Méréselmélet 1. zárthelyi pótlás 2021. március 24. (120 perc)

1. Két konstans érték között ugrásszerűen váltakozó jelet detektálunk zajos megfigyelésekre alapozva. A megfigyelések független, Gauss eloszlású valószínűségi változók a és $3a$ $(a = 1)$ várható értékkel, $\sigma_n = 0.6$ szórással. H_0 jelzi azt a hipotézist, hogy a jel a értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_0 = 0.1$. H_1 jelzi az a hipotézist, hogy a jel $3a$ értékű. Ennek a priori valószínűsége $P_1 = 0.9$. A feltételes valószínűségsűrűség függvények:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-a)^2}{2\sigma_n^2}} \qquad\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma_n}e^{-\frac{(z-3a)^2}{2\sigma_n^2}}$$

A költségek: $C_{10} = C_{01} = 10$; $C_{00} = C_{11} = 2$. Az elsőként megfigyelt érték $z_0 = 1.5a$. Hogyan dönt (max. 3 pont)? Elvégzünk egy második mérést is, aminek eredménye $z_1 = 2.5a$. Erre a mérésre alapozva hogyan dönt (max. 1 pont)? Hogyan dönt, ha mindkét megfigyelt értéket figyelembe veszi (max. 2 pont)? Mi a feltétele annak, hogy a döntési küszöb $2a$ legyen (max. 1 pont)?

Megoldás:

A megfigyelt értéket behelyettesítjük a log-likelihood arány függvénybe, és ha $\lambda(z) > ln\eta$, akkor a döntés H_1, ha $\lambda(z) < ln\eta$, akkor a döntés a H_0.

$$\eta = \frac{0.1(10-2)}{0.9(10-2)} = \frac{1}{9},$$

N együttes megfigyelés esetén $\lambda(z) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - 3a)^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k - a)^2 = \frac{2Na}{\sigma^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - 2a\right] \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} ln\eta$

Ebből az előfeldolgozás és a küszöb $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{\sigma^2}{2Na}ln\eta + 2a,$

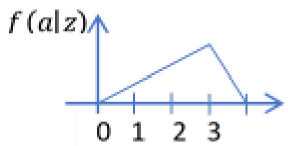
$$N = 1\text{-re } \frac{\sigma^2}{2a}ln\eta = -\frac{0.36}{2}ln9 = -0.3955,\ N = 2\text{-re } \frac{\sigma^2}{4a}ln\eta = -\frac{0.36}{4}ln9 = -0.19775$$

$$1.5 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.3955 + 2 = 1.6045 \ \rightarrow\ H_0,\ \ 2.5 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.3955 + 2 = 1.6045 \ \rightarrow\ H_1$$

$$\frac{1.5 + 2.5}{2} = 2 \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} = -0.19775 + 2 = 1.80225 \ \rightarrow\ H_1$$

A döntéseink rendre: H_0, H_1, H_1. $\frac{\sigma^2}{2Na}ln\eta = 0$ kell ahhoz, hogy a döntési küszöb $2a$ legyen. Ez $\eta = 1$ esetén teljesül, azaz ha például változatlan költségek mellett $P_0 = P_1 = 0.5$.

2. Az ábrán látható a posteriori sűrűségfüggvény feltételezésével számítsa ki a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő (max. 3 pont), a minimális átlagos abszolút hibájú becslő (max. 1 pont), és a maximum a posteriori becslő (max. 1 pont) számértékét! Hogyan minősítené az egyes becslőket (max. 1 pont)?



Megoldás:

A háromszög magassága a görbealatti területből számítható: $\frac{3*m}{2} + \frac{1*m}{2} = 1$. A sűrűségfüggvény $0 - 3$ között: $\frac{a}{6}$, $3 - 4$ között $2 - \frac{a}{2}$.

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} af(a|z)da = \int_0^3 \frac{a^2}{6}da + \int_3^4 \left(2a - \frac{a^2}{2}\right)da = \frac{a^3}{18}\Big]_0^3 + \left(a^2 - \frac{a^3}{6}\right)\Big]_3^4 = \frac{3}{2} + 16 - 9 - 10\frac{2}{3} + \frac{9}{2} = 2\frac{1}{3},$$

$$\hat{a}_{ABS}: \frac{x^2}{12} = 0.5 \rightarrow x = \sqrt{6},\ \ \hat{a}_{ABS} \cong 2.45,\ \hat{a}_{MAP} = 3.$$

A minősítés eszköze a becslő varianciájának megadása: pl. $var(\hat{a}_{MS}) = E[a^2] - \hat{a}_{MS}{}^2$

3. Additív, Gauss eloszlású fehér zajjal terhelt DC szint mérését végezzük mérési sorozatra alapozva: $z_k = a + w_k,\ \ k = 0,1,\dots,N-1$, ahol a w_k korrelálatlan minden mintával, és valószínűség sűrűségfüggvénye $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$. Vezesse le a minimális varianciájú, torzítatlan becslő kifejezését erre az esetre (max. 3 pont)! Vezesse le azt is, hogy hogyan módosulnak ezek a kifejezések színes Gauss zaj ($\mathcal{N}(\mathbf{0},\boldsymbol{C})$) esetén? (max. 4 pont)

Megoldás:
A csatornakarakterisztika:

$$f(\boldsymbol{z}|a) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{\frac{N}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=0}^{N-1}(z_k-a)^2},$$

amelynek maximumhelyénél kapjuk az *a* paraméter Gauss-Markov becslőjét:

$$\left.\frac{\partial\, ln\, f\,(\boldsymbol{z}|a)}{\partial a}\right|_{\hat{a}=\hat{a}_{ML}=\hat{a}_{GM}} = \frac{N}{\sigma^2}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k - a\right] = 0,$$

ahonnan

$$\hat{a}_{ML} = \hat{a}_{GM} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,$$

azaz lineáris megfigyelési egyenlet és Gauss eloszlású csatorna zaj esetén a legjobb (Gauss-Markov) becslő az egyszerű átlagolás. Ez torzítatlan, mert $E\{\hat{a}_{ML}\}$=a, valamint minimális varianciájú, mert

$$\frac{\partial lnf(z;a)}{\partial a} = I(a)(g(z)-a)$$

struktúrájú:

$$\hat{a}_{ML} = g(z) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} z_k,\ \ var\{\hat{a}_{ML}\} = I^{-1}(a) = \frac{\sigma_n^2}{N}.$$

$$f(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{N}{2}}|\boldsymbol{C}|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})},$$

$$\left.\frac{\partial\, ln\, f\,(\boldsymbol{z}|\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{a}}\right|_{\hat{\boldsymbol{a}}=\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}=\hat{\boldsymbol{a}}_{GM}} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{a}}\left[-\frac{1}{2}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a})\right] = \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}(\boldsymbol{z}-\boldsymbol{U}\boldsymbol{a}) = 0,$$

$$\hat{\boldsymbol{a}}_{ML} = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{z},\ cov(\hat{\boldsymbol{a}}_{ML}) = [\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}$$

4. Egy autonóm diszkrét idejű rendszer állapotátmenet mátrixa: $\boldsymbol{A} = diag < 1, -1 >$, megfigyelési mátrixa $\boldsymbol{C} = [0.3, 0.3]$. Megfigyelőt tervezünk. Tegyen javaslatot a $\boldsymbol{G}$ mátrix elemeinek értékére (A $diag <\dots>$ jelölés diagonális mátrixot jelöl, melynek csak a főátlóban vannak nullától különböző elemei.) (max. 4 pont)!

Megoldás:

$$(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{G}\boldsymbol{C})^2 = 0,\ \boldsymbol{G}\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix}[0.3 \quad 0.3] = \begin{bmatrix} 0.3g_0 & 0.3g_0 \\ 0.3g_1 & 0.3g_1 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1-0.3g_0 & -0.3g_0 \\ -0.3g_1 & -1-0.3g_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1-0.3g_0 & -0.3g_0 \\ -0.3g_1 & -1-0.3g_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (1-0.3g_0)^2 + 0.9g_0g_1 & -0.3g_0 + 0.09g_0^2 + 0.3g_0 + 0.9g_0g_1 \\ -0.3g_1 + 0.09g_1^2 + 0.3g_1 + 0.9g_0g_1 & (1+0.3g_1)^2 + 0.9g_0g_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1-0.6g_0 + 0.09g_0^2 + 0.9g_0g_1 & 0.09g_0^2 + 0.9g_0g_1 \\ 0.09g_1^2 + 0.9g_0g_1 & 1-0.6g_1 + 0.09g_1^2 + 0.9g_0g_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$1 - 0.6g_0 = 0,\ 1 - 0.6g_1 = 0$$

ahonnan $g_0 = \frac{1}{0.6} \cong 1.67,\ g_1 = -\frac{1}{0.6} \cong -1.67$

5. Mérendő egy ismert jel ismeretlen A amplitúdója N megfigyelésre alapozva: $z(n) = Acos\left(\frac{2\pi}{N}n\right) + w(n),\ n = 0,1,\dots N-1$. Az ismeretlen A paraméter és a $w(n)$ zaj Gauss eloszlású, ismert várható értékkel és

varianciával. $E\{A\}=\mu_A$, $var\{A\}=\sigma_A^2$, $E\{w(i)\}=0$, $cov\{w(i),w(j)\}=\sigma_w^2\delta_{ij}$, $cov\{A,w(i)\}=0$, $\forall i$-re, $\forall j$-re. Használja a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját, és vezesse le a paraméter legjobb MAP $(\hat{A}_{MAP})$ becslését (max. 4 pont) és minőségjellemzőjét (max. 2 pont)! Határozza meg a minimális átlagos négyzetes hibájú becslő $(\hat{A}_{MS})$ értékét is (max. 1 pont)!

Megoldás:

Használjuk a Bayes becslést, és a maximum a posteriori (MAP) becslés technikáját! Ennek általános alakja:

$$\left.\frac{\partial f(a|\mathbf{z})}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}}=0, \quad \left.\frac{\partial\, ln\, f(\mathbf{z}|a)}{\partial a}+\frac{\partial\, ln\, f(a)}{\partial a}\right|_{a=\hat{a}_{MAP}}=0.$$

Most $f(A)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_A}e^{-\frac{(A-\mu_A)^2}{2\sigma_A^2}}$, $f(\mathbf{z}|A)=\frac{1}{(2\pi\sigma_w^2)^{\frac{N}{2}}}e^{-\frac{1}{2\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)^2}$, amiből

$$\frac{\partial\, ln\, f(A)}{\partial A}=-\frac{A-\mu_A}{\sigma_A^2},\quad \frac{\partial\, ln\, f(\mathbf{z}|A)}{\partial A}=\frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right).\quad \frac{1}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)-\left.\frac{A-\mu_A}{\sigma_A^2}\right|_{\hat{A}_{MAP}}=0$$

$$\hat{A}_{MAP}=\frac{\mu_A+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}z(k)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)},$$

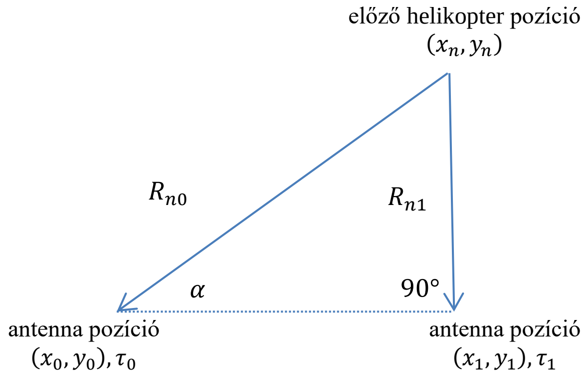
$$var\{\hat{A}_{MAP}\}=E\left\{\left(\hat{A}_{MAP}-A\right)^2\right\}=E\left\{\left(\frac{\mu_A+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}z(k)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)-A-A\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)^2\right\}=$$

$$=E\left\{\left(\frac{\mu_A-A+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}\left(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)cos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}\right)^2\right\}=\frac{E\{(\mu_A-A)^2\}+\frac{\sigma_A^4}{\sigma_w^4}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)E\left\{\left(z(k)-Acos\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right)^2\right\}}{\left[1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]^2}=$$

$$=\frac{\sigma_A^2+\frac{\sigma_A^4}{\sigma_w^4}\sum_{k=0}^{N-1}\sigma_w^2cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}{\left[1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)\right]^2}=\frac{\sigma_A^2}{1+\frac{\sigma_A^2}{\sigma_w^2}\sum_{k=0}^{N-1}cos^2\left(\frac{2\pi}{N}k\right)}$$

Mivel a sűrűségfüggvény szimmetrikus, ezért $\hat{A}_{MAP}=\hat{A}_{MS}$.

6. Helikoptert követünk két földi mérőállomással. A robotpilóta fixen tartja a vízszintes irányú pozíciót, mert a helikopter emelési feladatot lát el, tehát csak a magasság változás becslését kell megoldanunk. A probléma megoldásához az előadáson megismert összefüggések a következők:



$$R_k(x_s,y_s)=\sqrt{(x_s-x_k)^2+(y_s-y_k)^2}$$
$$t_k=T_0+\frac{R_k}{c}+w_k, k=0,1,\cdots,N-1,$$

ahol t_k a vételi időpont, T_0 az üzenetküldés időpontja, c a terjedési sebesség, w_k nulla várható értékű, σ_w^2 varianciájú zaj, melynek mintái korrelálatlanok. $\boldsymbol{a}=[x_s \quad y_s]^T$. Feltételezzük, hogy – például az előző mérés eredményeként – rendelkezésre állnak egy, az ismeretlenhez közeleső pozíció x_n, y_n és $R_{nk}, k=0,1,\cdots,N-1$, adatai.

$$R_k\cong R_{nk}+\left.\frac{\partial R_k}{\partial x_s}\right|_{x_s=x_n}\delta x_s+\left.\frac{\partial R_k}{\partial y_s}\right|_{y_s=y_n}\delta y_s=R_{nk}+cos(\alpha_k)\delta x_s+sin(\alpha_k)\delta y_s,$$

$$t_k=T_0+\frac{R_{nk}+cos(\alpha_k)\delta x_s+sin(\alpha_k)\delta y_s}{c}+w_k, k=0,1,\cdots,N-1.$$

Itt R_{nk}/c minden antenna pozícióban is mert konstans, ezért a továbbiakban bevezethetjük:

$$\tau_k = t_k - \frac{R_{nk}}{c} = T_0 + \frac{cos(\alpha_k)\delta x_s + sin(\alpha_k)\delta y_s}{c} + w_k, k = 0,1,\cdots,N-1.$$

Egy további transzformációval azonban T_0 kiiktatható: ez az érkezési idők különbsége (time difference of arrivals: TDOA) módszer. Képezzük a következő különbségeket:

$$z_k = \tau_k - \tau_{k-1} = \frac{[cos(\alpha_k) - cos(\alpha_{k-1})]\delta x_s + [sin(\alpha_k) - sin(\alpha_{k-1})]\delta y_s}{c} + [w_k - w_{k-1}],$$

$$k = 1,\cdots,N-1.$$

$$\boldsymbol{z} = \frac{1}{c}\begin{bmatrix} cos(\alpha_1) - cos(\alpha_0) & sin(\alpha_1) - sin(\alpha_0) \\ \vdots & \vdots \\ cos(\alpha_{N-1}) - cos(\alpha_{N-2}) & sin(\alpha_{N-1}) - sin(\alpha_{N-2}) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} + \boldsymbol{w'} = \boldsymbol{U a'} + \boldsymbol{w'},$$

$$\boldsymbol{w'} = \begin{bmatrix} w_1' \\ \vdots \\ w_{N-1}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} w_0 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix} = \boldsymbol{Aw}, \qquad \boldsymbol{C_{w'}} = E[\boldsymbol{Aww'A}^T] = \sigma_w^2[\boldsymbol{AA}^T].$$

$$\widehat{\boldsymbol{a}}' = \begin{bmatrix}\delta x_s \\ \delta y_s\end{bmatrix} = [\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{z}, \ \boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = \sigma_w^2[\boldsymbol{U}^T[\boldsymbol{AA}^T]^{-1}\boldsymbol{U}]^{-1}.$$

Aktualizálja a fenti összefüggéseket az ábra szerinti esetre, és becsülje meg a függőleges irányú elmozdulás értékét és szórását, ha $\sigma_w = 0.05\mu s$, $z_1 = -0.5\mu s$ és $\alpha = 30°$ (max. 4 pont)! Milyen további információra van szükségünk ahhoz, hogy a repülőgép tényleges magasságát is meg tudjuk határozni? (max. 1 pont)

Megoldás: $\boldsymbol{U} = \frac{1}{c}[sin(90°) - sin(30°)] = \frac{1}{2c}$, $\boldsymbol{A} = [-1 \quad 1]$, $\boldsymbol{AA}^T = 2$, $\boldsymbol{C_{w'}} = 2\sigma_w^2$, $\hat{a}' = \widehat{\delta y_s} = 2cz_1 = -300m$
$\boldsymbol{C}_{\widehat{\boldsymbol{a}}'} = 8c^2\sigma_w^2$, $\sqrt{var(\hat{a}')} = 15 * 2\sqrt{2} \cong 42{,}43m$. A mérőállomások földrajzi távolságának ismerete szükséges.

7. A mért adatainkról feltételezzük, hogy felírhatók: $y_n = a_0 + a_1 u_n + w_n, n = 0,1,\dots,N-1$; ill. vektorokkal-mátrixokkal $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{Ua} + \boldsymbol{w}$ formában. Határozza meg a paraméterek legkisebb négyzetes hibájú (LS) becslőjének összefüggését és annak számértékét, ha $\sum_{n=0}^{N-1} u_n = 0$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 = 100$, $\sum_{n=0}^{N-1} y_n = 5$, $\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n = 100$, $N = 10$ (max. 4 pont)!

Megoldás:

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & u_0 \\ 1 & u_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & u_{N-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_0 \\ w_1 \\ \vdots \\ w_{N-1} \end{bmatrix},$$

$$[\boldsymbol{U}^T\boldsymbol{U}] = \begin{bmatrix} N & \sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n & \sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 \end{bmatrix}, \boldsymbol{U}^T\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} \sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_0 \\ \hat{a}_1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 - \left(\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n\right)^2}\begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n^2 & -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n \\ -\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} y_n \\ \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} u_n y_n \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0.5 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1 \end{bmatrix}$$