Kalkulus

Sáfár Orsolya

Lineáris egyenletrendszerek

Lineáris egyenletrendszerek - Bevezető példák

Lineáris egyenletnek nevezzük azokat az egyenleteket, ahol az ismeretlenek csak úgy fordulnak elő, hogy valamilyen konstanssal (együthatóval) meg vannak szorozva, és a szorzatok össze vannak adva. Ha több ismeretlen és egyenlet is van, akkor egyenletrendszerről beszélünk.

Oldjuk meg az alábbi három lineáris egyenletrendszert:

a, $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ x & - & y & = & 0 \end{array}$$

b, $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}$$

c, $$\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 1 \\ 2x & + & 2y & = & 3 \end{array}$$

Bevezető (szép) példa

Oldjuk meg az alábbi háromismeretlenes egyenletet a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} x + 3y + 2z &= 12 \\ -2x - 4y - 5z &= -20 \\ -3x - 5y - 4z &= -20 \end{aligned}$$

A favágó módszer az lenne, hogy kifejezzük valahogy az egyik ismeretlent a többi segítségével, majd visszahelyettesítjük. A kapott kétismeretlenes egyenletrendszerből pedig ismét kifejezzük az egyik ismeretlent.

A lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja

Vegyük észre, hogy a fenti három egyenlet felfogható úgy is, hogy két darab három elemű oszlopvektor legyen egyenlő, azaz

$$\begin{pmatrix} x & + & 3y & + & 2z \\ -2x & - & 4y & - & 5z \\ -3x & - & 5y & - & 4z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Továbbá a baloldal felírható az ismeretlenekből álló oszlopvektor és az együttható mátrix szorzataként:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -5 \\ -3 & -5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -20 \\ -20 \end{pmatrix}$$

A lineáris egyenletrendszerek mátrix alakja - folyt.

Hagyományosan az együtthatómátrixot A-val, a jobboldalt b-vel jelöljük, míg az ismeretleneket tartalmazó vektort x-szel.
Azaz a fenti egyenletet

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$$

alakba írhatjuk, ahol

- $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$-es mátrix, amely az együtthatókból áll. Annyi sora van, ahány egyenletünk, és annyi oszlopa van, ahány ismeretlenünk. A neve együtthatómátrix.
- $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ vektornak annyi eleme van, ahány ismeretlen. Célunk, hogy meghatározzuk ezen ismeretlenek értékeit.
- b egy n hosszú (azaz ahány egyenletünk van) számokból álló vektor. A b vektort szokás jobboldalnak nevezni.

A lineáris egyenletrendszerek megoldása

$$\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$$

Ezek szerint ha beszoroznánk A inverzével, akkor kész is lennénk, hiszen kifejeznének az ismeretleneket tartalmazó x vektort. Viszont inverzet csak négyzet alakú mátrixokra definiáltunk, és azt is tudjuk, hogy nem mindegyik mátrixnak van.

Az inverzzel a legnagyobb baj mégis az, hogy sok idő kiszámolni és emellett numerikusan pontatlan.

A Gauss-eliminació

Ezért a megoldást Gauss-eliminációval határozzuk meg. Ennek célja, hogy a kibővített együtthatómátrixot (az együttható mátrix mögé írjuk a b vektort) felső-háromszög alakra hozza. Voltaképpen ez az ismeretlen kifejezésének felel meg a többi segítségével, de az összes ismeretlenre egyszerre elvégezzük.

A Gauss-elimináció lépései a elemi sorműveletek, azaz

- két sor(=egyenlet) felcserélése
- egy sor(=egyenlet) konstansszorosának hozzáadása egy másik sorhoz(=egyenlethez).

A Gauss-eliminació sematikusan

Az algoritmus menete sematikusan, 4×4-as együtthatómátrixra:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * \end{array}\right)$$

Innen a visszahelyettesítéskor fordított sorrendben, lentről felfelé haladva fejezzük ki az ismeretleneket.

A Gauss-eliminació, első példa

Induljunk ki az eredeti együtthatómátrixból. Első lépésként az első oszlop főátló alatti elemeit szeretnénk kinullázni, azaz x-et elimináln egy kivételével az összes egyenletből.

Ezen célból az első sor (egyenlet) kétszeresét adjuk hozzá a második sorhoz (egyenlethez) és az első sor (egyenlet) háromszorosát a harmadik sorhoz (egyenlethez).

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ -2 & -4 & -5 & -20 \\ -3 & -5 & -4 & -20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

A Gauss-eliminació, első példa

Ezzel az első lépés kész, itt tartunk:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right)$$

Most a második oszlop, azaz az ismeretlen y eliminálása következik. Adjuk tehát az (új!) második sor mínusz kétszeresét a harmadikhoz:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 4 & 2 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

ezzel a változók kifejezésével (a felső háromszög alakkal) készen vagyunk, most jön a visszahelyettesítés.

A Gauss-eliminació, első példa

A felső háromszög mátrixunk sorai egy-egy egyenletnek felelnek meg.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 8 \end{array}\right)$$

Visszafelé haladva: $4z = 8$, innen $z = 2$. Az utolsó előtti sor: $2y - z = 4$, azaz $2y - 2 = 4$, innen $y = 3$. Az első sor: $x + 3y + 2z = 12$, azaz $x + 9 + 4 = 12$, innen $x = -1$.

A Gauss-eliminació, második példa

Vegyük a következő lineáris egyenletrendszert:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ -7x & + & 7y & - & z & = & -7 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

A Gauss-eliminació - példa

Első lépésben mindig az első oszlop főátló alatti elemeit nullázzuk ki, és ehhez az első sort használjuk. Adjuk tehát hozzá az első sor hétszeresét a második sorhoz, és az első sor mínusz négyszeresét a harmadik sorhoz.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -7 & 7 & -1 & -7 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right) \sim$$

A második lépésben a második oszlop főátló alatti elemeit szeretnénk nullázni. Ehhez az új második sort használjuk (az elsőt nem lehet, mert elrontaná a már kész nullákat!). Adjuk hozzá az második sor felét a harmadikhoz!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

A Gauss-eliminació - példa

A Gauss-eliminació ezzel véget ért, mert elértük a felső háromszög alakot, hiszen minden főátló alatti elem nulla.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Vizsgáljuk meg a kapott egyenleteket! Ha visszaírjuk mindent a régi egyenlet alakba, akkor azt kapjuk, hogy az első sor a $x + 3y + z = 5$ egyenletnek felel meg, a második a $28y + 6z = 28$-nak, míg a harmadik a $0 = 3$-nak. Ez utóbbi ellentmondás, így az egyenletrendszerünknek nincs megoldása.

Mikor ér véget az elimináció?

Ha az eliminálás folyamán főátlóba 0 kerül, azon sorcserékkel (ami két egyenlet sorrendjének megváltoztatása) esetleg segíthetünk. Tekintsük a

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & 3z & = & 1 \\ x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ 3x & + & & & 2z & = & 2 \end{array}$$

lineáris egyenletrendszert. Ebben az esetben ha a kibővített együtthatómátrixban megcseréljük az első és a második sor (egyenletet), akkor tudjuk folytatni az eljárást.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació és a rang

De mi a helyzet, ha nem találunk megfelelő sort, mert minden elem 0 a főátló alatt? Ilyenkor például az eljárás az alábbi alakkal érhet véget:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{array}\right)$$

Itt a főátlóban előfordulhatnak is 0-k, és az utolsó néhány sorban már csak 0-k szerepelnek. **Az A mátrix nem csupa 0 együtthatóból álló sorainak száma megegyezik az érdemi egyenletek számával.** Ezt a számot nevezik az A mátrix rangjának, jele r. Ha ez nem egyezik meg az ismeretlenek számával (n-el), akkor vagy nincs megoldás, vagy sok megoldás van. Ebből az is kiderült, hogy egy lineáris egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha a háromszögalaknál nincs csupa 0 sor.

Gauss-elimináció, harmadik példa

Oldjuk meg

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 3y & + & z & = & 5 \\ -7x & + & 7y & - & z & = & -1 \\ 4x & - & 2y & + & z & = & 3 \end{array}$$

egyenletrendszert Gauss-elimináció segítségével!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ -7 & 7 & -1 & -1 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & -14 & -3 & -17 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Gauss-eliminació, harmadik példa

Vizsgájuk meg a kapott felső-háromszögmátrixot!

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 28 & 6 & 34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

A mátrix rangja $2 \neq 3$, így a megoldás felírásához szükségünk lesz paraméterre.

Gauss-elimináció, harmadik példa

A visszahelyettesítésnél először z értékét (az utolsó ismeretlent) kellene kiszámítanunk. Erre most nincs egyenletünk. Ezért legyen $z = t$, ahol t egy tetszőleges valós paraméter.

Innen a következő sorból: $28y + 6t = 34$, azaz $y = \frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t$.

Ezek után az első sorból: $x + 3\left(\frac{34}{28} + \frac{-6}{28}t\right) + t = 5$, azaz $x = \frac{38}{28} + \frac{-10}{28}t$.

Ezen számhármas bármely $t \in \mathbb{R}$-re megoldja az egyenletrendszert. Például a $t = 0$ paraméterértékhez tartozó megoldás az $x = \frac{38}{28}$, $y = \frac{34}{28}$, $z = 0$.

A megoldások számáról

Ha n darab ismeretlen van az egyenletrendszerben és az együtthatómátrix rangja r, ahol $r < n$, akkor két esetet különböztetünk meg.

- Ha a kibővített együtthatómátrix valamelyik sorában csupa 0 együttható van, és utolsó oszlopában nem 0 áll, akkor ellentmondásra jutottunk és nincs megoldása a feladatnak.
- Ha minden olyan sorban, ahol csupa 0 együttható szerepel az utolsó oszlopban is 0 van (azaz nincs ellentmondás az egyenletek között), akkor végtelen sok megoldás van. Ilyenkor minden hiányzó egyenlet egy szabad paramétert jelent a megoldásban. A megoldások visszahelyettesítéssel írhatóak fel, összesen $n - r$ darab szabad paraméterrel.

Determináns meghatározása elemi sorműveletekkel

Emlékeztetőül: egy mátrixon elvégzett alábbi sorműveleteket nevezzük elemi sorműveletnek:

- Két sor felcserélését
- Egy sor konstansszorosának hozzáadását egy másik sorhoz

A múlt órái állítás szerint a sorcsere a determinánst -1-szeresre változtatja, míg a második művelet a determináns értékét nem változtatja.

Ezek szerint az elvégzett műveleteket gondosan könyvelve a determináns elemi sorműveletekkel is meghatározható, ha közben a determinánst háromszögalakra hozzunk, mivel a háromszög mátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata.

Mivel egy lineáris egyenletrendszer akkor oldható meg egyértelműen, ha a háromszögalaknál nincs 0 a főátlóban, ez négyzetes mátrixoknál azt jelenti, hogy a determináns nem lehet 0.

Példa

Számítsuk ki újra a múlt órai példa determinánsunkat! Első lépésben vonjuk le az első sor egyszeresét a második sorból!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Most vonjuk ki az első sor háromszorosát a harmadik sorból!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix}$$

Példa - folyt.

Végül vonjuk le a második sor másfélszeresét a harmadik sorból!

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Mivel egy háromszögmátrix determinánsát kell meghatároznunk, ez a múlt órai állítás szerint a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $1 \cdot 2 \cdot (-5) = -10$.