Sztochasztika 2 ZH

2014. május 12. 18:00
Felsőbb matematika informatikusoknak D
Munkaidő: 60 perc.

1. a.) Pistike addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg ki nem jön a 6-os. Jelöljük N-nel a szükséges dobások számát. Mi N generátorfüggvénye?

   b.) Pistike kisöccse, Jancsika ragaszkodik hozzá, hogy Pistike minden dobása előtt ő is eljátszhassa ugyanezt – vagyis mindig csak akkor enged Pistikének egyet dobni, amikor ő maga 6-ost dobott. Jelölje M a Jancsika dobásainak számát (addig, amíg Pistike is meg nem dobja a maga 6-osát). Mi M generátorfüggvénye? Mennyi M várható értéke?

   c.) Móricka addig dobál egy szabályos dobókockával, amíg nem sikerül neki *kétszer egymás után* 6-ost dobni. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

2. Mórickának egy számítógépes kalandjátékban 70 egységnyi életereje van és 1000 szörnyet kell legyőznie. A játék csaták sorozata, ahol egyszerre mindig egy szörnnyel küzd. Móricka minden szörnyet le tud győzni legfeljebb 1 egységnyi életerő árán. Sőt, minden szörnyet $\frac{9}{10}$ valószínűséggel életerő-veszteség nélkül győz le, és csak $\frac{1}{10}$ valószínűséggel veszít egy egységnyi életerőt, az előzményektől függetlenül. Adjunk nagy eltérés becslést annak valószínűségére, hogy Mórickának sikerül a 100 szörny legyőzése, mielőtt az életereje elfogyna.

   Tipp: Jelöljük X_1-gyel azt a véletlen számot, hogy hány egységnyi életerejébe kerül Mórickának az első szörny legyőzése. Milyen is lesz X_1 eloszlása?

   Segítség: A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramér féle rátafüggvénye
   $$I(x) = x \ln \frac{(1-p)x}{p(1-x)} - \ln \frac{1-p}{1-x}.$$
   A p paraméterű pesszimista (vagyis 0-tól induló) geometriai eloszlás Cramér féle rátafüggvénye
   $$I(x) = x \ln \frac{x}{(1-p)(1-x)} - \ln(p(1-x)).$$
   A λ paraméterű Poisson eloszlás Cramér féle rátafüggvénye
   $$I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda.$$

3. Egy hivatalban legfeljebb 4 ügyfél állhat sorban egy ügyintézőnél, beleértve azt is, akinek az ügyét éppen intézi. Az ügyintézőt nyomasztja, ha sok a munka: minél többen várnak rá, annál lassabban dolgozik. Ha az éppen soron lévőn kívül nem áll sorba senki, akkor a soron lévő üggyel átlag 3 perc alatt végez, ám ha egyvalaki vár rá, akkor ez az érték már 4 perc, ha ketten várnak, akkor 5 perc, ha pedig hárman várnak, akkor 6 perc. Az ügyfelek az ügyintézéstől és az előzményektől függetlenül, exponenciális eloszlású véletlen időközönként érkeznek, óránként átlag 15-en, kivéve, ha már 4-en vannak, mert akkor a portás nem enged be többet, és aki érkezne, elkullog.

   Jelölje $X(t)$ a bent lévő ügyfelek számát a t időpontban ($t \geq 0$). Az időt mérjük percben. Modellezzük $X(t)$-t folytonos idejű Markov lánccal!

   a.) Adjuk meg az állapotteret és a Markov lánc gráf-reprezentációját.

   b.) Adjuk meg az infinitezimális generátort.

   c.) Keressük meg a stacionárius eloszlást.

   d.) Hosszú távon hány ügyet intéz el az ügyintéző óránként?