A NEWTON-FÉLE MOZGÁSTÖRVÉNYEK

„A természet rejtve őrzi törvényeit,
mondá Isten: legyen Newton, s ő mindent felderít"

Alexander Pope (Bárány György fordítása)

5.1 Bevezetés

Az előző fejezetekben a pontszerű testek mozgásának törvényeit tárgyaltuk. Megmutattuk, hogy ha egy részecske gyorsulását ismerjük, akkor a mozgás egy vonatkoztatási rendszerben leírható. Most sokkal érdekesebb kérdést vetünk fel: Miért gyorsulnak a testek?

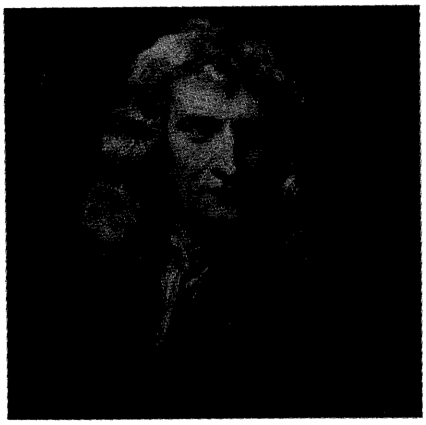
Newton erre a kérdésre azt a választ adta, hogy a testek azért gyorsulnak, mert erő hat rájuk. Ennek az állításnak matematikai formáját, Newton második törvényét e könyv olvasói már bizonyára ismerik:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{5-1}$$

ahol m a test ún. tehetetlen tömegét jelöli. Bár ez a törvény rendkívül egyszerűnek tűnik, jelentése azonban nagyon mély, ezért a következőkben ezzel hosszasabban foglalkozunk. Amellett, hogy a törvénnyel sok természeti jelenség hatékonyan értelmezhető, a térre és az időre vonatkozóan is jelentős feltevéseket tartalmaz. Igen érdekes, hogy bár Newton második törvénye 200 évig állta a kísérleti ellenőrzés próbáit, az Einstein féle speciális relativitáselmélet teljesen új tér és idő fogalma s elméleti koncepciója szerint csak egy nagyon jó közelítés.

Newton három törvénye, kiegészítve a szintén Newtontól származó gravitációs törvénnyel, az univerzum leírásának csodálatos lehetőségét nyújtotta. Newton neve, miután e törvényeket *Principia* c. művében közzétette, világszerte ismertté vált. A Newton-elmélet olyan, egymástól eltérő jelenségek magyarázatára volt alkalmas, mint a bolygók mozgása, az ár-apály, egy alma esése a Föld felé, a Föld lapult alakja, a Föld tengelyének kb. 26 000 éves periódusú, lassú precessziós mozgása, ami a napéjegyenlőség időpontjának lassú változását okozza. Az elmélet mechanisztikus és szigorú ok-okozati kapcsolatokat szab meg, s úgy tűnik, lehetővé teszi, hogy az univerzum önmagában, külső hatástól mentesen működjék. Az elmélet átütő erejű volt, hatása két évszázadon át befolyásolta a filozófiát, a politikát, a teológiát és számos más tudományterületen is döntő változásokat eredményezett.

A Principia publikálása után Newton érdeklődése az alkímia, a történelem és a bibliai próféciák értelmezése felé fordult. Úgy tűnik, hogy miután „rendet teremtett" a fizika világában, ugyanezt a célt tűzte maga elé a teológiában is. 1693-ban Newton enyhe idegösszeomlást kapott (lehetséges, hogy a kísérletei során használt higannyal mérgezte meg magát), de gyorsan felgyógyult. Elfogadta a Pénzverde Felügyelő-i megbizatást, majd a Royal



Isaac Newton, az emberi történelem egyik legnagyobb géniusza (1642-1727) 1642-ben karácsony napján, majdnem egy évvel Galilei halála után született.

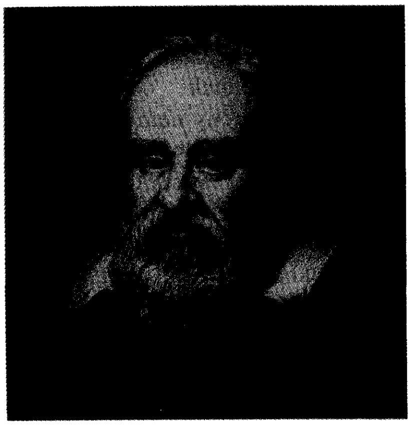
Természettudományos és matematikai tanulmányait Cambridge-ben végezte. Az egyetem bubópestis járvány miatt egy időre bezárt, s ezalatt Newton családi birtokukra, Woolsthorpe-ba utazott. Ez a környezet, a nyugalom és magány csodálatos felfedezésekre sarkallta Newtont. 24 éves korára lerakta a klasszikus mechanika alapjait, megalkotta a differenciál- és integrálszámítást, felfedezte a binomiális tételt, kidolgozta a gravitáció elméletét, és előre jutott a fény természetének mély megértésében. Amikor két évvel később újra megnyitották az egyetem kapuit, Newton a matematika professzora lett. Könyve, *„A természettudomány matematikai elvei"* – a *Principia* – 1686-ban jelent meg latin nyelven, s elvitathatatlanul minden idők egyik legnagyobb természettudományos műve. A könyv hatalmas izgalmat keltett a XVII. század világában és az emberi gondolkozás több ágára is döntő hatást gyakorolt. Pierre Laplace, francia természettudós-matematikus ezt írta róla: „A *Principia* kimagaslik az emberi szellem alkotásai közül." Newton jó egészségben szellemi erejét 80 éves kora felett is megőrizve 85 évet élt meg. Sir Isaac Newtont állami gyászszertartással temették el, s ő volt az első természettudós, akit a Westminster Abbeyben helyeztek örök nyugalomra. Newton szavai szerint: „Azért volt, hogy oly messzire láthattam, mert óriások vállára állhattam."

Society elnökévé választották, s – a természettudósok közül elsőként – lovaggá ütötték.

Élete további szakaszán Newton követőivel együtt sok időt fecsérelt el arra, hogy más tudósokkal különböző felfedezések elsőbbségének kérdésén vitatkozott. Néhány esetben a vita nagyon elmérgesedett. Robert Hooke, a fényre és a gravitációra vonatkozó gondolatainak eltulajdonításával vádolta Newtont, akit ez arra indított, hogy néhány, az optikára vonatkozó felfedezését csak negyven évvel később, Hooke halála után publikálja. Newton meg volt győződve arról, hogy Gottfried Wilhelm Leibniz, német matematikus a differenciál- és integrálszámítás közlésekor plágiumot követett el, s az ő gondolatait használta fel. Ma úgy hisszük, hogy mindezek a viták alaptalanok voltak, s a felfedezések egymástól függetlenül születtek. Newton jó egészségben, szellemi erejét megőrizve magas kort ért meg, s életének 85. évében hunyt el. Bár szerénységéről nem volt nevezetes, mégis azt írta: „Azért volt, hogy oly messze láthattam, mert óriások vállára állhattam." Másutt pedig ez áll: „Nem tudom, mit jelentek a világnak, de számomra úgy tűnik, csak olyan voltam, mint egy tengerparton játszó fiú, aki szórakozás közben hébe-hóba egy-egy simább kavicsot vagy szebb kagylóhéjat talált, mint mások; az igazság nagy óceánja azonban még felfedezetlenül terül el előttem." Sir Isaac Newtont állami gyászszertartással a Westminster Abbey-ban helyezték örök nyugalomra.

5.2 Megfigyelések és kísérletek a pontszerű részecskék mozgására vonatkozóan

Láttuk, hogy a részecskék mozgása két jelentős csoportba sorolható: a részecskék *állandó sebességgel* (gyorsulás nélkül) és *gyorsulva* mozoghatnak. Az állandó sebességű mozgás tulajdonságainak felderítésében Galilei már Newton előtt jelentős felismerésekhez jutott. Galilei lejtős vályúkban leguruló golyók mozgását vizsgálta. A lejtő hajlásszögét egyre csökkentve arra következtetett, hogy ha a súrlódást és minden egyéb külső hatást ki lehetne küszöbölni, akkor a mozgó test *örökre* megtartaná mozgásállapotát, s mindig ugyanazzal a sebességgel mozogna. Galilei kijelentése radikálisan különbö-



Galileo Galilei (1564-1642) az olaszországi Pisaban született, ugyanabban az évben, amikor Michelangelo meghalt és Shakespeare született. Galileit 25 éves korában nevezték ki a Pisai Egyetem professzorává.

Bár már ekkor elfogadta Kopernikusz felfogását; hogy a Naprendszer középpontjában a Nap áll, nyíltan egészen 50 éves koráig nem hirdette. 1609-ben jutott el hozzá az „optikai cső"-nek nevezett távcső felfedezésének híre, s saját használatra szerkesztett is néhányat. A távcsövekkel fontos felfedezéseket tett; felfedezte a Hold hegyláncait, a Napfoltokat, észrevette a Vénusznak a Holdunkéhoz hasonló fázisait, és a Jupiter négy holdját. Egymást követő éjszakákon tett megfigyeléseit gondosan ábrázolva megállapította, hogy a Jupiter és négy holdja egy kicsiny Naprendszerhez hasonlít. Galilei 1632-ben adta ki *„Párbeszédek a világ két fő rendszeréről"* (*„Dialógusok"*) című művét, amelyben összehasonlítja a geocentrikus ptolemaioszi és a heliocentrikus kopernikuszi világképet. A kopernikuszi szemlélet melletti világos kiállása miatt került az Inkvizíció ítélőszéke elé, s el is ítélték a kopernikuszi tanok terjesztésére vonatkozó tilalom megszegéséért. (Nem eretnekségért – mint azt gyakran gondolják.) A tárgyalás után évekig tartó háziőrizete alatt egyre jobban elhatalmasodó vaksága ellenére befejezte legnagyobb hatású munkáját, a *„Beszélgetések két tudományos rendszerről"* („Discorsi"). A művet kicsempészték Olaszországból és Hollandiában tették közzé. A könyv a pápa tilalmi listájára, az *„Index expurgatorius"*-ra került, s 1835-ig Kopernikusz *„De Revolutionibus"*-ával és Kepler egy művével együtt index alatt is maradt. Galilei ragaszkodni mert – s a középkorban volt bátorsága – ahhoz, hogy a tudományos elméleteknek és következtetéseknek kísérleti tényeken (és logikus érveken) kell alapulniok. Galileit – a mozgásra vonatkozó mély gondolatai, csillagászati felfedezései, s azért, ahogyan a matematikai leírást a fizikai törvényekben alkalmazta – méltán nevezhetjük a modern természettudomány atyjának.

zött az addig századokon keresztül elfogadott Arisztotelész féle mozgásszemlélettől. Arisztotelész szerint a testek természetes állapota a *nyugalom.* Ha például abbahagyjuk egy kocsi tolását, akkor az véglegesen nyugalmi állapotba kerül, vagy ha egy hegyről leguruló golyó vízszintes talajra kerül, akkor fokozatosan lassul és megáll. Mindennapi tapasztalataink arra utalnak, hogy ahhoz, hogy egy testet mozgásban tartsunk, folyamatosan erőt kell gyakorolni rá.

Galilei éleslátása, s gondos kísérletekkel alátámasztott érvelése azonban rámutatott, hogy ezek, a „józan észre" hivatkozva elfogadott magyarázatok helytelenek. Ő volt az, aki az erő helytelen értelmezését – mely szerint az erő a mozgás fenntartásához szükséges – megváltoztatta, s kimondta: az erő a testek mozgásállapotának (sebességének) *megváltoztatásához* szükséges. Így Galilei tette meg az első lépést a mozgás fogalmának pontos megértéséhez.

Newton – elfogadva Galilei szemléletét – első mozgástörvényét (mai szókincsünket alkalmazva) a következőképpen fogalmazta meg:

Newton első törvénye

Minden test mindaddig megtartja nyugalmi állapotát vagy egyenesvonalú egyenletes mozgását, amíg más test erővel nem hat rá.

Vegyük észre, hogy a törvény nem tesz különbséget nyugalom és egyenletes mozgás között. A testre ható erők eredője mindkét esetben zérus, és zérus a gyorsulás is. Nincs különbség továbbá az olyan testek között, amelyekre egyáltalán nem hat erő, s az olyanok között, amelyekre hatnak ugyan erők, de *eredőjük* zérus. A csillagközi térben mozgó proton azért tartja meg egyenesvonalú egyenletes mozgását, mert lényegében nem hat rá semmilyen erő. Ha egy kocsit úgy húzunk, hogy folyamatosan kiegyenlítjük a súrlódás mozgást akadályozó hatását, akkor a kocsi azért mozog egyenletesen, mert a kocsira ható erők eredője zérus.

Bár Newton I. törvénye tartalmazza az erő szót, a fogalom pontos definícióját nem adja meg, arra biztosít csak lehetőséget, hogy az eredő erő létezését vagy hiányát felismerhessük. A testek gyorsulását mindig valamilyen, erőnek nevezett hatás okozza. Amennyiben egy test nem gyorsul (azaz nyugalomban van vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végez), akkor a rá ható erők eredője zérus. Hétköznapi nyelven szólva a gyorsulásmentes mozgást a testek **tehetetlenségével** magyarázzuk. A tehetetlenség miatt a testek „ellenállnak" a gyorsulásnak, s így a gyakran „tehetetlenség törvényének" nevezett Newton-féle I. törvénynek megfelelően viselkednek.

Felvetődik a kérdés, hogy – minthogy az első törvény nem értelmezi – mi is az erő és hogyan keletkezik? Az élőlények meglökhetnek vagy elhúzhatnak más testeket, az élettelen tárgyak, mint pl. egy kinyújtott rugó vagy egy megfeszített kötél erőt gyakorolhatnak a hozzájuk erősített testekre, az asztallaptól kifejtett, felfelé mutató erő kiegyenlíti az asztalra tett könyvre ható lefelé mutató gravitációs erőt. Egyes esetekben azonban még az sem szükséges az erőhatás létrejöttéhez, hogy testek közvetlenül érintkezzenek. A Föld *gravitációs* ereje az üres téren át érvényesül, s tartja a Holdat Föld körüli pályáján. Pontosan ilyen hatás következtében hull a szabadon eső alma a Földre anélkül, hogy esése közben közvetlenül érintkezne a Földdel. Az ilyen típusú erőt „távolható" erőnek nevezzük. A távolható erők sokak számára logikai nehézséget okoztak a newtoni elképzelések elfogadásában. („Hogyan fejthetünk ki erőt valamire, amit nem is érintünk meg?") A távolható erők újabb típusát jelenti az elektromosan töltött testek között fellépő *elektromágneses* erő. Úgy tűnik, még két további, csupán az elemi részek mikrovilágában fellépő távolható erő is létezik az erős (*hadron*) kölcsönhatást adó magerő és a gyenge (*lepton*) kölcsönhatással járó erő. A természetben fellépő erők négy *alapvető* csoportba sorolhatók. Nagyságrendjük az egymástól azonos távolságban[1] lévő részecskék esetén a következő:

A TERMÉSZETBEN FELLÉPŐ ALAPVETŐ ERŐTÍPUSOK	RELATÍV ERŐSSÉG
Erős kölcsönhatás	**1**
Elektromágneses erők	10^{-2}
Gyenge kölcsönhatás	10^{-13}
Gravitációs erő	10^{-38}

Az erők mindig testek között hatnak, és így testek között fellépő *kölcsönhatások* eredményei.

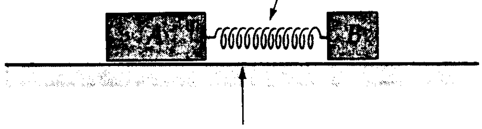
Newton I. törvénye meghatározza az inerciarendszer fogalmát is. *Inerciarendszer* az, *amelyben érvényes a tehetetlenség törvénye*. Nyilvánvaló, hogy a testek mozgásának leírása függ attól, hogy milyen koordinátarendszert használunk. Amennyiben egy test valamilyen koordinátarendszerben nyugalomban van, akkor az ehhez képest egyenletesen mozgó rendszerben egyenletesen mozog, azaz az utóbbi koordinátarendszer is inerciarendszer. Ha azonban a második koordinátarendszer gyorsul az elsőhöz képest, akkor a test (amelyre valójában nem hat erő) ebben a második koordinátarendszerben gyorsulna, ezért a második rendszer ebben az esetben nem inerciarendszer.

A Newton törvények alkalmazásának első fontos lépése egy inerciarendszer kiválasztása. *Inerciarendszerben azok a testek, amelyekre*

---

[1] Mivel az erős és gyenge kölcsönhatás hatótávolsága kb. 1 fm (1 femtométer = 10^{-15} m), szükségszerű, hogy az összehasonlítást ilyen távolságra vonatkoztassuk. A jelenlegi kutatások célja éppen ezen erőhatások természetének megértése. Érdekes új fejlemény, hogy igen nagy energiáknál úgy tűnik, hogy az elektromágneses és gyenge kölcsönhatás azonos effektust ad, így látszólag *egyetlen* alapvető kölcsönhatás kétféle megjelenési formájáról lehet szó.

Az A és B test között egy rugó létesít kölcsönhatást.



A vízszintes, súrlódásmentes sín a mozgást egy dimenziósra korlátozza és a felfelé ható erőkkel kiegyenlíti a testekre ható gravitációs erőt.

5-1 ábra
Gondolatkísérlet az *A* és *B* test kölcsönhatásának vizsgálatára.

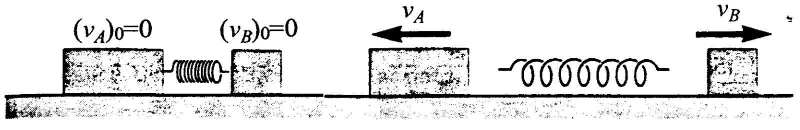
ható erők eredője zérus, nyugalomban vannak vagy egyenesvonalú egyenletes mozgást végeznek. Gyakran az „állócsillagokhoz képest nyugvó" rendszert választjuk inerciarendszerként. Számos esetben azonban a Föld tengely körüli forgása és a Nap körüli keringése ellenére a Földhöz rögzített koordinátarendszer is szolgálhat inerciarendszerként, mert a Föld forgásából és a Nap körüli keringéséből származó gyorsulások oly kicsinyek, hogy hatásuk elhanyagolható. Amennyiben egy inerciarendszert már találtunk, akkor az ehhez képest egyenletesen (gyorsulásmentesen) mozgó minden további koordinátarendszer is inerciarendszer. Egy inerciarendszerben nyugvó testet bármely más inerciarendszerből a megfigyelők állandó sebességűnek látnak. Más szavakkal, ha egy test minden inerciarendszerben gyorsulás nélkül mozog, pontosan olyan, mint az, amelyre nem hat eredő erő, s így Newton I. törvényének megfelelően mozog. Azt a tételt, amely szerint a Newton törvények minden inerciarendszerben azonosan érvényesülnek, a *relativitás elvének* nevezzük. Az elvről a Speciális relativitáselmélet c. 41. fejezetben még részletesebben szólunk.

Newton második törvénye sokkal kézenfekvőbbnek tűnik, ha először néhány, a gyorsuló mozgásra vonatkozó kísérlettel foglalkozunk. Megfigyelhetjük, hogy gyorsuló mozgás mindig legalább két test kölcsönhatásának eredményeként jön létre. Nézzünk néhány példát! Egy nyugalmi helyzetből elengedett labda a Föld és a labda közötti *gravitációs* kölcsönhatás következtében gyorsul a Föld felé. Egy kiskocsi akkor gyorsul, ha valamilyen más test húzza vagy tolja. Az autók az úttal való kölcsönhatás következtében gyorsulnak. Mindezek a példák azonban talán szükségtelenül bonyolultak a bevezető vizsgálathoz.

Az erő és a gyorsulás közötti kapcsolat vizsgálatára tekintsük a következő egyszerű kísérletet. Két test kölcsönhatását vizsgáljuk. A kísérleti eszköz vízszintes, légpárnás sínen elhelyezett kocsikból áll. A kocsikat a sínen kicsiny lyukakon kipréselt levegő által alkotott légpárna tartja (5-l ábra). A vizsgálatot az alábbi feltételek mellett végezzük:

(l) A kocsik mozgását az egyszerübb tárgyalás érdekében egydimenziós mozgásra korlátozzuk..
(2) A vízszintes sín kiegyenlíti a gravitációs erő hatását, s a légpárna biztosítja, hogy a kocsik súrlódásmentesen mozogjanak. Így a kocsira ható eredő erő zérus.

A sínen elhelyezett két kiskocsi sokféleképpen hozható kölcsönhatásba, összenyomott rugót, vagy kicsiny, robbanó kapszulát helyezhetünk közéjük, de szétlökhetjük a kocsikat a rájuk szerelt egymást taszító mágnespár segítségével is.



5-2 ábra
Kísérlet légpárnás sínen mozgó kiskocsik kölcsönhatásának vizsgálatára.

a) A kölcsönhatás előtt a kiskocsik nyugalomban vannak.

b) A kölcsönhatás után a kiskocsik állandó sebességgel távolodnak el egymástól.

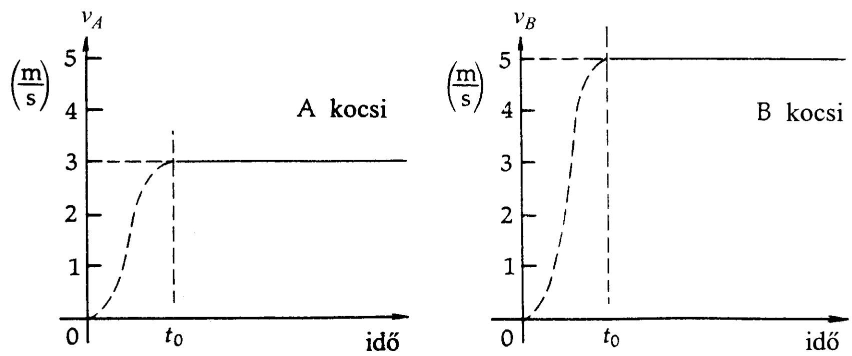
Egyetlen kocsi a sínen megtartja mozgásállapotát, azaz ha kezdetben nyugalomban volt, nyugalomban is marad, ha mozgott, akkor lényegében állandó sebességgel tovább mozog. Ez tökéletes összhangban van Newton I. törvényével: más testtel (kocsival) való kölcsönhatás híján a kiskocsi megtartja mozgásállapotát.

A következőkben foglalkozzunk azzal az esettel, amikor két kiskocsit a közéjük helyezett rugóval szétlökünk. Indítsuk a kocsikat úgy, hogy a kocsik – közöttük egy összenyomott rugóval – kezdetben nyugalomban vannak. Az 5-2/a ábra ennek az állapotnak a részletes rajza. Az 5-2/b ábrán az a helyzet látható, amikor a szétugrott rugó ellökte magától a kocsikat, s már nem érintkezik velük. A állandó, v_A, ill. v_B kocsik sebességgel mozognak. Ismételjük meg többször a kísérletet különbözőképpen összenyomott rugóval. Ha minden esetben meghatározzuk a sebességek v_A/v_B arányát, azt tapasztaljuk, hogy ez az arány a rugó feszítettségétől függetlenül minden esetben ugyanakkora. Az arány változatlan akkor is, ha a testek szétlökésére más típusú kölcsönhatást (mágneseket vagy robbanó kapszulát) alkalmazunk. Levonhatjuk tehát a következtetést, hogy a *v_A/v_B arány állandó, s független a kölcsönhatás típusától.*

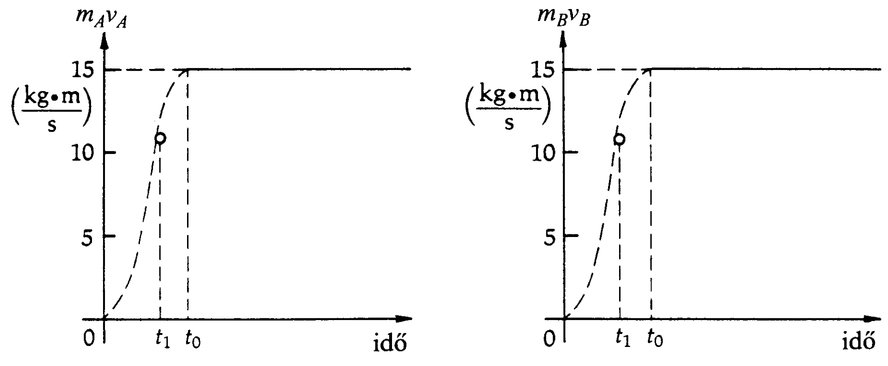
5.3 A kísérleti eredmények elemzése

Az 5-3 ábra egy kiskocsi sebességének változását mutatja a fentiekben leírt kísérlet egy konkrét megvalósítása során. Az *A* kiskocsi sebessége a kölcsönhatás során annak megszűntéig a 3 m/s értékre növekszik. Ugyanezen idő alatt a *B* kiskocsi 5 m/s sebességhez jut. A kölcsönhatás időtartama alatt a görbét azért jelezzük szaggatott vonallal, mert a gyorsítási szakaszra vonatkozóan nem rendelkezünk mérési adatokkal.

Az 5-3 ábra grafikonjai másként is értelmezhetők. Szorozzuk meg az *A* kocsi sebességértékeit $m_A = 5$-tel, a *B* kocsiét $m_B = 3$-mal! Az 5-4 ábra görbéihez jutunk. Nyilvánvaló, hogy az m_Av_A és az m_Bv_B szorzatok egyenlőek egymással (15 egység).



5-3 ábra
Az *A* és a *B* kocsi sebesség-idő grafikonja.



5-4 ábra
Az $m_A v_A$ és $m_B v_B$ érték az idő függvényében.

Még érdekesebb a két görbe alakja a $t<t_0$ időtartamra! Megmutatjuk, hogy a két görbe pontosan azonos alakú kell legyen. A gondolatmenet a következő. Tegyük fel, hogy a kísérletben alkalmazott kölcsönhatás a $t_1<t_0$ (5-4 ábra) időpillanatban megszűnik. Mivel a tapasztalat szerint a v_A/v_B arány a *kölcsönhatás jellegétől függetlenül azonos*, az $m_A v_A$ és $m_B v_B$ szorzatoknak a t_1 időpontban is egyenlőnek kell lennie. Mivel a t_1 időpontot semmi sem tüntette ki a $0<t_1<t_0$ időtartam során, a szorzatok egyenlőségének a teljes $0<t<t_0$ időtartamban teljesülnie kell, s így a két szorzatgörbe azonos kell hogy legyen. A görbék alakjának egyezéséből következik, hogy egy adott pillanatban az érintők meredeksége is ugyanakkora. Eszerint

$$\frac{d}{dt}(m_A v_A) = \frac{d}{dt}(m_B v_B) \qquad \textbf{(5-2)}$$

A gondolatmenetnek ezen a pontján bizonyos mennyiségek különösen fontosnak látszanak, s úgy tűnik, lehetőséget adnak általános definíció bevezetésére. A példában felhasznált m_A és m_B számok kiválasztása meglehetősen önkényes volt, hiszen bármely más számpár, amelyre

$$\frac{m_B}{m_A} = \frac{3}{5} \qquad \textbf{(5-3)}$$

megfelelő lett volna. Nyilvánvaló, hogy ha m_A-t 1-nek választjuk, akkor **Error! Objects cannot be created from editing field codes.**=3/5 lett volna. Valójában a légpárnás sínen végzett kísérlet alapján bármely kiskocsira egy meghatározott számot írhatunk, ha az A kocsival hozzuk kölcsönhatásba. Érdekes módon ez a szám a testeknek a gyorsulással szembeni ellenállásával kapcsolatos, hiszen minél nagyobb ez a szám, annál kisebb a test gyorsulása. Ezért ezt – a légpárnás sínen végzett kísérlet alapján meghatározott – számértéket a test tehetetlenségének mértékeként kezeljük és a test **tehetetlen tömegének** (vagy egyszerűen **tömegének**) nevezzük.

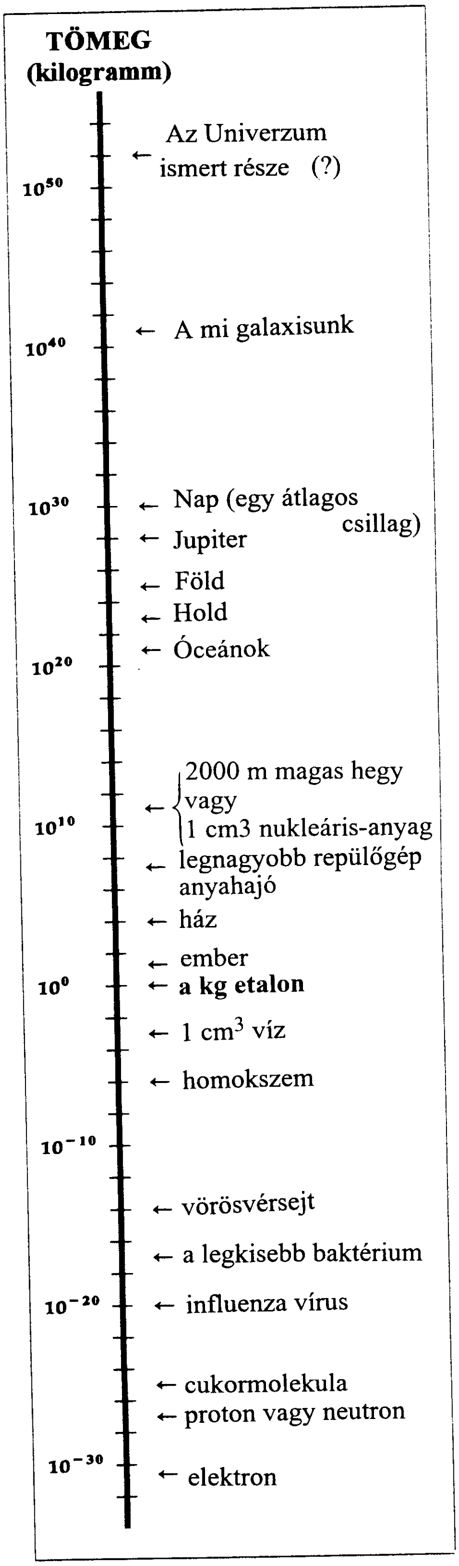
A tömegegység

A szabványosított tömegegység – a *nemzetközi kilogramm etalon*[2] – egy platina-irídium henger, amelyet a franciaországi Sèvresben őriznek. E henger tömege definíció szerint 1 kilogramm (kg). Így bármely test tömegét empírikusan meghatározhatjuk, ha kölcsönhatásba hozzuk a tömeg etalonnal.

[2] A kilogramm a *gramm* ezerszerese. 1 *gramm* a tömege 1 cm^3 normál légköri nyomású (1 atm), maximális sűrűségű (4°C-os) víznek (19-2 ábra). Sajnos vízből nem készíthető kellő pontossággal tömegetalon.

5-1 táblázat

Különböző testek tömegének és a nemzetközileg elfogadott kilogramm etalon tömegének aránya.



(A tömegmérés gyakorlatilag egyszerűbben végezhető el karos mérleggel – ezt a módszert később ismertetjük.)

Mivel a hosszúság és az idő mértékegységét nemzetközileg atomi szabványokkal rögzítették, kívánatosnak látszott a tömegegység atomi mennyiségekkel történő rögzítése is arra az esetre, ha a kilogramm etalon valamilyen szerencsétlenség során megsemmisülne. – Ez kiküszöbölné azt a veszélyt is, ami abból adódhatna, hogy pl. a kozmikus sugárzás következtében a kilogramm etalonból folyamatosan atomok léphetnek ki, ill. atomok rakódhatnak rá. Mindazonáltal a jelenleg rendelkezésre álló mérési eljárásokkal egy makroszkópikus test atomjainak száma nem határozható meg olyan pontosan, mint amilyen pontossággal a tömegek összehasonlíthatók pl. egyenlő karú mérleg segítségével. Így a mindennapos mérettartományban a tömeg mértékegység definíciója az „őskilogramm" maradt. Az 5-l táblázat különböző testek tömegének nagyságrendjét mutatja kilogramm egységben.

Az atom- és magfizikában atomi tömegegységet használunk. Bár az egyes atomok tömege a tömeg etalonnal közvetlenül nem hasonlítható össze, az atomok és molekulák tömege egymással nagyobb pontossággal hasonlítható össze, mint ahogyan a szokásos tömegmérésben lehetséges. Az atomi tömegegység definíciója a következő:

1 *egységes atomi tömegegység (u)*: a 12-es szénizotóp tömegének (mag és 6 elektron) l/l2ed része.

$$1\ \text{u} = 1{,}661 \times 10^{-27}\ \text{kg}.$$

5.4 Az impulzus

Az (5-2) egyenletben megjelenő *tömeg* × *sebesség* szorzat a mechanika egyik legfontosabb mennyisége, amely igen sokféle összefüggésben jelenik meg a tárgy tanulmányozása során. Ezt a mennyiséget **impulzusnak** nevezzük* és p-vel jelöljük. A két- vagy háromdimenziós mozgások során (pl. légpárnás asztalon ütköző, sima felületű korongok, vagy térbeli pályán haladó és ütköző atomi részecskék mozgásakor) a kísérleti tapasztalat szerint az impulzust vektorként kell kezelni, így meghatározásához nagyságát és irányát is ismernünk kell. Definíció szerint:

Impulzus $$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \qquad \textbf{(5-4)}$$

Az impulzus SI egysége a kg·m/s. Az *A* és *B* testek kölcsönhatása a testek impulzusvektorainak változásával tárgyalható. Vegyük észre, hogy a kölcsönhatás jellegétől függetlenül, ha a kölcsönható testek kezdetben nyugalomban voltak, akkor a kölcsönhatás során *ellentétes* irányú sebességhez jutnak. Így ha az (5-2) egyenletet *vektoriális* formában írjuk fel, akkor az összefüggésbe egy negatív előjelet is be kell írnunk,

$$\frac{d\mathbf{p}_A}{dt} = -\frac{d\mathbf{p}_B}{dt} \qquad \textbf{(5-5)}$$

ahol $\mathbf{p}_A = m_A\mathbf{v}_A$ és $\mathbf{p}_B = m_B\mathbf{v}_B$. A későbbiekben természetesen az impulzusról még többet kell beszélnünk.

* egyes hazai tankönyvek a lendület elnevezést is használják (a ford megj.)

5.5. Newton második törvénye

Newton a testek kölcsönhatásáról szerzett tapasztalatokat második törvényében foglalta össze. Ez a törvény az eredő erőt az *m* tömegű test impulzusának megváltozásával definiálja. Azt, hogy az impulzus megváltozását az *eredő erő* hozza létre, azzal is kiemeljük, hogy az összefüggésbe egy szumma[3] jelet is beírunk.

Newton második törvénye

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \qquad \textbf{(5-6)}$$

Az erő mértékegysége a **newton** (N). Az (5-6) egyenlet mutatja, hogy 1 N erő 1 másodperc alatt 1 kgm/s impulzusváltozást hoz létre. Érzékletes fogalmat alkothatunk az 1 N erő nagyságáról, ha tudjuk, hogy nagyjából akkor fejtünk ki ilyen erőt, ha egy kisebb almát tartunk a kezünkben.

Fejtsük ki a $\frac{d(m\mathbf{v})}{dt}$ deriváltat az $m\mathbf{v}$ szorzatfüggvényre vonatkozó szabály szerint! (G függelék, 4. szabály.) Newton II. törvényére a

$$\Sigma \mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{v} \qquad \textbf{(5-7)}$$

összefüggést kapjuk. Amennyiben a vizsgált részecske tömege nem változik $\left(\frac{dm}{dt} = 0\right)$ és mivel $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a}$, a törvény az

Newton II. törvénye

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad \text{(állandó tömeg esetén)} \qquad \textbf{(5-8)}$$

alakot ölti. A második törvény tartalma nagyon gazdag. Az erő fogalma egyezik az erőről alkotott hétköznapi elképzeléseinkkel, amit a tárgyak meglökéséből vagy megrántásából szerzett tapasztalataink adnak. Vegyük észre azonban, hogy erő önmagában nem létezik, erőt mindig egy test fejt ki a másikra.

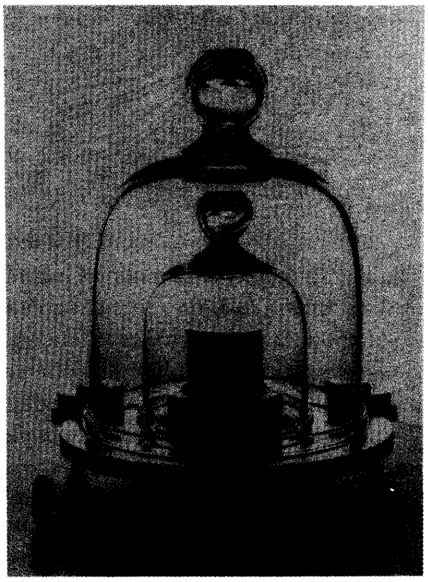
A mechanikában az erők két nagy csoportba sorolhatók: érintkezéskor és érintkezés nélkül fellépő erők. Az **érintkezéskor fellépő (közelható) erők** azok, amelyek létrejöttéhez két vagy több test fizikai közelsége, érintkezése szükséges. Ilyen erőt fejt ki a megfeszített kötél, vagy az összenyomott rugó a hozzá erősített testre. Az érintkezési (közelható) erők másik példája az egymáson csúszó testek vagy csúsztató hatásnak kitett, de nem mozgó testek között fellépő erőhatás. A súrlódási erők párhuzamosak a csúszó felületekkel. Hasonló súrlódási erők hatnak a levegőben vagy folyadékban mozgó testekre is.

A **„nem érintkezési" (távolható) erőkre** az egymástól távoli testek közötti gravitációs erő szolgálhat példaként. Bármely két részecske között az

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Newton-féle gravitációs törvénynek megfelelő erő lép fel, ahol m_1 és m_2 a részecskék tömege, r a távolságuk és G a gravitációs állandó. A gravitációs erő részletesebb leírása a 16. fejezetben található.

A természet további „nem érintkezési" (távolható) erői az elektromos és a mágneses erők, amelyekkel a későbbiek során még részletesen foglalkozunk. Valójában azonban a közelható erők (a rugóerő, a kötélerő, a súrlódási erő, stb.) is eredetük szerint az atomok közötti elektromos erőhatásokra ve-



5-5 ábra
Az USA kilogramm etalonja a Állami Szabványügyi Hivatalban. Ez az eredeti Sèvres-ben őrzött nemzetközi kilogramm etalonról készült huszadik másolat. Pontossága $1:10^8$-hoz.

[3] A görög Σ (szigma) betű a matematikában az összegzés jelzésére szolgál. Itt egy testre ható erők vektoriális összegzésére utal.

zethetők vissza, így mikroszkópikus skálán szintén távolható erőhatások. Ennek ellenére a súrlódási, a rugó, a kötél, stb. erő elnevezést továbbra is használjuk, míg a gravitációs erőt távolható („nem érintkezési") erőnek nevezzük. Fontos azonban, hogy az erőhatások vizsgálatakor minden esetben azonosítsuk, hogy a vizsgált testre melyik külső test fejt ki erőt.

Vajon az erők valódi vektorok? Newton II. törvénye szerint formálisan azok. Az azonban, hogy vektorként definiáltuk az erőt, még nem jelenti szükségszerűen, hogy valóban vektorként is viselkedik. Az erő fizikai fogalmáról csak kísérletekkel dönthetjük el, hogy teljesíti-e a vektorok összegezésére vonatkozó matematikai szabályokat. Kísérletileg kell alátámasztanunk, hogy az erők valóban *vektorként viselkednek.*

Newton szemlélete szerint a második törvény *oksági* kapcsolatot szab meg: a testek gyorsulását az eredő (teljes) erő *határozza meg.* A törvényt azonban természetesen kétféleképpen is használhatjuk. Ha ismerjük egy testre ható erők eredőjét, akkor meghatározhatjuk a test gyorsulását. Megfordítva, ha megfigyeljük, hogy egy test gyorsul, akkor arra *következtethetünk,* hogy a rá ható erők eredője nem zérus. A gyorsulás ismeretében meghatározhatjuk az eredő erő nagyságát és irányát. Leszögezzük azonban, hogy *nem a gyorsulás a testre ható erő oka*, hanem Newton szemlélete szerint éppen megfordítva, a hagyományos ok-okozati kapcsolatnak megfelelően a testre ható erők eredője hozza létre a gyorsulást.

Befejezésül nem hallgathatjuk el, hogy bár a Newton-féle törvények a baseball labdától a galaxisokig helyes leírását adják a tömeg mechanikai viselkedésének, a történetnek még nincs vége! A 41. fejezetben az Einstein féle relativitáselmélet tárgyalásakor megmutatjuk, hogy az elmélet módosításra szorul, ha 3×10^8 m/s-os fénysebesség közelébe eső sebességgel mozgó testekkel foglalkozunk. Szigorúan szólva ez azt jelenti, hogy a Newton-féle mozgástörvények csak közelítések! A megszokott sebességek tartományában azonban az eltérés elhanyagolható. Így a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény a fénysebességnél sokkal kisebb sebességgel mozgó hétköznapi méretű testek mozgásának leírására tökéletesen alkalmas. Kimutatható, hogy a relativisztikus egyenletek a sebesség csökkenésével a Newton-féle törvényre egyszerűsödnek.

5.6 Tömeg és súly

A tehetetlen tömeget a testek tehetetlenségének mértékeként definiáltuk. Elvileg egy test tömegét ismert tömegű másik testtel való kölcsönhatásából határozhatjuk meg. Gyakorlatilag azonban ez az eljárás pl. légpárnás sín segítségével nem mindig kivihető, különösen akkor nem, ha kiterjedt testekről van szó, vagy ha nagyon pontos mérés szükséges.

A gyakorlatban a testek tömege könnyebben határozható meg a rájuk ható gravitációs erő mérésével. E módszer érvényessége abból a fontos tényből következik, hogy *csak a gravitációs erő hatására mozgó minden test ugyanakkora g gyorsulással esik*[4] .

$$g \approx 9{,}81\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

[4] A gravitációs gyorsulás csekély mértékben függ a földrajzi helyzettől és a tengerszint feletti magasságtól. A 0° szélességi körön, a tenger szintjén $g = 9{,}78039$ m/s^2, a 90°-os szélességen pedig $g = 9{,}83217$ m/s^2.

Abból a tényből, hogy egy adott helyen minden test azonos gyorsulással esik, következik, hogy a testekre ható gravitációs erőnek arányosnak kell lennie az adott test tömegével. Jelöljük g-vel a szabadesés gyorsulását, W-vel pedig a gravitációs erőt. Ekkor Newton második törvényének alkalmazásával azonnal adódik, hogy

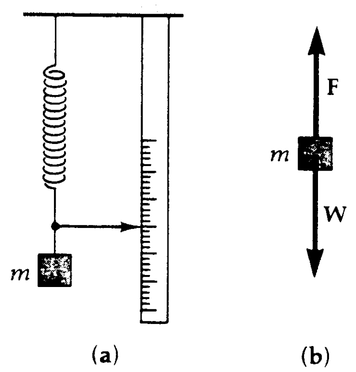
$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} \qquad (5\text{-}9)$$
$$W = mg$$

A $\mathbf{W}=m\mathbf{g}$* gravitációs erő meghatározásásra szolgáló mérést nem szükséges a szabadesés körülményei között elvégezni. A $W = mg$ összefüggés a test sebességétől vagy gyorsulásától függetlenül mindig érvényes. Bármely testre ható **W** gravitációs erő meghatározható súlyméréssel, pl. az 5-7 ábrán látható skálával ellátott rugós erőmérő felhasználásával. A rugóra akasztott testre két erő hat, a megfeszített rugó által kifejtett felfelé mutató erő és a Földtől kifejtett lefelé mutató **W** gravitációs erő. Ezen erők vektori összege zérus, ha a test nyugalomban van. Az erőmérő skálája bármely alkalmas erőegységgel kalibrálható (hitelesíthető). Mivel $|\mathbf{F}| = |\mathbf{W}|$, az erőmérő skálájáról éppen a ráakasztott testre ható gravitációs erő nagysága olvasható le. Bár a későbbiek során még finomítjuk a definíciót, egyelőre a testek **súlyát** definíciószerűen a rájuk ható **W** *gravitációs erővel tekintjük egyenlőnek.*
Egy test súlyát (newtonban mérve) úgy kaphatjuk meg, hogy kilogrammokban mért tömegét megszorozzuk g-nek az adott helyen m/s^2-ben vett értékével. Az erő, s így a súly dimenziója $[M \cdot L / T^2]$. Igen fontos megjegyeznünk, hogy a *súly és a tömeg különböző fogalmak.* A súly $\mathbf{W} = mg$ értéke a helytől függően változhat, hiszen g-nek az adott helyen mért értékétől függ. Az a személy, akinek a súlya a Földön 700 N, az csak 120 N-t nyom a Holdon. Ezzel szemben a testek tömege mindenütt ugyanakkora. Az a test, amely a Földön 2 kg tömegű, a Holdon is ugyanilyen tömeggel rendelkezik.

5-6 ábra
Galilei korában az égitestek mozgását értelmező egyik elmélet szerint az égitesteket szárnyas angyalok lökdösik a Nap körül. Ma már furfangosabbak vagyunk. Ahelyett, hogy azt mondanánk, hogy az angyaloknak *tangenciális* erőt kell gyakorolniuk az égitestekre, azt mondjuk, hogy a mozgás irányára merőleges erőt kell kifejteniük. – Az angyal szót pedig a gravitációval helyettesítjük.. (Feynman nyomán *„A fizikai törvények jellege"* Magvető Bp. 1983)

5-2 táblázat **Az SI alap és kiegészítő egységei**

	Mennyiség	Egység neve	Egység jele
Alapegységek	hosszúság	méter	m
	tömeg	kilogram	kg
	idő	mádsodperc (szekundum)	s
	elektromos áram	amper	A
	hőmérséklet	kelvin	K
	anyagmennyiség	mól	mol
	fényintenzitás	kandella	cd
Kiegészítő egységek	síkszög	radián	rad
	térszög	szteradián	sr



5-7 ábra
a) Súly mérésére skálázott rugós erőmérő. A mutató rögzített skála mentén mozog. b) Az m tömegre ható erők. Az **F** vektor a megfeszített rugó által a testre gyakorolt erő, **W** pedig a testre ható gravitációs erő.

A tömeg és a súly mértékegységei

Jelenleg a tudományos munkákban az **SI**-ként rövidített **Systeme International** mértékegységrendszert használjuk, ami a régebbi MKS (méter, kilogramm, szekundum) rendszer finomított változata. Az SI rendszert éveken át fejlesztették, és nemzetközi szabvánnyá az 1971-es Súly és Mérésügyi Konferencia tette. A rendszer az 5-2 táblázatban felsorolt hét alap és két kiegészítő

* A könyvben – különösen a bevezető fejezetekben – keveredik a gravitációs, súly és a nehézségi erő fogalma . A magyar szakirodalomban a súlyerő jelzésére megszokottabb a G. *(a ford. megj.)*

mennyiségre épül. Minden további mennyiség dimenziója és mértékegysége ezekből az alapmennyiségekből származtatható. Megjegyezzük, hogy az erő az SI rendszerben származtatott mennyiség, dimenziója a *tömeg, hosszúság és idő* alapmennyiségek kombinációjával adható meg.
Az 5-8 ábra egy test tömege és súlya közötti kapcsolatot magyarázza.

5-8 ábra
A test tömege 2 kg. Súlya: 19,6 N.

$$W = mg = (2\,\mathrm{kg})\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 19{,}6\,\mathrm{N}$$

5-1 PÉLDA

Mekkora a 3 kg tömegű test súlya ?

MEGOLDÁS

A 3 kg tömegű test súlya

$$W = mg = (3\,\mathrm{kg})\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 29{,}4\,\mathrm{N}$$

Az 1 $\frac{kgm}{s^2}$ nagyságú erőt nevezzük 1 newtonnak.

5.7 Newton második törvényének alkalmazása

A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Newton törvény segítségével meghatározható egy test gyorsulása, ha ismerjük a testre ható erőket. Első lépésként a testre ható erők eredőjét kell meghatároznunk, ami legegyszerűbben úgy tehető meg, hogy a testet gondolatban elválasztjuk környezetétől. A testet képzeletben körülvesszük egy felülettel, majd vektorábrát készítünk arról, hogy milyen erők hatnak ezen felületen *át* a *testre.* Ezt az ábrát **izolációs** vagy **szabad test diagramnak** nevezzük.* Az erők vektori összege adja a testre ható eredő erőt. Az eredő ismeretében a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenlet megoldása már matematikai kérdés.

A következő példákkal a szabad test diagram fontosságára hívjuk fel a figyelmet. *Ennek felvétele során végezzük el ugyanis a probléma fizikai elemzését.* Vegyük észre, hogy minden, a diagramon felvett erő a test körül felvett határfelületen kívül eső tárgytól ered. Az erővektorok felvételekor mindig keressük meg gondolatban, hogy az erőt melyik test fejti ki. Végül felhívjuk a figyelmet a példákban bevezetett új jelölésekre és a feladatmegoldási eljárásokra. A könyv további részében ezeket a jelöléseket és módszereket szisztematikusan alkalmazzuk.

5-2 PÉLDA

Tekintsünk egy elhanyagolható súrlódású vízszintes felületen lévő $m = 2$ kg tömegű testet, amelyet a hozzákötött zsinórral vízszintes irányban 4 N állandó erővel húzzuk (5-9 ábra). Milyen távolságra jut a test 3 s alatt, ha nyugalmi helyzetből indul?

MEGOLDÁS

A 3 s alatt megtett utat a kinematikai összefüggésekből határozhatjuk meg, ha a gyorsulást ismerjük. (Az eredő erő állandó, tehát a gyorsulás is az.) A gyorsulás Newton második törvényéből határozható meg. Mint minden dinamikai problémában, itt is először a vektorábrát raj-

* A hazai szóhasználatnak megfelelően ezt egyszerűen vektorábrának nevezzük.

zoljuk meg a $\Sigma\mathbf{F}$ eredő erő meghatározásához. Foglaljuk bele a testet gondolatban egy felületbe és rajzoljunk meg minden erőt, ami *ezen a felületen keresztül hat a testre*! Célszerű (ha ez lehetséges) az erővektorokat a támadási pontjukból kiindulva felrajzolni. A gravitációs erő esetén a támadási pont legyen a tömegközéppont, ami szimmetrikus testek esetén éppen a test geometriai középpontja. Bejelölve a külső testek által kifejtett erők vektorait, azt találjuk, hogy a testre a következő erők hatnak:

W = a lefelé mutató gravitációs erő
N = a felület által gyakorolt felfelé mutató erő
F = a vízszintes húzóerő

Az **N** jelölés a felületek által a rájuk helyezett testekre kifejtett normális irányú (felületre merőleges) erőt jelez. Bár ez az erő általában a teljes érintkező felület mentén oszlik el, most egyetlen, a felület középpontja közelében koncentrált támadáspontú erővel helyettesítjük. A következő lépésben a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletet két, egymásra merőleges összetevővel írjuk fel. Mivel a komponensekre vonatkozó egyenletek egydimenziósak, a $\Sigma F_x = ma_x$ és $\Sigma F_y = ma_y$ skalár egyenleteket írjuk fel, amelyekben az irányokat pozitív és negatív előjellel vesszük figyelembe. Minthogy előre tudjuk azt, hogy a test vízszintesen és az (5-9) ábra szerint jobb felé gyorsul, ezt az irányt választjuk az egyik koordinátatengely irányául. A koordinátarendszernek ezt a választását mutatja az (5-9c) vektorábrán a kicsiny, *x*, *y*-nal jelzett tengelykereszt.

Függőleges összetevő	Vízszintes összetevő
A felfelé mutató irányt választjuk pozitívnak	A jobb felé mutató irányt választjuk pozitívnak.
$\Sigma F_y = ma_y$	$\Sigma F_x = ma_x$

Helyettesítsük be a képletekbe a numerikus értékek betűjeleit. Az olyan esetekben, amikor az erőösszetevő negatív irányba mutat (pl. most a gravitációs erő esetén), a betűjel elé negatív előjelet teszünk ($-W$). Ez természetesen nem sérti azt a szabályt, hogy a $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ általános képletben soha nem változtatunk az előjelen. A számértékek (vagy a számértékeket reprezentáló betűjelek) behelyettesítésekor azonban a megfelelő előjeleket is figyelembe kell venni. Az összetevő egyenletekben tehát előjeles skalármennyiségeket használunk.

$$N + (-W) = m(0)$$
$$N = W$$

Ez az eredmény a feladat megoldásához nem szükséges

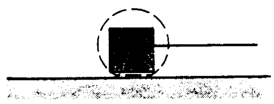
$$F = ma_x$$
$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{(4\,\mathrm{N})}{(2\,\mathrm{kg})} = 2{,}00\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Végül a kinetikai egyenletek felhasználásával kapjuk, hogy

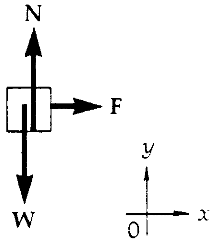
$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$
$$x = 0 + 0 + \frac{1}{2}\left(2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(3\,\mathrm{s})^2$$
$$= 9{,}00\,\mathrm{m}$$

(Az eredmény reális.)

a) Súrlódásmentes síkon F állandó erővel húzott test.



b) A szaggatott vonal az izolációs határt, azaz egy képzeletbeli felületet jelöl, amivel a testet elválasztjuk környezetétől.



c) A vektorábra. A kicsiny tengelykereszt a választott pozitív irányokat jelzi.

5-9 ábra
Az 5-2 példához

5-3 PÉLDA

A vízszintessel 30°-os szöget alkotó sima (súrlódásmentes) lejtőn 2 kg tömegű test csúszik le (5-10/a ábra). Mennyi idő alatt tesz meg 4 métert?

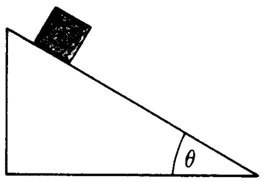
MEGOLDÁS

A gyorsulás ismeretében a 4 m-es út megtételéhez szükséges idő a kinematikai egyenletekből határozható meg. Mint mindig, most is a vektorábra felrajzolásával kezdjük (5-10/b ábra). A testre két erő hat:

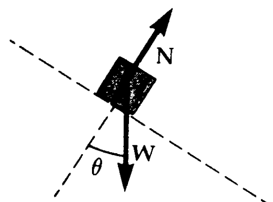
W = a lefelé mutató gravitációs erő,
N = a felület által kifejtett felfelé mutató, a felületre merőleges erő.

A $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ vektoregyenletet egymásra merőleges komponensek alakjában kívánjuk felírni. Érdemes azonban kihasználni azt a tényt, hogy a csúszó test a lejtővel párhuzamos irányban gyorsul, s a komponensekre bontáskor célszerű ezt az irányt választani az egyik koordináta irányaként. Az 5-10/c vektorábra az erőösszetevőket mutatja. A kicsiny tengelykereszt a koordinátarendszer pozitív irányának megváltozását jelöli.

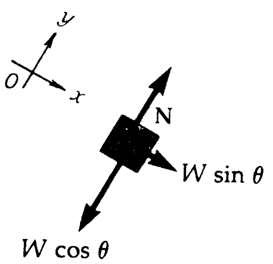
Azért rajzoltunk két vektorábrát, hogy elkerülhessük az erővektorok és komponenseik egyetlen diagramra való berajzolását. Ez ugyanis az erők megduplázásához vezethetne, hiszen az ábrán minden erő lényegében kétszer szerepelne.



a) Sima (elhanyagolható súrlódású) lejtőn lecsúszó test



b) A szabad test diagram



c) A vektorábra az egymásra merőleges összetevőkre bontott erőkkel. A kicsiny tengelykereszt a pozitív irányokat jelöli.

5-10 ábra
Az 5-3 példához

A felülettel párhuzamos összetevő

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(W \sin\theta) = ma_x$$

Elvégezve a $W = mg$ behelyettesítést, az a_x gyorsulás a következőképpen írható fel:

$$a_x = \frac{mg\sin\theta}{m} = g\sin\theta$$
$$a_x = \left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\sin 30^0) = 4{,}90\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

A négy méteres út megtételéhez szükséges idő a kinematikai egyenletekből számítható ki

$$x = x_0 + (v_x)_0 t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

t^2 kifejezése után elvégezve a gyökvonást:

A felületre merőleges összetevő

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$(N - W\cos\theta) = ma_y$$

Elvégezve a $W = mg$ behelyettesítést, az N összetevő a következőképpen fejezhető ki:

$$N = ma_y + mg\cos\theta$$
$$N = 0 + (2\text{ kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(\cos 30°)$$
$$N = 0 + (2\text{ kg})\left(9{,}8\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)(0{,}867)$$
$$N = 16{,}97\ N$$

Ez az eredmény a megoldáshoz nem szükséges. Azt mutatja azonban, hogy a felület által kifejtett normális irányú erő kisebb, mint a test súlya.

$$t^2 = \left(x - x_0 - v_{x0}t\right)\left(\frac{2}{a_x}\right)$$

$$t^2 = \left(4\,\mathrm{m} - 0 - 0\right)\left(\frac{2}{4{,}9\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}\right)$$

$$= 1{,}63\ \mathrm{s}^2$$

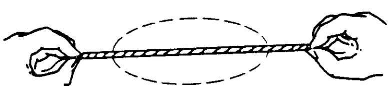
$$t = \pm 1{,}28\ \mathrm{s}$$

A negatív gyöknek nincs értelme, így a feladat megoldása

$$t = 1{,}28\ \mathrm{s}$$

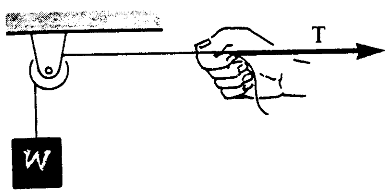
5.8 Húzó- és nyomóerő

Az erő közvetítésére gyakran kötelek és huzalok szolgálnak. Amennyiben kifejezetten nem jelöljük, a huzalok és kötelek tömege elhanyagolható, s így a rájuk ható gravitációs erőtől is eltekinthetünk. Foglalkozzunk most olyan kötéllel, amelyre két végén az 5-11 ábrán látható módon ellentétes irányú és egyenlő nagyságú erő hat. Jelöljük az erő nagyságát T-vel. Ekkor azt mondjuk, hogy a kötelet **feszítő erő** T. A T erő a kötél mentén mindenütt ugyanakkora. Mikroszkópikusan ez úgy magyarázható, hogy a kötél szomszédos atomjainak távolsága egy kissé megnő, s emiatt a szomszédos atomok között vonzóerő lép fel. Az 5-11/b ábra a kötél kicsiny darabjának vektorábráját mutatja. A $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ Newton törvényt erre a köteldarabkára alkalmazva a $T_1 - T_2 = ma$ egyenlethez jutunk, ahol T_1 és T_2 a kötéldarab két végén ható feszítőerő, m pedig a kötéldarab tömege. Feltételezzük, hogy a kötél



a) A két végén húzott fonal minden pontjában T húzóerő ébred.

b) Vektorábra a fonalnak az izolációs határon belül fekvő részére.

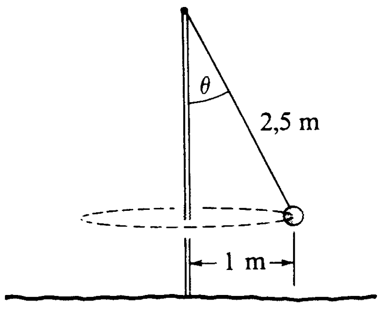


c) A csigán átvetett fonal átviszi a T húzóerőt a testre.

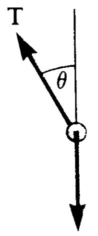
d) A fonalon függő test vektorábrája.

e) **F** nyomóerő hatása alatt álló merev rúd.

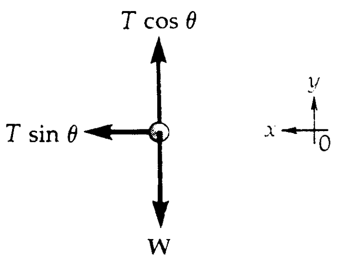
5-11 ábra
Különböző testekre ható húzó- és nyomóerők.



a)



b) A vektorábra.



c) Vektorábra az egymásra merőleges összetevőkre bontott erőkkel. A kicsiny tengelykereszt a választott pozitív irányokat jelzi.

5-12 ábra
Az 5-4 példához.

könnyű[6], azaz tömege elhanyagolható. Így $T_1 = T_2$, függetlenül attól, hogy mekkora a kötél gyorsulása. Teljesen mindegy tehát, hogy gondolatban hol választjuk ki a kötél egy kicsiny darabkáját, s határoljuk körül egy felülettel. A kiválasztott kötélrész mindkét végén ugyanakkora T feszítőerő hat. A feszítőerő nagysága akkor sem változik, ha a kötelet csigára helyezzük. Az erő iránya azonban természetesen más lesz. A merev pálcák vagy rudak a **húzóerő** mellett **nyomóerő** átvitelére is alkalmasak. Nyomóerők akkor lépnek fel, ha a rúd két végére az 5-11/c ábrán látható ellentétes irányú és a rúd megrövidítését célzó erőket fejtünk ki. (A merev testekben a húzó- és nyomóerők mellett nyíróerők (lásd 13.11 fejezet) is felléphetnek.)

5-4 PÉLDA

Egy 2,5 m-es kötél végére kötött 2 kg tömegű golyó állandó sebességgel vízszintes síkú, 1 m sugarú körpályán mozog. a) Mekkora erő feszíti a kötelet? b) Mennyi idő alatt tesz meg a golyó egy teljes kört?

MEGOLDÁS

a) Az első lépés ismét a vektorábra felrajzolása. Az egyszerűség kedvéért abban a pillanatban rajzoltuk meg a golyó helyzetét, amikor éppen a papír síkjában jobb oldali helyzetben van. A távolságadatok felhasználásával a kötélnek a függőlegessel bezárt θ szöge $\theta = \text{arc sin}\ \frac{2}{5} = 23{,}6°$. A golyóra csak az 5-12/b ábrán berajzolt két erő hat.

W = a lefelé mutató gravitációs erő
T = a függőlegessel 23,6°-os szöget bezáró kötél húzóereje

Ha az, hogy nem rajzoltunk fel kifelé mutató erőt, érthetetlennek tűnik, megpróbálkozhatunk azzal, hogy olyan testet keresünk, ami a golyót kifelé húzza. Ilyen test azonban nincsen! Minthogy azonban minden erő esetén meg kell találnunk azt a testet, amely az erőt kifejti, ebben a feladatban kifelé mutató erő nem létezhet. *A körmozgással kapcsolatos feladatok megoldásában az egyik legtipikusabb hiba ilyen nem létező, kifelé mutató erő felvétele!*

Következő lépésként vegyünk fel egy derékszögű koordinátarendszert és bontsuk az erőket összetevőkre! Gondolkozzunk előre, *s vegyük figyelembe, hogy a golyó gyorsulása a kör középpontja felé mutat* (egyenletes körmozgásról van szó)! Ezért válasszuk ezt az irányt az egyik koordinátatengely pozitív irányának. Ezt főképpen az indokolja, hogy ekkor a gyorsulás másik összetevője zérus, s az eltűnő mennyiségek nagyban könnyítik a feladatmegoldást.

Vízszintes összetevő	**Függőleges összetevő**
$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_y = ma_y$
$T \sin\theta = ma_x$	$T \cos\theta - W = 0$

[6] A fizikai feladatokban használunk néhány „kulcsszót". A „könnyű" azt jelenti, hogy elhanyagolható tömegű. A „sima" *abszolút* simát, azaz súrlódámenteset jelent.

Ebből a_x

$$a_x = \frac{T\sin\theta}{m}.$$

Beírva ide a függőleges összetevők vizsgálatából adódó T értéket (jobb oldali oszlop), azt kapjuk, hogy

$$a_x = \frac{(23{,}83\ \mathrm{N})(\sin 23{,}6°)}{2\ \mathrm{kg}} =$$

$$= 4{,}77\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}.$$

T kifejezése után

$$T = \frac{W}{\cos\theta} = \frac{20\ \mathrm{N}}{\cos 23{,}6°}$$

$T = 21{,}83$ N adódik.

b) A kör középpontja felé irányuló a_x centripetális gyorsulást a golyó pálya menti v sebességével és az r pályasugárral is kifejezhetjük: $a_x = v^2/r$. Az egyenletet átrendezve v^2 kifejezhető:

$$v^2 = a_x r = \left(4{,}77\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)(1\ \mathrm{m}) = 4{,}77\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2};$$

ahonnan

$$v = 2{,}18\ \mathrm{m/s}.$$

Az egy kör megtételéhez szükséges idő pedig:

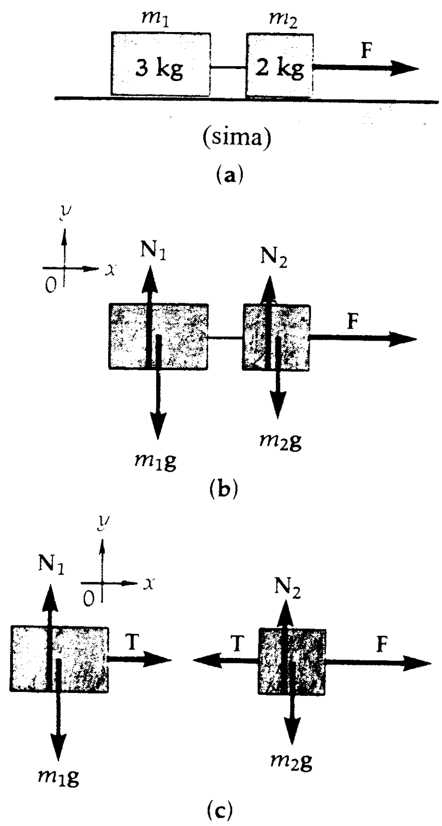
$$\text{idő} = \frac{\text{út}}{\text{sebesség}} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(1\ \mathrm{m})}{2{,}18\ \mathrm{m/s}} = 2{,}88\ \mathrm{s}$$

Newton második törvényének alkalmazási szabályai:

1. A vizsgált testet gondolatban elhatároljuk környezetétől. Vektorábrát készítünk, amelyen valamennyi olyan erőt feltüntetünk, amely az izolációs határon kívül hat a testre.
2. Koordinátarendszert választunk! Ha ismerjük a test gyorsulásának irányát, akkor olyan koordinátarendszert választunk, amelyben az egyik tengely a gyorsulás irányába mutat. (Így a gyorsulás másik összetevője zérus lesz, ami egyszerűsíti a feladat megoldását.) Kicsiny tengelykereszttel jelezzük a választott koordinátarendszer tengelyeinek pozitív irányát.
3. Az erőket komponensekre bontjuk. Új ábrát készítünk, amelyen az erőknek a választott koordinátarendszerbeli összetevőit tüntetjük fel.
4. Megoldjuk az $\Sigma F_x = ma_x$ és $\Sigma F_y = ma_y$ egyenleteket a keresett ismeretlenekre.
5. Ellenőrizzük, hogy az eredmény reális-e!

5-5 PÉLDA

Az 5-13/a ábrán látható sima, vízszintes talajon fekvő testeket könnyű fonallal kötöttük össze. a) Mekkora vízszintes irányú F erő szükséges ahhoz, hogy a testek 2 m/s² gyorsulással mozogjanak? b) Határozzuk meg, hogy ennek során mekkora T erő feszíti a fonalat!



5-13 ábra
Az 5-5 példához

MEGOLDÁS

a) Mivel a testek azonos gyorsulással mozognak, gondolatban olyan egyetlen 5 kg-os testként kezelhetjük őket, amelyet közös izolációs határ vesz körül (5-13/b ábra). (A környezettől a két testet egyetlen felülettel választjuk el. Vegyük észre, hogy ekkor a fonalerő nem jelenhet meg az egyenletekben, hiszen a fonal a rendszert kijelölő képzeletbeli felületen belül van, s a vektorábrán csak azokat az erőket kell feltüntetni, amelyek *átmennek* a rendszert burkoló felületen.) Alkalmazzuk Newton második törvényét:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F = (3\,\text{kg} + 2\,\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 10\,\text{N}$$

b) A kötelet feszítő erő meghatározásához más rendszert kell választanunk. Olyan részrendszereket kell vizsgálnunk, amelyeket burkoló izolációs határon a kötélerő átmegy. Így az 5-13/c ábrának megfelelően vegyük fel a vektorábrát a két testre külön-külön. A 3 kg-os testre vonatkozó mozgásegyenlet egyszerűbb, ezért írjuk fel ezt az egyenletet:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$T = (3\,\text{kg})\left(2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) = 6{,}00\,\text{N}$$

5-6 PÉLDA

Két, M ill. m tömegű testet az 5-14 ábrán látható módon könnyű fonallal kötöttünk össze. Az alátámasztási felületen a súrlódás elhanyagolható. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, és b) a fonalat feszítő erőt!

MEGOLDÁS

Bár a testek különböző irányban gyorsulnak, az összekötő fonal biztosítja, hogy a gyorsulások nagysága azonos legyen. A vektorábrát mindkét testre felrajzoljuk. Az 5-14/b ábra ezt a két diagramot mutatja. A két test esetén a gyorsulások eltérő irányának megfelelően másmás koordinátarendszert választottunk. A két testre a kötél ugyanakkora T erővel hat. Írjuk fel a mozgásegyenleteket, azaz helyettesítsük be a Newton második törvénybe a konkrét erőket!

M test	**m test**
$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_y = ma_y$
$\underline{\underline{T = Ma}}$	$\underline{\underline{mg - T = ma}}$

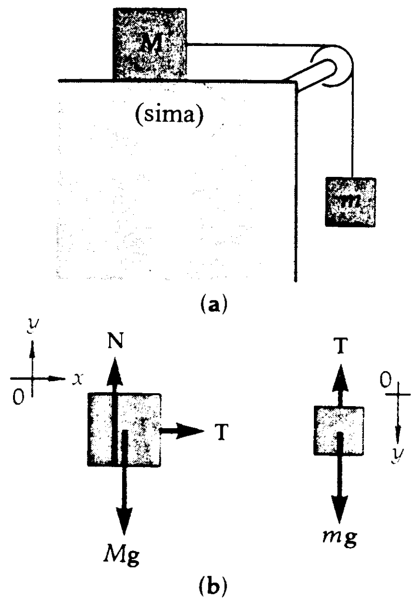
Két egyenletet kaptunk két ismeretlennel (T és a). Összeadva az egyenleteket, T kiesik, és a meghatározható

$$T + mg - T = Ma + ma$$

$$a = \left(\frac{m}{m+M}\right)g$$

A kapott eredményt a bal oldali egyenletbe visszahelyettesítve T feszítőerő a következőképpen írható fel:

$$T = \left(\frac{Mm}{M+m}\right)g$$



5-14 ábra
Az 5-6 példához

5-7 PÉLDA

Az Atwood gép. Az 5-15 ábrának megfelelően csigán átvetett könnyű fonal két végére különböző $M > m$ tömegeket akasztottunk. A csiga tengelysúrlódása elhanyagolható és mozgás közben a fonal nem csúszik meg a csigán. Az eszköz segítségével, ha mérjük a fonalra akasztott testek gyorsulását, meghatározható a nehézségi gyorsulás. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, és b) a fonalat feszítő erőt!

MEGOLDÁS

a) A testek különböző irányú gyorsulással mozognak, ezért két vektorábrát rajzolunk. Az 5-15/b ábrán a koordinátarendszer tengelyei is a feltételezett gyorsulásnak megfelelően ellentétes irányba mutatnak. Írjuk fel a mozgásegyenleteket:

M test	**m test**
$\Sigma F_y = ma_y$	$\Sigma F_y = ma_y$
$Mg - T = Ma$	$T - mg = ma$

Két egyenletet kaptunk két ismeretlennel. Összeadva az egyenleteket T kiesik és a meghatározható:

$$Mg - T + T - mg = Ma + ma$$

$$(M - m)g = (M + m)a$$

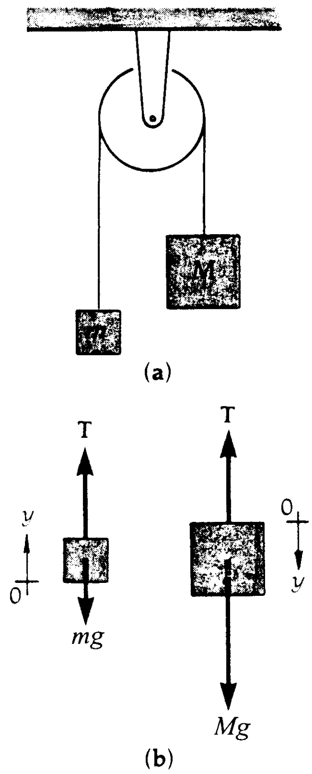
$$a = \left(\frac{M - m}{M + m}\right)g$$

b) Behelyettesítve a értékét, pl. a jobb oldali egyenletbe, T erő a következőképpen írható fel:

$$T - mg = m\left(\frac{M - m}{M + m}\right)g$$

$$T = mg\left(\frac{M - m}{M + m} + 1\right) = \frac{2mMg}{M + m}$$

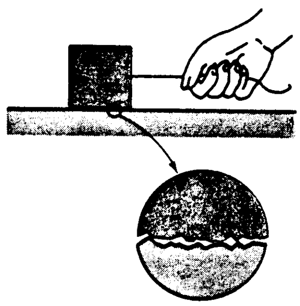
Az eredmény ellenőrzéseként vizsgáljuk meg az $M = m$ esetet! A testek ekkor egyensúlyban vannak, tehát az a gyorsulás zérus kell legyen és $T = Mg = mg$. Az $M = m$ behelyettesítéssel a képletek igazolják ezt a várakozásunkat.



5-15 ábra
Az 5-7 példához. Az Atwood-gép.

5.9 Súrlódás

Ha két test csúszik egymáson, akkor kölcsönösen súrlódási erőt fejtenek ki egymásra. Ez az erő mindig az érintkező felületek közös *érintősíkjába* esik és iránya ellentétes az adott test másik testhez viszonyított relatív sebességének irányával. A súrlódási erőt **f**-fel jelöljük. Vegyük észre, hogy **f** és **N** – a felület által a testre ható *egyetlen* eredő erő tangenciális (érintő menti) és normális (felületre merőleges) komponense. Amint azt az alábbiakban részletesen megindokoljuk, célszerű e két összetevőt a köztük fennálló tapasztalati összefüggés miatt külön vizsgálni.



5-16 ábra
A súrlódás.

A súrlódás bonyolult jelenség és mechanizmusa még nem pontosan ismert[7]. A jelenség pontos mikroszkópikus vizsgálatakor figyelembe kell venni, hogy még a teljesen simára polírozott felületeken is gödröcskék és kiemelkedések vannak, s a csúszás során ezek összeakadnak, ütköznek egymással (5-16 ábra). A súrlódás döntő mértékben azonban nem az érdes felületek összeakadásából, hanem a felületek molekulái között ébredő vonzóerőkből származik. A felületek oxid szennyezései, a polírozás mértéke vagy idegen anyagokból képződő vékony rétegek és sok egyéb változás is erősen befolyásolhatja a súrlódás mértékét. Két fém súrlódása esetén az érintkezési pontok magas hőmérsékletre hevülhetnek és elképzelhető, hogy időszakosan összehegednek. A súrlódási erő ezeknek a hegesztéseknek a feltöréséhez szükséges. Két erősebben különböző anyag esetén a helyzet még bonyolultabb. Mindig igaz azonban, hogy akár elcsúsznak a felületek egymáson, akár nem, súrlódási erő lép fel, ha két testet el akarunk csúsztatni egymáson.

A súrlódásra, egyes, nem pontosan megértett részletei ellenére, a kísérleti tapasztalat szerint érvényesek a következők:

(1) A csúszó súrlódási erő jó közelítéssel *arányos* a csúszó testek között fellépő *normális irányú erővel.*
(2) A csúszó súrlódási erő jó közelítéssel független a testek érintkezési felületének nagyságától.
(3) A csúszó súrlódási erő a centiméter per szekundumos sebességektől a néhány méter per szekundumos sebességig terjedő tartományban *a sebességtől függetlenül közel állandó*[8].

Ebben a könyvben a továbbiakban a „közelítő" jelzőktől eltekintünk, s a fenti kísérleti tapasztalatokat pontos érvényűnek vesszük. Így feltételezzük, hogy a csúszó testekre ható súrlódási erő *független az érintkező felületek nagyságától, a testek sebességétől és arányos a felületek között ható N merőleges nyomóerővel.* Az **f** és **N** közötti arányossági tényező azonban függ a csúszó testek anyagi minőségétől. Hasonló törvények érvényesek az egymáson megtapadó testek esetén is. Ekkor azonban csak a tapadási súrlódási erő maximumára vonatkozóan érvényes a súrlódási erő és a nyomóerő közötti arányosság és az arányossági tényező természetesen eltér a csúszó súrlódási erőt megszabó arányossági tényezőtől. A súrlódási erő két típusára vonatkozóan fennáll[9]:

Csúszó súrlódás
(az érintkező felületek elcsúsznak egymáson)
$$f_k = \mu_k N \tag{5-10}$$

Tapadási vagy
nyugalmi súrlódás
(az érintkező felületek nem csúsznak el egymáson)
$$f_t \le \mu_t N \tag{5-11}$$

---

[7] Lásd pl. E.Rabinowitz „Ragad és csúszik", *Scientific American*, May 1956. p. 109-18

[8] Itt csak két szilárd test érintkező felületén fellépő súrlódási erővel foglalkozunk. Viszkózus folyadékban mozgó testre, lassú mozgásnál a sebességgel arányos $f = bv$ közegellenállási erő hat. Nagyobb sebesség mellett ez az erő v^n-nel arányos, ahol n 1 és 2 között változhat.

[9] Néhány megjegyzést kell fűznünk a *gördülő súrlódáshoz.* Gördülő súrlódás akkor lép fel, ha egy kerék mozog egy síkon. Mechanizmusa teljesen más, mint a csúszó súrlódásé, s lényegében annak a következménye, hogy tökéletesen merev anyagok nincsenek, s minden test deformálódik, ha egy másik test préselődik hozzá. A gördülő súrlódásról általánosan elfogadott, hogy annak az energiaveszteségnek a következménye, ami azért lép fel, mert a rugalmasan deformált testek a deformáló hatás megszüntével nem azonnal nyerik vissza eredeti alakjukat. A gördülő és csúszó súrlódás közötti különbséget jól érzékelteti, hogy a csúszó súrlódási együttható acélon csúszó acél esetén 0,2, míg az acélon gördülő acélgolyó esetén a megfelelő együttható 0,002 vagy kevesebb. Emiatt a gördülő súrlódást többnyire elhanyagoljuk.

Az f és N közötti μ arányossági tényezők az anyagi minőségtől függő állandók. Az arányossági tényezőket **súrlódási együtthatónak** nevezzük.

Tegyük fel, hogy egy vízszintes talajon fekvő testet vízszintes irányú erővel próbálunk elmozdítani, de a súrlódás megakadályozza az elcsúszást. Ekkor beszélünk *tapadási súrlódásról.* A tapadási súrlódási erő egy bizonyos határig éppen akkora, mint amekkora erő az egyensúly fenntartásához szükséges. A húzóerőt növelve a tapadási súrlódási erő is nő, míg el nem éri maximális értékét! (Ezt az értéket kapjuk, ha az (5-11) egyenletben az egyenlőségjelet vesszük figyelembe. Amikor végül a test „elszabadul" és csúszni kezd, akkor csúszó súrlódás lép fel. A csúszó súrlódási erő általában kisebb, mint a tapadási, azaz $\mu_k < \mu_t$.

Figyeljük meg! A csúszó súrlódási erő mindig a csúszó felületek *relatív sebességének irányával ellentétes.* A tapadási súrlódási erő szintén a felületekkel párhuzamos, irányát azonban az szabja meg, hogy milyen erő szükséges az egyensúly fenntartásához. A feladatok megoldásakor a vektorábrán a súrlódási erők irányát jól kell megválasztanunk ahhoz, hogy helyes eredményt kaphassunk.

5- 8 PÉLDA

Vízszintes talajon 80 N súlyú test fekszik. A test nyugalomból való elmozdításához 30 N erő szükséges, míg az egyenletes csúszás fenntartásához 20 N is elegendő. Határozzuk meg a tapadási és a csúszási súrlódási együtthatót!

MEGOLDÁS

Mint mindig, most is a vektorábra megrajzolásával kezdjük (5-17 ábra). A diagram a csúszó és a tapadási súrlódás esetének tárgyalására egyaránt alkalmas.

$$f = f_t = \mu_t N \quad \text{(nyugalmi (tapadási) súrlódás, maximális erő)}$$

és

$$f = f_K = \mu_K N \quad \text{(csúszó súrlódás)}$$

Megjegyezzük, hogy a tapadási súrlódási erő zérustól 30 N-ig tetszőleges nagyságú lehet, ha azonban a test csúszik, akkor a csúszó súrlódási erő értéke mindig 20 N.

Függőleges erő összetevők

$$\Sigma F_y = ma_y$$
$$(N - W) = 0$$
$$N = W$$
$$N = 80\,\text{N}$$

Ezt az N értéket kell a jobb oldali egyenletbe helyettesíteni.

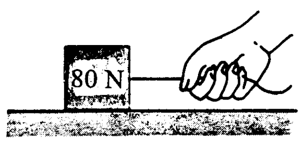
Vízszintes erő összetevők

nyugalmi (tapadási) súrlódás
(maximális súrlódási erő)

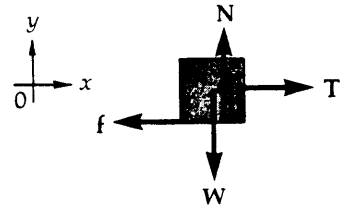
$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(T - \mu_t N) = 0$$
$$\mu_t N = T$$
$$\mu_t = \frac{T}{N} = \frac{30\,\text{N}}{80\,\text{N}} = 0{,}375$$

csúszó súrlódás
(állandó sebességű mozgás)

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$(T - \mu_K N) = 0$$
$$\mu_K = \frac{T}{N} = \frac{20\,\text{N}}{80\,\text{N}} = 0{,}25$$



(a)



b) A vektorábra.

5-17 ábra
Az 5-8 példához.

5-9 PÉLDA

Egy gyerek a vízszintes talajon fekvő 4 kg tömegű dobozt a vízszintessel 35°-os szöget bezáró kötél segítségével 20 N erővel húzza (5-18 ábra). A csúszási súrlódási együttható értéke 0,20. Mekkora a doboz gyorsulása?

MEGOLDÁS

A szokásos módon készítsük el a vektorábrákat és bontsunk fel minden erőt egymásra merőleges összetevőkre! Mivel a test vízszintes irányban gyorsul, válasszuk ezt az egyik koordinátatengely irányaként.

Függőleges összetevő

$$\Sigma F_y = ma_y$$

Függőleges gyorsulás nincs, így

$$N + T\sin\theta - W = 0$$

$$N = ma_y - T\sin\theta + W$$

$$= m(0) - (20\,\mathrm{N})(0{,}574) +$$

$$+ (4\,\mathrm{kg})\left(9{,}8\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right)$$

$$N = 27{,}7\,\mathrm{N}$$

Ezt az értéket helyettesítsük be a vízszintes összetevőre adódó összefüggésbe. Vegyük észre, hogy a N kényszererő nem egyenlő a doboz súlyával!

Vízszintes összetevő

$$\Sigma F_x = ma_x$$

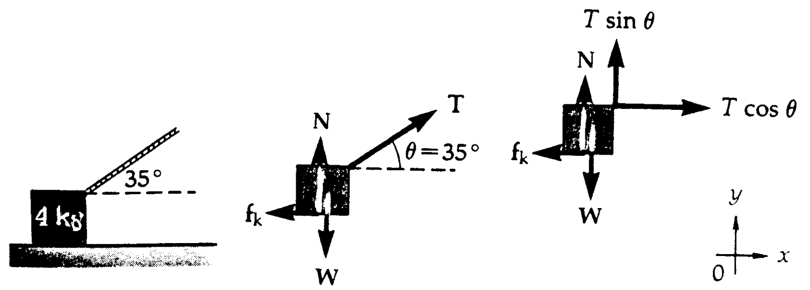
$$T\cos\theta - f_k = ma_x$$

$$T\cos\theta - \mu_k N = ma_x$$

$$a_x = \frac{\left(T\cos\theta - \mu_k N\right)}{m}$$

$$= \frac{(20\,\mathrm{N})(0{,}819) - (0{,}20)(27{,}7\,\mathrm{N})}{4\,\mathrm{kg}}$$

$$a_x = 2{,}71\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$



a) b) A vektorábra c) Vektorábra a függőleges és vízszintes erő-komponensekkel. A kicsiny tengelykereszt a pozitív irányokat jelzi.

5-18 ábra
Az 5-9 példához

5-10 PÉLDA

Érdes, vízszintes síkon fekvő, M tömegű testet az 5-19 ábrán látható módon csigán átvetett, könnyű fonalra akasztott, m tömegű testtel mozgatunk. A csiga tömege és tengelysúrlódása elhanyagolható.

A felület és az M tömegű test között a csúszó súrlódási együttható μ_k. Írjuk fel a mozgásegyenleteket az egyes testekre és határozzuk meg a kötélerőt!

MEGOLDÁS

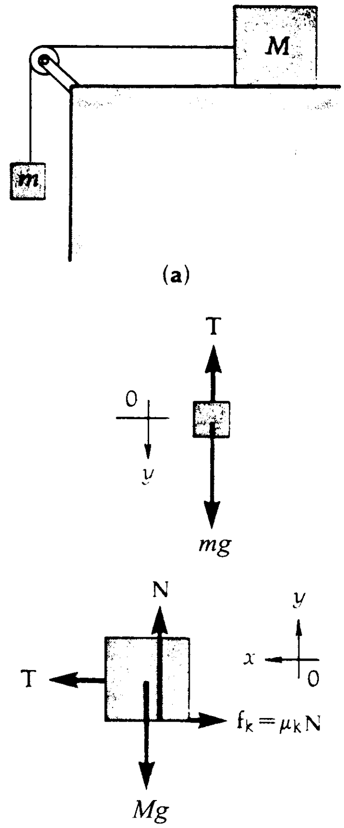
Mivel a két test különböző irányban mozog, az egyes testekre külön-külön felrajzoljuk a vektorábrát, s a koordinátatengelyek pozitív irányát a megfelelő gyorsulás irányában vesszük fel. Mivel a kötél nyújthatatlan, a gyorsulások abszolút értéke egyenlő, mivel a kötél „könnyű", azaz tömege elhanyagolható, a kötélben ébredő feszítőerő mindkét testre ugyanakkora. Newton második törvényét felhasználva a mozgásegyenletek a következők.

Az M tömegű testre

$$F_y = ma_y$$
$$N - Mg = 0$$
$$\underline{\underline{N = Mg}}$$
$$F_x = ma_x$$
$$T - \mu_k N = Ma$$
$$T = Ma + \mu_k N$$
$$T = Ma + \mu_k (Mg)$$

Az m tömegű testre

$$F_y = ma_y$$
$$mg - T = ma$$
$$T = mg - ma$$



b) Vektorábra.

5-19 ábra
Az 5-10 példához.

5-11 PÉLDA

A vízszintes síkban egy 1100 kg tömegű gépkocsi görbevonalú, 50 m sugarú, pályán halad. A gépkocsi 70 m-es úton 10 m/s-ról 15 m/s-ra gyorsul fel. a) Határozzuk meg, hogy mekkora a tapadási súrlódási erő tangenciális komponense, amely a kocsi gyorsulása alatt a kerekekre hat. b) Mekkora a súrlódási erő sugárirányú összetevője abban a pillanatban, amikor a kocsi sebessége éppen 13 m/s? c) Mekkora és milyen irányú a teljes súrlódási erő ebben a pillanatban? d) Mekkora az út és a kerekek közötti tapadási súrlódási együttható minimális értéke, amely mellett a szükséges tapadási súrlódási erő létrejön?

MEGOLDÁS

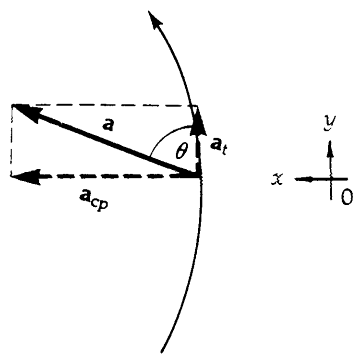
a) A gépkocsi görbült pályán mozog, ezért $a_{cp} = v^2/r$ sugár irányban befelé mutató *centripetális* gyorsulása van. Mivel sebességének nagysága is növekszik, a mozgás irányába mutató *tangenciális* gyorsulással is rendelkezik (5-20 ábra). Használjuk fel a kinematikai egyenleteket a tangenciális gyorsulás meghatározására. Az s út legyen egyenlő a kör alakú pályán megtett távolsággal.

$$v^2 = v_0^2 + 2a_t s$$

Az egyenletből a_t gyorsulást kifejezve, azt kapjuk, hogy

$$a_t = \frac{v^2 - v_0^2}{2s} = \frac{\left(15\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - \left(10\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{2(70\,\text{m})} = 0{,}893\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Az érintő irányú mozgásegyenlet komponenséből meghatározható a tapadási súrlódásnak a tangenciális gyorsulást létrehozó össze-



5-20 ábra
Az 5-11 példához

tevője. (Bár a gépkocsi mozog, mégis tapadási súrlódás lép fel, mert a guminak az úttal érintkező pontja nem csúszik el az úthoz képest.)

$$\Sigma F_y = ma_y$$

$$f_t = (1100\,\mathrm{kg})\left(0{,}893\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 982\ \mathrm{N}$$

b) A gyorsulás sugár irányban befelé mutató (centripetális) komponense 13 m/s-os sebesség esetén:

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{\left(13\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right)^2}{50\,\mathrm{m}} = 3{,}38\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Így a tapadási súrlódási erő sugár irányban befelé mutató összetevője:

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$f_r = ma_{cp} = (1100\,\mathrm{kg})\left(3{,}38\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 3718\ \mathrm{N}$$

c) A teljes f_t tapadási súrlódási erő nagysága:

$$f_t = \sqrt{f_r^2 + f_t^2} = \sqrt{(982\,\mathrm{N})^2 + (3718\,\mathrm{N})^2} = 3845\,\mathrm{N}$$

Az f_t súrlódási erő irányát az erő és a mozgás iránya közötti θ szöggel adhatjuk meg.

$$\theta = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{f_r}{f_t} = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{3718\ \mathrm{N}}{982\ \mathrm{N}} = 75{,}2^\circ$$ (lásd 5 - 21 ábra)

d) A μ_t tapadási súrlódási együtthatónak minimumát a mozgásnak az a pillanata szabja meg, amikor a teljes gyorsulás a legnagyobb. Mivel a tangenciális összetevő állandó, a gyorsulás maximális értéke akkor lép fel, amikor a gépkocsi sebessége, s így centripetális gyorsulása a legnagyobb. A pálya mentén a maximális sebesség 15 m/s, azaz

$$a_{cp} = \frac{v^2}{r} = \frac{225}{50} = 4{,}5\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Az eredő gyorsulás

$$a = \sqrt{a_{cp}^2 + a_t^2} = \sqrt{4{,}5^2 + 0{,}893^2} = 4{,}59\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Így a súrlódási erő

$$f_t = ma = 1100 \times 4{,}59 = 5049\ \mathrm{N}$$

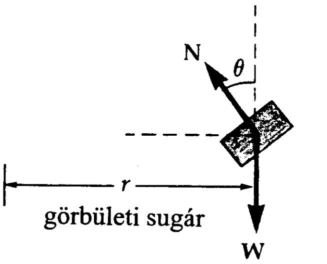
A feltevés szerint ez esetben maximális mértékben kihasználjuk a súrlódási erőt, tehát

$$f_t = \mu_S N$$

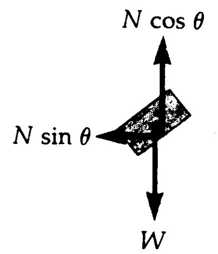
amiből

$$(\mu_t)_{\min} = \frac{f_t}{N} = \frac{f_t}{mg} = \frac{5049}{1100\,\mathrm{kg} \times 9{,}8\,\mathrm{m/s}^2} = 0{,}47$$

Megjegyezzük, hogy száraz utakon az autógumik és az úttest közötti súrlódási együttható általában 0,5 és 0,7 érték közé esik.



a) Az autóra ható erők. Egy meghatározott kritikus sebességnél az út csak normális irányú erőt fejt ki a kocsira, az úttest síkjába eső súrlódási erő nem keletkezik.



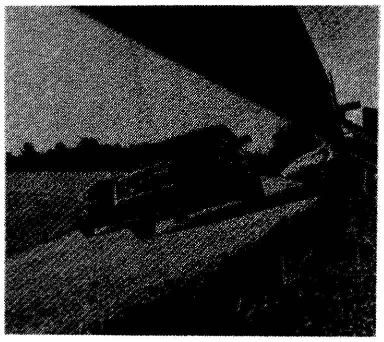
b) Bár a gépkocsi sebessége állandó nagyságú, az autó mégis gyorsul a *pálya görbületi középpontja felé.* Ezért választjuk *ezt* az irányt az erők egymásra merőleges összetevőkre való bontásakor az egyik koordinátatengely irányaként.

5-22 ábra
Kanyarban túlemelt útpályán haladó gépkocsira ható erők. A gépkocsi pontosan olyan sebességgel mozog, hogy az út és a kerekek között ne ébredjen súrlódási erő. A pálya síkjának a vízszintessel bezárt szöge θ.

Kanyarban túlemelt útpályák

Az 5-21 ábrán közismert kép látható, egy gépkocsi állandó sebességgel halad egy kanyarban túlemelt útpályán. Ebben az esetben létezik olyan kritikus sebesség, amikor az út és a kerekek között nem lép fel súrlódási erő, csupán normális irányú erők hatnak (lásd az 5-22/a és b ábrát!). Ezzel a kritikus sebességgel a kocsi még akkor is biztosan vehetné a kanyart, ha a pálya jégsimaságú lenne.

Amennyiben a gépkocsi ennél a sebességnél gyorsabban mozog, akkor az *úttest síkjában,* a kanyar belseje felé mutató súrlódási erő lép fel. Ha a kocsi sebessége kisebb a kritikusnál, akkor az *úttest síkjával párhuzamos* súrlódási erő kifelé mutat. (Mindkét esetben változik az erő normális irányú összetevője is.) Feltéve azonban, hogy a gépkocsi mindkét esetben vízszintes síkú körpályán és állandó nagyságú sebességgel mozog, az erők eredője mindenképpen *a kör középpontja felé mutat,* és az autót $a_x = v^2/r$ gyorsulással mozgatja. A mozgásegyenletek felírásakor az x tengely pozitív irányát ezért célszerű a vízszintes síkban a pálya középpontja felé irányítani. Ebben az esetben a gépkocsinak y irányú gyorsulása nem lesz, azaz $\Sigma F_y = 0$. (A zérusok csodálatosan egyszerűsítik a feladatmegoldást!) Amennyiben lehetséges, mindig olyan koordinátarendszert vegyünk fel, amelynek valamelyik tengelye a gyorsulás irányába mutat. Görbevonalú mozgás esetén pedig az egyik tengelyt irányítsuk a pálya adott pontjában sugár irányban befelé, hiszen az ebbe az irányba eső gyorsulásösszetevőről tudjuk, hogy $a_{cp} = v^2 / r$.



5-21 ábra
Útpálya túlemelése egy próbapályakanyarban.

5.10 Newton harmadik törvénye

A további érdekes problémák elemzése előtt be kell vezetnünk Newton harmadik törvényét. A törvény bár rendkívül egyszerűen kimondható, mégis amikor először találkozunk vele, zavarbaejtő és kényes állításnak tűnik. Newton – latinból áttett – szavaival fogalmazva: „Minden hatással szemben mindig fellép egy vele egyenlő ellenhatás¡ vagy másként fogalmazva, két test kölcsönhatása során az egyes testekre egyenlő nagyságú és ellentétes irányú hatás lép fel." Korszerűbb terminológiát használva a törvény a következőképpen fogalmazható meg:

Newton III. törvénye

Ha két test (A és B) erőt gyakorol egymásra, akkor az A által B-re kifejtett erő ugyanolyan nagyságú, de ellentétes irányú, mint a B által A-ra gyakorolt erő.

Nyilvánvaló, hogy a hatás és ellenhatás szavakat Newton puszta kényelemből használja, hiszen a harmadik törvényben még burkoltan sincs szó a hatás keltéséről vagy elsődlegességéről. Kétségtelen, hogy Newton csak azt kívánta kiemelni, hogy az erők párosával lépnek fel, ezt az összetartozást fejezi ki a hatás-ellenhatás szópár. Az erő szó alkalmazása nem lenne ilyen kifejező, hiszen nem utalna a kiegészítő „ikerpárerő" megjelenésére. Legyünk azonban tisztában azzal, hogy ezek az erők *együtt és egyszerre*, párosával lépnek fel, *ellentétes irányban hatnak* és támadáspontjuk *két különböző testen* van. Ismerjük fel, hogy az erők bármelyikét nevezhetnénk akciónak (hatás) és a másikat reakcióerőnek (ellenhatás), *a két erő együtt lép fel és teljesen egyenértékű.* Ezzel kapcsolatban félreértés adódhat pl. akkor, ha egy személy nyomóerőt fejt ki egy falra. Ekkor úgy tűnik, mintha a személy okozná az erőt, s a fal visszahatna. Természetesen abban az értelemben ez igaz is, hogy valóban a személy dönti el, hogy kifejt-e erőt a falra. Alapvetően azonban a kölcsönhatás a személy és a fal között atomok közötti taszítóerőkön keresztül érvényesül. Ha két atomot szorosan egymás közelébe hozunk, akkor a *kölcsönös taszítóerő egyidejűleg keletkezik.* Ez az alapvető kölcsönhatás!

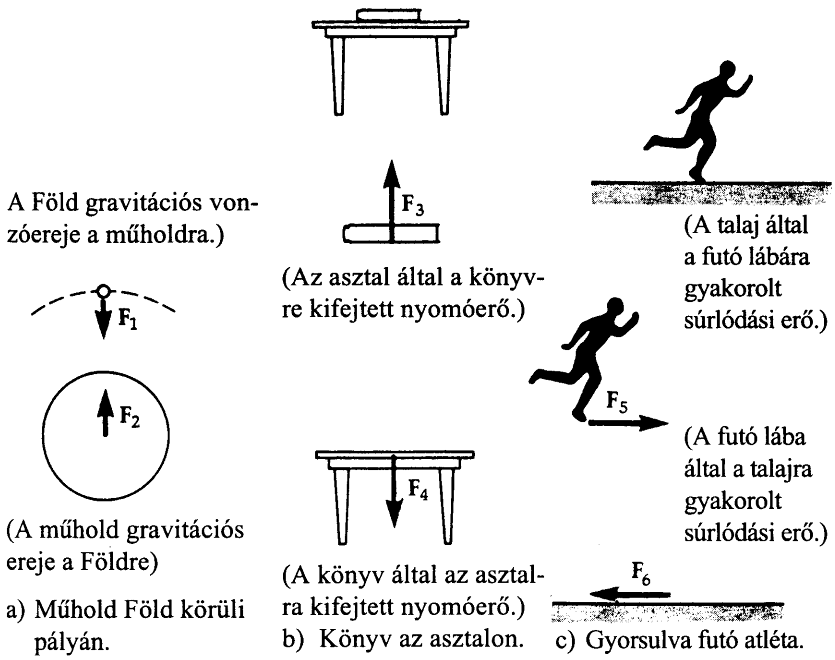
Newton harmadik törvényének következő alapvető sajátossága az, hogy *a két erő sohasem támad ugyanazon a testen, mindig két különböző testre hat.* Az erő-ellenerő pár sohasem egyensúlyozhatja ki egymást, hiszen két különböző testen van a támadáspontja. A harmadik törvény *két különböző testen* ható erőkre, a második *egyetlen testre* vonatkozik. A harmadik törvénnyel kapcsolatos legtöbb félreértés abból származik, hogy erről megfeledkezünk. Végül tartsuk mindig szem előtt azt is, hogy a harmadik törvény az erőkről állít valamit, de semmit sem szól a testek mozgásáról vagy gyorsulásáról. Ez utóbbiról a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvénnyel szerezhetünk információt.

Az 5-23 ábra néhány erő-ellenerő párt mutat. Ezek az erők könnyen azonosíthatók, ha az erőt jellemző két szót felcseréljük. Például a *könyv* által az *asztalra* és az *asztaltól* a *könyvre* kifejtett erők erő-ellenerő párok.

Ha $\mathbf{F}_{AB}$ felöli az A test által a B testre ható erőt, akkor Newton harmadik törvénye vektoriálisan az

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA} \tag{5-12}$$

alakban fejezhető ki. Ez a matematikai összefüggés igen egyszerűnek tűnik, mégis sokan nehezen értik meg. Ennek egyik oka az, hogy a „józan észen" alapuló magyarázatok a harmadik törvénnyel kapcsolatban gyakran tévesek. Foglalkozzunk például a „kötélhúzó" játékban egymás kezét húzó gyerekekkel (5-24 ábra)! A szokásos magyarázat szerint a győztes azért nyer, mert erősebben húzza a vesztest, mint az őt. Ez teljesen hibás magyarázat! Newton harmadik törvénye szerint az A versenyző *minden pillanatban pontosan* akkora húzóerőt fejt ki mint B, *függetlenül attól, hogy ki győz.* A harmadik törvény kimondja, hogy lehetetlen az, hogy az A test nagyobb (vagy kisebb) erőt fejtsen ki egy másik B testre, mint amekkorát ugyanakkor B kifejt A-ra. Bármely két test kölcsönhatása során az erők párosával lépnek fel és minden esetben és minden pillanatban pontosan egyenlő nagyságúak. Ez attól függetlenül igaz, hogy a testek nyugalomban vannak, egyenletesen mozognak, vagy gyorsulnak.



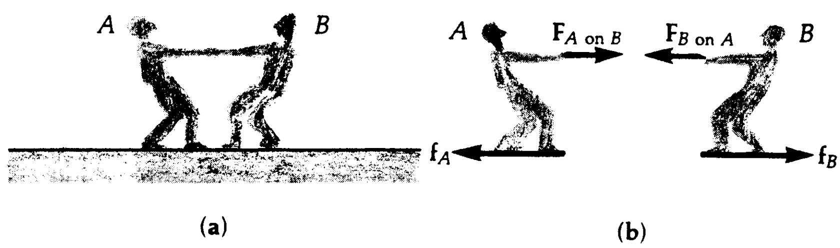
5-23 ábra

Erő-ellenerő párok Newton harmadik törvénye szerint. Az erő és ellenerő nagysága mindig azonos, iránya ellentétes és támadáspontja különböző testen van. A b) példában hétköznapi nyelven azt mondanánk, hogy az asztalra ható F_4 erő a „könyv súlya" – az eddigiekben azonban elköteleztük magunkat, hogy a könyv súlyának definíció szerint a könyvre ható gravitációs erőt (amit az ábra nem is mutat) nevezzük* – ez pedig a *könyvre* hat. Az F_3 és F_4 erők azért ébrednek, mert az asztal nem engedi leesni a könyvet. A gravitációs erő lefelé húzza a könyvet, az asztal enyhén deformálódik és a könyvre ható gravitációs erőt kiegyensúlyozó felfelé mutató erőt fejt ki a *könyvre*. Mind F_3 mind F_4 közelható, az érintkezés során fellépő, a két test közel kerülő atomjai és elektronjai közötti elektromos taszítóerő.

Hogyan nyerheti meg valamelyik gyerek a kötélhúzó versenyt, ha mindig egyenlő erővel húzzák egymást? A választ Newton *második*, $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvénye adja. A testek gyorsulását a rájuk ható eredő erő szabja meg. A kötélhúzó játék során is az *adott személyre* ható erők határozzák meg, hogy a személy nyugalomban marad vagy gyorsul valamilyen irányba, s a gyerekekre nemcsak az ellenfél fejt ki erőt! Biztosan fellép még a súrlódási együtthatótól és a talajra kifejtett nyomóerőtől is függő súrlódási erő is.

A fenti példa megoldással szolgál a régi találós kérdésre is: „Ha a ló ugyanakkora erővel húzza a kocsit, mint amekkorával a kocsi a lovat, akkor mégis miért mindig a ló húzza el a kocsit?" A válasz: a kocsi mozgását *csak a **kocsira** ható erők* szabják meg. Az a tény, hogy két különböző testre ható két erő éppen egyenlő egymással, nincs befolyással arra, hogy a kocsi (vagy a ló) hogyan gyorsul.

Befejező példaként foglalkozzunk az út által egy gyorsuló autó kerekére ható súrlódási erővel. Amint a motor gyorsabban akarja forgatni a kereket, a kerék hátrafelé löki a talajt, ezzel egyidejűleg Newton harmadik törvényének értelmében a talaj is előre nyomja a kereket, s ez az erő gyorsítja a gépko-



5-24 ábra

Kötélhúzás
(A függőleges erőket nem jelöltük.)

* A magyar tankönyvirodalomban szokásosabb a könyv által az asztalra kifejtett kényszererőt súlynak nevezni (a ford. megj.)

csit[10]. Ez általában is igaz, míg autózunk, az *út* löki, gyorsítja különböző irányba a gépkocsit. Hasonló módon a vonatot az acél *sínek* által kifejtett erő viszi előre. A futókat pedig a *talaj* által a cipőtalpukra gyakorolt erő gyorsítja.

Miért van szükségünk a harmadik törvényre, hiszen önmagában semmit sem mond a testek mozgásáról? Figyelembe kell vennünk azonban következményeit, mert gyakran alkalmasak arra, hogy ismeretlen erőket azonosítsunk. (Felismerjük pl., hogy az adott erő egy erő-ellenerő pár egyik tagja.) Ugyanakkor a harmadik törvény szerves része az erőkről szóló Newton-féle törvényrendszernek, és az erő-ellenerő párok megállapításán keresztül segít a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény alkalmazásához szükséges eredő erő meghatározásában.

5-12 PÉLDA

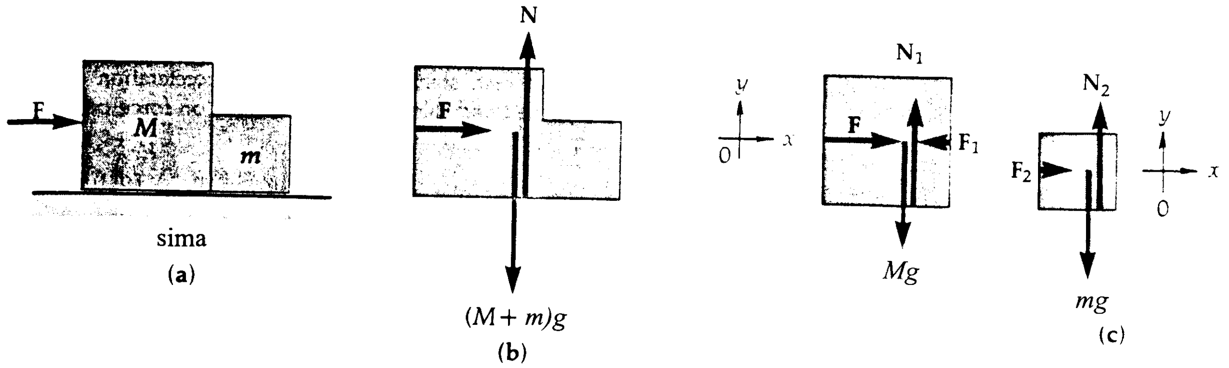
Az 5-25 ábra két, sima, vízszintes síkon fekvő, egymással érintkező testet mutat. Az M tömegű testet F erővel toljuk. Határozzuk meg a) a testek gyorsulását, b) a két test között fellépő erőt!

MEGOLDÁS

a) A gyorsulás meghatározásához tekintsük a két testet egyetlen M+m tömegű testnek, amint azt az 5-25/b vektorábra mutatja. Felírva Newton II. törvényét és kifejezve belőle az a gyorsulást:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$F = (M+m)a$$
$$a = \frac{F}{M+m}$$

b) A két test közötti erőhatás meghatározásához külön-külön kell kezelnünk a két testet. Az 5-25/c ábra az M és m tömegű test vektorábráját mutatja. Az $\mathbf{F}_1$ és $\mathbf{F}_2$ erők erő-ellenerő párt alkotnak, nagyságuk egyenlő és két különböző testre hatnak. Newton II. törvényét az m tömegű testre alkalmazva:



5-25 ábra
Az 5-12 példához.

[10] Bonyolultabb a helyzet, amikor egy autó vízszintes útról fordul be egy mellékútra. Meg tudja magyarázni az olvasó, hogy az első kerekek elfordításának hatására miért fejt ki az út olyan *oldalirányú* (sugár irányban befelé mutató) erőt az autóra, ami éppen a bekanyarodáshoz szükséges centripetális erőt szolgáltatja?

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$F_2 = \left(\frac{m}{M+m}\right)F$$

A válasz „értelmes”, hiszen $M = m$ esetén az m tömegű test gyorsításához szükséges F_2 erő éppen fele akkora lenne, mint a két (2 m) testet együtt ugyanezzel a gyorsulással mozgató F erő.

5-13 PÉLDA

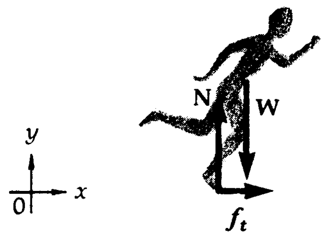
Nyugalomból induló 70 kg-os férfi 2 m/s^2 gyorsulással kezd futni. Elemezzük a ható erőket, és határozzuk meg a férfira ható tapadási (nyugalmi) súrlódási erőt is!

MEGOLDÁS

Az 5-26 vektorábrán bejelöltük az $\mathbf{f}_t$ tapadási súrlódási erő irányát. A férfi – ismerve Newton harmadik törvényét – úgy hozza működésbe ezt az előre mutató erőt, hogy lábával *hátrafelé* löki a talajt. A hátrafelé lökő erővel egyenlő és ellentétes irányú tapadási súrlódási erő adja a vízszintes irányú eredő erőt, s gyorsítja a férfit. Gondoljuk meg, hogy a futót *nem* a lábával a *földre* kifejtett hátrafelé mutató erő gyorsítja, hanem a *föld* által kifejtett előre mutató erő!

$$\Sigma F_x = ma_x$$

$$f_t = ma = (70\,\mathrm{kg})\left(2\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right) = 140\ \mathrm{N}$$



5-26 ábra
Az 5-13 példához.

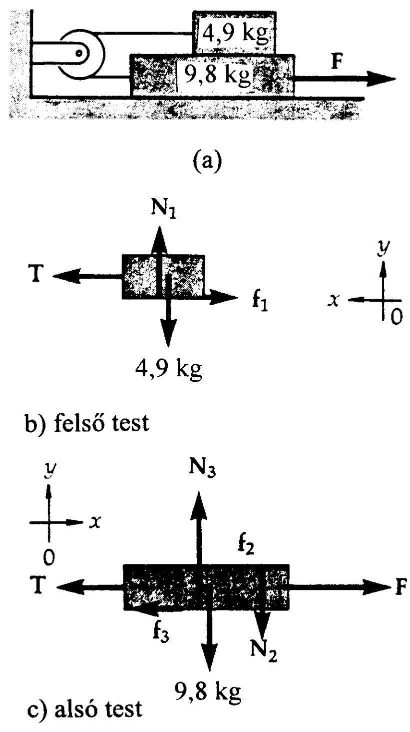
A fenti példa ellentmond a szokásos tévhitnek is, amely szerint; „a súrlódás mindig akadályozza a mozgást”. A valóság sokkal bonyolultabb ennél. A súrlódási erő iránya mindig az érintkező felületek relatív sebességének irányával ellentétes. (Tapadó súrlódás esetén pedig a megcsúszáskor létrejövő relatív mozgás irányával.) A példában bár maga a futó előre mozogna, lába a talajhoz képest *hátrafelé* csúszna meg. Így esetünkben a föld által kifejtett tapadási súrlódási erő ahelyett, hogy „akadályozná a mozgást”, éppen az *előre* mutató erőt szolgáltatja és gyorsítja a futót.

5-14 PÉLDA

Tekintsük az 5-27 a ábrán látható rendszert! a) Határozzuk meg, hogy mekkora **F** erővel lehetne az alsó testet 2 m/s^2 gyorsulással jobb felé mozgatni. b) Határozzuk meg, hogy mekkora erő feszítené ekkor a két testet összekötő könnyű kötelet. A csiga tömege és tengelysúrlódása elhanyagolható, az egymáson csúszó síkokon a csúszási súrlódási együttható mindenütt $\mu_k = 0{,}2$ $(g = 10\ \mathrm{m/s^2})$.

MEGOLDÁS

A két test különböző irányban gyorsul, tehát két vektorábrát készítünk (5-27b és c ábra). A pozitív irányt mindkét esetben az adott test gyorsulásának irányában vettük fel. Az f_1,f_2 erő-ellenerő pár nagysága egyenlő, iránya ellentétes és támadáspontja különböző testen van. *Le-*



5-27 ábra
Az 5-14 példához

gyünk biztosak abban, hogy megértettük azt, hogy miért az adott irányban vettük fel ezeket az erőket! (Segíthet ebben, ha összedörzsöljük két kezünket és meggondoljuk, hogy milyen irányú súrlódási erőt fejt ki egyik a másikra.) Vegyük észre, hogy N_1 és N_2 is erő--ellenerő párt alkot! Függőleges irányban a testek egyensúlyban vannak, így

Felső test	**Alsó test**
$\Sigma F_y = 0$	$\Sigma F_y = 0$
$N_1 = 98\ \text{N}$	$N_3 = N_2 + 98\ \text{N}$
Newton harmadik törvénye szerint $N_1 = N_2 = 98\ \text{N}$. Ezt az értéket helyettesítjük a jobboldali egyenletbe	$N_3 = 49\ \text{N} + 98\ \text{N} = 147\ \text{N}$ $f_2 = \mu_k N_2 = 0{,}2 \times 147\ \text{N} = 29{,}4\ \text{N}$
$f_1 = \mu_k N_1 = 0{,}2 \times 49\ \text{N} = 9{,}8\ \text{N}$	

A vízszintes erők

$\Sigma F_x = ma_x$	$\Sigma F_x = ma_x$
$T - f_1 = ma_x$	$F - T - f_2 - f_3 = ma_x$
$T = ma_x + f_1$	$F = ma_x + T + f_2 + f_3$
$T = 4{,}9\ \text{kg} \times 2\ \text{m/s}^2 + 9{,}8\ \text{N}$	$F = 9{,}8\ \text{kg} \times 2\ \text{m/s}^2 +$
$T = 19{,}6\ \text{N}$	$+ 19{,}6\ \text{N} + 9{,}8\ \text{N} + 29{,}4\ \text{N}$
Ezt helyettesítjük be a jobb oldali egyenletbe.	$F = 78{,}4\ \text{N}$

Összefoglalás

A Newton-féle három mozgástörvény:

(1) Minden test mindaddig megtartja egyenesvonalú, egyenletes mozgását vagy nyugalmi állapotát, míg más test ennek megváltoztatására nem készteti.

(2) A testre ható erők eredője megváltoztatja a test impulzusát. Ha a test tömege állandó, akkor $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

(3) Ha az A és B test erőt fejt ki egymásra, akkor az A test által B testre kifejtett erő nagysága ugyanakkora, iránya pedig ellentétes a B által A-ra kifejtett erővel.

A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletben szereplő mennyiségek SI-mértékegységei a következők:

F	newton (N)
m	kilogramm (kg)
a	$\dfrac{\text{méter}}{\text{szekundum}^2}\ \left(\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)$

A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény alkalmazásának kulcsa a vektorábra megrajzolása, amelyen az adott test körül rajzolt izolációs határon *keresztül* kívülről *ható* erőket tüntetjük fel. A vektorábra alapján Newton II. törvényének bal oldala írható fel.

Az erők felismerése, irányuk kijelölése igényli a legtöbb „fizikai gondolatot" a feladatok megoldásában. Amennyiben szükséges, akkor a vektorábrát megfelelően választott koordinátairányokban összetevőkre bontott erőkkel is érdemes felrajzolni. Ha pl. ismerjük egy test gyorsulásának irányát, akkor az egyik koordinátatengelyt érdemes ebben az irányban felvenni. Görbevonalú pálya esetén az egyik tengely mutasson sugár irányban befelé! **A jó vektorábra szerepét nem lehet eléggé hangsúlyozni.**

A felületek által kifejtett erők kényelmesen elemezhetők a felületre merőleges (normális) **N** és a felület síkjába eső érintő menti (tangenciális) **f** komponensre bontva. A súrlódási erők két osztályba sorolhatók – amelyekre nézve a *súrlódási együttható* többnyire nem egyenlő ($\mu_k < \mu_s$):

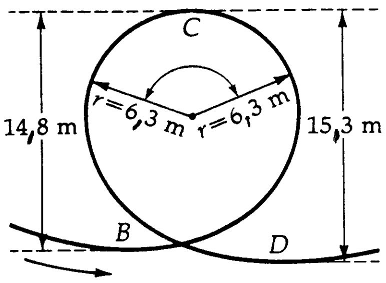
Csúszó súrlódás: $f_k = \mu_k N$
(az érintkező felületek csúsznak egymáson)

Tapadási (nyugalmi) súrlódás: $f_t \leq \mu_t N$
(a felületek nem csúsznak el egymáson)

A tapadási súrlódási erő esetén az egyenlőségjel akkor érvényes, amikor a testek az elcsúszás határán állnak, s így maximális súrlódási erő lép fel. A felületek által a rájuk helyezett testekre kifejtett súrlódási erő iránya ellentétes a testnek a felülethez képest vett relatív sebességével (vagy a lehetséges *relatív megcsúszás* irányával).

Kérdések

1. Szükséges-e, hogy egy test a rá ható erők eredőjének irányában mozogjon?
2. Egy fonalat két rugós mérleg segítségével feszítünk ki és tartunk egyensúlyban. Ekkor mindkét rugó T erőt jelez. A fonalat elvágjuk és egy rugós erőmérőt iktatunk be. T vagy $2T$ erőt jelez ez az erőmérő?
3. Felépíthető olyan mértékrendszer is, amelyben a hosszúság, az idő és az erő az alapmennyiségek? Mi lenne ebben a rendszerben a tömeg dimenziója?
4. Fejtsük ki, hogy milyen előnyökkel járna a tömeg mértékegységének az atomok tömegén alapuló bevezetése – feltéve természetesen, hogy az atomtömeget kellő pontossággal tudnánk mérni.
5. Egy labdát függőlegesen felfelé hajítottunk. Felfelé vagy lefelé mozogna hosszabb ideig a labda, ha a légellenállás hatása nem hanyagolható el?
6. A ferdén elhajított ping-pong labda pályája a légellenállás következtében nem pontosan parabolikus. A pálya mely pontjában (vagy pontjaiban) maximális, ill. minimális a labda sebessége?
7. Egy fonallal (továbbiakban A fonal) a mennyezetre függesztett test aljára az A-val azonos minőségű B fonalat kötöttünk. A B fonal szabadon lóg le a testről. Ha a B fonalat fokozatosan növekvő erővel húzzuk, akkor az A fonal szakad el. Amennyiben azonban B-t hirtelen rántjuk meg, akkor B szakad el. Miért?
8. Liftben elhelyezett mérleg két tányérjában egyenlő és egyensúlyt tartó tömegek vannak. Egyensúlyban marad-e a mérleg, ha a lift gyorsulni kezd?
9. Feltételezhetjük, hogy az esőcseppekre ható közegellenállási erő a cseppek sebességével arányos. Két egyenlő sűrűségű, de különböző sugarú csepp közül melyik tesz szert nagyobb végsebességre?
10. Mi a különbség a tömeg és a súly között?
11. Newton mozgástörvénye alapján értelmezzük a következőket: a) a sószóró működését, b) a helikopter lebegését egy adott pont felett, c) a lökhajtásos repülőgép gyorsulását!
12. A *Nagy Amerikai Óriáskör* hullámvasút (5-28 ábra) óriásköre nem tökéletesen kör alakú. A csúcspont közelében a görbületi sugár kisebb, mint másutt. Magyarázzuk meg ennek a felépítésnek az előnyeit!



5-28 ábra

A Nagy Amerikai Óriáskör. A világ első függőleges síkú hurkot is tartalmazó hullámvasútját a kaliforniai Valenciában a „Hat zászlós varázshegy” nevű vidámparkban 1976-ban helyezték üzembe. Az ábra követi a hurok alakját, amelynek csak felső része pontosan kör alakú.

A következőkben néhány adatot közlünk a hurokban haladó megterhelt kocsi tömegközéppontjának mozgására vonatkozóan.

A hurok felső (kör alakú) részének sugara:	6,3 m
A hurokba érkezés előtti utolsó lejtő kezdőszintjének magassága a B pont felett:	21,6 m
A hullámvasút kocsisebessége a hurok előtti utolsó lejtő kezdőpontjára érkezve:	5,07 m/s
A kocsi sebessége a B pontban:	20,2 m/s
A kocsi sebessége a C pontban:	9,7 m/s
A kocsi sebessége a D pontban:	19,2 m/s
A kocsi és az utasok átlagos tömege:	5440 kg
A kocsi maximális gyorsulása a pályán (nem a hurokban)	4,94 g

Feladatok

5A-1 Adjuk meg SI-egységben a következőket: a) egy 72 kg tömegű emberre ható gravitációs erőt, b) egy 720 N súlyú férfi tömegét, c) egy 20 kg-os testre ható gravitációs erőt, d) egy 200 N súlyú test tömegét, e) mekkora eredő erő gyorsít egy 720 N súlyú testet 9,8 m/s^2 gyorsulással? f) mekkora eredő erő gyorsít egy 20 kg tömegű testet 9,8 m/s^2 gyorsulással?

5A-2 Határozzuk meg: a) Mekkora a tömege a 400 N súlyú szeneszsáknak? b) Mekkora gravitációs erő hat rá? c) Mekkora a súlya egy 26 kg tömegű gyermeknek? d) Mekkora gravitációs erő hat rá? e) Mekkora erővel gyorsíthatnánk a szeneszsákot 9,8 m/s^2 gyorsulással felfelé?

5A-3 Ha egy ember a Földön legfeljebb 48 kg tömegű testet tud felemelni, mekkorát tudna felemelni a Holdon? (Az adatok az L Függelékben találhatóak.)

5B-4 A Klondike-i aranyláz idején egy aranyásó a kanadai Dawson City-ben, ahol $g = 9{,}82288$ m/s^2, 1 kg tömegű aranyrögöt talált és Szingapurba vitte, ahol $g = 9{,}78031$ m/s^2. a) Mennyivel kisebb az arany súlya millinewtonban Szingapurban? c) Mennyit veszít az aranyásó, ha Dawson City helyett Szingapurban adja el aranyát? (Mindkét városban 470 $ -t fizetnek 31 g aranyért.)

5.7 Newton második törvényének alkalmazásai

5A-5 Egy 5 kg tömegű testre 20 N eredő erőt hat. a) Mekkora a test gyorsulása? b) Nyugalomból indulva mekkora úton tesz szert a test 8 m/s sebességre?

5A-6 Görkorcsolyázó gyerek – nyugalomból indulva 12°-os lejtőn gurul le. Mekkora a gyerek sebessége 6 m út megtétele után? Rajzoljuk meg a gyerek vektorábráját!

5A-7 Egy 720 N súlyú férfi 1,25 m/s^2 gyorsulással mozog a $+x$ tengely mentén. a) Mekkora eredő erő hat rá? b) Nyugalomból indulva mennyi idő alatt éri el a 3,75 m/s-os sebességet?

5A-8 Rajzoljuk meg az alábbiakban aláhúzással jelölt testek vektorábráját. Ismételjük meg az ábrákat úgy is, hogy az erőket a problémához illeszkedő merőleges komponensekre bontjuk. Írjuk fel ezekre a komponensekre a mozgásegyenleteket: a) Egy végsebességét már elért (azaz állandó sebességgel eső) lehulló tollpihe. b) Parabolapályájának csúcspontján repülő futball-labda. c) Egy kanyarban (nem túlemelt útpályán) v állandó sebességgel, r sugarú körpályán mozgó teherautóban ülő sofőr. d) A pálya legmagasabb pontján lévő hintázó gyermek. e) A pálya legalacsonyabb pontján lévő hintázó gyermek. f) Függőleges síkú ív csúcspontján haladó hullámvasút kocsi.

5A-9 300 N súlyú kocsit 75 N erővel vízszintes úton vízszintes irányban húzunk. A súrlódás elhanyagolható. a) Milyen távolságra jut el a nyugalomból induló kocsi 5 s alatt? b) Mekkora sebességet ér el?

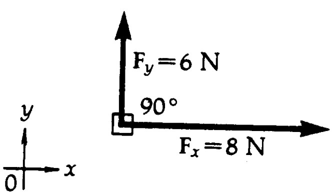
5A-10 Egy 720 N súlyú ember összecsavart lepedőből font függőleges kötélen menekül egy égő ház emeletéről. a) Hogyan tud leereszkedni anélkül, hogy a kötél elszakadna, ha a kötél szakítószilárdsága 650 N? b) Mekkora sebességgel érkezik le, ha az emelet magassága 4,5 m?

5A-11 Az almásláda lejtősre állított, görgős szállítószalagon súrlódásmentesen, nyugalomból indulva 1,2 s alatt 1,8 m-t tesz meg. Mekkora a lejtő hajlásszöge?

5B-12 Határozzuk meg, hogy mekkora eredő erővel gyorsítható fel egy elektron 5 cm-es úton nyugalomból indulva 9×10^5 m/s vízszintes sebességre! Magyarázzuk meg, hogy miért hanyagolható el a számítás során az elektronra ható gravitációs erő? (Az adatokat a K Függelék tartalmazza.)

5A-13 Mekkora minimális gyorsulással csúszhat le biztonságosan egy 300 N súlyú gyerek a 250 N szakítószilárdságú kötélen?

5A-14 Egy 2 kg tömegű test súrlódásmentesen csúszik egy vízszintes síkon. Ezt választjuk a továbbiakban xy síknak. Az 5-29 ábrán látható módon a testre két erő hat, amelyek a $+x$, ill. $+y$ irányba mutatnak. Mekkora és milyen irányú a test gyorsulása?



5-29 ábra
Az 5A-14 feladathoz.

5B-15 4 kg tömegű testre két erő – a lefelé mutató nehézségi erő és egy állandó, vízszintes irányú erő – hat. A megfigyelések szerint a test nyugalomból indult és 12 m/s^2 gyorsulással mozog. Határozzuk meg, hogy a) mekkora a vízszintes irányú erő? b) milyen irányban gyorsul a test? c) vajon egyenes vonalon vagy parabolán mozog-e a test?

5B-16 A folyadékokban vagy gázokban mozgó testekre ható közegellenállási erő bonyolult módon függ a sebességtől és a test alakjától. A levegőben zuhanó emberi test 15-20 s alatt éri el végsebességét. Fejjel lefelé zuhanva – ekkor a legkisebb a test homlokfelülete – a végsebesség durván 90 m/s. Szétterpesztett, ún. béka pozícióban, amikor az ugró zuhanás közben karjait és lábait a zuhanás irányára merőlegesen kifeszíti, a végsebesség az előzőnek kb. felére csökken. Feltéve, hogy a közegellenállás a sebesség négyzetével arányos, határozzuk meg a) a 85 kg-os személyre zuhanás közben ható maximális közegellenállási erőt, ha a test végsebessége 70 m/s. b) Mekkora erő hat a testre akkor, amikor 40 m/s sebességgel esik?

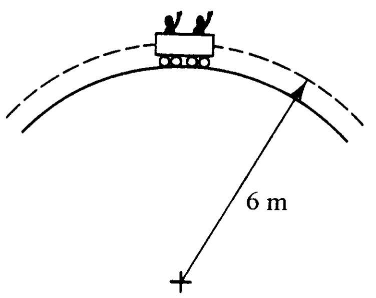
5B-17 A kérdés a *Nagy Amerikai Óriáskör* hullámvasútra vonatkozik, amelynek adatait az 5-28 ábra mutatja. a) Szükség van-e biztonsági övre az óriáskör csúcspontján való áthaladáskor? Indokoljuk a választ! b) Ha a válasz igen, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki az öv a pálya csúcspontján egy 70 kg-os személyre. Ha a válasz nem, akkor határozzuk meg, hogy mekkora erőt fejt ki az ülés az utasra.

5B-18 Tegyük fel, hogy a Nagy Amerikai Óriáskör hullámvasút óriáskörének (5-28 ábra) egyik oldalán egy kocsi 15 m/s pillanatnyi sebességgel halad lefelé a pályának egy 6,3 m görbületi sugarú pontján. A kocsi itt súrlódásmentesen, pusztán a gravitáció hatására mozog. a) Határozzuk meg, hogy az ülés fejt-e ki erőt a kocsiban ülő 70 kg-os utasra, s ha igen, mekkorát? b) Mekkora az utas gyorsulása?

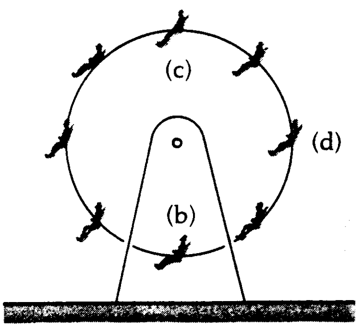
5B-19 Nyugalomból induló test súrlódásmentesen csúszik le a vízszintessel 30°-os szöget bezáró lejtőn. a) Mennyi idő alatt ér el 50 m/s-os sebességet? b) Milyen távolságba jut el ezalatt?

5B-20 Egy gépkocsi 18 m sugarú, függőleges síkú, kör alakú domboldalon mozog felfelé. A domb tetején a vezető tapasztalja, hogy éppen csak érinti az ülést. Mekkora sebességgel haladt a gépkocsi?

5B-21 A hullámvasút kocsija állandó, 6 m/s-os sebességgel halad át a pálya 6 m sugarú, függőleges síkú részének tetőpontján (5-30 ábra). A kocsi és az utasok együttes tömege 1350 kg. a) Mekkora és milyen irányú a kocsi gyorsulása a tetőponton? b) Mekkora eredő erő hat ebben a pillanatban a kocsira és az utasokra összesen? c) Mekkora erővel nyomja a pálya a kocsit a tetőponton?



5-30 ábra
Az 5B-21 feladathoz.



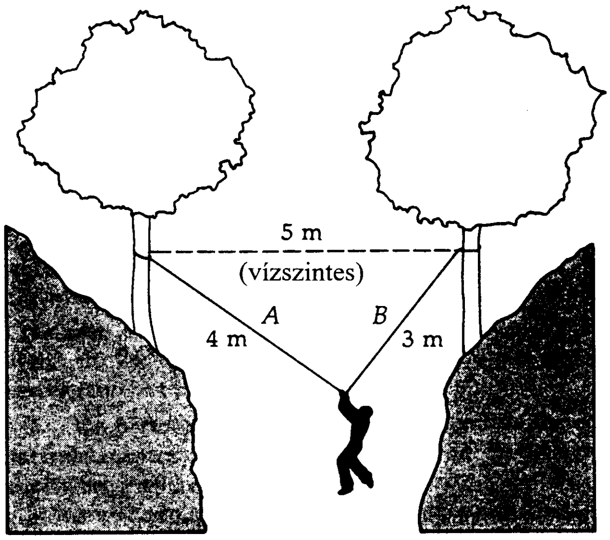
5-31 ábra
Az 5B-22 feladathoz.

5B-22 Az 5-31 ábrán látható 18 m átmérőjű óriáskerék négyet fordul percenként. a) Mekkora az utasok centripetális gyorsulása? Mekkora erőt gyakorol az ülés egy 40 kg-os utasra b) a pálya legmélyebb, c) a legmagasabb pontján? d) Mekkora és milyen irányú erőt fejt ki az ülés az utasra, amikor félúton van a legfelső és a legalsó helyzet között?

5.8 Húzó- és nyomóerők

5A-23 Hintában ülő 30 kg-os gyereket vízszintes **F** erővel oldalra húzva egyensúlyban tartunk, miközben a hinta kötele 30°-os szögben áll a függőlegeshez képest. a) Mekkora az **F** erő? b) Mekkora erő feszíti ezalatt a hinta kötelét?

5A-24 Két fa között kifeszített kötélen 45 kg tömegű gyerek függeszkedik az 5-32 ábrán látható módon. A két kötélágat a továbbiakban A-val, ill. B-vel jelöljük. Határozzuk meg a kötélágakban ébredő T_A és T_B erőket! Melyik kötelet feszíti nagyobb erő? (Útmutatás: Készítsünk vektorábrát a kötél azon pontjára vonatkozóan, amelybe a gyerek kapaszkodik!)



5-32 ábra
Az 5B-24 feladathoz.

5A-25 Egy 9 m-es kötél egyik végét egy fához, másikat egy sárba ragadt gépkocsihoz kötöttük. A sofőr a kötél közepét 360 N erővel 60 cm távolságba oldalra húzza. Mekkora erőt fejt ki a kötél a gépkocsira?

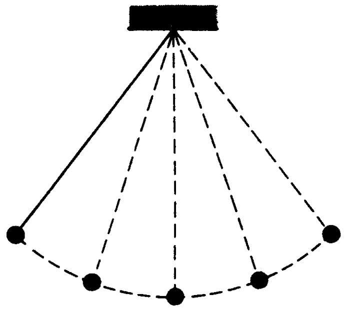
5A-26 Két diák 9 kg tömegű jelzőtáblát akaszt egymástól 30 m távolságban lévő épületek azonos magasságú pontjához rögzített kötél középpontjára. A cégtábla belógása a felfüggesztési pontokat összekötő vízszintes alá 30 cm. Mekkora erő feszíti a kötelet?

5A-27 Egy egyszerű inga 0,75 m hosszú fonalán 600 g tömegű ingatest lóg. Mekkora erő feszíti a fonalat akkor, amikor az ingatest 80 cm/s sebességgel lendül át pályájának legalsó pontján?

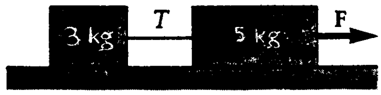
5A-28 Az 5-33 ábra egy függőleges síkban lengő inga néhány helyzetét ábrázolja. A két szélső helyzet egyben az inga maximális kilendülését is jelzi. Rajzoljuk be az egyes helyzetekben az inga pillanatnyi gyorsulását reprezentáló vektort!

5A-29 Két, fonallal összekötött test az 5-34 ábrán látható módon vízszintes, súrlódásmentes síkon mozog. a) Mekkora a testek gyorsulása, ha $F = T_1 = 2{,}4$ N? b) Mekkora T_2 erő feszíti eközben a testeket összekötő fonalat?

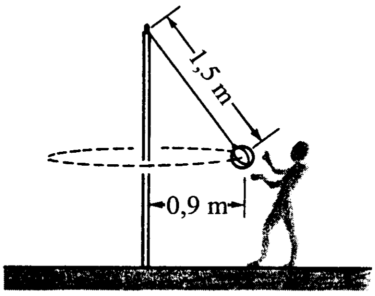
5A-30 Egy 1,5 m hosszú kötélre kötött 4,5 kg tömegű labda az 5-35 ábrán látható módon kúpingaként 0,9 m



5-33 ábra
Az 5A-28 feladathoz



5-34 ábra
Az 5A-29 feladathoz



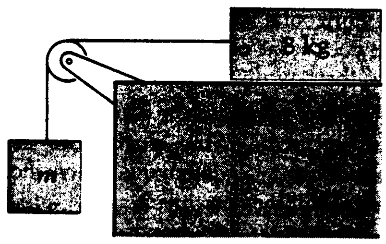
5-35 ábra
Az 5A-30 feladathoz

sugarú, vízszintes síkú körpályán mozog. a) Mekkora erő feszíti a kötelet? Rajzoljuk meg a labda vektorábráját, beleértve az erők alkalmas derékszögű összetevőkre bontását is! b) Mennyi idő alatt tesz meg a labda egy teljes fordulatot?

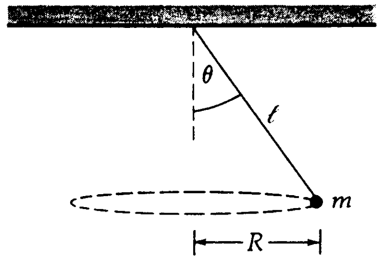
5B-31 Egy l hosszúságú fonallal a mennyezethez erősített testet úgy hoztunk mozgásba, hogy a test vízszintes síkú körpályán mozog, miközben a fonal a függőlegessel θ szöget alkot (5-36 ábra). Fejezzük ki egy fordulat idejét az l, θ és g paraméterek függvényében!

5B-32 Egy 1,4 m hosszú fonalinga függőleges síkban mozog. Amikor az ingatest sebessége 2,2 m, akkor a fonal 20°-os szöget alkot a függőlegessel. Határozzuk meg ebben a pillanatban a) az ingatest centripetális gyorsulását! b) az ingatest tangenciális gyorsulását! c) a fonalat feszítő erőt, ha az ingatest tömege 600 g!

5B-33 Két hasábot az 5-37 ábrán látható elrendezésben fonallal kötöttünk össze. A csiga tengelysúrlódása és az érintkező felületek közötti súrlódás elhanyagolható. Mekkora az alsó test m tömege, ha a testek gyorsulása 2 m/s^2? Mekkora erő feszíti a fonalat?

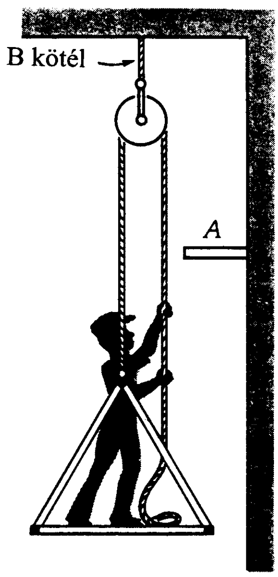


5-36 ábra
Az 5B-31 feladathoz



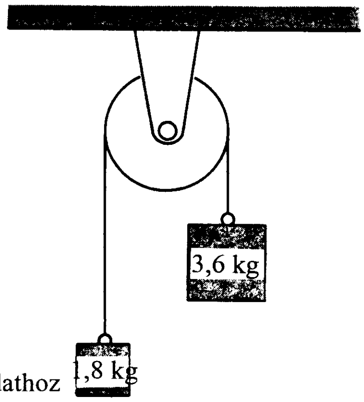
5-37 ábra
Az 5B-33 feladathoz

5B-34 Egy épület oldalának befestéséhez a festő az 5-38 ábrán látható módon csigán átvetett kötéllel húzza fel magát. Egy adott helyzet rögzítésére a festő a húzott, szabad kötélágat is az állványhoz szokta erősíteni. (A festő és az állvány együttes súlya 900 N, a kötél szakítószilárdsága 1350 N.) Egy alkalommal azonban az épület falából kiálló, különlegesen erős és biztonságos csővéget (az ábrán A-val jelölve) talált, s a kötélvéget ehhez erősítette. Milyen katasztrofális következményekkel járt ez és miért?



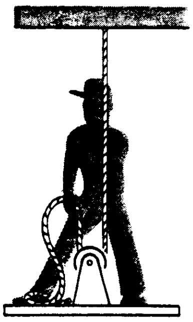
5-38 ábra
Az 5B-34 feladathoz

5B-35 Az 5-39 ábrán látható módon, súrlódásmentesen forgó csigán átvetett, elhanyagolható tömegű kötél végeire 1,8 és 3,6 kg-os tömeget erősítettünk, majd nyugalomból indítva magára hagytuk a rendszert.
a) Newton második törvényének alkalmazásával határozzuk meg a testek gyorsulását! b) Mekkora erő feszíti a fonalat, miközben a testek gyorsulnak? c) Mekkora sebességgel érkezik le 15 cm magasból a 3,6 kg-os test?



5-39 ábra
Az 5B-35 feladathoz

5B-36 Az 5-40 ábrán látható férfi és a tartólap együttes súlya 80 kg. Mekkora erővel tarthatja függve magát a férfi? (Ha esetleg lehetetlennek tartjuk ezt, magyarázzuk meg, hogy miért!)

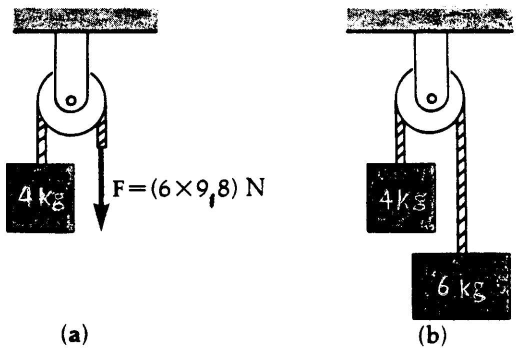


5-40 ábra
Az 5B-36 feladathoz

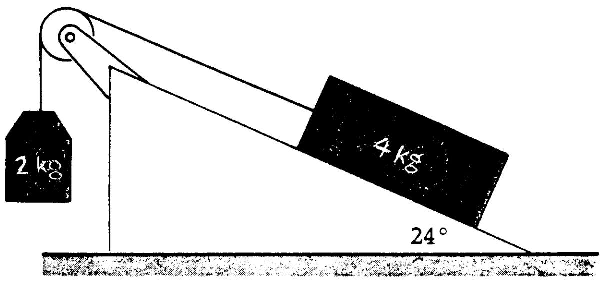
5B-37 a) Rajzoljuk meg az 5-41 ábrán látható testek vektorábráit! b) Határozzuk meg mind az a), mind a b) ábra elrendezésében a 4 kg tömegű test gyorsulását!
5B-38 Határozzuk meg az 5-42 ábrán látható elrendezésben a testek gyorsulásának nagyságát és irányát! Mekkora erő feszíti a fonalat? (A csiga tömege elhanyagolható és sehol sincsen súrlódás.)
5B-39 Mekkora az 5-43 ábrán látható elrendezésben az m tömeg, ha tudjuk, hogy a 10 kg tömegű test 0,2 m/s^2 gyorsulással mozog felfelé a súrlódásmentes lejtőn, és a csiga tengelysúrlódása is elhanyagolható?

5.9 A súrlódás

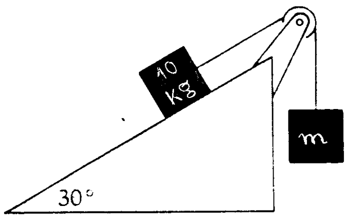
5A-40 A vízszintes padlón 1,8 m/s sebességgel csúszó doboz 2 másodperc alatt megáll. Mekkora a doboz és a padló közötti csúszó súrlódási együttható?



5-41 ábra
Az 5B-37 feladathoz



5-42 ábra
Az 5B-38 feladathoz



5-43 ábra
Az 5B-39 feladathoz

5A-41 Jégen csúszó szánkó súlya a rajta ülőkkel együtt 120 N. A szánkó és a jég közötti súrlódási együttható 0,070. a) Mekkora vízszintes erővel tartható egyenletes sebességű mozgásban a szánkó? b) Mekkora vízszintes irányú erővel mozgatható a test 0,60 m/s^2 gyorsulással?
5A-42 Mekkora a tapadási súrlódási együttható, ha az előző feladat esetén a szánkó nyugalomból való kimozdításához 10 N erő szükséges?
5A-43 Egy gyerek a parttól 12 m-re áll egy befagyott tavacska jegén. Csizmája és a jég közötti nyugalmi súrlódási együttható 0,05. Határozzuk meg azt a minimális időt, amely alatt kisétálhat a partra, ha megcsúszás nélkül lépked?
5A-44 Rakodórámpán láda fekszik. Ha a rámpa szöge 30°-os, akkor a láda megcsúszik. Amennyiben a csúszó láda alatt a lejtő hajlásszöge 20°-ra csökken, akkor a láda mozgása egyenletessé válik. Határozzuk meg a

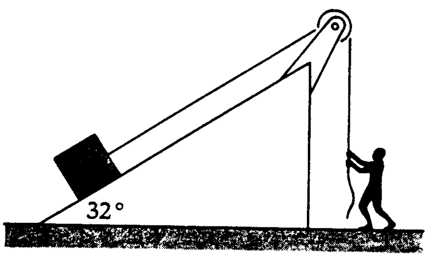
láda és a lejtő közötti csúszási és tapadási súrlódási együttható értékét!

5A-45 Egy 20°-os lejtőn a már mozgásba hozott test magára hagyva egyenletes sebességgel csúszik le. Mekkora a test és a lejtő közötti csúszó súrlódási együttható?

5B-46 5 kg tömegű test csúszik le a vízszinteshez képest 41°-ban hajló lejtőn. A test és a lejtő között a csúszási súrlódási együttható 0,3. a) Határozzuk meg a súrlódási erőt! b) Mekkora gyorsulással csúszik le a test?

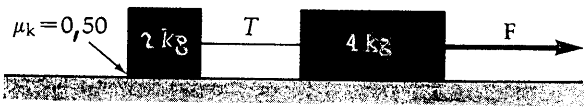
5A-47 A vízszintessel 60°-os szöget bezáró lejtőn egy test g/2 gyorsulással csúszik le. Mekkora a csúszó súrlódási együttható a test és a lejtő között?

5A-48 Az 5-44 ábrának megfelelően egy 400 N súlyú ládát állandó sebességgel eresztenek le egy lejtőn. A ládát tartó kötél párhuzamos a lejtő síkjával. Mekkora erővel húzza a munkás a kötelet, ha a láda és a lejtő között a csúszó súrlódási együttható 0,25? (A csiga tengelysúrlódása elhanyagolható.)



5-44 ábra
Az 5A-48 feladathoz

5B-49 Egy 15 m/s sebességgel haladó targoncán ládát szállítanak. A láda és a targonca platója közötti nyugalmi súrlódási együttható 0,4. Mekkora az a minimális út a targonca lefékezéséhez, amelynél a láda még nem csúszik meg?

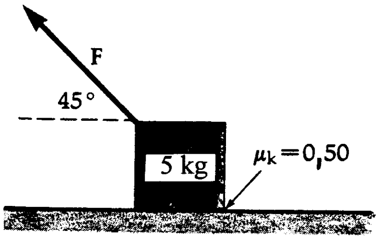


5-45 ábra
Az 5B-50 feladathoz

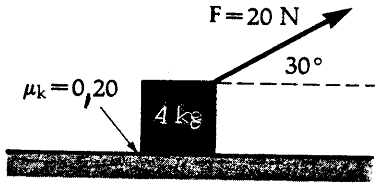
5B-50 Két, vízszintes síkon fekvő testet az 5-45 ábra szerint fonallal kötöttünk össze. A testek és a sík közötti csúszási súrlódási együttható 0,5. a) Mekkora vízszintes irányú **F** erővel mozgathatjuk a testeket 2 m/s^2 gyorsulással? b) Mekkora erő feszíti ezalatt az összekötő fonalat?

5B-51 Határozzuk meg, hogy az 5-46 ábrán látható elrendezésben mekkora **F** erő szükséges a doboz vízszintes sík menti egyenletes mozgatásához! (A csúszó súrlódási együttható 0,5.)

5B-52 Egy 4 kg tömegű testet az 5-47 ábrának megfelelően $F = 20$ N erővel húzunk. Mekkora a test gyorsulása, ha a test és a talaj közötti csúszó súrlódási együttható 0,2?



5-46 ábra
Az 5B-51 feladathoz



5-47 ábra
Az 5B-52 feladathoz

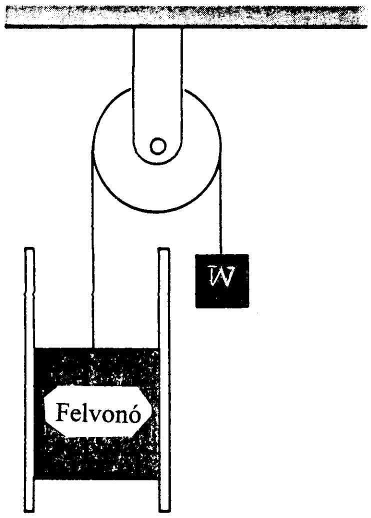
5B-53 Egy munkás 200 N súlyú megrakott ládát húz egyenletes sebességgel, 55 N erővel érdes, vízszintes talajon. Az erő iránya 35°-os szöget alkot a vízszintessel. a) Mekkora a talaj és a test közötti csúszó súrlódási együttható? b) Mekkora ugyanilyen irányú erővel lehetne a ládát 1,3 m/s^2 gyorsulással húzni?

5B-54 Egy körhinta 12 s alatt fordul körbe. A körhinta középpontjától 3 m távolságban 45 kg-os gyerek ül. a) Mekkora a gyorsulása? b) Mekkora vízszintes irányú súrlódási erő hat a gyerekre (székének sem támlája, sem kapaszkodója nincsen)? c) Mekkora minimális tapadási súrlódási együttható szükséges, hogy a gyerek ne csússzon meg?

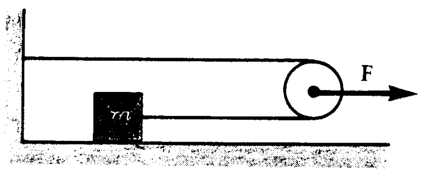
5B-55 Mekkora az 5-48 ábrán látható W súly, ha a 15000 N súlyú lift 1,2 m/s^2 gyorsulással mozog felfelé és a felvonószekrény és vezetősínei között állandó nagyságú, 900 N súrlódási erő hat? A csiga tömege elhanyagolható.

5B-56 Az 5-49 ábrán látható, vízszintes síkon fekvő 3 kg-os hasáb és a sík közötti súrlódási együttható 0,260. Mekkora **F** erő szükséges ahhoz, hogy a hasáb 1,2 m/s^2 gyorsulással mozogjon, ha a csiga tömege és a tengelysúrlódás elhanyagolható? (Megjegyzés: adott **F** erő esetében mekkora a kötélt feszítő erő?)

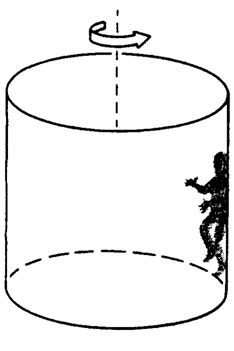
5B-57 Egy vidámparkban függőleges tengelyű, nagy méretű, belül üres henger forog (5-50 ábra). Az utasok úgy helyezkednek el, hogy nekitámasztják hátukat a henger belső falának. Meghatározott sebességet elérve a padlót leeresztik a bentlévők alól. Az utasok azonban a fal és a hátuk között ébredő súrlódási erő miatt nem csúsznak le. a) Rajzoljuk meg (a Földhöz rögzített koordinátarendszerben) egy, a falhoz szoruló ember vektorábráját. b) Határozzuk meg, hogy mekkora minimális μ_t tapadási együttható szükséges ahhoz, hogy az R sugarú hengerben v sebességgel utazó ember ne csússzon le!



5-48 ábra
Az 5B-55 feladathoz

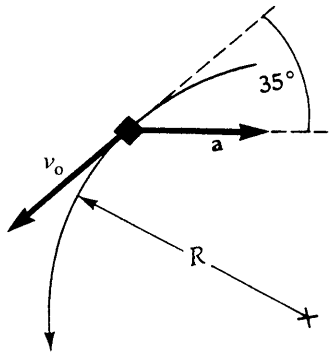


5-49 ábra
Az 5B-56 feladathoz



5-50 ábra
Az 5B-57 feladathoz

5B-58 Egy gépkocsi 80 m sugarú vízszintes körpályán mozog. Az 5-51 ábra azt a pillanatot mutatja, amikor sebessége éppen 10 m/s és a gyorsulása **a**. a) Mekkora a gépkocsi centripetális gyorsulása? b) Mekkora a tangenciális gyorsulás? c) Mekkora utat tesz meg a gépkocsi megállásig, ha érintő menti gyorsulása állandó? d) Az úttest vízszintes – azaz a kanyarban nem túlemelt a pálya. Mekkora minimális nyugalmi súrlódási együttható szükséges ahhoz, hogy az ábrán mutatott pillanatban a gépkocsi ne csússzon meg?



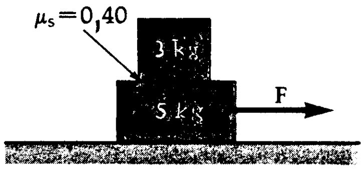
5-51 ábra
Az 5B-58 feladathoz

5B-59 Mutassuk meg, hogy a v_0 sebességgel haladó gépkocsi, ha a tapadási súrlódási együttható az út és a kerekek között μ_t, nem állítható meg csúszás nélkül $v_0^2 / 2g\mu_t$-nél rövidebb úton! (Vegyük észre: Mivel általában $\mu_k < \mu_t$, ha az autó megcsúszik, akkor a fékút nő. Emiatt vészhelyzetben is csak annyira érdemes a féket nyomni, hogy a kerekek még éppen ne blokkoljanak, s így az autó ne csússzon meg.)

5B-60 A $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ egyenletből kiindulva határozzuk meg az 5-19 ábrán látható rendszer gyorsulását, ha $M = 15$ kg, $m = 10$ kg és $\mu_k = 0{,}15$!

5.10 Newton harmadik törvénye

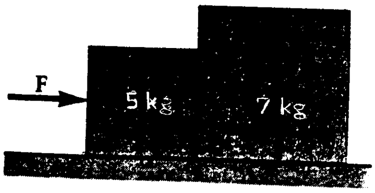
5B-61 Az 5-52 ábra szerinti elrendezésben a felső és az alsó hasáb között a tapadási súrlódási együttható 0,4, a vízszintes sík súrlódásmentes. Mekkora maximális vízszintes **F** erővel húzhatjuk az alsó testet, ha azt akarjuk, hogy a felső test ne csússzon meg rajta?



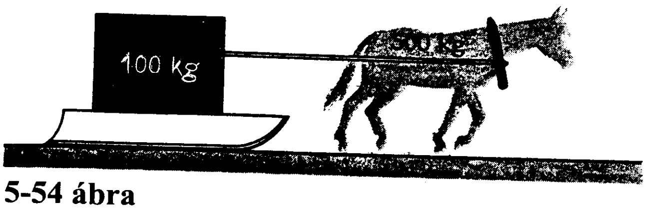
5-52 ábra
Az 5B-61 feladathoz

5B-62 Az 5-53 ábra szerint két érintkező hasáb fekszik a vízszintes, súrlódásmentes talajon. a) Mekkora vízszintes **F** erővel toljuk az 5 kg tömegű testet, hogy a rendszer 2 m/s^2 gyorsulással mozogjon? b) Mekkora erővel hat ezalatt a 7 kg-os hasáb az 5 kg-os testre?

5B-63 Egy 500 kg tömegű ló 100 kg tömegű szánt húz 1 m/s^2 gyorsulással (5-54 ábra). A szán és a talaj között 500 N súrlódási erő ébred. Határozzuk meg, hogy a) mekkora erő feszíti a kötelet, b) mekkora súrlódási erő hat a lóra! c) Igazoljuk, hogy az egész rendszert a Föld által kifejtett teljes súrlódási erő gyorsítja 1 m/s^2 gyorsulással!

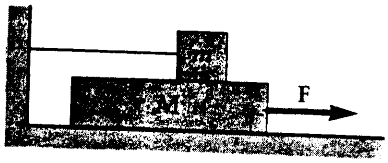


5-53 ábra
Az 5B-62



5-54 ábra
Az 5B-63

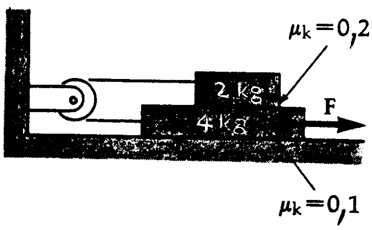
5B-64 Az 5-55 ábrán a csúszó súrlódási együttható minden felületen μ_k. Mekkora a vízszintes irányú **F** erő, ha az alsó test gyorsulása **a**?



5-55 ábra
Az 5B-64

További feladatok

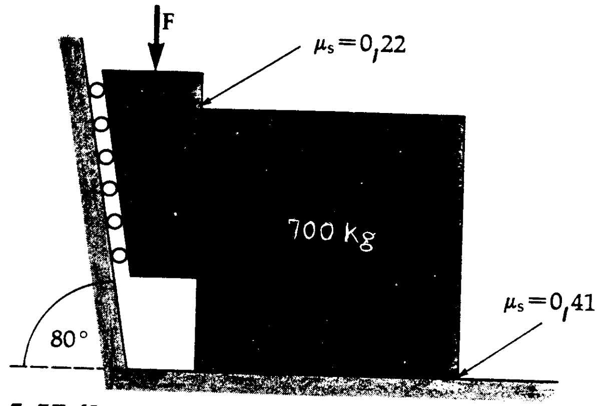
5C-65 Az 5-56 ábrán a 4 kg tömegű test az **F** erő hatására 0,5 m/s^2 gyorsulással mozog. a) Figyelembe véve az ábrán megadott csúszási súrlódási együtthatókat, határozzuk meg a kötélerőt és az **F** erő nagyságát!



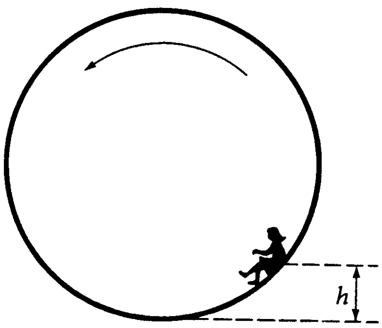
5-56 ábra
Az 5C-65

5C-66 Határozzuk meg, hogy az 5-57 ábra szerinti elrendezésben mekkora függőleges **F** erő szükséges a 700 kg-os kocka megmozdításához! Az ék súlya elhanyagolható és a görgők súrlódásmentesek.

5C-67 A vidámparki elvarázsolt kastélyban 2 m sugarú, vízszintes tengelyű henger percenként 10 fordulatot tesz meg. A henger felfelé emelkedő oldalán állandó h magasságban, nyugalmi helyzetben egy gyerek ül. A gyerek és a henger között a csúszási súrlódási együttható μ_k=0,40. Határozzuk meg a h magasságot.



5-57 ábra
Az 5C-66



5-58 ábra
Az 5C-67

5C-68 A gyorsulási autóversenyeken az álló helyzetből induló autóknak a lehető legrövidebb idő alatt kell megtenni a 400 m-es távot. A célvonalon átfutás sebességét a cél előtt és után egymástól 40 m távolságban felállított fotocellák segítségével mérik. Egy 3600 kg tömegű versenyautó 15 s alatt tette meg a távot és végsebessége a fotocellás mérés szerint 200 km/ó volt. Állandó gyorsulást feltételezve határozzuk meg a) a súrlódási erőt, b) az út és a kerekek közötti átlagos súrlódási együtthatót. (Azért használjuk az átlagos szót, mert a kerekek különösen a táv kezdeti szakaszán gyakran megcsúsznak.) c) Mekkora a két fotocella előtt való áthaladás pillanatnyi sebessége közötti különbség, ha a végsebességet a 40m/(fotocellák között töltött idő) formulával számítjuk?

5C-69 A feladat a gépkocsizás közben előforduló, két különböző helyzetben a szükséges maximális súrlódási erő összehasonlítása. Az első esetben egyenes úton v_0 kezdeti sebességgel haladó autót állandó a gyorsulással kívánunk lefékezni. A második esetben vízszintes síkú, r sugarú körpályán az előzővel megegyező v_0 kezdeti sebességgel haladó autót úgy kívánunk egyenletesen lefékezni, hogy a *fékút ugyanakkora* legyen, mint az előző esetben. Mutassuk meg, hogy a körpálya esetén az út és a kerekek közötti maximális súrlódási erő aránya az egyenes úton fellépő maximális súrlódási erőhöz

$$\sqrt{1+4\left(\frac{s}{r}\right)^2},$$

ahol s a fékút. (Ez egyben érthetővé teszi azt is, hogy miért kell a kanyarban óvatosan fékezni.) Útmutatás: Mi a kapcsolat az egyenes menti gyorsulás és a kanyarbeli tangenciális gyorsulás között?

5C-70 A v (m/s-ban mérve) sebességű légáram egy r (méterben mérve) sugarú gömbre $F = arv + br^2v^2$ erőt (newtonban mérve) gyakorol, ahol a és b a megfelelő SI-mértékegységekkel bíró állandók. Számértékük: $a = 3{,}1\times10^{-4}$, $b = 0{,}87$. Az összefüggés felhasználásával adjuk meg a saját súlya alatt eső vízcsepp végsebességét, ha a csepp sugara a) 10 μm, b) 100 μm és 1 mm. Az első és a harmadik esetben a másodfokú egyenlet megoldása nélkül is elég pontos eredményhez juthatunk, ha észrevesszük, hogy a légellenállást adó kifejezés melyik tagja domináns és a másikat elhanyagoljuk. d) Mekkora sugarú csepp esetén egyenlő a fenti két tag? e) Mekkora a d) esetében a csepp végsebessége?

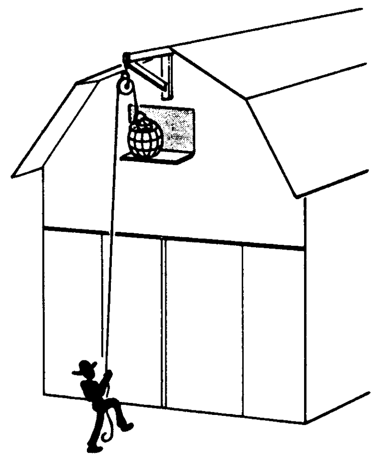
5C-71 900 kg tömegű gépkocsi 100 km/ó sebességgel száguld egy 350 m sugarú (túlemelés nélküli) kanyarban. a) Mekkora súrlódási erő hat a gépkocsira? b) Mekkora szögben kellene a vízszinteshez képest túlemelni az úttestet, hogy az adott sebességnél a súrlódási erő zérus legyen? c) Mekkora súrlódási erő hatna a b) esetben az 50 km/ó sebességgel haladó autóra? Megjegyzés: Milyen irányú lenne ez a súrlódási erő?

5C-72 A következő eseménysor egy, az 1920-as évekből származó klasszikus filmvígjáték részlete. Egy farmer kis láda téglát próbál leereszteni egy magtár felső ablakából az 5-59 ábrán látható csigás berendezéssel. Hirtelen nagyot rántva a kötélen a téglás láda lecsúszik az ablakdeszkáról. A farmer erősen szorítja a kötelet, s lóg rajta – sajnos azonban a téglás láda nehezebb nála, így miközben a láda lefelé mozog, felhúzza a farmert. A földbe ütköző ládának azonban kiszakad a feneke, így a téglák kiesnek. Ennek hatására a farmer lefelé kezd zuhanni, felrántva a láda maradványait,. Mikor a láda a csigához ér, darabokra törik és a lécdarabok visszahullanak a földön elterült gazdára. Az alábbi adatlista alapján határozzuk meg az esemény egyes részleteinek időtartamát! Az ablakdeszka 2 m-rel a csiga alatt és 10 m-rel a talaj felett helyezkedik el. A kötél súlyát hanyagoljuk el és legyen $g = 10$ m/s^2.

	tömeg
a farmer	80 kg
a megterhelt láda	100 kg
az üres láda	40 kg

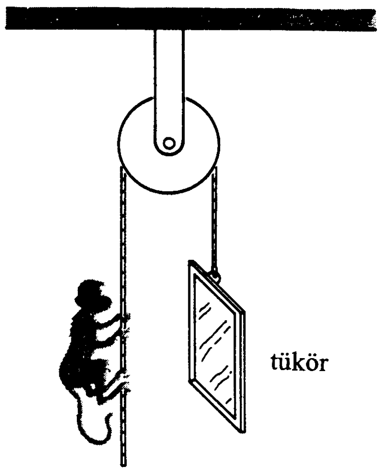
Megjegyzés: Néhány további feltevés is szükséges. Amikor a megterhelt láda a földbe ütközik, a farmer még felfelé mozog, s pusztán a gravitációs erő hatása alatt lassul le és esik vissza. Tegyük fel, hogy mind felfelé, mind lefelé elkerüli a csigát. A farmer végig szorosan fogja a kötelet. Tegyük fel, a törött láda elkezd felfelé mozogni és ő lefelé kezd esni, akkor a kötélben ébredő feszültség következtében sebessége 2/3 részére csökken. Végül tegyük fel, hogy a felfelé mozgó törött ládát a csiga azonnal megállítja, s a darabok szabadon esve hullanak le.

(Bár nem tartozik a feladathoz, elmondjuk, hogy a farmert egy végső méltatlanság is érte; ámikor végre elengedte a kötelet, akkor a ládát tartó kampó elég súlyos volt, hogy a kötelet magával rántva mindenestől az elkábult emberre zuhanjon.)



5-59 ábra
Az 5C-72 feladathoz

5C-73 További humoros illusztrációul szolgál a Newton-törvényekre a következő példa. Súrlódásmentes csigán átvetett, elhanyagolható tömegű kötél egyik végén egy majom, a másikra pontosan vele szembe, hogy lássa magát, egy a majommal egyenlő tömegű tükröt akasztottunk (5-60 ábra). Magyarázzuk meg, hogy miért marad mindig pontosan szemben a majom a tükörrel, ha nyugalmi helyzetből indulva felfelé vagy lefelé mászik?



5-60 ábra
Az 5C-73 feladathoz

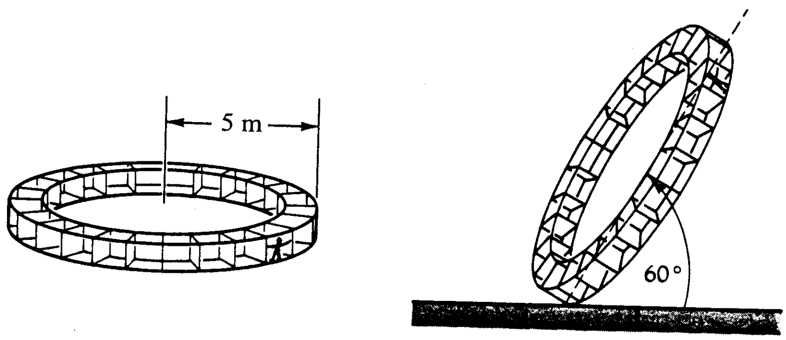
5C-74 Egy repülőgép, hogy az utasok számára a súlytalanság állapotát szimulálja, pusztán a gravitációs erő hatására parabolapályán kell hogy mozogjon (5-61 ábra). A parabolapálya felfelé és lefelé haladó ágát is kihasználva a súlytalanság állapota több mint 1 percig fenntartható. Némi egyszerűsítéssel a repülőgépre ható erők a következők:

(1) a gravitációs erő
(2) a légcsavarok húzóereje
(3) a légellenállás (pontosan a mozgás irányával ellentétesen)
(4) a levegő emelő ereje (a gép tengelyére merőlegesen)

a) Milyen feltételek teljesülnek a gravitációs pályán a vízszintes sebességösszetevőre? b) Vektorábrák alapján magyarázzuk meg, hogy miért nem esik a gép tengelye sem a felszálló, sem a leszálló ágban a mozgás irányába?

5C-75 Vidámparki körhinta körben elhelyezkedő kis cellákból áll, amelyekben az utasok a külső falnak támaszkodva állnak, mialatt a hinta körbejár (5-62 ábra). Az állandó szögsebességgel forgó szerkezet ezután lassan a vízszinteshez képest 60°-os szögbe emelkedik. Mekkora minimális sebességgel kell forognia az eszköznek ahhoz, hogy az 5 m sugarú pályán elhelyezkedő utasok tartóhevederek és súrlódás hiányában se zuhanjanak ki?

5-61 ábra
Az 5C-74 feladathoz.
A súlytalanság állapotának tanulmányozására NASA-űrhajósok lebegnek a gravitáció hatására parabola pályán mozgó repülőgépben.



5-62 ábra
Az 5C-75 feladathoz

Távlatok

"Nem látja a fától az erdőt", mondja a közmondás, ha a részletek gazdagsága úgy elborít bennünket, hogy nem vesszük észre a nagy egész szerkezetét, s nem tudjuk kiválasztani a környező tájat uraló óriástölgyeket. A fizikában is megtalálhatók a „faóriások", azok a központi szerepet játszó fogalmak és elméletek, amelyek egységessé és egyszerűvé teszik a részletekben oly gazdag tudományt. Éppen ezért a tanulásban is hasznos lesz, ha időnként visszatekintünk, s kiemeljük ezeket a fontos fogalmakat. Most az első ilyen visszatekintő magyarázat következik.

A természeti törvények megértéséhez először pontos és jól alkalmazható módszert adtunk a *mozgások* leírásához. Ennek legfontosabb elemei a következők.

(1) A helyzet, a sebesség és a gyorsulás definíciója.
(2) A kinematikai egyenletek.

Ezután, hála Newton zsenialitásának, értelmeztük, hogyan változtatják az erők a testek mozgását.

(3) A Newton törvények (különös fontosságú a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvény).

Hangsúlyoznunk kell azonban, hogy a $\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ törvényt csak akkor tudjuk alkalmazni, ha $\sum \mathbf{F}$ jelentését pontosan értjük. Ezért volt az eddigi feladatok megoldásának első lényeges lépése minden esetben a vizsgált testre ható erőket mutató vektorábra megrajzolása. A fizikai tartalom az erők analízisével deríthető fel. Ha az erőket ismerjük, a feladatok megoldása többnyire egyszerű matematikai eljárás. Összpontosítsunk tehát a feladatok megközelítésekor először arra, hogy milyen erők hatnak a vizsgált testre!

Egyes esetekben azonban nem ismerjük az erőket, vagy az erőhatások igen bonyolultak (például az ütközések esetén rendkívül rövid ideig hatnak), s közvetlenül nem írhatók fel. A következő fejezetekben két olyan lehetőséget mutatunk meg, amelyek ilyen esetekben alkalmazhatóak. Az ezekhez szükséges új elméletek és fogalmak az *energia- és impulzus- megmaradás törvénye*, ill. a *konzervatív erő és a potenciál fogalma*. Könyvünkben, amely bevezetés a fizikába, a mechanikai feladatok megoldásában három alapvető megközelítéssel élünk:

(1) A Newton-féle mozgástörvények.

(2) A munka, energia és impulzus fogalma.

(3) A konzervatív erő és a potenciál közötti összefüggés.

Figyeljünk ezekre az alapvető módszerekre, mert újra és újra megjelennek a különböző témák tárgyalása során. Tanuljuk meg, hogy hogyan választhatjuk ki egy adott feladathoz a leghatékonyabb alapelvet, mert ez sokat egyszerűsít a feladatok megoldásán. A megoldást kezdjük mindig a felhasznált *fizikai elv* kimondásával (s ne egy speciális képlet felírásával). Így gondolkoznak a fizikusok is, hiszen a jelenségek széles és változatos körét néhány nagyerejű elmélettel írják le.

4A-5 126 m/s
4A-7 $2{,}72 \times 10^{-1}$ m/s^2
4A-9 4,43 m/s
4A-11 a) 87,0 m/s^2 b) 8,88g
4B-13 a) $7{,}90 \times 10^5$ m/s^2 b) $5{,}58 \times 10^5$ m/s^2
4B-15 a) 18,3 m/s b) $6{,}85 \times 10^4$g
4B-17 0,821 m/s^2;62,4°
4B-19 a) 1,25 m/s^2 az út görbületi középpontja felé
b) −1,67 m/s^2
c) 1,85 m/s^2;64,4° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4B-21 a) 2,37 m/s^2 b) 4,96 m/s^2
4C-23 A válasz adott.
4C-25 0,851 m/s^2 b) 5,34 m/s^2
c) 5,41 m/s^2;9,04° a radiális irányhoz képest hátrafelé
4C-27 54,4 m/s^2

V. Fejezet

5A-1 a) 720 N b) 72 kg c) 200 N
d) 20 kg e) 720 N f) 200 N
5A-3 282 kg
5A-5 a) 4,00 m/s^2 b) 8,00 m
5A-7 a) 90 N b) 3 s
5A-9 a) 31,25 m b) 12,5 m/s
5A-11 14,8°
5A-13 1,63 m/s^2
5B-15 a) 26,53 N b) 53,1°a horizont alatt
c) egyenes vonalban
5B-17 b) 359 N
5B-19 a) 0,102 s b) 0,0255 m
5B-21 a) 6 m/s^2 b) 8100 N c) 5400 N
5A-23 a) 170 N b) 170 N
5A-25 1350 N
5A-27 6,39 N
5A-29 a) 0,300 m/s^2 b) 0,900 N
5B-31 $t = 2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\theta}{g}}$
5B-33 a) 2,05 kg b) 16,0 N
5B-35 a) 3,33 m/s^2 b) 24 N c) 0,55 m/s
5B-37 a) 4,90 m/s^2 b) 1,96 m/s^2
5B-39 4,70 kg
5A-41 a) 8,40 N b) 15,7 N
5A-43 7,00 s
5A-45 0,364
5A-47 0,732
5B-49 28,7 m
5B-51 35,25 N
5B-53 a) 0,204 b) 90,8 N
5B-55 20113 N
5B-57 b) gR/v^2
5B-59 A válasz adott.
5B-61 31,4 N
5B-63 a) 600 N b) 1100 N
5C-65 a) 4,92 N b) 16,7 N
5C-67 0,143 m
5C-69 A válasz adott.
5C-71 a) 1984 N b) 12,43° c) 1448 N
5C-73 A válasz adott.
5C-75 0,209 fordulat/s

VI. Fejezet

6A-1 $1{,}8 \times 10^5$ joule
6A-3 270 joule
6A-5 960 J
6A-7 a) 417 N/m b) 3,00 J
6B-9 b) $k_1/(k_1 + k_2)$
6A-11 38,5 m
6B-13 a) 60 J b) 10 J c) 7,75 m/s d) 3,16 m/s
6B-15 a) $2{,}25 \times 10^4$ N b) $1{,}33 \times 10^{-4}$ s
6A-17 a) $9{,}75 \times 10^4$ N/m b) 3,12 J
6A-19 1390 J
6A-21 0,029 J
6B-23 a) 6,86 m/s^2 b) 6,41 m/s
6A-25 124 J
6A-27 115 J
6B-29 a) 980 J b) 355 J
6B-31 1,68 m/s
6B-33 a) 104 J b) 88,2 J c) 15,8 J d) 1,98 N
6A-35 1,154 kW
6B-37 403,2 Ft
6A-39 12 kW
6B-41 141 kW
6A-43 39,2 kW
6A-45 42,92 kW
6B-47 35,26 kW
6A-49 4
6A-51 egyetlen csiga
6B-53 $1{,}76 \times 10^4$ N
6B-55 280 N
6C-57 22,0 J
6C-59 a) $mg\cos\left(\dfrac{s}{R}\right)$ b) mgR
6C-61 A válasz adott.
6C-63 $\dfrac{k_1 l_1 + k_2(L - l_2)}{k_1 + k_2}$
6C-65 $9{,}6 \times 10^5$ N/m^2
6C-67 0,303 m/s
6C-69 c) $k_2/(k_1 + k_2)$
6C-71 A válasz adott.
6C-73 242 J
6C-75 A válasz adott.

VII. Fejezet

7A-1 a) N·m^3 b) 2C/r^3
7A-3 a) $-3ax^2 + 2bx$ b) $x = b/3a$