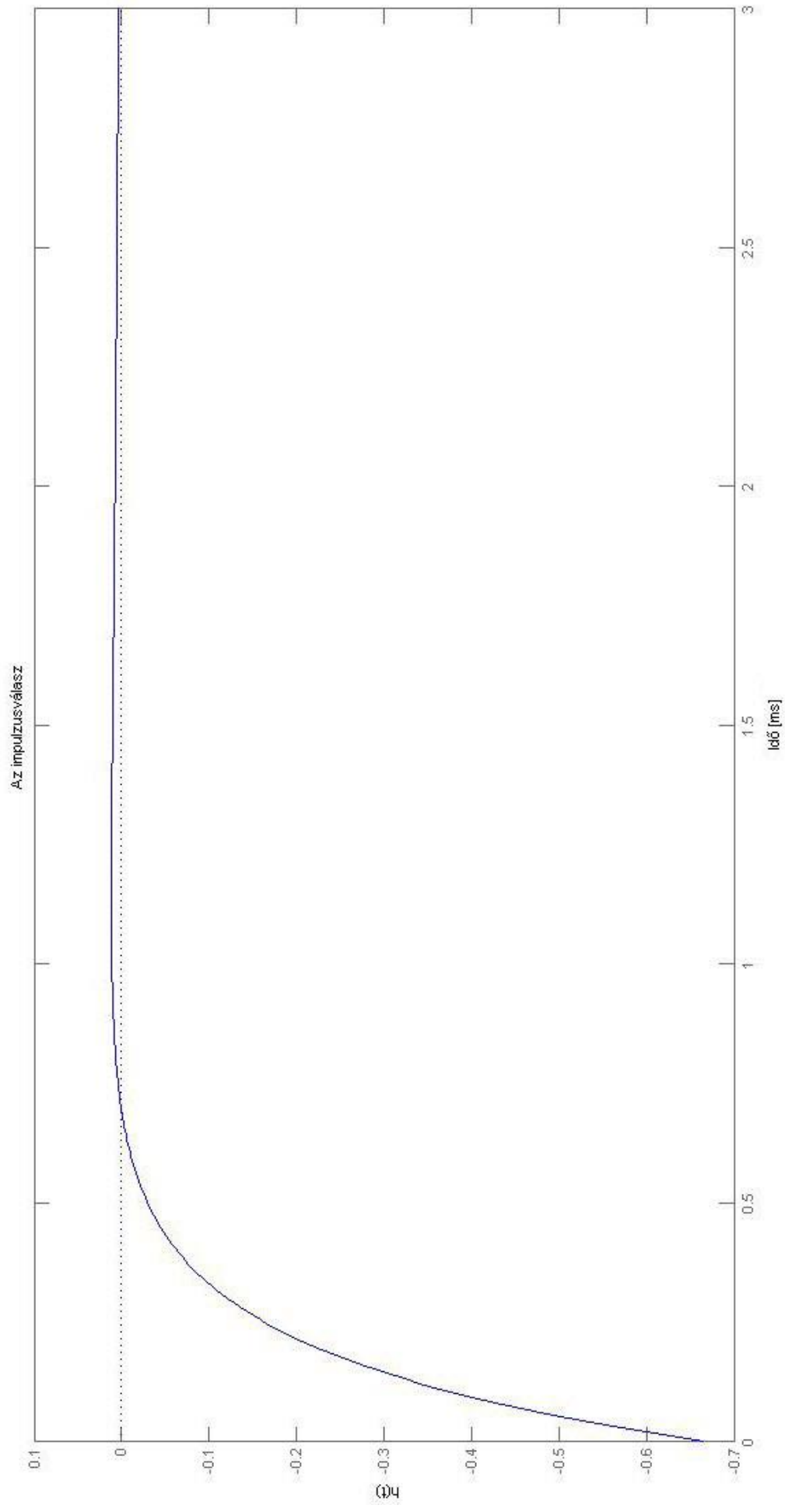
Az impulzusválasz alakja

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = k \cdot \delta(t) + (r_1 \cdot e^{p_1 \cdot t} + r_2 \cdot e^{p_2 \cdot t}) \cdot \varepsilon(t)$$

$$h(t) = 1 \cdot \delta(t) - (0,6988 \cdot e^{-5,234 \cdot t} + 0,0298 \cdot e^{-0,6891 \cdot t}) \cdot \varepsilon(t)$$

Az impulzusválasz időfüggvényének ábrázolása:

```
>>t=0:0.01:3;  
>>ht=dirac(t)-0.6988.*exp(-5.234*t)+0.0298.*exp(-0.6891.*t);  
>>plot(t,ht);  
>>grid;
```



### 3.3. rész

A rendszer válaszána meghatározása

$$Y(s) = H(s) \cdot I(s)$$

$$Y(s) = \frac{s^2 + 5,2531 \cdot s + 3,2805}{s^2 + 5,9231 \cdot s + 3,6069} \cdot \left( \frac{0,4}{s} + \frac{1,68 \cdot e^{-0,2375 \cdot s}}{s^2} - \frac{1,68}{s^2} \right) =$$
$$= \frac{0,4 \cdot s^2 + 2,1012 \cdot s + 1,312}{s^3 + 5,9231 \cdot s^2 + 3,6069} + \frac{1,684 \cdot s^2 + 8,847 \cdot s + 5,525}{s^4 + 5,9231 \cdot s^3 + 3,6069 \cdot s^2} \cdot e^{-0,2375 \cdot s} - \frac{1,684 \cdot s^2 + 8,847 \cdot s + 5,525}{s^4 + 5,9231 \cdot s^3 + 3,6069 \cdot s^2}$$

Parciális törtekre bontás külön-külön MAPLE segítségével:

```
>> A := (4 * s^2 + 2.1012 * s + 1.3122)/(s^3 + 5.9231 * s^2 + 3.6069 * s)
>> A = convert(A, parfrac, s)
```

$$-\frac{0,0173}{s+0,689} + \frac{0,0535}{s+5,234} + \frac{0,364}{s}$$

```
>> B := (-1.6842 * s^2 - 8.8473 * s - 5.525)/(s^4 + 5.9231 * s^3 + 3.6069 * s^2)
>> B = convert(B, parfrac, s)
```

$$\left( \frac{0,106}{s+0,689} - \frac{0,043}{s+5,234} + \frac{1,532}{s^2} - \frac{0,0626}{s} \right) \cdot e^{-\frac{T}{2} \cdot s}$$

```
>> C := (1.6842 * s^2 + 8.8473 * s + 5.525)/(s^4 + 5.9231 * s^3 + 3.6069 * s^2)
>> C = convert(C, parfrac, s)
```

$$-\frac{0,106}{s+0,689} + \frac{0,043}{s+5,234} - \frac{1,532}{s^2} + \frac{0,0626}{s}$$

Inverz Laplace-transzformálás külön-külön:

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (-0,0173 \cdot e^{-0,689 \cdot t} + 0,0535 \cdot e^{-5,234 \cdot t} + 0,364) \cdot \varepsilon(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (0,106 \cdot e^{-0,689 \cdot (t-0,2375)} - 0,043 \cdot e^{-5,234 \cdot (t-0,2375)} + 1,532 \cdot (t - 0,2375) - 0,0626) \cdot \varepsilon(t - 0,2375)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = (0,106 \cdot e^{-0,689 \cdot t} + 0,043 \cdot e^{-5,234 \cdot t} - 1,532 \cdot t + 0,0626) \cdot \varepsilon(t)$$

$$Y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} + \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$$
$$= (-0,0173 \cdot e^{-0,689 \cdot t} + 0,0535 \cdot e^{-5,234 \cdot t} + 0,364) \cdot \varepsilon(t) +$$
$$+ (0,106 \cdot e^{-0,689 \cdot (t-0,2375)} - 0,043 \cdot e^{-5,234 \cdot (t-0,2375)} + 1,532 \cdot (t - 0,2375) - 0,0626)$$
$$\cdot \varepsilon(t - 0,2375) +$$
$$+ (0,106 \cdot e^{-0,689 \cdot t} + 0,043 \cdot e^{-5,234 \cdot t} - 1,532 \cdot t + 0,0626) \cdot \varepsilon(t)$$

Ábrázolás MATLAB segítségével:

```
>>t=0:0.001:1;
>>yt=(-0.0173.*exp(-0.689.*t)+0.0535.*exp(-5.234.*t)+0.364).*heaviside(t)+(0.106.*exp(-0.689.*(t-0.2375))-
0.043.*exp(-5.234.*(t-0.2375))+1.532.*(t-0.2375)-0.0626).*heaviside(t-0.2375)+(-0.106.*exp(-
0.689.*t)+0.043.*exp(-5.234.*t)-1.532.*t+0.0626).*heaviside(t);
>>plot(t,yt);
>>grid;
```

