ANALÍZIS 1.	**II. ZÁRTHELYI**	**2015. november 19.**
Mérnök informatikus szak	β-variáns	Munkaidő: 50 perc

1. feladat (11 pont)
Hol és milyen típusú szakadása van az

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x(x-1)}$$

függvénynek?

A arctg függvény mindenhol folytonos, és folytonos függvények kompozíciója valamint hányadosa is folytonos, amennyiben a nevező nem 0 (**2p**), így a függvénynek csak az $x = 0, 1$ pontokban van szakadása (**1p**).
A arctg függvény korlátos (**2p**), így $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ (**1p**), tehát az $x = 0$ pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van. (**1p**)

$$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{y\to\pm\infty} \operatorname{arctg} y = \pm\frac{\pi}{2}, \qquad \textbf{(3p)}$$

tehát az $x = 1$ pontban a függvénynek véges ugrása van. (**1p**)

---

2. feladat (11 pont)
Adja meg az alábbi függvény deriváltfüggvényét, valamint érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 0$ pontban:

$$f(x) = \sqrt[5]{x^3}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^2.$$

$x \neq 0$ esetén a szorzat-, illetve összetett függvény deriválási szabályából

$$f'(x) = \frac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^2 + 2\sqrt[5]{x^3}\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}\operatorname{ch}\sqrt[5]{x}\,. \qquad \textbf{(4p)}$$

$$f'(0) \stackrel{\textbf{1p}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{x^3}\left(\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}\right)^2}{x} \stackrel{\textbf{2p}}{=} \left(\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}\sqrt[5]{x}}{\sqrt[5]{x}}\right)^2 \stackrel{\textbf{1p}}{=} \left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{sh} y}{y}\right)^2 \stackrel{\textbf{1p}}{=} \left(\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{ch} y}{1}\right)^2 = 1.$$

Mivel $f(0) = 0$, így az érintő egyenlete $y = x$ (**2p**)

---

3. feladat (6+5 pont)
Számolja ki az alábbi határértékeket

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{\operatorname{tg}^2(3x)}, \qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}}.$$

---

a) $\frac{0}{0}$ típusú határérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{ch}(2x)-1}{\operatorname{tg}^2(3x)} \overset{\mathbf{2p}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\operatorname{sh}(2x)}{2\operatorname{tg}(3x)\frac{3}{\cos^2(3x)}} \overset{\mathbf{2p}}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(2x)}{\sin(3x)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{2\operatorname{ch}(2x)}{3\cos(3x)} \overset{\mathbf{1p}}{=} \frac{2}{9}$$

b) 1^∞ típusú határérték:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\frac{1}{\cos x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln(\sin x)}{\cos x}} \overset{\mathbf{2p}}{=} e^{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\sin x}} \overset{\mathbf{1p}}{=} e^0 = 1.$$

---

4. feladat (9 pont)
Hol konvex, illetve konkáv az $f(x) = (x^2+4x+2)e^{-2x}$ függvény?

$D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (2x+4)e^{-2x} - 2(x^2+4x+2)e^{-2x} = (-2x^2-6x)e^{-2x}$, $f''(x) \overset{\mathbf{2p}}{=} (-4x-6)e^{-2x} - 2(-2x^2-6x)e^{-2x} = (4x^2+8x-6)e^{-2x} = 0$, az $x_{1,2} = \dfrac{-8\pm\sqrt{64+96}}{8} = -1 \pm \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ pontokban (**2p**), vagyis a függvény a $\left[-\infty, -1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ valamint a $\left[-1+\frac{\sqrt{10}}{2}, \infty\right]$ intervallumokon konvex, a $\left[-1-\frac{\sqrt{10}}{2}, 1+\frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ intervallumon pedig konkáv. (**3p**)

---

5. feladat (8 pont)
Létezik-e az
$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 4}{x - 2}$$
függvénynek minimuma, illetve maximuma a $[0, 3]$, valamint a $[3, 6]$ intervallumon? Ha igen, mennyi?

$\lim\limits_{x \to 2\pm} \dfrac{x^2 + 2x - 4}{x - 2} = \pm\infty$, vagyis az $[0, 3]$ intervallumon nincs se minimmum, se maximum. (**3p**)
A $[3, 6]$ intervalllumon a függvény folytonos, tehát Weierstrass 2. tétele miatt felveszi a szélsőértékeit (**1p**).
$$f'(x) = \frac{(2x + 2)(x - 2) - (x^2 + 2x - 4)}{(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 4x}{(x - 2)^2} = 0, \qquad \textbf{(1p)}$$
tehát lokális szélsőértékek a $0 \notin [3, 6]$, $4 \in [3, 6]$ pontokban lehetnek (**1p**). $f(3) = 11$, $f(4) = 10$, $f(6) = 11$, vagyis a minimum 10, a maximum pedig 11 (**2p**).