3. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1998/99 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Adja meg összes olyan komplex számot, melyre $z^3 + \dfrac{1}{j^3} = 0$.

MO. $\frac{1}{j^3} = \frac{1}{-j} = j$ így $z^3 + \frac{1}{j^3} = 0$ iff $z^3 = -j$ iff $z = j$ vagy $z = je^{j2\pi/3} = e^{j7\pi/6}$ vagy $z = je^{j4\pi/3} = e^{j11\pi/6}$

2. Határozza meg a következő határértékeket!

a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{n}\right)^n$ b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(1 - \dfrac{1}{2\,n^2}\right)^{n^2}$

MO. a) 0 , mert $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{n} \longrightarrow \dfrac{1}{2}$ miatt van $q < 1$, hogy elég nagy n–re $\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{n}\right)^n \le q^n \longrightarrow 0$.

b) $\sqrt{1/e}$, mert az $\left(1 + \dfrac{c}{n}\right)^n \longrightarrow e^c$ részsorozata $c = -1/2$–al.

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+} \ln(x+1) \cdot \ln x = ?$

MO. $\ln(x+1) \cdot \ln x = \dfrac{\ln(x+1)}{x} \cdot x \ln x \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0$ mert $\dfrac{\ln(x+1)}{x} \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 1$ és $x \ln x \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0$.

VAGY L'Hospitallal: $\ln(x+1) \cdot \ln x = \dfrac{ln\,(x+1)}{\frac{1}{\ln x}} \sim \dfrac{\frac{1}{x+1}}{-\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x}} = -\dfrac{1}{x+1} \cdot x \ln^2 x \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0$

4. Egyenletesen folytons-e az $f(x) = x$ függvény a $[0, \infty)$ intervallumon?

MO. Igen, mert a definícióból tetszőleges $\varepsilon > 0$–hoz a $\delta = \varepsilon$ jó választás, hiszen: $\forall\, x, y \in [0, \infty)$–re $|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon$ ha $|x - y| < \varepsilon$. VAGY: $f'(x) = 1$ korlátos az egész intervallumon.

5. Adjon meg egy olyan nem üres intervallumot, ahol az $f(x) = x^5 - 80x$ függvény invertálható!

MO. $f'(x) = 5x^4 - 80 = 0 \rightsquigarrow x^4 = 16 \rightsquigarrow x = \pm 2$, így $x > 2$ és $x < -2$ esetén szigorúan monoton növő, $[-2, 2]$–n szigorúan monoton csökkenő, tehát ezeken az intervallumokon invertálható.

6. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = ?$

MO. $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2x}{2}\, dx = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\, dx + \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot 2\pi + \frac{1}{2} \cdot \left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_0^{2\pi} =$
$= \pi + 0 = \pi$.